



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES  
CÁTEDRA DE SISTEMAS DE CONTROL I

**TRABAJO FINAL INTEGRADOR:**

**“Sistema de Control de velocidad del motor de un Tocariscos”**

Integrantes:

Apellido y nombre	Matrícula	Dirección de correo electrónico académico
Mendes Rosa, Agustín	44517201	agustinmendesrosa@mi.unc.edu.ar
Monja, Ernesto Joaquín	43873728	ernesto.monja@mi.unc.edu.ar

Profesores: Ing. Adrián Agüero, Ing. Juan P. Pedroni

Año 2025

# Índice

1) Introducción.....	2
2) Desarrollo.....	2
2.1) Definición del problema .....	2
2.2) Análisis de la planta.....	4
2.2.1) Modelado matemático.....	4
2.2.2) Cálculo de la función de transferencia de la planta.....	8
2.2.3) Función de transferencia del sensor.....	11
2.2.4) Análisis de estabilidad absoluta y dominancia de polos.....	11
2.2.5) Respuesta temporal del sistema.....	12
2.2.6) Error en estado estable.....	13
2.3) Especificaciones de diseño.....	15
2.3.1) Error en estado estable.....	15
2.3.2) Sobrepasamiento máximo.....	15
2.3.3) Tiempo de establecimiento.....	15
2.4) Diseño del controlador.....	16
2.4.1) Elección del tipo de controlador.....	16
2.4.2) Determinación del tiempo de integración $T_i$ .....	16
2.4.3) Análisis de estabilidad por Routh-Hurwitz.....	17
2.4.4) Lugar de raíces y definición de $K_p$ .....	18
2.4.5) Realizabilidad práctica del controlador.....	20
2.5) Simulación del sistema compensado.....	20
2.5.1) Respuesta temporal del sistema compensado.....	20
2.5.2) Error en estado estable del sistema compensado.....	21
3) Conclusión.....	23
4) Bibliografía.....	24
5) Anexo.....	25

## **1) Introducción**

Para este Trabajo Final Integrador, se eligió modelar un tocadiscos el cual cuenta con un motor de corriente continua defectuoso al que se desea corregir su funcionamiento para mejorar la calidad del sonido.

Para ello, se brindó una solución mediante el estudio del comportamiento del equipo en cuestión, la definición de un modelo matemático, la elección y diseño de un sistema de control adecuado y la simulación del conjunto para verificar su correcto funcionamiento.

## **2) Desarrollo**

### **2.1) Definición del problema**

Un tocadiscos es un sistema de reproducción de audio analógico, que cuenta con un motor de corriente continua para hacer girar al plato del equipo y al disco que se encuentra montado. Los discos cuentan con surcos sobre su pista, y al pasar una aguja se captan las vibraciones para transformarlas en señales eléctricas que se amplifican para emitir la señal.



**FIGURA 1:** Tocabiscos genérico.

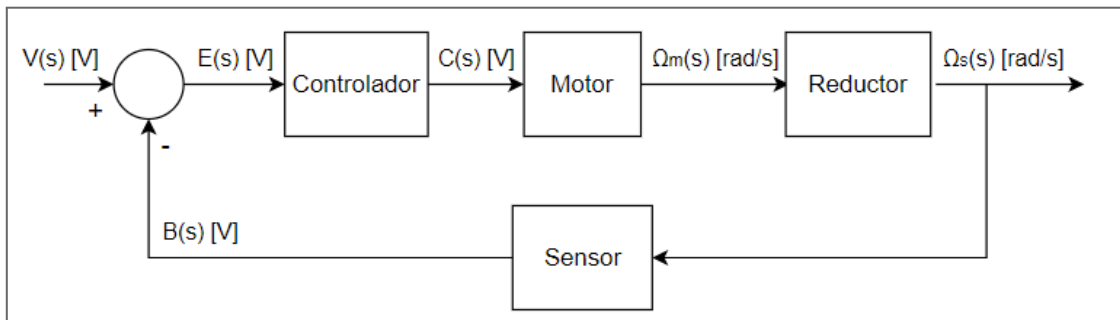
La velocidad estándar que manejan los tocadiscos es de  $33 \text{ y } 1/3 \text{ [rpm]}$ <sup>1</sup>, sin embargo para este Trabajo Final de Integración, se plantea un motor defectuoso que solo alcanza una velocidad de  $30 \text{ [rpm]}$ , lo cual puede deberse a suciedad acumulada o mala lubricación de su eje.

En este informe se buscó desarrollar un modelo matemático que permita estudiar el motor de CC de un tocadiscos para luego, y en base a los datos de un motor genérico para tocadiscos, poder estudiar y corregir su comportamiento en el dominio del tiempo.

---

<sup>1</sup> Imagen e información obtenida de: <https://es.wikipedia.org/wiki/Tocabiscos>

El diagrama en bloques que fue puesto en estudio y consideración para este sistema es el siguiente:



**FIGURA 2:** Diagrama de bloques del sistema compensado.

A continuación se presenta una tabla que resume la representación de los símbolos del diagrama de bloques:

Bloque		Variable	
<i>Motor</i>	Representa el motor de CC del tocadiscos	$V(s)$	Tensión de alimentación
<i>Reductor</i>	Representa la caja reductora de velocidad para el motor	$E(s)$	Señal de error
<i>Sensor</i>	Representa un sensor de velocidad o “tacómetro” que mide la señal de salida para compararla con la entrada	$C(s)$	Variable de control
<i>Controlador</i>	Representa el sistema de control que se agrega al funcionamiento del motor para efectuar los ajustes necesarios	$\Omega_m(s)$	Velocidad de salida del motor
		$\Omega_s(s)$	Velocidad de salida del sistema
		$B(s)$	Variable realimentada

**TABLA 1:** Definición de parámetros.

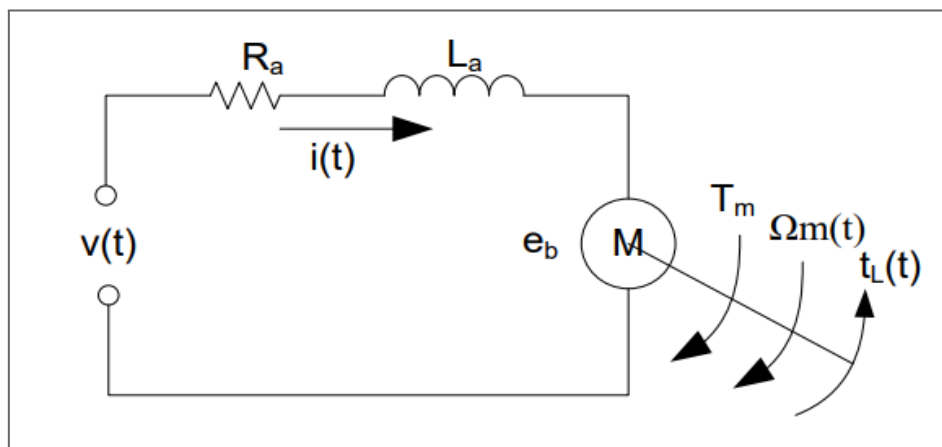
En cuanto a las perturbaciones existentes se consideró el par de torsión que genera el plato giratorio junto con el disco. Este par de torsión se le conoce como “Par de carga” la cual será desarrollada en el modelado matemático de la planta.

## 2.2) Análisis de la planta

### 2.2.1) Modelado matemático

Como se mencionó anteriormente, se cuenta con un motor de CC seguido de una caja reductora que reducirá la velocidad angular del motor para poder llegar a las 33 y 1/3 [rpm]. El modelado matemático de esta caja reductora consiste simplemente en un amplificador de ganancia menor a 1 la cual se denominó  $K_{CR}$ .

Respecto al motor de CC, se tiene que su diagrama circuital es el siguiente:



**FIGURA 3:** Diagrama circuital de un motor de corriente continua.<sup>2</sup>

Donde se definen a:

- $v(t)$ : Tensión de alimentación [V].
- $i(t)$ : Corriente que circula por la armadura [A].
- $R_a$ : Resistencia de la armadura [ $\Omega$ ].
- $L_a$ : Inductancia de la armadura [H].
- $e_b(t)$ : Fuerza contraelectromotriz [V].
- $T_m(t)$ : Par del motor [N. m].
- $\omega_m(t)$ : Velocidad angular del motor [ $\frac{rad}{s}$ ].
- $T_L(t)$ : Par de carga [N. m].

<sup>2</sup> Imagen tomada de la Guía de Ejercicios Prácticos del Ing. Juan Pablo Pedroni; pág. 28.

Se buscó relacionar cómo varía la velocidad angular del motor (como salida) respecto de la tensión de alimentación (como entrada), utilizando las ecuaciones que rigen el sistema. Observando el diagrama circuital, se tiene que la ecuación circuito de la malla es:

$$v(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + e_b(t) \quad (1)$$

Se tiene que la fuerza contraelectromotriz  $e_b(t)$  del motor se puede definir como:  $e_b(t) = K_b \omega_m(t)$  donde  $K_b$  es la constante de la fuerza contraelectromotriz. Por lo tanto, reemplazando en (1) se tiene que:

$$v(t) = R_a i(t) + L_a \frac{di(t)}{dt} + K_b \omega_m(t)$$

Y despejando la derivada de mayor orden, se obtiene:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} v(t) - \frac{R_a}{L_a} i(t) - \frac{K_b}{L_a} \omega_m(t) \quad (2)$$

Luego, se tiene que el par del motor es igual a la siguiente expresión:

$$T_m(t) = J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) + T_L(t)$$

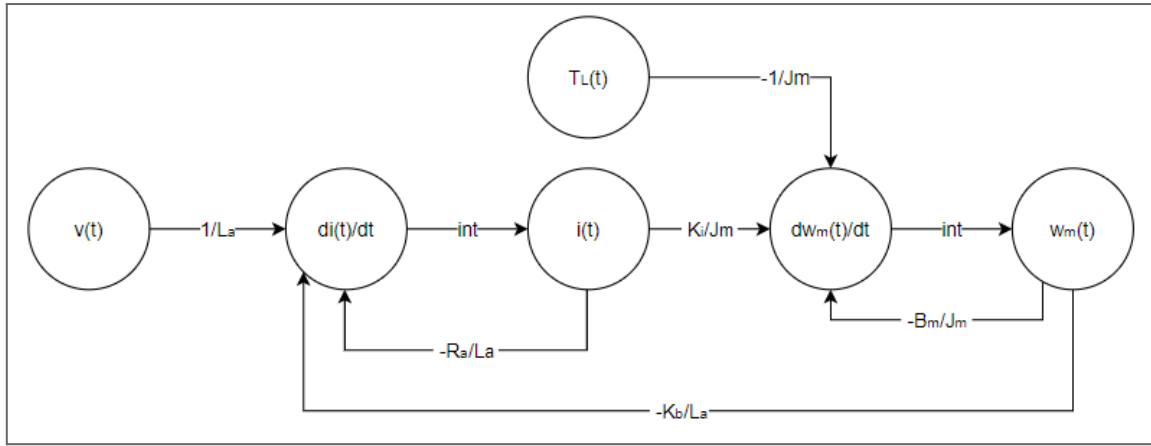
De esta expresión se define a  $B_m$  como el coeficiente de fricción viscosa y a  $J_m$  como el momento de inercia del motor. Se cumple para un motor de CC que  $T_m(t) = K_i i(t)$ , donde  $K_i$  se define como la constante del par.<sup>3</sup> Teniendo lo anterior en cuenta, y nuevamente despejando la derivada de mayor orden, se tiene que:

$$\frac{d\omega_m(t)}{dt} = \frac{K_i}{J_m} i(t) - \frac{B_m}{J_m} \omega_m(t) - \frac{1}{J_m} T_L(t) \quad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3), permitieron armar el siguiente diagrama de flujo:

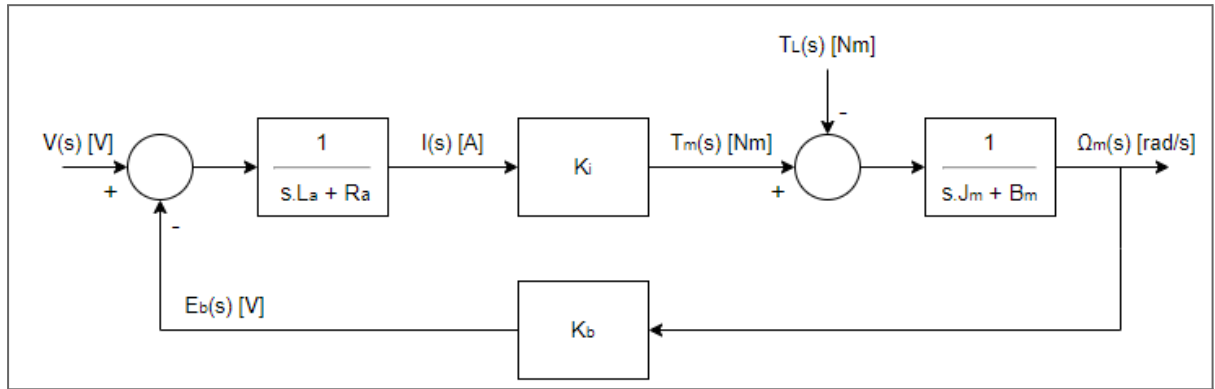
---

<sup>3</sup> Tomado de: Sistemas de Control Automático de Benjamin Kuo; pág. 177.



**FIGURA 4:** Diagrama de flujo de un motor de corriente continua.

Con este diagrama de flujo, fue posible construir el correspondiente diagrama de bloques del motor de CC con sus respectivas unidades, que corresponden al bloque *Motor* del sistema total:



**FIGURA 5:** Diagrama de bloques de un motor de corriente continua.

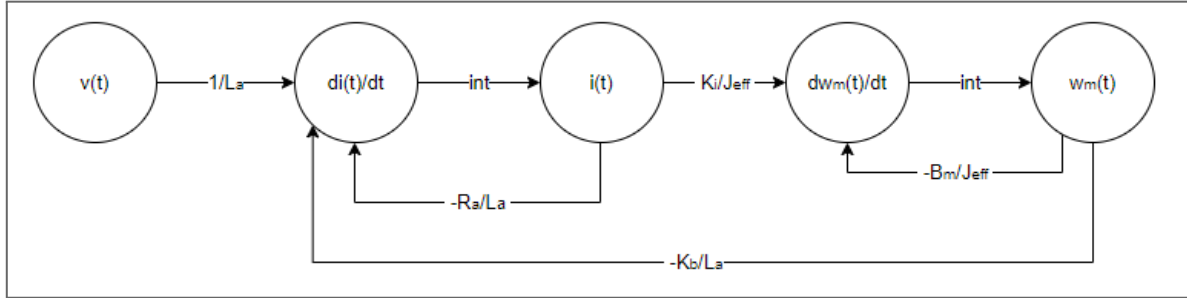
En este diagrama de bloques, se puede apreciar un sistema que cuenta con 2 entradas, en los cuales se habituó despreciar el efecto de la carga e igualar  $T_L(t) = 0$  para obtener la función de transferencia que se mencionó anteriormente. En este caso se optó por no despreciar el efecto de la carga, ya que el tocadiscos requiere de un plato giratorio y un disco para funcionar como es debido, y por lo tanto su mismo peso generará un par de carga, que de ser despreciado, no se modelaría correctamente el sistema.

Por lo tanto, el efecto de la carga fue contemplado en el momento de inercia de la carga  $J_L$ , con el cual se pudo calcular un momento de inercia eficaz  $J_{eff}$  el cual se define como:

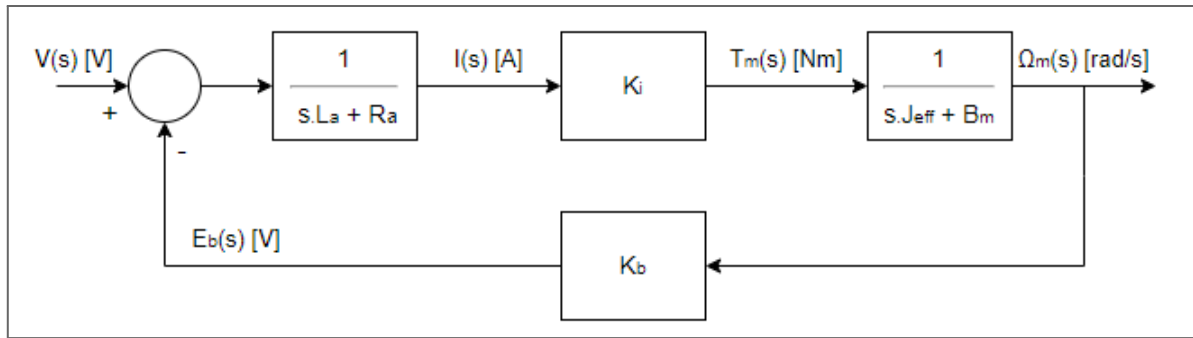
$$J_{eff} = J_m + \frac{\rho^2}{\eta} J_L \quad (4)$$

Donde  $\rho$  es el factor de reducción de la caja reductora y  $\eta$  es su rendimiento (no se tuvo en cuenta la variable  $\tau_g(t)$  que menciona la bibliografía referenciada debido a que el movimiento del sistema de un tocadiscos no genera efecto Coriolis).<sup>4</sup>

Este momento de inercia permitió considerar el efecto que tiene la carga sobre el motor y además conseguir un sistema de una única entrada y salida. Teniendo esto en cuenta, los diagramas de flujo y de bloques se ven como:



**FIGURA 6:** Diagrama de flujo del motor de corriente continua teniendo en cuenta  $J_{eff}$ .



**FIGURA 7:** Diagrama de bloques del motor de corriente continua teniendo en cuenta  $J_{eff}$ .

Con el diagrama de flujo se procedió a utilizar la regla de Mason para obtener la función de transferencia utilizando un código en Octave<sup>5</sup>, de modo tal que resultó:

$$\frac{\Omega_m(s)}{V(s)} = \frac{K_i}{(sJ_{eff} + B_m)(sL_a + R_a) + K_i K_b}$$

Por último, se tiene que la constante de la fuerza contraelectromotriz  $K_b$  es igual a  $K_i$  mientras se expresen en  $[\frac{N.m}{A}]$  y  $[\frac{V}{\frac{rad}{s}}]$  respectivamente, esto se deduce igualando las

<sup>4</sup> Tomado de: Modelado de un motor DC de Monasterio-Huelin, Gutiérrez & Larraga; págs. 40 y 41.

<sup>5</sup> Se incluye en el Anexo (1) el código en Octave para obtener esta función de transferencia.



expresiones de la potencia eléctrica y la potencia mecánica del motor. Para simplificar la notación se denomina a  $K_m = K_b = K_i$ .

Recordando además que se tiene en cascada el motor de CC junto a una caja reductora, la cual tiene de función de transferencia una constante denominada  $K_{CR}$ , se tiene que la función de transferencia total de la planta es la siguiente:

$$F(s) = \frac{\Omega_s(s)}{V(s)} = \frac{K_m K_{CR}}{(s J_{eff} + B_m)(s L_a + R_a) + K_m^2}$$

## 2.2.2) Cálculo de la función de transferencia de la planta

Una vez obtenida la función de transferencia del motor, se procedió a la búsqueda de un motor cuyo uso se implemente en tocadiscos. Se optó por utilizar los parámetros del motor DCX 22L de MAXON GROUP, el cual es utilizado para la aplicación de tocadiscos de alta gama. Este motor al operar en 12 [V] de alimentación, gira a 4000 [rpm] y mediante el uso de una caja reductora, se podrán alcanzar las 33 y 1/3 [rpm] deseadas.

Para alcanzar tal velocidad debe existir una relación de reducción de 120: 1 ya que:  $\frac{4000}{120} = 33 \text{ y } 1/3$ , por lo tanto se estableció que el bloque *Reductor* sea una ganancia:

$$K_{CR} = \frac{1}{120}$$

El motor DCX 22L cuenta según su hoja de datos<sup>6</sup> con las siguientes especificaciones:

- $L_a = 1,92 \times 10^{-4} [H]$
- $R_a = 1,84 [\Omega]$
- $K_m = 0,0229 [\frac{Nm}{A}]$
- $J_m = 9 \times 10^{-7} [kgm^2]$

Dado el modelo matemático que se decidió utilizar, fue necesario calcular el momento de inercia eficaz según la ecuación (4):

<sup>6</sup> Tomado de: [https://www.maxongroup.com/medias/sys\\_master/root/8846328463390/20-ES-91.pdf](https://www.maxongroup.com/medias/sys_master/root/8846328463390/20-ES-91.pdf)

$$J_{eff} = J_m + \frac{\rho^2}{\eta} J_L$$

Se tiene que  $\rho = \frac{1}{120}$  es el factor de reducción de la caja, y se asume un rendimiento ideal de  $\eta = 1$ . El momento de inercia de un disco plano es igual a la mitad de su masa total (se consideró a la masa del plato, del disco de vinilo y del reductor) multiplicado por el radio del disco al cuadrado, esto es:

$$J_L = \frac{1}{2} (m_{plato} + m_{disco} + m_{reductor}) r^2$$

La masa de la caja reductora que se tomó de ejemplo<sup>7</sup> es de 40 [g], mientras que la masa de un disco de vinilo genérico es de 140 [g] y un plato giratorio ronda alrededor de 1,5 [kg], sumado a que el radio de un disco es de 15 [cm],<sup>8</sup> se tiene que el momento de inercia de la carga es de:

$$J_L = \frac{1}{2} (1,5 + 0,14 + 0,04) (0,15)^2$$

$$J_L = 0,0189 [kg \cdot m^2]$$

Por lo tanto, resulta en que el momento de inercia eficaz es igual a:

$$J_{eff} = 9 \times 10^{-7} + \frac{(\frac{1}{120})^2}{1} (0,0189)$$

$$J_{eff} = 2,2125 \times 10^{-6} [kg \cdot m^2]$$

Respecto al coeficiente de fricción viscosa  $B_m$ , este se infiere mediante la aplicación del teorema del valor final de la salida del sistema, el cual dice que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_s(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \Omega(s)$$

Como se mencionó en el apartado 2.1), el sistema sin compensar tiene una velocidad de salida de 30 [rpm] y no 33 y 1/3 [rpm]. Por lo tanto, reemplazando en la expresión anterior y asumiendo una entrada escalón de 12 [V], se tiene que:

<sup>7</sup> Caja reductora de: <https://tienda.sawers.com.bo/motor-reductor-108rm>

<sup>8</sup> Tomado de: [https://es.wikipedia.org/wiki/Disco\\_de\\_vinilo](https://es.wikipedia.org/wiki/Disco_de_vinilo) y <https://es.wikipedia.org/wiki/Tocadiscos>

$$30 [rpm] = \lim_{s \rightarrow 0} s (V(s) \cdot F(s))$$

$$3,1416 \left[ \frac{rad}{s} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} s \left( \frac{12}{s} \frac{K_m K_{CR}}{(s J_{eff} + B_m)(s L_a + R_a) + K_m^2} \right)$$

$$3,1416 \left[ \frac{rad}{s} \right] = \frac{12 K_m K_{CR}}{(K_m^2 + B_m R_a)}$$

$$B_m = \frac{\frac{12 K_m K_{CR}}{3,1416} - K_m^2}{R_a} \simeq 1,1115 \times 10^{-4} \left[ \frac{Nm}{s} \right]$$

Una vez obtenidos todos los parámetros de  $F(s)$ , se introdujeron estos valores en un código en Octave<sup>9</sup>, y simplificando se obtuvo que:

$$F(s) = \frac{K_m K_{CR}}{(s J_{eff} + B_m)(s L_a + R_a) + K_m^2}$$

$$F(s) = \frac{K_m K_{CR}}{s^2 (J_{eff} L_a) + s (J_{eff} R_a + L_a B_m) + (K_m^2 + R_a B_m)}$$

$$F(s) = \frac{\frac{K_m K_{CR}}{J_{eff} L_a}}{s^2 + s \frac{(J_{eff} R_a + L_a B_m)}{J_{eff} L_a} + \frac{(K_m^2 + R_a B_m)}{J_{eff} L_a}}$$

$$F(s) = \frac{4,49231 \times 10^5}{s^2 + s(9,6336 \times 10^3) + 1,7159 \times 10^6}$$

Comparando esta expresión obtenida, con la forma genérica de una función de transferencia de 2do orden, fue posible encontrar los valores de parámetros que definen el comportamiento del sistema, tales como la frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n$ , el coeficiente de amortiguamiento  $\zeta$  o la ganancia estática  $K$ . Esto es:

$$F(s) = \frac{K \omega_n^2}{s^2 + s(2\zeta \omega_n) + \omega_n^2}$$

---

<sup>9</sup> Se incluye en el Anexo (2) el código en Octave para obtener esta función de transferencia.

$$\frac{K \cdot \omega_n^2}{s^2 + s(2\zeta \omega_n) + \omega_n^2} = \frac{449,2310 \times 10^3}{s^2 + s(9,6336 \times 10^3) + 1,7159 \times 10^6}$$

De donde se deduce que:

$$\omega_n = \sqrt{1,7159 \times 10^6} = 1309,9$$

$$\zeta = \frac{9,6336 \times 10^3}{2 \cdot \omega_n} = 3,6772$$

$$K = \frac{449,2310 \times 10^3}{\omega_n^2} = 0,2618$$

### 2.2.3) Función de transferencia del sensor

Se definió a  $K_t$  como la constante del tacómetro la cual surge de un desarrollo matemático<sup>10</sup> que define a la función de transferencia de un sensor simplemente como una ganancia, esto es:  $\frac{V_t(s)}{\Omega_s(s)} = K_t$ , donde  $V_t(s)$  es el voltaje de salida del tacómetro.

La constante  $K_t$  se infiere debido a que cuando la velocidad de salida del sistema alcance los  $33 \text{ y } 1/3 \text{ [rpm]}$ , la señal de error deberá ser 0, y dado que la entrada de alimentación es de  $12 \text{ [V]}$ , se deberá cumplir que  $V_t(s) = 12 \text{ [V]}$ , por lo tanto se tiene que:

$$K_t = \frac{12}{3,4906} = 3,43 \left[ \frac{\text{V}}{\frac{\text{rad}}{\text{s}}} \right]$$

### 2.2.4) Análisis de estabilidad absoluta y dominancia de polos

Se tiene que un sistema es estable, si sus polos se encuentran en el semiplano real negativo. Dado que  $\zeta > 1$ , se tiene que es un sistema sobreamortiguado y por lo tanto sus

---

<sup>10</sup> Tomado de: Sistemas de Control Automático de Benjamin Kuo; pág. 168.

polos son reales y distintos, los cuales se identificaron como  $s_1$  y  $s_2$ , y se obtuvieron mediante un código en Octave.<sup>11</sup> Sus valores son:

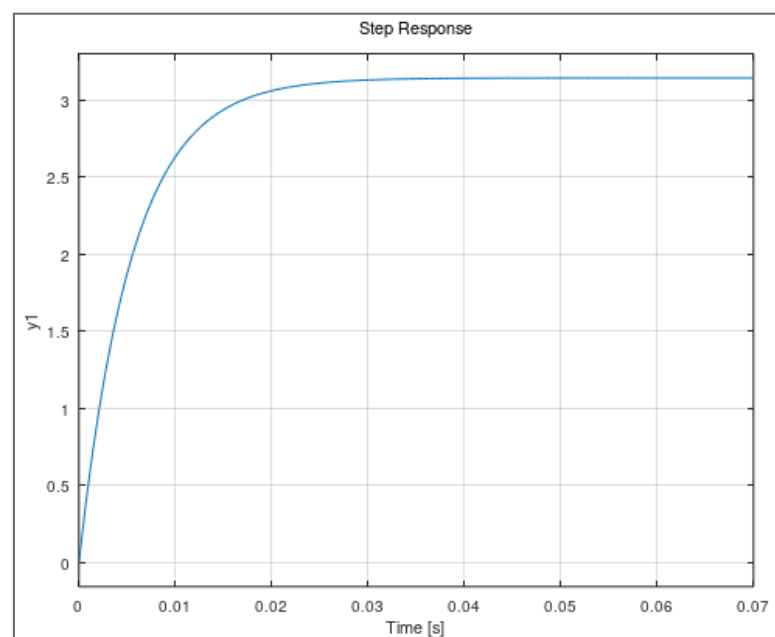
$$s_1 = -9452,03 \quad ; \quad s_2 = -181,54$$

Al confirmar que todos los polos tienen parte real negativa, quedó establecido que el sistema es estable.

Nótese que la distancia entre polos en el plano complejo es suficientemente grande para implicar una dominancia de polos. Dado que  $s_2$  es el polo dominante, se podría aproximar la función de transferencia del sistema a una de primer orden con mucha precisión, sin embargo no se optó por seguir este camino debido a que se aplicará la técnica de cancelación de polos dominantes para diseñar el controlador, y así obtener una mejor respuesta temporal.

### 2.2.5) Respuesta temporal del sistema

Se presenta a continuación la respuesta a un escalón de 12 [V] simulada con un código en Octave<sup>12</sup>:



**FIGURA 8:** Respuesta a una entrada escalón unitario para  $F(s)$ .

<sup>11</sup> Se incluye en el Anexo (3) el código en Octave para obtener polos de la planta.

<sup>12</sup> Se incluye en el Anexo (4) el código en Octave para este gráfico.

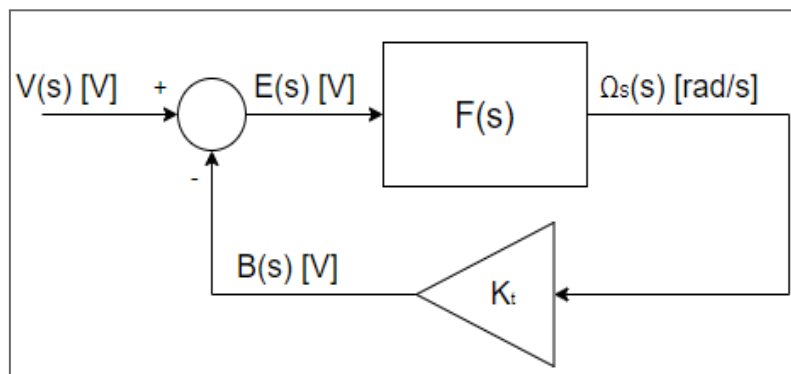
Observando el gráfico obtenido, se pudieron definir el valor de régimen ( $y_{ss}$ ) y el tiempo de establecimiento ( $t_s$ ), siendo este último el valor donde la salida alcanza el 98% del valor de régimen:

$$y_{ss} = 3,1416 \frac{rad}{s} = 30 [rpm]$$

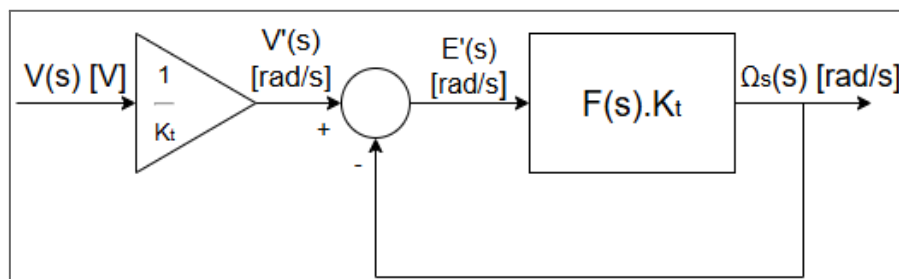
$$t_s = 22 [ms]$$

### 2.2.6) Error en estado estable

Dado que se determinó utilizar un sensor de velocidad (el tacómetro) y no una retroalimentación unitaria para la planta, se planteó un diagrama equivalente<sup>13</sup> para poder realizar el análisis de error en estado estable:



**FIGURA 9:** Diagrama de bloques del sistema sin compensar a lazo cerrado.



**FIGURA 10:** Diagrama de bloques equivalente al diagrama de la Figura (9).

Por lo tanto, la función de transferencia que se utilizó para evaluar el error en estado estable es:

<sup>13</sup> Tomado de: Ingeniería de Control Moderna (3er edición) - Ogata, Katsuhiko; pág. 68.

$$F(s).K_t = \frac{1,5446 \times 10^6}{s^2 + s(9,6336 \times 10^3) + 1,7159 \times 10^6}$$

Se determinó que el sistema es *Tipo 0*, debido a que la función de transferencia no tiene ningún polo ubicado en el origen, por lo que se anticipó encontrar un valor constante de error para una entrada de escalón, y un error con valor infinito para las entradas de rampa y parábola. Estas entradas fueron divididas por  $K_t$  para el análisis, debido a la equivalencia presentada en el diagrama de bloques anteriormente. Para definir el error en estado estable ( $e_{ss}$ ) se cumple:

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s. \frac{V'(s)}{1 + F(s).K_t}$$

Se procedió a calcular por código de Octave<sup>14</sup> el error en estado estable que genera una entrada de escalón unitario, de rampa unitaria y de parábola unitaria:

- Entrada escalón unitario:  $V(s) = \frac{1}{s} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s.K_t}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} F(s).K_t = 0,9 ; e_{ss-\text{escalón}} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{1 + K_p} = 0,1531$$

- Entrada rampa unitaria:  $V(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s^2.K_t}$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s).K_t = 0 ; e_{ss-\text{rampa}} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{K_v} = \infty$$

- Entrada parábola unitaria:  $V(s) = \frac{1}{s^3} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s^3.K_t}$

$$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2.F(s).K_t = 0 ; e_{ss-\text{parábola}} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{K_A} = \infty$$

---

<sup>14</sup> Se incluye en el Anexo (5) el código en Octave para el cálculo de los errores del sistema sin compensar.

### **2.3) Especificaciones de diseño**

Dada lo analizado anteriormente, se tiene que el motor del tocadiscos no alcanza la velocidad de  $33 \text{ y } 1/3 \text{ [rpm]}$  y este tiene un error en estado estable de valor constante para una entrada escalón lo cual no es deseado. Por lo tanto, para corregir su funcionamiento, se diseñó un controlador que cumpla las siguientes especificaciones:

#### **2.3.1) Error en estado estable**

El término denominado “*just-noticeable difference*” (*jnd*) define la mínima diferencia de frecuencia a la cual un cambio en la tonalidad de un sonido es percibida, y la velocidad de reproducción tiene incidencia directa en la tonalidad escuchada. El *jnd* para frecuencias menores a  $500 \text{ Hz}$  es de  $1 \text{ Hz}$ , esto equivale a un cambio de velocidad casi imperceptible para el oído humano<sup>15</sup>. Por otra parte y analizando lo visto en el apartado anterior, se tiene que dado que el sistema es *Tipo 0*, este tiene un error asociado constante para una entrada escalón, siendo esta la forma de la señal de alimentación. Por lo tanto, se decidió aumentar el tipo del sistema para que el error en estado estable para una entrada escalón sea 0, y así mantener una fiel reproducción del sonido.

#### **2.3.2) Sobrepasamiento máximo**

Se procuró mantener el sistema libre de oscilaciones, por lo que se determinó que el sobrepasamiento máximo sea de 0%, esto debió cumplir entonces que el sistema sea de amortiguamiento crítico, es decir que se cumpla  $\zeta = 1$  y así mantenga la respuesta más rápida posible sin generar oscilaciones.

#### **2.3.3) Tiempo de establecimiento**

La respuesta del sistema a lazo abierto posee un valor de tiempo de establecimiento extremadamente rápida, por lo que no fue una preocupación para el controlador el hecho de ajustar el tiempo de establecimiento para una respuesta aún más rápida.

---

<sup>15</sup> Tomado de Kollmeier, Birger; Brand, Thomas & Meyer, B. (2008). “Perception of Speech and Sound”. En “Springer Handbook of Speech Processing” por Benesty, Jacob; Sondhi, M. Mohan & Huang, Yiteng. pág. 65.



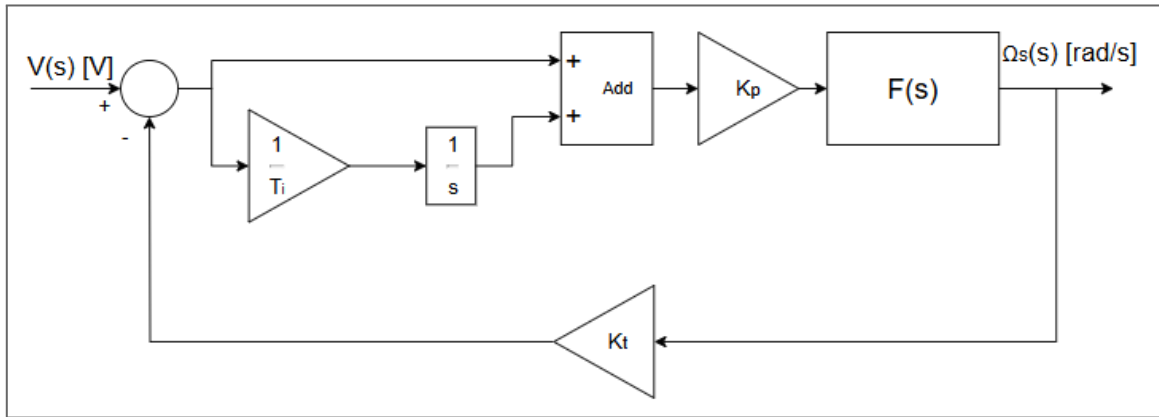
## 2.4) Diseño del controlador

### 2.4.1) Elección del tipo de controlador

Al ser necesario mejorar el error en estado estable y alcanzar 33 y 1/3 [rpm] de velocidad, se decidió usar un controlador Proporcional-Integrador, determinado por la siguiente función de transferencia:

$$PI(s) = \frac{K_p(s + \frac{1}{T_i})}{s}$$

Donde  $K_p$  es la ganancia proporcional y  $T_i$  es el tiempo de integración. El diagrama de bloques del sistema con el controlador  $PI(s)$  se presenta a continuación:



**FIGURA 11:** Diagrama de bloques del sistema compensado con el bloque *Controlador* expandido.

### 2.4.2) Determinación del tiempo de integración $T_i$

Se utilizó la técnica de cancelación de polos dominantes para establecer el valor del cero del controlador, ajustando  $T_i$  de forma que cancele el polo  $s_2 = -181,54$  para incrementar el tipo de sistema y adicionalmente disminuir el tiempo de establecimiento. Se dedujo entonces que:

$$\frac{1}{T_i} = 181,54$$

$$T_i = 5,5084 \times 10^{-3}$$

De esta manera, se pudo plantear la siguiente función de transferencia:

$$PI(s)F(s) = \frac{K_p(s + 181,54)}{s} \frac{4,4923 \times 10^5}{(s + 9452,03)(s + 181,54)}$$

$$PI(s)F(s) = \frac{K_p 4,4923 \times 10^5}{s(s + 9452,03)}$$

### 2.4.3) Análisis de estabilidad por Routh-Hurwitz

Las condiciones de estabilidad que plantea el análisis de Routh-Hurwitz<sup>16</sup> son las siguientes:

- Condición necesaria: Todos los coeficientes de la ecuación característica del sistema deben ser positivos y distintos de 0.
- Condición suficiente: Todos los elementos de la primer columna del arreglo de Routh-Hurwitz son positivos

Al haber definido todos los parámetros excepto la ganancia proporcional  $K_p$ , fue posible plantear el análisis de estabilidad relativa de Routh-Hurwitz para determinar el rango de valores de  $K_p$  para los cuales el sistema es estable, es decir, tiene todas las raíces de su ecuación característica en el semiplano real negativo. Se tiene que la función de transferencia del sistema compensado es:

$$F_C(s) = \frac{PI(s)F(s)}{1 + K_t PI(s)F(s)}$$

$$F_C(s) = \frac{\frac{K_p(4,4923 \times 10^5)}{s(s + 9452,03)}}{1 + (3,4384) \frac{K_p(4,4923 \times 10^5)}{s(s + 9452,03)}}$$

$$F_C(s) = \frac{K_p(4,4923 \times 10^5)}{s^2 + s(9452,03) + K_p(1,5446 \times 10^6)}$$

Por lo que se definió la ecuación característica del sistema como:

---

<sup>16</sup> Tomado de: Ingeniería de Control Moderna (3er edición) - Ogata, Katsuhiko; pág. 232.

$$s^2 + s(9452,03) + K_p(1,5446 \times 10^6) = 0$$

La cual cumple la condición necesaria, sin embargo para la condición suficiente se planteó el arreglo de Routh-Hurwitz para realizar el análisis:

$s^2$	1	$K_p(1,5446 \times 10^6)$
$s^1$	9452,03	—
$s^0$	$\frac{K_p(1,5446 \times 10^6)(9452,03)}{9452,03} = K_p(1,5446 \times 10^6)$	—

**TABLA 2:** Arreglo de Routh-Hurwitz para el sistema compensado.

El criterio de estabilidad plantea que el número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de la primera columna del arreglo, por lo que se puede afirmar que no habrá cambios de signo siempre y cuando se cumpla que  $0 < K_p < \infty$ .

Por lo tanto, gracias al análisis de estabilidad de Routh-Hurwitz realizado, fue posible determinar que el sistema es estable mientras  $K_p$  se mantenga en el rango indicado.

#### 2.4.4) Lugar de raíces y definición de $K_p$

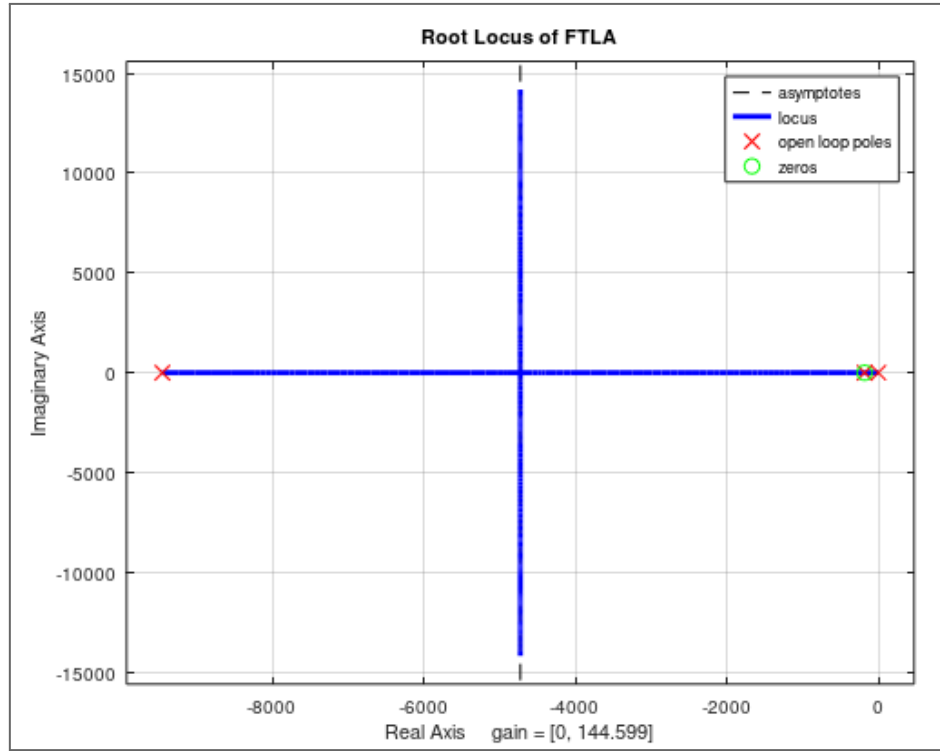
Mediante la utilización de un código en Octave<sup>17</sup> se determinó la función del sistema a lazo abierto  $FT_{LA}(s)$  para aplicar la técnica del Lugar de Raíces, en la cual se evalúa la ubicación de los polos del sistema a lazo cerrado según la variación de  $K_p$  para elegir el valor más adecuado:

$$FT_{LA}(s) = PI(s)F(s)K_t$$

$$FT_{LA}(s) = \frac{K_p(4,4923 \times 10^5)}{s(s + 9452,03)} (3,4384)$$

<sup>17</sup> Se incluye en el Anexo (6) el código en Octave para la obtención del gráfico del Lugar de Raíces.

$$FT_{LA}(s) = \frac{K_p (1,5446 \times 10^6)}{s(s + 9452,03)}$$



**FIGURA 12:** Lugar de Raíces de  $FT_{LA}$ .

Se observa que en el punto  $s = -4726$ , el sistema cuenta con dos raíces iguales y reales, lo que cumpliría el requisito de obtener un sistema críticamente amortiguado, obteniendo un sobrepasamiento máximo del 0%. Para cumplir este requisito, el código revela que el valor de la constante  $K_p$  debe ser igual a:

$$K_p = 14,46$$

Una vez definidos los valores de  $T_i$  y  $K_p$ , se concluyó el diseño del controlador PI y la función de transferencia del controlador quedó establecida como:

$$PI(s) = (14,46) \frac{(s + 181,54)}{s}$$

Se presenta la función de transferencia del sistema compensado:

$$F_c(s) = \frac{6,496 \times 10^6}{s^2 + s(9452,03) + (2,2335 \times 10^7)}$$

### 2.4.5) Realizabilidad práctica del controlador

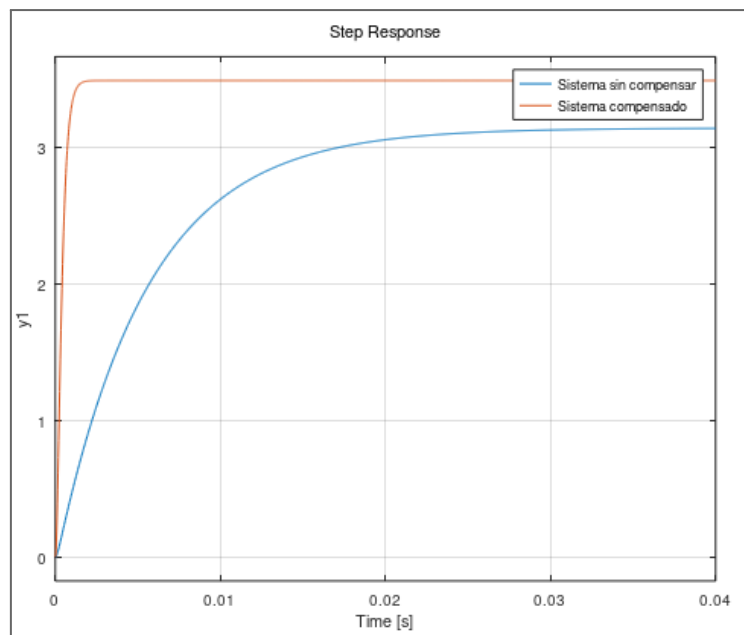
Dada la función de transferencia obtenida para el controlador PI, se analizó que sea factible la construcción del mismo mediante un circuito electrónico. Para ello se recurrió al análisis de Síntesis de Redes Pasivas, donde se verificó que la función de transferencia del controlador PI cumpliera las condiciones de realizabilidad para poder encontrar el arreglo de componentes electrónicos que permitan diseñar tal función de transferencia.

Este circuito cumple con las condiciones de realizabilidad de una función de transferencia del tipo  $Z_{RC}(s)$  o  $Y_{RL}(s)$  las cuales permiten utilizar la Primera Forma Canónica de Foster o la de Cauer.<sup>18</sup> Nótese que si bien es posible realizar tal desarrollo, este excede el objetivo de este Trabajo Final Integrador, sin embargo cabe la mención sobre que es factible su implementación para mejorar la respuesta del motor.

## 2.5) Simulación del sistema compensado

### 2.5.1) Respuesta temporal del sistema compensado

Tras el diseño del compensador, se simuló mediante un código en Octave<sup>19</sup>, la respuesta del sistema compensado y no compensando ante una entrada escalón de 12 [V]:



**FIGURA 13:** Comparación de respuestas a la entrada escalón de 12 [V]

<sup>18</sup> Tomado de Unidad N°7: Síntesis de Redes Pasivas de Enrique M. Lizárraga; Pág: 11.

<sup>19</sup> Se incluye en el Anexo (7) el código en Octave para comparar las respuestas temporales de los sistemas.

Fue posible verificar que la aplicación del controlador PI redujo el tiempo de establecimiento significativamente, y logró que el sistema se establezca en la velocidad deseada. De este gráfico fue posible deducir que:

$$y_{ss} = 3,4906 \left[ \frac{rad}{s} \right] = 33 \text{ y } 1/3 [rpm]$$

$$t_s = 1,2 [ms]$$

Según la función de transferencia  $F_c(s)$  se determinaron los siguientes parámetros:

$$\omega_n = \sqrt{8,2392 \times 10^3} = 4726$$

$$\zeta = \frac{181,54}{2 \cdot \omega_n} = 1$$

$$K = \frac{2,3962 \times 10^3}{\omega_n^2} = 0,29084$$

### 2.5.2) Error en estado estable del sistema compensado

Se tiene que la elección de un controlador PI, fue precisamente para aumentar el tipo de sistema, lo que conlleva a que este tenga un error en estado estable de valor 0 para una entrada tipo escalón.

Utilizando un código en Octave<sup>20</sup> se obtuvieron los siguientes errores que produce el sistema según las diferentes entradas:

- Entrada escalón unitario:  $V(s) = \frac{1}{s} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s \cdot K_t}$

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} PI(s) \cdot F(s) \cdot K_t = \infty ; e_{ss-\text{escalón}} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{1 + K_p} = 0$$

---

<sup>20</sup> Se incluye en el Anexo (8) el código en Octave para el cálculo de los errores del sistema compensado.

- Entrada rampa unitaria:  $V(s) = \frac{1}{s^2} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s^2 K_t}$

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot PI(s) \cdot F(s) \cdot K_t = 2363,1 ; e_{ss-rampa} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{K_V} = 1,2307 \times 10^{-4}$$

- Entrada parábola unitaria:  $V(s) = \frac{1}{s^3} \rightarrow V'(s) = \frac{1}{s^3 K_t}$

$$K_A = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \cdot PI(s) \cdot F(s) \cdot K_t = 0 ; e_{ss-parábola} = \frac{1}{K_t} \frac{1}{K_A} = \infty$$

Se verifica que fue posible cumplir la especificación de diseño del controlador de que el sistema compensado tenga un error en estado estable para una entrada escalón que sea igual a 0.

### **3) Conclusión**

Como se demostró a lo largo de este trabajo, se logró el resultado cometido de ajustar el funcionamiento del motor de un tocadiscos. Para ello se recurrió al modelado del motor de CC para obtener su función de transferencia, y luego a la parametrización de las constantes correspondientes de acuerdo a valores comerciales para este tipo de motores, seguido de un estudio de su estabilidad y error en estado estable para determinar cómo responde el sistema dadas distintos tipos de entrada.

Se verificó que el motor no alcanzaba la velocidad deseada de  $33 \text{ y } 1/3 \text{ [rpm]}$  y que además este tenía un cierto error en estado estable asociado a la entrada escalón, por lo tanto se diseñó un controlador PI para corregir su funcionamiento. Finalizado su diseño, se verificó que el controlador logró que el sistema alcance el valor de régimen deseado, tenga un error en estado estable nulo para la entrada escalón y de forma adicional, redujo considerablemente el tiempo de establecimiento.

La realización de este Trabajo Final de Integración permitió estudiar y aplicar los conceptos estudiados a lo largo de la asignatura, alentando a revisar detalladamente la bibliografía utilizada en clase y de esta manera verificar los desarrollos o encontrar nuevos caminos por los cuales guiar el avance del trabajo, para así diseñar y planificar un controlador adecuado el cual pueda compensar un sistema defectuoso.



#### **4) Bibliografía**

1. Información e imagen de Tocadiscos.
2. Imagen tomada de la Guía de Ejercicios Prácticos del Ing. Juan Pablo Pedroni; pág. 28.
3. Kuo, Benjamin C. (1996). “*Sistemas de Control Automático (7ma edición)*”. Editorial “Prentice-Hall”; pág. 177.
4. Monasterio-Huelin, Félix; Gutiérrez, Álvaro & Larraga, Blanca. (2024). “Modelado de un motor DC”; pág. 40.
5. Refiérase al Anexo (1).
6. Maxon Group. Hoja de datos DCX 22 L.
7. SGS. Caja Reductora.
8. Dimensiones y peso de plato y disco de vinilo.
9. Refiérase al Anexo (2).
10. Kuo, Benjamin C. (1996). “*Sistemas de Control Automático (7ma edición)*”. Editorial “Prentice-Hall”; pág. 168.
11. Refiérase al Anexo (3).
12. Refiérase al Anexo (4).
13. Ogata, Katsuhiko (1998). “*Ingeniería de Control Moderna (3ra edición)*”. Editorial “Pearson”; pág. 68.
14. Refiérase al Anexo (5).
15. Kollmeier, Birger; Brand, Thomas & Meyer, B. (2008). “*Perception of Speech and Sound*”. En “Springer Handbook of Speech Processing” por Benesty, Jacob; Sondhi, M. Mohan & Huang, Yiteng. pág. 65.
16. Ogata, Katsuhiko (1998). “*Ingeniería de Control Moderna (3ra edición)*”. Editorial “Pearson”; pág. 232.
17. Refiérase al Anexo (6).
18. Lizárraga, Enrique M. (2024). “*Unidad N°7: Síntesis de Redes Pasivas*”; pág. 11.
19. Refiérase al Anexo (7).
20. Refiérase al Anexo (8).

## 5) Anexo

(1) Código para obtener la función de transferencia por Regla de Mason:

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load symbolic;
syms Ra La Jeff Bm Ki Kb s real;

% Paso 1: Se tiene un solo camino directo, esto es: N = 1

% Paso 2: Se define al camino directo P1:
P1 = (1/La)*(1/s)*(Ki/Jeff)*(1/s);

% Paso 3: Se definen a los 3 lazos:
L1 = (1/s)*(-Ra/La);
L2 = (1/s)*(-Bm/Jeff);
L3 = (1/s)*(Ki/Jeff)*(1/s)*(-Kb/La);

% Paso 4: Se calcula el determinante:
D = 1 - (L1 + L2 + L3) + (L1*L2);

% Paso 5: Se calcula el Delta Lazo:
D1 = 1 - 0;

% Paso 6: Se Obtiene la función de transferencia:
Wm_V = simplify(P1*D1/D)
```

(2) Código para obtener numéricamente la función de transferencia:

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load symbolic;

syms s Jeff Bm La Ra Km Kcr real;

Jeff = 2.2125*10^(-6);
Bm = 1.1115*10^(-4);
La = 1.92*10^(-4);
Ra = 1.84;
Km = 0.0229;
Kcr = 1/120;

FdS = (Km*Kcr/(Jeff*La))/( s^2 + s*((Jeff*Ra + La*Bm)/(Jeff*La)) + (Km^2 + Ra*Bm)/(Jeff*La))
```

(3) Código para obtener los polos de la función de transferencia:

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load control;

s = tf('s');

Jeff = 2.2125*10^(-6);
Bm = 1.1115*10^(-4);
La = 1.92*10^(-4);
Ra = 1.84;
Km = 0.0229;
Kcr = 1/120;

FdS = (Km*Kcr/(Jeff*La))/( s^2 + s*((Jeff*Ra + La*Bm)/(Jeff*La)) + (Km^2 + Ra*Bm)/(Jeff*La))

pole(FdS)
```

(4) Código para ver la respuesta al escalón del sistema sin compensar

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load control;

s = tf('s');

Jeff = 2.2125*10^(-6);
Bm = 1.1115*10^(-4);
La = 1.92*10^(-4);
Ra = 1.84;
Km = 0.0229;
Kcr = 1/120;

FdS = (Km*Kcr/(Jeff*La))/( s^2 + s*((Jeff*Ra + La*Bm)/(Jeff*La)) + (Km^2 + Ra*Bm)/(Jeff*La))

step(12*FdS, 0.07)
```

(5) Código para obtener  $K_p$ ,  $K_v$  y  $K_a$  y error en estado estable del sistema sin compensar:

```
close all; clear all; history -c; clc;

pkg load symbolic;

syms s real
FdS = (4.492310*10^5)/(s^2 + s*9.6336*10^3 + 1.7159*10^6);
Kt = 3.4384;

Kp = Kt*FdS;
Kv = s*Kt*FdS;
Ka = s^2*Kt*FdS;
s = 0;
Kp = eval(Kp)
Kv = eval(Kv)
Ka = eval(Ka)

ess_escalon = 1/Kt*1/(1+Kp)
ess_rampa = 1/Kt*1/Kv
ess_parabola = 1/Kt*1/Ka
```

(6) Código para el diseño del controlador PI.

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load control;

s = tf('s');
FdS = (4.492310*10^5)/(s^2 + s*9.6336*10^3 + 1.7159*10^6)
Kt = 3.4384;

% Requerimientos: ess = 0 ; Ts minimo ; Mp = 0 (respuesta criticamente amort.)
% Se utiliza un compensador PI para cancelar el polo dominante, esto es:
Ti = 1/181.54;
PI = (s + 1/Ti)/s;
rlocus(minreal(PI*FdS*Kt))

% Para una respuesta criticamente amortiguada, se elige un punto donde las
% raices sean reales, negativas e iguales, por lo que segun el rlocus, este
% punto es:
s1 = -4726;
Kp = 1/abs((s1+1/Ti)/s1*Kt*(4.492310*10^5)/(s1^2 + s1*9.6336*10^3 + 1.7159*10^6))
PI = Kp*PI;
FdTLC = minreal(feedback(FdS*PI, Kt))
```

(7) Código para la simular la respuesta temporal del sistema:

```
close all; clear all; history -c; clc;
pkg load control;

s = tf('s');
FdS = (4.492310*10^5)/(s^2 + s*9.6336*10^3 + 1.7159*10^6)
Kt = 3.4384;

% Requerimientos: ess = 0 ; Ts minimo ; Mp = 0 (respuesta criticamente amort.)
% Se utiliza un compensador PI para cancelar el polo dominante, esto es:
Ti = 1/181.54;
PI = (s + 1/Ti)/s;
rlocus(minreal(PI*FdS*Kt))

% Para una respuesta criticamente amortiguada, se elige un punto donde las
% raices sean reales, negativas e iguales, por lo que segun el rlocus, este
% punto es:
s1 = -4726;
Kp = 1/abs((s1+1/Ti)/s1*Kt*(4.492310*10^5)/(s1^2 + s1*9.6336*10^3 + 1.7159*10^6))
PI = Kp*PI;
FdTLC = minreal(feedback(FdS*PI, Kt))

% Se verifican estos valores con:
pole(FdTLC) % Se ven los polos dobles en s = -4726
step(12*FdS, 12*FdTLC)
legend("Sistema sin compensar", "Sistema compensado")
```

(8) Código para obtener  $K_p$ ,  $K_v$  y  $K_A$  y error en estado estable del sistema compensado:

```
%Error en estado estable para sistema compensado
pkg load symbolic
syms s real
FdS = (4.49231*10^5)/(s^2 + s*9.6336*10^(-3) + 1.7159*10^6);
PI = 14.46*(s+181.54)/(s);
Kt = 3.4384;
Kp = FdS*PI*Kt;
Kv = s*FdS*PI*Kt;
Ka = s^2*FdS*PI*Kt;
s = 0;
Kp = eval(Kp)
Kv = eval(Kv)
Ka = eval(Ka)

ess_escalon = 1/Kt*(1/(1+Kp))
ess_rampa = 1/Kt*(1/Kv)
ess_parabola = 1/Kt*(1/Ka)
```