

Algorytmy numeryczne algebry

Sprawozdanie 1

1. Rozwiązać układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie wektor wyrazów wolnych $b = A * \text{ones}(n, 1)$ dwoma sposobami:

- zastosuj polecenie „\” z Matlaba do rozwiązania układu $Ax = b$,
- napisz własną realizację eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego tzn. napisz własną funkcję, której danymi są: n -stopień macierzy A , macierz A , wektor b . Wynikami są: obliczone za pomocą eliminacji Gaussa bez wyboru elementu głównego rozwiązanie układu $Ax = b$ oraz $\det(A)$, $\text{cond}(A)$.

Porównaj:

- czas obliczeń,
- błąd $\|x - \tilde{x}\|_2$
- błąd reszt $\|A\tilde{x} - b\|_2$

dla x - rozwiązania dokładnego, \tilde{x} - przybliżonego rozwiązania uzyskanego zadaną metodą.

Testy wykonać dla macierzy A różnego typu:

- macierzy Vandermonde’a korzystając z funkcji `vander`,
- macierzy Pascala korzystając z funkcji `pascal`,
- macierzy Hilberta korzystając z funkcji `hilb`,
- niech B będzie losową macierzą. Wyznaczyć rozkład qr macierzy B za pomocą funkcji `qr`, $B = Q_B R_B$. Utworzyć macierz $A = Q_B(C)^k$, gdzie C jest losową macierzą górną trójkątną. Wybierać $k = 1, 2, 3, \dots, 10$.

Sprawdzić działanie „\” na przykładzie układu z macierzą osobliwą.

2. Oblicz macierz odwrotną A^{-1} za pomocą funkcji `inv`. Czy tak obliczona macierz odwrotna różni się w sposób istotny od macierzy odwrotnej obliczonej w sposób opisany poniżej?

Niech A będzie macierzą symetryczną dodatnio określoną. Na przykład:

- $A = B^T B$, gdzie macierz B jest losową macierzą prostokątną z większą liczbą wierszy niż kolumn lub
- A jest macierzą symetryczną dodatnio określoną Lehmera.

Niech $A = G^T G$ będzie rozkładem Cholesky'ego macierzy A (G jest macierzą trójkątną górną). Łatwo można sprawdzić, że

$$A^{-1} = G^{-1}(G^{-1})^T.$$

Macierz G^{-1} oblicz jako rozwiązanie równania $GX = I$ tzn. rozwiąż układy równań $Ax_j = e_j$; $j = 1, 2, \dots, n$, gdzie e_j jest j -tą kolumną macierzy jednostkowej stopnia n . Rozwiązanie x_j tego układu jest j -tą kolumną macierzy odwrotnej.

Dokładność obliczonych numerycznie macierzy odwrotnych oceń na podstawie wartości następujących wyrażeń:

$$\frac{\|AX - I\|}{\|A\|}, \quad \frac{\|XA - I\|}{\|A\|},$$

gdzie X oznacza numerycznie obliczoną macierz odwrotną. Obliczaj również wskaźniki uwarunkowania $\text{cond}(A)$ oraz $\det(A)$,

Termin oddania: 25.11.2023r.