DCA – CT – UFRN

COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Lista de Exercícios 01

https://www.dca.ufrn.br/~lmarcos/courses/compgraf/exercicios/ex1.html

Questão 1: O que você entende por Computação Gráfica?

R: A Computação Gráfica se trata de uma sub-área da Ciência da computação que estuda a geração de imagens por meio de computadores.

Questão 2: Quais são consideradas as três principais sub-áreas da computação gráfica? Explique cada uma delas suscintamente.

R: Temos três principais sub-áreas da computação gráfica. São elas:

- **Processamento de Imagens (PI)**: o **Processamento de Imagens (PI)** envolve as técnicas de transformação de imagens em que tanto a imagem de entrada quanto a imagem de saída apresentam-se sob uma representação visual. Essas transformações visam, em geral, melhorar as características visuais da imagem, como o aumento do contraste, melhoria no foco e a redução de ruídos e distorções.
- **Análise de Imagens (VC)**: a **Análise de Imagens (VC)** busca obter a especificação dos componentes de uma imagem (forma e outras características de componentes da cena) a partir de sua representação visual. um exemplo disso pode ser a extração de caractecisticas a partir de uma cena para a 'visão' de um robo.
- **Síntese de Imagens (CG)**: a **Síntese de Imagens (CG)** ocupa-se da produção de representações visuais a partir das especificações geométricas e visuais de seus componentes. É uma das sub-áreas mais difundidas e geralmente confundida com a própria computação gráfica em sí. Um bom exemplo para o uso seria a area de CAD (design) onde temos o uso da síntese de imagens.

Questão 3: O que é uma base vetorial? Quais os requisitos necessários para se ter uma base vetorial?

R: Uma base vetorial é um conjunto de *'n'* vetores linearmente independentes entre sí, cuja combinação linear leva a qualquer lugar do espaço considerado, isto é, varre o espaço. Para se ter uma base vetorial, os vetores não precisam ser ortogonais entre sí e nem possuir norma 1.

Questão 4: Qual a diferença básica entre mapeamento e transformação? Para que isso é usado em Computação Gráfica?

R: Função (ou mapeamento) é definida por uma expresão que a cada dado apresentado retorna um único valor (escalar). Já transformação, é definida por uma expresssão onde o resultado é um vetor.

Questão 5: O que é um referencial?

R: Um referencial, é um sistema de coordenadas que fornece uma estrutura de referência para descrever posições, direções e movimentos de objetos no espaço.

Questão 6: Explique o que é uma transformação linear? E uma transformação afim?

R: Uma transformação linear é uma função entre dois espaços vetoriais que preserva dois axiomas; a adição vetorial e a multiplicação por escalar. Uma transformação afim é uma função entre dois espaços afins que preserva a estrutura de afinidade, ou seja, preserva a relação entre pontos colineares.

Questão 7: Quais as transformações 3D mais comuns? Coloque também a representação de cada uma em forma matricial.

R: Escala, rotação e translação.

- Escala:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Rotação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- Translação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$$

Questão 8: O que são coordenadas homogêneas? O que são transformações homogêneas? Represente a notação para uma transformação homogênea genérica em 3D, em sua forma matricial.

R: Coordenadas homogêneas são uma forma de representar pontos em um espaço *n-dimensiona*l usando coordenadas adicionais para representar as dimensões do espaço *n+1*.

Transformações homogêneas são transformações lineares que preservam as relações de proporção entre pontos em um espaço *n-dimensiona*l, representadas por matrizes homogêneas.

A notação para uma transformação homogênea genérica em 3D, em sua forma matricial, é representada por uma matriz 4x4. Esta matriz é uma combinação de uma matriz de rotação, uma matriz de escala e um vetor de translação.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Onde:

- R é uma matriz 3x3 que representa a rotação e a escala.
- T é um vetor coluna de 3 elementos que representa a translação.
- A última linha e a última coluna contêm zeros, exceto para o elemento no canto inferior direito, que é 1.

Questão 9: Dado o ponto P1=(2,1,1), calcule o ponto P2, rotacionado de 60 graus em torno de X, 45 graus em torno de Y e 30 graus em torno de Z, tudo em relação ao mesmo referencial (calcule as novas coordenadas do ponto P2 no espaço).

R:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sendo P_2,

$$P_2 = R \cdot P_1$$

Para R definido por,

$$R = R_z \cdot R_y \cdot R_x$$

Onde,

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60°) & -sin(60°) \\ 0 & sin(60°) & cos(60°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_y = \begin{bmatrix} cos(45°) & 0 & sin(45°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(45°) & 0 & cos(45°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_z = \begin{bmatrix} cos(30°) & -sin(30°) & 0 \\ sin(30°) & cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Portanto, P_2 será

$$P_2 = R \cdot P_1$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{3-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} & \frac{1-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}+3+\sqrt{6}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{5\sqrt{6}+5+\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.243 \\ 0.874 \\ -0.448 \end{bmatrix}$$

Questão 10: Aplique uma translação de (+3, -4, +5) no resultado da questão anterior.

R:

$$P_3 = P_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.243 \\ -3.126 \\ 4.551 \end{bmatrix}$$

Questão 11: Repita os dois exercícios anteriores, combinando as matrizes e vetores usados em uma transformação homogênea única.

R:

$$R = \begin{bmatrix} cos(30°) & -sin(30°) & 0 \\ sin(30°) & cos(30°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos(45°) & 0 & sin(45°) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(45°) & 0 & cos(45°) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60°) & -sin(60°) \\ 0 & sin(60°) & cos(60°) \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.28 & 0.74 \\ 0.35 & 0.74 & -0.57 \\ -0.7 & 0.61 & 0.35 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$P_2 = R \cdot P_1$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.61 & 0.28 & 0.74 \\ 0.35 & 0.74 & -0.57 \\ -0.7 & 0.61 & 0.35 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.243 \\ -3.126 \\ 4.552 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questão 12: O que você entende por ângulos de Euler?

R: Se trata de uma maneira convencional de descrever uma orientação de um corpo rígido.

Questão 13: Descreva suscintamente como se representa uma rotação por quaternios.

R: Um quaterino é um número que possui três partes imaginárias e uma parte real. Por exemplo:

$$q \; = \; xi + yj + zk + r$$

Devido suas propriedades, existe uma relação entre um quaternio q e uma matriz de rotação R.

$$R = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + r & 2(xy(-r)z & 2(xy + ry) \\ 2(xy + rz) & -x^2 + y^2 - z^2 + r & yz - rx \\ 2(xz - ry) & 2(yz + rx) & -x^2 - y^2 + z^2 + r \end{bmatrix}$$

Questão 14: Dadas as matrizes A, B, C, D e E e o ponto P, como seria a transformação única que representa a combinação da sequencia de transformações A aplicada a P, depois B aplicada ao resultado disso e assim sucessivamente até E aplicado ao resultado das operações anteriore, numa única matriz?

R: Caso seja possível realizar a multiplicação entre as matrizes então,

$$E[D(C[B(A \times P)])] = (E \times D \times C \times B \times A)P$$

Questão 15: Especifique a matriz que descreve uma rotação de 30 graus em torno do eixo (1,1,1). Aplique a tranformação definida pela matriz anterior sobre o ponto (-1,1,1), ou seja, calcule o ponto resultante, e translade este novo ponto resultante pelo vetor (1,1,1). Faça o mesmo usando uma única matriz para descrever todas as transformações realizadas (sugestão: use coordenadas homogêneas).

R:

$$R_{k,\theta} = \begin{bmatrix} k_x^2(1-cos(\theta)) + cos(\theta) & k_xk_y(1-cos(\theta) - k_zsin(\theta) & k_xk_y(1-cos(\theta)) + k_ysin(\theta) \\ k_xk_y(1-cos(\theta) + k_zsin(\theta) & k_y^2(1-cos(\theta) + cos(\theta) & k_yk_z(1-cos(\theta) - k_xsin(\theta) \\ k_xk_z(1-cos(\theta) - k_ysin(\theta) & k_yk_z(1-cos(\theta) + k_xsin(\theta) & k_z^2(1-cos(\theta) + cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Para $\theta = 30°,\ k = (1,1,1)$, então temos:

$$R_{(1,1,1),\,30°} = \begin{bmatrix} (1-cos(30°)) + cos(30°) & (1-cos(30°) - sin(30°) & (1-cos(30°)) + sin(30°) \\ (1-cos(30°) + sin(30°) & (1-cos(30°) + cos(30°) & (1-cos(30°) - sin(30°) \\ (1-cos(30°) - sin(30°) & (1-cos(30°) + sin(30°) & (1-cos(30°) + cos(30°) \end{bmatrix}$$

$$R_{(1,1,1),\,30°} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{1} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{1} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{1-\sqrt{3}}{1} & 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{3-\sqrt{3}}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Questão 16: Desafio: Dada a matriz de rotação cujos vetores linha são dados por (001), (1,0,0) e

(0,1,0), encontre o eixo e o ângulo de rotação.

R:

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{R_{1,1} + R_{2,2} + R_{3,3} - 1}{2}\right)$$

$$R_x = \frac{R_{3,2} - R_{2,3}}{2sin(\theta)},\ R_y = \frac{R_{1,3} - R_{3,1}}{2sin(\theta)},\ R_z = \frac{R_{2,1} - R_{1,2}}{2sin(\theta)}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{0 + 0 + 0 - 1}{2}\right) = 120°$$

$$K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2sin(120°)} \\ \frac{1}{2sin(120°)} \\ \frac{1}{2sin(120°)} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$