Métodos Matemáticos da Física 2019/20

Teste 1 27/03/2020 auto-avaliação

Esta correção do teste inclui as pontuações das respostas em valores percentuais, isto é, somando 100 pontos percentuais em cada questão. A nota obtém-se somando as classificações das questões de acordo com os valores:

1) 10 valores
2) 5 valores
3) 5 valores

Métodos Matemáticos da Física **2019/20**

Teste 1 - auto-avaliação **27-03-2020**

1.a) Encontre pelo método de separação de variáveis funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de difusão, e funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de Schrödinger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,.$$

b) Determine a solução da equação de difusão que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, onde

$$y(x) = a\, \cos(kx) + b\, \sin(2kx) \,, \qquad a, b, k \in \mathbb{R} \,.$$

c) Determine a solução da equação de Schrödinger que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, com $y(x)$ definida acima.

d) Caracterize a dependência no tempo das soluções da equação de difusão e da equação de Schrödinger encontradas nas alíneas b) e c).

2.a) Determine os valores próprios e as funções próprias, $y(x)$, do operador segunda derivada, d^2/dx^2, definidas no domínio, $x \in [-\ell, \ell]$, e sujeitas às condições fronteira, $y(\ell) = y(-\ell)$, $y'(\ell) = y'(-\ell)$.

b) Explique se os valores próprios são ou não degenerados.

3. Num espaço vectorial bidimensional os vectores da base têm os seguintes produtos internos:

$$\langle e_1|e_1\rangle = 2 \,, \qquad \langle e_1|e_2\rangle = 0 \,, \qquad \langle e_2|e_2\rangle = 3 \,.$$

a) Os produtos internos de um dado vector, $u = \sum_n u_n\, e_n$, com os vectores da base são dados por:

$$\langle e_n|u\rangle = \frac{1}{n+1} \,, \quad n = 1, 2 \,.$$

Determine o vector u e as suas componentes, u_n.

b) Calcule os produtos internos, $\langle u|u\rangle$, $\langle v|v\rangle$, $\langle u|v\rangle$, $\langle v|u\rangle$, onde $v = e_1 + i\, e_2$.

Métodos Matemáticos da Física — 2019/20

Teste 1 27/3/2020

①

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

50

a)

5 · $u(t,x) = f(t)\, v(x)$

· $\frac{\partial u}{\partial t} = f'(t)\, v(x)$

· $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)\, v''(x)$

5 · difusão $\underbrace{\frac{f'(t)\, \cancel{v(x)}}{f(t)\, \cancel{v(x)}}}_{= \text{const.}} = \alpha^2 \underbrace{\frac{\cancel{f(t)}\, v''(x)}{\cancel{f(t)}\, v(x)}}_{= \text{const.}}$

2 · $\begin{cases} v''(x) = \lambda\, v(x) \\ f'(t) = \alpha^2 \lambda f(t) \end{cases}$
2 ·
1 · $\lambda_t = \alpha^2 \lambda$
5

5 · $v(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$

$\mu^2 = \lambda$

5 · $f(t) = e^{\alpha^2 \lambda t} = e^{\alpha^2 \mu^2 t}$

5 · $u(t,x) = e^{\alpha^2 \mu^2 t}\, v(x) = e^{\alpha^2 \mu^2 t}\left(c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}\right)$

5 · Schrödinger $\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{v''(x)}{v(x)}$

2 · $\begin{cases} v''(x) = \lambda\, v(x) \\ f'(t) = \lambda_t f(t) \end{cases}$
2 ·
1 · $\lambda_t = \frac{i\hbar}{2m}\lambda$
5

· $v(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}$ visto antes

5 · $f(t) = e^{\frac{i\hbar}{2m}\mu^2 t}$

5 · $u(t,x) = e^{\frac{i\hbar}{2m}\mu^2 t}\left(c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x}\right)$

25 b) $u(0,x) = a\cos(kx) + b\,\text{sen}(2kx)$; $a, b, k \in \mathbb{R}$

$u(0,x) = v_1(x) + v_2(x)$

$v_1(x) = a\cos(kx)$

5 • $v_1''(x) = -k^2 v_1(x)$ $\quad (A\mu^2 = k^2)$

3 • $u_1(t,x) = e^{-\alpha^2 k^2 t} v_1(x)$ é solução de eq. difusão e $u_1(0,x) = v_1(x)$

$v_2(x) = b\,\text{sen}(2kx)$

5 • $v_2''(x) = -4k^2 v_2(x)$ $\quad (A\mu^2 = -4k^2)$

2 • $u_2(t,x) = e^{-4\alpha^2 k^2 t} v_2(x)$ solução de eq. difusão e $u_2(0,x) = v_2(x)$

Então, a condição inicial

$u(0,x) = v_1(x) + v_2(x)$

conduz a

$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x)$

porque a eq. de difusão é linear

5+5 • $u(t,x) = a e^{-\alpha^2 k^2 t} \cos(kx) + b\, e^{-4\alpha^2 k^2 t}\,\text{sen}(2kx)$

15 c)

Schrödinger

5 • $u_1(t,x) = e^{-\frac{i\hbar}{2m} k^2 t} v_1(x)$ solução com $u_1(0,x) = v_1(x)$

• $u_2(t,x) = e^{-\frac{i\hbar}{2m} 4k^2 t} v_2(x)$ " " $u_2(0,x) = v_2(x)$

5+5 • $u(t,x) = a\, e^{-\frac{i\hbar}{2m} k^2 t} \cos(kx) + b\, e^{-\frac{i\hbar}{2m} 4k^2 t}\,\text{sen}(2kx)$

5 d). $u(t,x) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ difusão

5 • $u(t,x)$ oscilante, periódica de frequência $w = \frac{\hbar}{2m} k^2$

② $x \in [-\ell, \ell]$,

85 a)

5 $$\begin{cases} y''(x) = \lambda\, y(x) \\ y(\ell) = y(-\ell) \\ y'(\ell) = y'(-\ell) \end{cases}$$ funções próprias

10 $$y(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} \quad , \quad \mu^2 = \lambda$$

5 $$y'(x) = \mu \left(c_1 e^{\mu x} - c_2 e^{-\mu x} \right)$$

5, 5 $$\begin{cases} y(\ell) = y(-\ell) \\ y'(\ell) = y'(-\ell) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 e^{\mu \ell} + c_2 e^{-\mu \ell} = c_1 e^{-\mu \ell} + c_2 e^{\mu \ell} \\ c_1 e^{\mu \ell} - c_2 e^{-\mu \ell} = c_1 e^{-\mu \ell} - c_2 e^{\mu \ell} \end{cases} \Leftrightarrow$$

5, 5 $$\begin{cases} c_1 e^{\mu \ell} = c_1 e^{-\mu \ell} \\ c_2 e^{-\mu \ell} = c_2 e^{\mu \ell} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{\mu \ell} = e^{-\mu \ell} \\ c_1, c_2 \quad \text{arbitrários} \end{cases}$$ 5, 5

5 $$e^{2\mu \ell} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\mu \ell = 2 n \pi i$$

5 $$\mu = n \frac{\pi}{\ell} i \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

Funções próprias:

10 • $$y_n(x) = e^{i n \frac{\pi}{\ell} x} \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \qquad (c_2 = 0 \ , \ c_1 = 1)$$

$e^{-i n \frac{\pi}{\ell} x} = y_{-n}(x)$ está contida no conjunto anterior

10 Valores próprios $\lambda_n = - n^2 \pi^2 / \ell^2$

5 Para $\lambda = 0$, $y_0(x) = 1$ ($y(x) = x$ não satisfaz as condições fronteira)

15 b)

10 Os valores próprios λ_n são duplamente degenerados para $n \neq 0$ porque estão associados a duas funções próprias linearmente independentes, $y_n(x)$, $y_{-n}(x)$.

5 O valor próprio $\lambda_0 = 0$ é não degenerado porque só existe uma função própria, $y_0(x) = 1$.

③ $\langle e_1|e_1\rangle = 2, \quad \langle e_1|e_2\rangle = 0, \quad \langle e_2|e_2\rangle = 3$

40 a) $u = \sum_n u_n e_n \quad , \quad \langle e_n|u\rangle = \frac{1}{n+1}$

$$\underset{(2)}{\langle e_1|u\rangle} = \underset{(2)}{\langle e_1|\textstyle\sum_n u_n e_n\rangle} = \sum_n u_n \underset{(2)}{\langle e_1|e_n\rangle} = \underset{(2)}{u_1}\,\underset{(2)\ \ (2)}{\langle e_1|e_1\rangle}$$

10 • $\langle e_n|u\rangle = u_n \langle e_n|e_n\rangle$ porque e_n são ortogonais

$$u_n = \frac{\langle e_n|u\rangle}{\langle e_n|e_n\rangle}$$

10 $u_1 = \frac{1/2}{\langle e_1|e_1\rangle} = \frac{1}{4}$

10 $u_2 = \frac{1/3}{\langle e_2|e_2\rangle} = \frac{1}{9}$

10 • $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 = \frac{1}{4} e_1 + \frac{1}{9} e_2$

60 b) $v = e_1 + i\, e_2$

10 $\langle e_2|e_1\rangle = \langle e_1|e_2\rangle^* = 0$

$$\langle a|b\rangle = \langle \sum_m a_m e_m | \sum_n b_n e_n\rangle = \sum_{m,n} a_m^* b_n \overbrace{\langle e_m|e_n\rangle}^{=0,\ m\neq n}$$

10 • $\langle a|b\rangle = \sum_n a_n^* b_n \langle e_n|e_n\rangle$ para qq vectores a,b

10 $\langle u|u\rangle = |u_1|^2\langle e_1|e_1\rangle + |u_2|^2\langle e_2|e_2\rangle = \frac{2}{16} + \frac{3}{81} = \frac{1}{8} + \frac{1}{27} = \frac{35}{216}$

10 $\langle v|v\rangle = |v_1|^2\langle e_1|e_1\rangle + |v_2|^2\langle e_2|e_2\rangle = 2 + 3 = 5$

10 $\langle u|v\rangle = u_1^* v_1 \langle e_1|e_1\rangle + u_2^* v_2 \langle e_2|e_2\rangle = \frac{2}{4} + \frac{3}{9} i = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} i$

10 $\langle v|u\rangle = v_1^* u_1 \langle e_1|e_1\rangle + v_2^* u_2 \langle e_2|e_2\rangle = \frac{2}{4} - \frac{3}{9} i = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} i$

$\langle v|u\rangle = \langle u|v\rangle^*$ como é devido