ONDAS E ÓTICA

FORMULÁRIO DE APOIO E EXERCÍCIOS

Licenciatura em Física

Prof. Dr. Vladimir V. Konotop
Departamento de Física
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Este texto encontra-se em fase de preparação

Capítulo 1

Movimento harmónico

1.1 Oscilações pequenas bi-dimensionais num campo potencial

Consderemos uma partícula de massa m num campo potencial $U(x, y)$. A Segunda Lei de Newton diz:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla U, \qquad \boldsymbol{r} = (x, y) \tag{1.1.1}$$

No estado de equilíbrio, que designamos por $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0)$, temos $\nabla U = 0$ ou em projeções sobre os eixos x e y:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = 0 \tag{1.1.2}$$

Para pequenos desvios $\xi = x - x_0$ e $\eta = y - y_0$ do estado equilíbrio (x_0, y_0) desenvolvemos a energia potencial em série de Taylor

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= U(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \xi + \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \eta + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \xi^2 \\
&+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \eta^2 + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \xi\eta + o(\xi^2) + o(\eta^2) + o(\xi\eta) \\
&\approx U(x_0, y_0) + \frac{m}{2}\omega_x^2 \xi^2 + \frac{m}{2}\omega_y^2 \eta^2 + m\kappa\xi\eta
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

onde

$$\omega_x^2 = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \omega_y^2 = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}, \quad \kappa = \frac{1}{m}\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\bigg|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \tag{1.1.4}$$

e nós admitimos que o ponto (x_0, y_0) corresponde ao mínimo do potencial, i.e. que $\omega_{x,y}^2 > 0$. Substituindo (1.1.3) em (1.1.1) obtemos as equações para osciladores acoplados

$$\ddot{\xi} + \omega_x^2 \xi + \kappa \eta = 0, \qquad \ddot{\eta} + \omega_y^2 \eta + \kappa \xi = 0 \tag{1.1.5}$$

Aqui ω_x e ω_y são as *frequências próprias* de cada dos osciladores e κ é o *coefficiente de acoplamento.*

1.2 Análise de movimento de dois osciladores acoplados

Vamos considerar o problema na forma geral

$$\frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = -\mathrm{B}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{1.2.1}$$

Aqui os coeficientes b_{11} e b_{22} caracterizam as frequências próprias do cada dos subsistemas na ausência do acoplamento. Sublinhamos que as frequências dos subsistemas são diferentes das frequências próprias do sistema acoplado [que serão deduzidas embaixo [veja (1.2.8)], enquanto os coeficientes b_{12} e b_{21} descrevem o acoplamento. O sistema (1.2.1) tem que ser fornecida com as condições iniciais, que podemos escrever na forma matricial

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

onde $x_{\alpha\beta}$ são constantes reais.

Procuramos uma solução de (1.2.1), (1.2.2) na forma

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \tag{1.2.3}$$

onde A_1 e A_2 são amplitudes complexas enquanto ω é uma constanta (que pode ser complexa). Substituindo (1.2.3) em (1.2.1) obtemos a equação

$$\begin{pmatrix} b_{11}-\omega^2 & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0. \tag{1.2.4}$$

Para esta equação ter uma solução não trivial (i.e. diferente de zero, o determinante da matriz do lado esquerdo deve ser zero: $\det(\mathrm{B}-\omega^2\mathrm{I}) = 0$ (I usa-se para a matriz de identidade), o que conduz-nos a equação característica que pode ser escrita na forma

$$\omega^4 - \tau\omega^2 + \Delta = 0 \tag{1.2.5}$$

onde

$$\tau = Tr\mathrm{B} = b_{11} + b_{22}, \qquad \Delta = \det \mathrm{B} = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \tag{1.2.6}$$

Se se verifique que

$$0 < 4\Delta < \tau^2 \tag{1.2.7}$$

então existem dois *modos de oscilações*, i.e., soluções periódicas com frequências bem definidas, $(j = 1, 2)$

$$\boldsymbol{x}_j = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \end{pmatrix} e^{i\omega_{1,2}t}, \quad \omega_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left(\tau + (-1)^\alpha\sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right) \tag{1.2.8}$$

A solução geral $\boldsymbol{x}$ do sistema (1.2.1) pode ser representada como uma sobreposição das soluções $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$:

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) \tag{1.2.9}$$

onde $c_1 = C_1e^{i\varphi_1}$ e $c_2 = C_2e^{i\varphi_2}$ são constantes complexas, enquanto C_α e φ_α são amplitudes e fases reais que se determinam a partir das conidções iniciais (1.2.2):

$$\begin{aligned} &C_1A_{j1}\cos\varphi_1 + C_2A_{j2}\cos\varphi_2 = x_{j0}, \\ &\omega_1C_1A_{j1}\sin\varphi_1 + \omega_2C_2A_{j2}\sin\varphi_2 = -x_{j1} \end{aligned} \tag{1.2.10}$$

com $j = 1, 2$. A solução $\boldsymbol{x}(t)$ admite representação numa das formas alternativas (por analogia com o Exercício 1 na página 10).

Para cada dos modos a partir da equação (1.2.4) obemos as relações entre as amplitudes das oscilações dos componentes

$$\frac{A_{1\alpha}}{A_{2\alpha}} = \frac{b_{12}}{\omega_\alpha^2 - b_{11}} = \frac{\omega_\alpha^2 - b_{22}}{b_{21}} \tag{1.2.11}$$

Vamos definir um produto entre uns dois vectores-colunas $\boldsymbol{x}_\alpha$ e $\boldsymbol{x}_\beta$ como

$$(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta) = \boldsymbol{x}_\alpha^\dagger \boldsymbol{x}_\beta = \bar{A}_{1\alpha} A_{1\beta} + \bar{A}_{2\alpha} A_{2\beta} \tag{1.2.12}$$

Então a norma $\|\boldsymbol{x}_\alpha\|$ do vetor $\boldsymbol{x}_\alpha$ define-se pela fórmula

$$\|\boldsymbol{x}_\alpha\|^2 = (\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\alpha) = |A_{1\alpha}|^2 + |A_{2\alpha}|^2 \tag{1.2.13}$$

Diz-se que o vector $\boldsymbol{x}_\alpha$ é *normalizado* se a norma dele é um. Uma vez, que alem da condição (1.2.11) a escolha das amplitudes $A_{\alpha\beta}$ é arbitrária, podemos exigir que fosse $\|\boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{x}_2\| = 1$ ou

$$|A_{11}|^2 + |A_{21}|^2 = |A_{12}|^2 + |A_{22}|^2 = 1 \tag{1.2.14}$$

Diz-se que os modos $\boldsymbol{x}_\alpha$ e $\boldsymbol{x}_\beta$ são ortogonais se $(\boldsymbol{x}_\alpha, \boldsymbol{x}_\beta) = 0$. No caso geral (of coeficientes b_{ij} são diferentes) os modes (1.2.8) não são ortogonais. Mas se a matriz B é Hermítica, ou no nosso caso - simétrica (uma vez que os elementos dela são reais), i.e. se $b_{12} = b_{21}$, então $\boldsymbol{x}_1^\dagger \boldsymbol{x}_2 = 0$ (ver exercício 10 na página 12).

No caso quando os modos são simultaneamente normais e ortogonais diz-se que os modos são *ortonormais*.

A partir de agora concentramos só na sitação quando $b_{12} = b_{21} = b$. Neste caso calculamos

$$\omega_\alpha^2 - b_{11} = -\frac{1}{2}(b_{11} - b_{22}) + \frac{(-1)^\alpha}{2}\sqrt{(b_{11} - b_{22})^2 + 4b^2} \tag{1.2.15}$$

Logo apartir de (1.2.11) e pelo facto do que o signal do lado direito em (1.2.15) determina-se pelo sinal de $(-1)^\alpha$ concluimos que

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} \cdot \frac{A_{12}}{A_{22}} < 0 \tag{1.2.16}$$

Portanto se num modo (no nosso caso se $b > 0$, i.e., acoplamento é positivo, o modo 2 para qual $\omega_2^2 - b_{11} > 0$) as amplitudes tem o mesmo sinal (i.e.

$A_{11}/A_{21} > 0$), então no modo 1 ($\omega_1^2 - b_{11} < 0$) as amplitudes têm os sinais opostos (i.e. $A_{12}/A_{22} < 0$). Quando as amplitudes dos modos têm o mesmo sinal, diz-se que os modos são em fase (*in-phase*) caso contrário as oscilações são desfasadas (*out-of-phase*).

Finalmente os modos ortonormais para o caso $b_{12} = b_{21} = b$ têm a forma (ver exercício 11 na página 12).

$$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{b_{22} - \omega_1^2} \\ \sqrt{b_{11} - \omega_1^2} \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}, \tag{1.2.17}$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega_2^2 - \omega_1^2}} \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_2^2 - b_{22}} \\ -\sqrt{\omega_2^2 - b_{11}} \end{pmatrix} e^{i\omega_2 t} \tag{1.2.18}$$

1.2.1 Batimentos

Analisamos uma situação quando as frequências de modos são muito próximos uma a outra, o que em termos matemáticos significa que

$$\omega_1 = \omega_0 - \delta, \quad \omega_2 = \omega_0 + \delta, \quad \text{onde } 0 < \delta \ll \omega_0 \tag{1.2.19}$$

Vamos calcular a amplitude de sobreposição de dois modos com a mesma amplitude, i.e., vamos considerar oscilações descritas pela fórmula

$$x(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = a(t)\cos(\omega_0 t) \tag{1.2.20}$$

onde

$$a(t) = 2\cos(\delta t) \tag{1.2.21}$$

pode ser interpretada como uma uma amplitude lente.

1.3 Uma cadeia de osciladores acoplados

Consideremos um sistema com N osciladores acoplados idênticos, em que todos os osciladores encontram-se distribuídos ao longo do eixo x, de tal mameira, que no estado de equilíbrio a distância entre dois vizinhos mais próximos tem o valor a (como se mostra esquematicamente na Figura 1.3). Vamos numerar osciladores pelos números inteiros n, tal que a coordenada de equilíbrio de cada oscilador é dada por $x_{0n} = na$. Suponhamos também

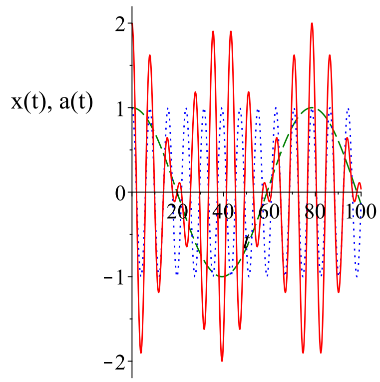

Figura 1.1: Exemplo de batimentos para $\omega_0 = 0.8$ e $\delta = 0.08$. As linhas verde, azul e vermelha correspondem a $\cos(\omega_0 t)$, $\cos(\delta t)$ e $x(t)$.

que oscilações são unidimensionais, i.e., que desvios de estado de equilíbrio do oscilador n é descrita por só uma coordenada $u_n(t)$ que varia com tempo. Isto significa que num instante de tempo t a coordenada de oscilador n é $x_n = x_{0n} + u_n = an + u_n$.

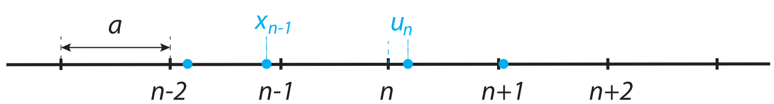

Figura 1.2: Representação esquemática duma cadeia de osciladores.

As equações de movimento são

$$m\frac{d^2u_n}{dt^2} = \kappa\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) \tag{1.3.1}$$

Procuramos uma solução na forma

$$u_n = A_k e^{i(kan-\omega t)} \tag{1.3.2}$$

onde A_k é a *amplitude* do modo que pode ser complexa, k é real e chama-se o *número de onda*. Substituindo (1.3.2) em (1.3.1) obtemos a *lei de dispersão*:

$$\omega^2 = \omega^2(k) = \omega_0^2 \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right), \quad \omega_0 = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}} \tag{1.3.3}$$

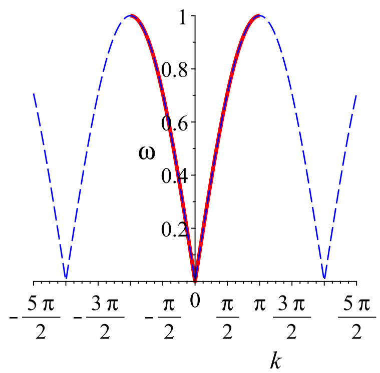

Figura 1.3: A lei de dispersão (1.3.3) para $\omega_0 = 1$ e $a = 1$.

Agora vamos considerar uma cadeia (1.3.1) infinita ($N \to \infty$). A solução (1.3.2) continua a ser válida. Também a parte real (ou complexa) desta solução é uma solução. Qualquer número complexo pode ser representado na forma exponencial, i.e.,

$$A_k = a_k e^{i\varphi_k} \tag{1.3.4}$$

onde a_k é a amplitude real e φ_k é a fase constante. Substituindo esta representação em (1.3.2) e calculando a parte real obtemos uma solução real do sistema (1.3.1):

$$u_n(t) = a_k \cos[kan - \omega(k)t + \varphi_k] \tag{1.3.5}$$

A solução obtida é uma onda periódica com o número de onda k e a frequência $\omega(k)$. Em cada instante de tempo t, $u_n(t)$ representa uma distribuição de deslocamentos na forma de um cosseno, com a amplitude de onda a_k, e a distância entre dois máximos vizinhos $\lambda = 2\pi/k$. A grandeza λ chama-se o *comprimento de onda*. Se fixamos um n, verificamos que $u_n(t)$ faz oscilações periódicas com a frequência $\omega(k)$, e, portanto, com o período $T = 2\pi/\omega(k)$. Se, entretanto, analisamos a posição dos máximos de deslocações do estado de equilíbrio $u_n(t)$ no espaço e no tempo, verificamos que eles se propagam com a velocidade

$$\boxed{v_f(k) = \frac{\omega(k)}{k}} \tag{1.3.6}$$

O argumento do coseno em (1.3.5) [ou da exponencial em (1.2.9)],

$$\Phi := qan - \omega(k)t + \varphi_k \tag{1.3.7}$$

chama-se a fase total e consequentemente $v_f(k)$ chama-se a *velocidade de fase*. Nota-se que a velocidade de fase em geral depende de do vetor de onda k. Assim vemos que ondas com diferentes números de onda propagam-se com velocidades de fase diferentes. Por isso diz-se que temos ondas dispersivas. Alem disso podemos identificar mais uma característica que tem a dimensão de velocidade, nomeadamente

$$\boxed{v_g(k) = \frac{d\omega(k)}{dk}} \tag{1.3.8}$$

A grandeza v_g chama-se a *velocidade de grupo*. O significado físico da velocidade de grupo esclarecemos mais tarde. Mas já podemos notar que a velocidade de grupo é um característica 'comum de ondas vizinhas', $\omega_1 = \omega(k_1)$ e $\omega_2 = \omega(k_2)$ onde $k_1 = k$ e $k_2 = k + dk$, porque ela pode ser vista como

$$\frac{d\omega(k)}{dk} \approx \frac{\omega(k+dk) - \omega(k)}{dk} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} \tag{1.3.9}$$

Como exemplos a partir da lei de dispersão (1.3.3) calculamos para ondas periódicas que se propagam na cadeia (1.3.1)

$$v_f(k) = \frac{\omega_0}{k} \sin\left(\frac{ka}{2}\right), \quad v_g(k) = \frac{\omega_0 a}{2} \cos\left(\frac{ka}{2}\right) \tag{1.3.10}$$

A comparação das duas velocidades ilustra-se na Fig. 1.3

Podemos resumir, que a propagação duma onda dum meio material, caracteriza-se pelas *três* velocidades diferentes:

- a velocidade instantânea de partículas de meio (no caso de osciladores $\dot{u}_n(t)$)
- a velocidade de fase v_f
- a velocidade de grupo v_g

1.4 De uma cadeia para um meio contínuo

Consideremos a situação em que o comprimento de onda é muito maior do que a distância entre dois osciladores vizinhos, i.e.,

$$\lambda \gg a \tag{1.4.1}$$

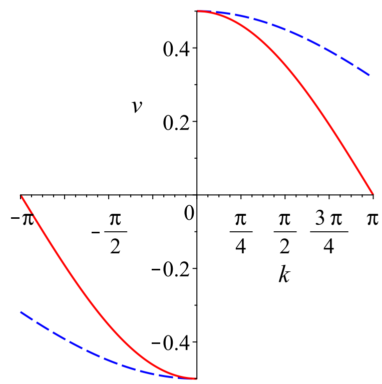

Figura 1.4: As velocidades v_f (linha azul traçada) e v_g (linha vermelha sólida) calculados para $\omega_0 = 1$, $a = 1$ na primeira zona de Brillouin $k \in [-\pi/a, \pi/a]$.

Esta aproximação chama-se o *limite continuo*, uma vez que, como vamos confirmar a seguir o meio de propagação, i.e., a cadeia de osciladores, pode ser tratada como um meio contínuo. Para isso consideremos uma cadeia infinita u usamos uma forma geral das equações de osciladores acoplados

$$\frac{d^2u_n}{dt^2} = \tilde{\omega}_0^2\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right). \tag{1.4.2}$$

Introduzimos uma nova variável contínua que coincide com an nos pontos n, i.e. nestes pontos

$$x = an \tag{1.4.3}$$

e definimos uma função $u(t,x)$ tal que nos pontos n se verifíca

$$u(t,x) = u(t,an) = u_n(t), \qquad u(t,x\pm a) = u(t,a(n\pm 1)) = u_{n\pm1}(t) \tag{1.4.4}$$

Tendo em conta (1.4.1), vamos considerar a como um parâmetro pequeno formal e desenvolvemos $u_{n\pm1}(t)$ em série de Taylor:

$$u_{n\pm1}(t) = u(t,x\pm a) = u(t,x) \pm a\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \mathcal{O}(a^3) \tag{1.4.5}$$

Como já discutimos, e como ilustra o exemplo da solução (1.3.2), podemos usar a estimativa

$$\left|\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right| \sim \frac{|u(t,x)|}{\lambda} \tag{1.4.6}$$

o que significa, que o termo com a derivada de ordem n da série (1.4.5) é de ordem de $(a/\lambda)^n \ll 1$, devido (1.4.1). Portanto, cada termo seguinte é muito menor que o termo anterior. Isto justifica a validade de expansão (1.4.5) e permite despresar os termos $\mathcal{O}(a^3)$. Tendo isto em conta e substituindo (1.4.5) em (1.4.2) obtemos a equação, que se chama *a equação de onda*

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.} \tag{1.4.7}$$

Aqui $c = \tilde{\omega}_0 a$ é a velocidade de onda, como nós vamos demonstrar a seguir.

1.5 Exercícios

1. Verificar que a solução geral dum oscilador harmónico pode ser escrita numa das formas seguintes:

$$x_1(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \qquad x_2(t) = B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t),$$
$$x_3(t) = Be^{i\omega t} + Ce^{-i\omega t}, \quad x_4(t) = \mathrm{Re}\left(Ae^{i\omega t}\right) \quad \text{(com } A \text{ complexo)}$$

e encontrar relações entre constantes em todas estas expressões.

2. Considere oscilações longitudinais e transversais duma massa m ligada a paredes por duas molas idênticas com o coeficiente de elasticidade κ e com o comprimento a_0 cada (ver Figura 1.5). Em ambos casos a distância entre paredes é de $2a$, onde em geral $a \neq a_0$. O efeito do campo gravítico despreza-se.

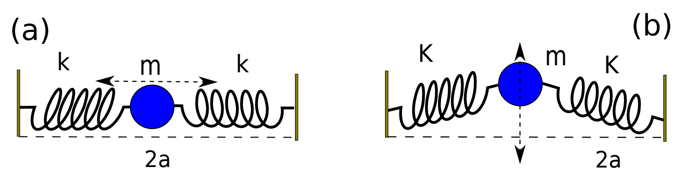

Figura 1.5: Osciladores com deslocamentos (a) longitudinal e (b) transversal.

Determine relações entre a e a_0 para que a posição central da massa seja um equilíbrio estável.

Demonstre que as frequências de oscilações longitudinal ω_l e transversal ω_t são:

$$\omega_l = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}}, \qquad \omega_t = \sqrt{\frac{2\kappa}{m}\left(1 - \frac{a_0}{a}\right)} \tag{1.5.1}$$

3. [7] Calcule o período de oscilações dum cubo de gelo em agua. O comprimento dum lado do cubo é de $a = 1$cm.
   Resolver o mesmo problema para o cubo de delo de forma arbitrária, sabendo que o volume total do gelo é V.

   Sugestão: Para pequenas oscilações verticais do gelo ao longo do eixo y a variação do volume submerso é dada por $\int_{y_0+\eta}^{0} A(y-\eta)dy$, onde $A(y)$ a função que descreve a secção transversal do volume de gelo ortogonal ao eixo y, y_0, é a coordenada do mínimo do gelo no estado de equilíbrio, η é pequeno desvio do ponto de mínimo do equilíbrio, e considera-se que $y = 0$ é o nível de água.

4. [3] Um peso se encontra em cima duma plataforma que faz vibrações verticais com a frequência de $\nu = 5$ Hz. Demonstre que o peso perde o contacto com a plataforma, desde que o deslocamento excede 10^{-2}m.

5. [7] Calcular frequência de pequenas oscilações veritacis do sistema indicado na Figura 1.6 (a é o comprimento da mola no estado relaxado).

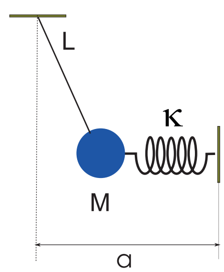

Figura 1.6: Oscilador sugeito as fórças gravítica e de tensão

6. [7] Determine as coordenadas dos estados de equlíbrio duma particula com a massa m no potencial (U_0, b e l são constantes positívas)

$$(a) \quad U(x) = U_0 \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right) \right],$$

$$(b) \quad U(x) = 4U_0 \left[\left(\frac{b}{x}\right)^{12} - 3\left(\frac{b}{x}\right)^6 \right]$$

   Calcule as frequências de oscilações pequenas na vizinhança dos pontos de equilíbrio.

7. Obtenha a solução geral da equação do oscilador linear forçado:
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f\cos(\nu t). \tag{1.5.2}$$
Descreva o fenômeno de ressonância.

8. [7] Obtenha a lei de movimento dum oscilador conservativo linear, sujeito a força exterior
$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\ t > T \\ f, & 0 < t < T \end{cases}$$

9. Considere um oscilador linear com amortecimento, que se descreve pelo $\gamma\dot{x}$:
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1.5.3}$$
Demonstre que se pode distinguir três diferentes tipos de movimento
$$\text{amortecimento forte:} \quad \gamma^2 > \omega^2, \tag{1.5.4}$$
$$\text{amortecimento fraco:} \quad \gamma^2 < \omega^2, \tag{1.5.5}$$
$$\text{amortecimento crítico:} \quad \gamma^2 = \omega^2 \tag{1.5.6}$$
Sabendo que $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(t=0) = x_1$, calcule $x(t)$ para cada tipo de movimento. Discuta os efeitos de amortecimento γ sobre movimento.

10. Calcular na forma explícita o produto $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ para soluções do sistema (1.2.1) e usando as relações entre as amplitudes (1.2.11), analizar todas as relações entre os elementos b_{ij} da matriz B, para os quais $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ são ortogonais.

11. Demonstrar as fórmulas (1.2.17) e (1.2.18).

12. [2] Calcule os modos e as frequências respetivas do sistema de molas e de massas colocadas sobre uma superfície sem fricção, como se mostra na Figura 1.7. Considera-se que todas as molas são idênticas, i.e., têm a mesma constante de elasticidade κ e o mesmo cumprimento quando estão relaxadas. Descreve a configurações dos modos (i.e., desvios relativos das massas no instante do tempo quando estes desvios atingem a sua amplitude máxima) e analise o limite $m_1 = m_2$.

13. [2] Resolve o problema descrito no exercício anterior (Exercício 12) mas no caso quando as deslocações das massas é transversal, como se mostra na Figura 1.8.

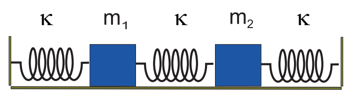

Figura 1.7: Dois osciladores longitudinais

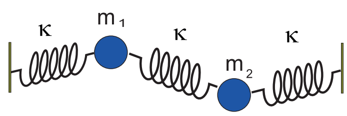

Figura 1.8: Dois osciladores transversais

14. [2] Considere dois pendula, com o mesmo cumprimento das cordas l, mas com massas diferentes m_1 e m_2. As massas estão acoplados por uma mola com a constante da mola κ, como se mostra na Figura 1.9, e os deslocamentos são longitudinais.

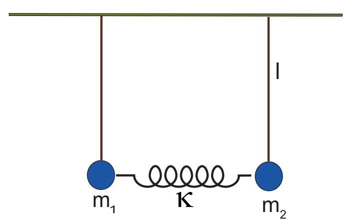

Figura 1.9: Dois osciladores acoplados

(a) Demonstre que as equações de movimento são

$$m_1\ddot{q}_1 = -m_1\frac{g}{l}q_1 + \kappa(q_2 - q_1), \quad m_2\ddot{q}_2 = -m_2\frac{g}{l}q_2 + \kappa(q_1 - q_2) \tag{1.5.7}$$

(b) Demonstre que com uma renormalização do tempo t e das coordenadas $q_{1,2}$ o sistema (1.5.7) pode ser reduzida ao sitema (1.2.1) com $b_{12} = b_{21} = b$.

(c) Resolva as equações (1.5.7) usando a transformação para as coordenadas normais

$$Q_1 \equiv \frac{m_1q_1 + m_2q_2}{m_1 + m_2}, \qquad Q_2 = q_1 - q_2.$$

Calcule frequências e descreva as configurações dos modos.

15. [2] Deduzir equações de movimento para oscilações pequenas da massa M ligada com quatro molas a paredes, como se mostra na Figura 1.10.

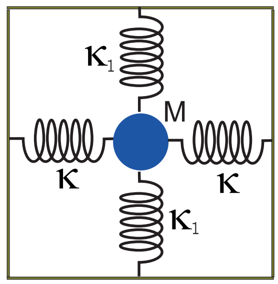

Figura 1.10: Oscilador bi-dimensional

16. Considere o sistema de equações para osciladores acoplados (1.2.1). Define-se a função

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p}) := \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{b_{12}} + \frac{1}{2}\frac{p_2^2}{b_{21}} + U(x_1,x_2) \tag{1.5.8}$$

onde

$$p_1 = \frac{\dot{x}_1}{b_{12}}, \quad p_2 = \frac{\dot{x}_2}{b_{21}}. \tag{1.5.9}$$

e

$$U(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\frac{b_{11}}{b_{12}}x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{b_{22}}{b_{21}}x_2^2 + x_1x_2 \tag{1.5.10}$$

A função $H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ chama-se *Hamiltoniano* e $p_{1,2}$ chamam-se *momentos lineares (generalizados)*.

(a) Demonstre, que $H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}})$ é uma integral de movimento, i.e.,

$$\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{e portanto} \quad H(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}}) \equiv E \tag{1.5.11}$$

A constante E é a energia do sistema.

(b) Verifique que as equações de movimento (1.2.1) podem ser obtidas a partir das *Equações de Hamilton* $(j = 1,2)$

$$\boxed{\frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}} \tag{1.5.12}$$

(c) Analise a função $U(x_1, x_2)$ (a "energia potencial") para $b_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2$, i.e. para todos os coeficientes positivos) e verifique que U pode ser de um dos dois tipos como se ilustra na Figura 1.11 (para $0 < \Delta$ e $\Delta < 0$, onde $\Delta = \det \mathrm{B}$). Verifique que neste caso a condição $4\Delta < \tau^2$, onde $\tau = \mathrm{Tr}\,\mathrm{B}$ se satisfaz automaticamente.

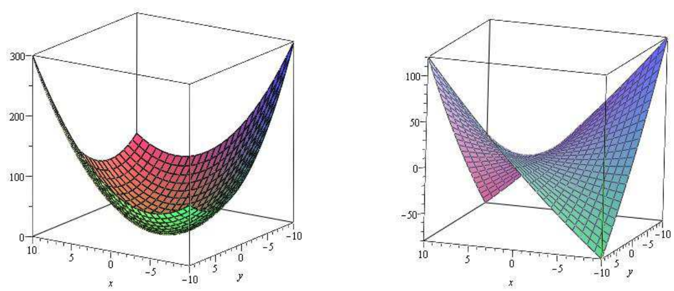

Figura 1.11: Exemplos da energia potencial.

(d) Argumente que em qualquer dos casos ilustrados na figura, podemos sempre ter movimento oscilatório. Como este facto pode ser visto a partir dos gráficos para a anergia potencial representa-se no potencial?

17. [2] Considere o sistema de osciladores acoplados, como se mostra a Figura 1.12.

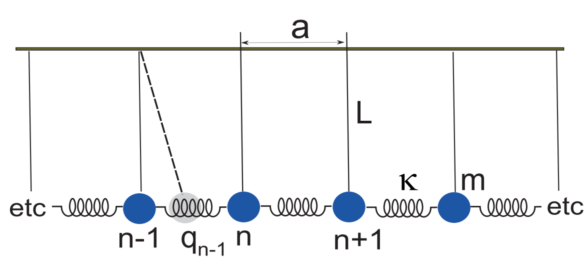

Figura 1.12: Cadeia de osciladores acoplados.

(a) Demonstre que o sistema de equações que descreve deslocamentos pequeno u_n tem a forma

$$\ddot{u}_u = -\frac{g}{L}u_n + \frac{\kappa}{m}\left(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n\right) \tag{1.5.13}$$

(b) Demostre que a lei de dispersão é dada pela fórmula

$$\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{4\kappa}{m}\text{sen}^2\left(\frac{ka}{2}\right) \tag{1.5.14}$$

(c) Demonstre que os modos são dados pela solução geral da (1.5.13)

$$u_n = \cos(\omega t + \varphi)\left[A\sin(kna) + B\cos(kna)\right] \tag{1.5.15}$$

(d) Demontre que no limite contínuo a equação (1.5.13) reduz-se a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega_0^2 u + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.5.16}$$

Como os constantes ω_0 e c se expressam atravez dos parametros dos osciladores?

18. Considere N (com $N \gg 1$) osciladores acoplados como se mostra na Figura 1.13. i.e. os osciladores acoplados sob condições cíclicas $u_n(t) =$

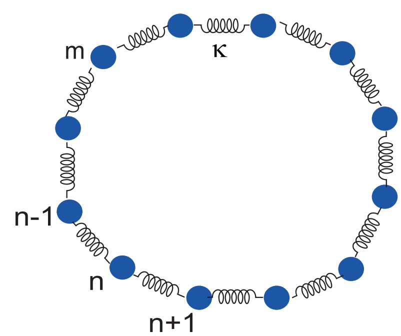

Figura 1.13: Cadeia de osciladores com condições de fronteira cíclicas.

$u_{n+N}(t)$. Obtenha as equações de movimento e a lei de dispersão. Quantos modos diferentes podem ser excitados neste sistema?

Capítulo 2

Ondas, conceitos básicos

2.1 Ondas não dispersivas

Uma vez que a lei de dispersão é a característica básica que descreve ondas num meio, vamos analisá-lo para ondas descritas pela equação de onda (1.4.7). Para isso procuramos a solução na forma exponencial

$$u(t,x) = A(k)e^{i(kx-\omega t)} \tag{2.1.1}$$

Nota-se que a substituição na forma exponencial particularmente conveniente para obtenção da lei de dispersão, uma vez que se verificam as propriedades:

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega e^{i(kx-\omega t)}, \quad \frac{\partial}{\partial x}e^{i(kx-\omega t)} = ike^{i(kx-\omega t)} \tag{2.1.2}$$

i.e., podemos uzar substituições formais

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} \to (-i\omega)^n, \qquad \frac{\partial^n}{\partial x^n} \to (ik)^n \tag{2.1.3}$$

onde n é um número inteiro. Tal como antes $A(k)$ é a amplitude complexa (verificamos que não é importante para obtenção da lei de dispersão) e k é o número de onda. Substituindo (2.1.1) em (1.4.7) obtemos a lei de dispersão da equação de onda

$$\omega = \omega(k) \equiv \pm ck. \tag{2.1.4}$$

e nós verificamos que as velocidades de fase e de grupo são iguais (analisamos o sinal positivo)

$$v_g = v_f = c \tag{2.1.5}$$

Neste case diz-se que as ondas são *não dispersivas*. A lei de dispersão(2.1.4) ilustra-se na Fig. 2.1.

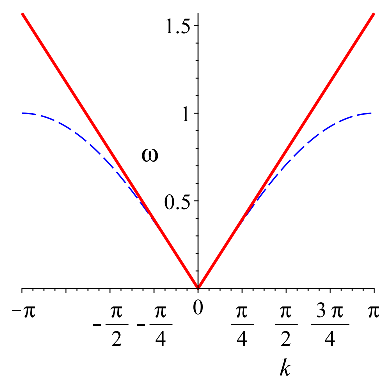

Figura 2.1: A lei de dispersão (2.1.4) para $c = 1$ e $k > 0$ (linha vermelha sólida) em comparação com a lei de dispersão da cadeia (1.4.2) respetiva (linha azul traçada).

No Exercício 3 na página 32 vamos provar que a solução da equação de onda (1.4.7) pode ser reduzida a solução das equações

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f(x,t) = 0 \tag{2.1.6}$$

Estas equções têm soluções $f(x,t) \equiv f_{\pm}(x \mp ct)$, tal que

$$u(t,x) = f_+(x-ct) + f_-(x+ct). \tag{2.1.7}$$

A forma da solução (2.1.7) obtida é característica para a equação de onda. Mas nós podemos reescrevê-la numa forma diferente, que será aplicada também para outras equações ondulatórias (veja Sec. 2.3). Para isso recordamos definições matemáticas

A transformada de Fourier $F(k)$ define-se como

$$F(k) = \mathcal{F}\{f\} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{2.1.8}$$

A transformada de Fourier inversa é dada por

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F\} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk, \tag{2.1.9}$$

Claro que as definições (2.1.8) e (2.1.9) fazem sentido, só se as integrais envolvidas existem. Sem entrar em pormenores matemáticas da teoria de transformada de Fourier, mencionamos só a existência será garantida se a função $f(x)$ é absolutamente integrável, i.e., se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \tag{2.1.10}$$

As soluções $f_\pm$ podem ser reescritas usando a transformada de Fourier (2.1.8) e a inversa dela (2.1.8) na forma

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k,t) e^{ikx} dk, \quad A(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t) e^{-ikx} dx \tag{2.1.11}$$

onde $A(k,t)$ é a imagem Fouruier do $f(x,t)$. Assim

$$f_\pm(x \mp ct) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_\pm(k) e^{ik(x \mp ct)} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A_\pm(k) e^{i[kx \mp \omega(k)t]} dk \tag{2.1.12}$$

com a lei de dispersão (2.1.4). Nota-se que a função $A_\pm(k)$ não depende do tempo. Um exemplo da solução da equação de onda (1.4.7) ilustra-se na Figura 2.1

Como podemos concluir do (2.1.7) e (2.1.12) a solução da equação de onda (linear) representa-se como a soma (i.e. sobreposição) de ondas $A_\pm(k)e^{i(kx-\omega(k)t)}$, cada das quais satsfaz a equação de onda. Este fenômeno chama-se *o princípio sobreposição linear* (um análogo do princípio de sobreposição linear de oscilações que nós já consederamos no Capítulo 1). A solução na forma (2.1.11) chama-se *pacote de ondas*.

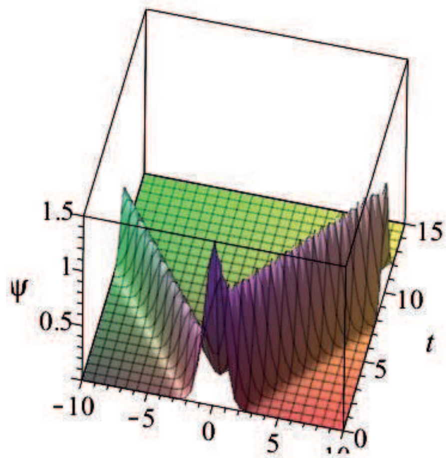

Figura 2.2: Decaimento dum pacote Gaussiano, i.e. que satisfaz as condições iniciais $u(x,0) = 1.5e^{-x^2}$, $u_t(x,0) = xe^{-x^2}$, em duas ondas que se propagam nos sentidos opostos.

2.2 Ondas dispresivas

2.2.1 Osciladores com potencial *on-site*

As propriedades de oscilações duma cadeia mudam significativamente se cada oscilador é sujeito a u potencial externo, que se-chama um potencial *on-site* (1.5.13) que no limite continuo se reduz a equação (1.5.16), deduzida no Exercício 17 na página 15. Obtemos a lei de dispersão destas oscilações. De acordo com o método descrito na Sec. 2.1 para isso devemos substituir (2.1.1) na equação (1.5.16). Obtemos

$$\omega = \pm\sqrt{k^2c^2 + \omega_0^2} \tag{2.2.1}$$

Consequentemente as velocidades de fase e de grupo calculam-se diretamente:

$$v_f = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + k^2c^2}}{k}, \qquad v_g = \frac{kc^2}{\sqrt{\omega_0^2 + k^2c^2}} \tag{2.2.2}$$

Logo $v_f \neq v_g$ e as ondas descritas são dispersivas. A lei de dispersão bem como as velocidades de grupo e de fase são ilustradas na Figura 2.2.1

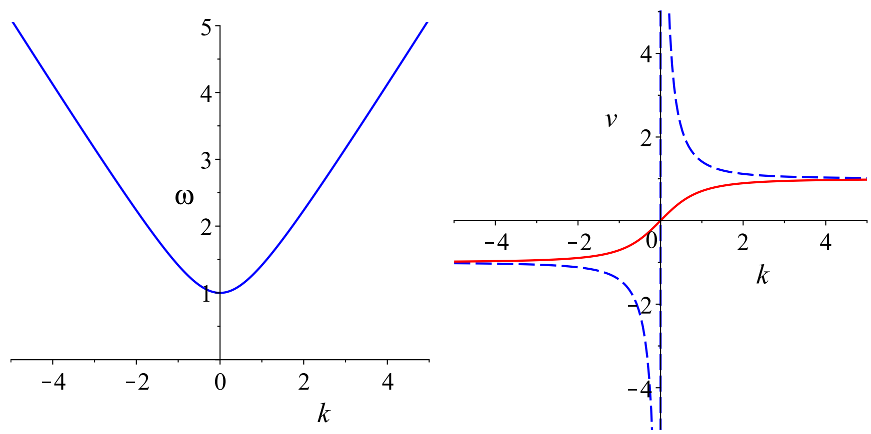

Figura 2.3: A lei de dispersão (2.2.1) e as velocidades (2.2.2) de fase (linha azul traçada) e de grupo (linha vermelha sólida) para $c = 1$ e $\omega_0 = 1$.

2.2.2 Equação de Schrödinger

O prinípio de sobreposição é uma característica geral de ondas lineares que está intrinsicamente ligada a possibilidade de aplicar a trasformada de Fourier para encontrar a solução do problema com condições inciais (o problema de Cauchy). Consideremos o exemplo da *equação Schrödinger* unidimensional[1]:

$$i\psi_t = -\psi_{xx}, \quad \psi(t=0,x) = \psi_0(x) \tag{2.2.3}$$

onde $\psi_0(x)$ é a distribuição inicial (deve ser duas vezes differenciável).

Começamos por definir a transformada de Fourier do campo $\psi(x,t)$:

$$A(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t) e^{-ikx} dx \tag{2.2.4}$$

e da condição inicial

$$A_0(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x) e^{-ikx} dx. \tag{2.2.5}$$

[1]Em ótica esta equação descreve feixes paraxiais e refere-se como *aproximação parabólica* ou *aproximação paraxial*; neste caso ψ descreve o campo elétrico e a variável t deve ser interpretada como distância de propagação.

Segundo, aplicamos a transformada de Fourier (2.1.11) a cada lado da equação (2.2.3) tendo em conta que

$$\mathcal{F}\{\psi_t\} = \frac{\partial}{\partial t}A, \qquad \mathcal{F}\{\psi_{xx}\} = -k^2 A. \tag{2.2.6}$$

Nota-se que a segunda fórmula vem das propriedades de transformada de Fourier, mas também dope ser verificada diretamente usando integração por partes duas vezes

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\psi_{xx}\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}e^{-ikx}dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)(-ik)^2e^{-ikx}dx \\ &= -k^2\mathcal{F}\{\psi\} = -k^2A(k,t)\end{aligned}$$

onde nós admitimos que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\psi(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty}\psi_x(x,t) = 0 \tag{2.2.7}$$

Assim obtemos

$$i\frac{\partial A}{\partial t} = k^2 A, \qquad A(k,t=0) = A_0(k) \tag{2.2.8}$$

Este problema Cauchy resolve-se como

$$A(k,t) = A_0(k)e^{-ik^2t} = A_0(k)e^{-i\omega(k)t} \tag{2.2.9}$$

onde a lei de disperção é tem a forma duma parabola

$$\omega(k) = k^2. \tag{2.2.10}$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa obtemos

$$\begin{aligned}\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(kx-\omega(k)t)}A_0(k)dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\psi_0(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i[k(x-\xi)-k^2t]}dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-i\pi/4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(x-\xi)^2/4t}\psi_0(\xi)d\xi\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

onde nós usamos o valor da integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(tk^2+yk)}dk = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{i\pi/4}e^{-y^2/4t}, \quad t>0 \tag{2.2.12}$$

O campo ψ é complexo. Uma vez que experimentalmente medem-se as grandezas reais, a característica relevante é a o quadrado da amplitude do campo[2] $|\psi|^2$. Uma das mais importantes características de movimento ondulatório é a integral

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx \tag{2.2.13}$$

que em física pode descreve, dependente do contexto em que se conisdera a equação, a norma da função de onda, o número de partículas, etc. Alem disso podemos definir *a largura média do pacote de ondas*

$$L(t) = \sqrt{\frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x,t)|^2 dx} \tag{2.2.14}$$

e a coordenada do "centro de massas"do pacote de ondas obtemos

$$X(t) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x,t)|^2 dx. \tag{2.2.15}$$

Como exemplo consideremos a dinâmica dum *pacote Gaussiano*, i.e., a condição inicial na forma

$$\psi_0(x) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right), \tag{2.2.16}$$

onde A_0 é a amplitude inicial, e x_0 é a largura do pacote. Calculamos:

$$\psi(x,t) = \frac{A_0}{L(t)} e^{-i\pi/4} e^{-x^2/(2L^2(t))}, \qquad L(t) = \sqrt{x_0^2 + 2t} \tag{2.2.17}$$

Podemos verificar ainda que a largura de pacote Gaussiano, $L(t)$ introduzida nesta fórmula, é consistente com a definição (2.2.14), i.e., que a substituição de (2.2.17) em (2.2.14) resulta em identidade. Observamos que a largura média do pacote de ondas, que inicialmente era $L(0) = x_0$, cresce com tempo. Portanto, o pacote inicial deforma-se durante propagação. Este fenômeno chama-se *dispersão* do pacote de ondas. O exemplo desta evolução ilustra-se na Figura 2.4. Nota-se que para a equação de Schrödinger N é uma constante de dinâmica, i.e., $dN/dt = 0$ (Exercício 4 na página 42). As características de movimento que se conservem durante processo de evolução chamam-se *integrais de movimento* e são discutidas no Capítulo 3.

[2] Esta grandeza pode ter significado da probabilidade em Mecânica Quântica ou de Intensidade do campo elétrico em ótica.

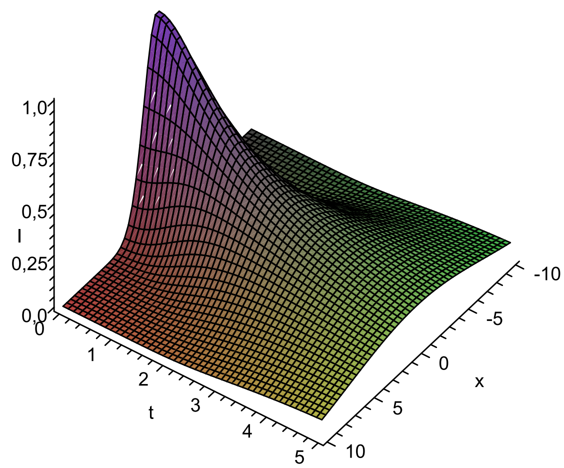

Figura 2.4: Evolução do pacote Gaussiano com largura $x_0 = 1$ e amplitude $A_0 = 1$.

2.3 Ondas dispersivas: consideração geral

Para generalizar os resultados considerado até agora e consideremos a propagação dum pacote de ondas $u(x,t)$ linear com uma lei de dispersão geral $\omega = \omega(k)$. Como vimos o pacote pode ser representado na forma de *sobreposição de ondas periódicas*

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} U(k-k_0)e^{i(kx-\omega(k)t)}dk \tag{2.3.1}$$

onde indicamos explicitamente o número de onda k_0 em que a função $U(k)$ tem o seu máximo.

Recordamos, que uma onda periódica com o número de onda k_0 é dada por (2.1.1) com $k = k_0$. Esta solução também pode ser obtida a partir da fórmula (2.3.1) se nós admitimos que

$$U(k) = A_0\delta(k), \tag{2.3.2}$$

onde $\delta(k)$ é a função δ de Dirac. Agora admitimos que o pacote 'é composto' por mais do que uma onda, i.e., é mesmo um pacote, mas que se caracteriza pelo número de onda central k_0 na vizinhança do qual é bem localizado como

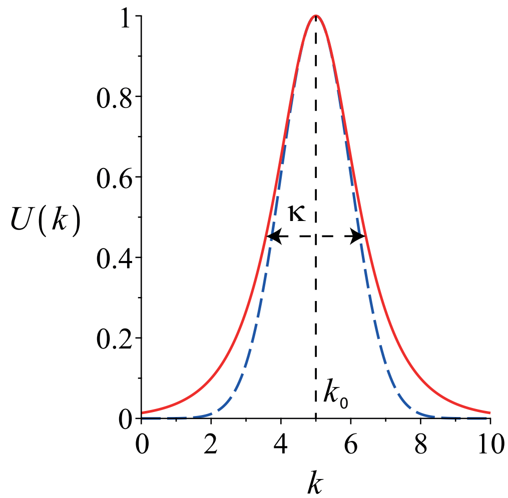

Figura 2.5: Uma distribuição $U(k)$ (linha sólida vermelha) para um pacote de ondas e aproximação dela pelo Gaussiano (2.3.3).

se ilustra na Figura 2.5. Para simular esta situação matematicamente, vamos usar função $\delta_\kappa(k)$ *underlimit* definida como

$$\delta_\kappa(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\kappa} e^{-k^2/(2\kappa^2)} \tag{2.3.3}$$

que tem propriedade $\delta_\kappa(k) \to \delta(k)$ quando $\kappa \to 0$. Respetivamente consideremos

$$U(k-k_0) = A_0 \delta_\kappa(k-k_0) = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\kappa} e^{-(k-k_0)^2/(2\kappa^2)}. \tag{2.3.4}$$

Se κ é muito pequeno e a função $U(k)$ é suficientemente aguda e bem localizada, of valores do k que essencialmente contribuem para a integral (2.3.1) são aqueles que se encontram na vizinhança do k_0. Neste case podemos desenvolver $\omega(k)$ em série de Taylor:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{\omega''(k_0)}{2}(k-k_0)^2 + \mathcal{O}\left((k-k_0)^3\right) \tag{2.3.5}$$

Isto leva-nos a aproximação

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} U(k-k_0)e^{i(kx-\omega(k_0)t-\omega'(k_0)(k-k_0)t-\omega''(k_0)(k-k_0)^2t/2)}dk \\
&= e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{\infty} U(k-k_0)e^{i((k-k_0)x-v_g(k_0)(k-k_0)t-\omega''(k_0)(k-k_0)^2t/2)}dk \\
&= A_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\kappa(k-k_0)e^{i(kx-v_g(k_0)kt-\omega''(k_0)k^2t/2)}dk \\
&= A_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-v_g(k_0)t)-k^2[1/\kappa^2+i\omega''(k_0)t]/2}dk
\end{aligned}
\tag{2.3.6}
$$

onde nós usamos $\omega_0 = \omega(k_0)$ e $v_g(k_0) = \omega'(k_0)$. Agora usamos o valor da integral

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2\sigma/2+i\xi k}dk = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}}e^{-\xi^2/(2\sigma)}, \qquad \mathrm{Re}\,\sigma > 0 \tag{2.3.7}
$$

com

$$
\xi = (x - v_g(k_0)t), \qquad \sigma = \frac{1}{\kappa^2} + i\omega''(k_0)t
$$

para calcular na aproximação usada com $|\sigma| \gg k_0^2$ (uma vez que o limite que estamos a considerar corresponde a $\kappa \ll k_0$.):

$$
\boxed{u(x,t) = \underbrace{A_0e^{i(k_0x-\omega_0t)}}_{\text{onda portadora}}\cdot\underbrace{\frac{1}{\kappa\sqrt{\sigma}}e^{-\xi^2/(2\sigma)}}_{\text{envelope}}} \tag{2.3.8}
$$

O primeiro termo nesta expressão descreve uma onda plana a amplitude da qual é limitada pela função suave – o segundo termo. Na expressão (2.3.8) a onda plana chama-se *a onda portadora*[3], e a função que limita a amplitude da onda plana chama-se o *envelope*[4]. Neste caso temos uma analogia com o fenómeno de batimentos decrito na Sec. 1.2.1. Para visualizar este fenômeno, calculamos a intensidade de onda

$$
\begin{aligned}
|u(x,t)|^2 &= \frac{|A_0|^2}{\kappa^2|\sigma|}\exp\left[-\frac{\xi^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\bar\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{|A_0|^2}{\Delta(t)}\exp\left[-\frac{\kappa^2(x-v_g(k_0)t)^2}{2\Delta^2(t)}\right].
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

[3] *carrirer wave* em inglês
[4] *envelope* em inglês.

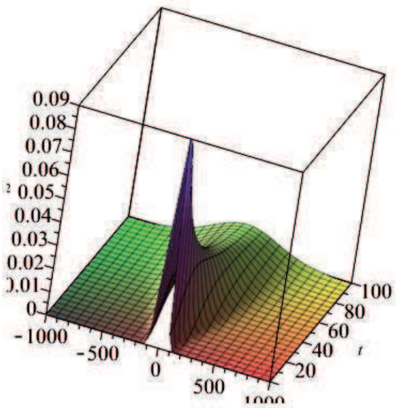

Figura 2.6: Propagação dum envelope, descrito pelas equações (2.3.9) e (2.3.10) com $\kappa = 0.3$, $A_0 = 1$ para ondas da equação (1.5.16) com a lei de dispersão (2.2.1) a $k_0 = 0.3$ com $\omega_0 = 1$ e $c = 1$.

onde

$$\Delta(t) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^4} + (\omega''(k_0)t)^2}. \tag{2.3.10}$$

O gráfico na Figura 2.6 ilustra a propagação da intensidade de envelope da equação (1.5.16) com a lei de dispersão (2.2.1).

A grandeza

$$\boxed{\frac{d^2\omega(k)}{dk^2} = \frac{dv_g(k)}{dk}} \tag{2.3.11}$$

que descreve variação da velocidade de grupo com numero de onda refere-se como *coeficiente de dispersão* e está diretamente ligada com uma outra caractéristica

$$GVD = \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{v_g(\omega)}\right) \tag{2.3.12}$$

que se-chama *dispersão de velocidade de grupo*[5] e que usa que a velocidade de grupo pode ser vista como uma função de frequência

$$v_g = v_g(\omega) = \frac{dk(\omega)}{dk} \tag{2.3.13}$$

[5] *Group Velocity Dispersion (GVD)* em inglês.

e portanto

$$\boxed{GVD = \frac{d^2k(\omega)}{d\omega^2}} \tag{2.3.14}$$

Neste último caso a lei de dispersão escreve-se como

$$k = k(\omega). \tag{2.3.15}$$

Entre as velocidades de grupo e de fase existe uma relação, que se chama a *fórmula de Rayleigh*

$$v_g = v_f + k\frac{dv_f}{dk} = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} \tag{2.3.16}$$

que demonstra-se no Exercício 7 na página 33. Verificamos que há duas situações da *dispersão normal*

$$v_g < v_f \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv_f}{d\lambda} > 0 \tag{2.3.17}$$

quando ondas mais longas são mais rápidas e a *dispersão anómala*

$$v_g > v_f \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv_f}{d\lambda} < 0 \tag{2.3.18}$$

quando ondas mais curtas são mais rápidas.

2.4 Significado da intensidade de envelope

A solução (2.3.8) é uma função complexa. Para calcular a intensidade dum campo real (que pode ser medio em laboratório) devemos analisar as grandezas reais, i.e. usar $u_r = \mathrm{Re}\, u(x,t)$ em vez de $u(x,t)$, i.e., a intensidade é dada por $I = u_r^2$. Por isso surge a questão do significado físico do valor $|u(x,t)|$, que calculamos encima. Para encontrar resposta, vamos tomar em conta que a onda portadora é uma função que varia muito rápido em comparação com o envelope, e vamos calcular a intensidade média pelo período da onda portadora. Mais precisamente usamos a definição para um valor médio pelo intervalo do tempo T duma função $f(t)$

$$\langle f(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt. \tag{2.4.1}$$

Respetivamente definimos $T = 2\pi/\omega_0$, representamos $A_0 = |A_0|e^{i\varphi}$, e para simplificar as contas designamos

$$\frac{1}{\kappa\sqrt{\sigma}} e^{-\xi^2/(2\sigma)} =: f = f_r + i f_i. \tag{2.4.2}$$

A partir de (2.3.8) calculamos

$$\begin{aligned}\langle u_r^2 \rangle &= \frac{|A_0|^2}{T} \int_0^T \left[\cos^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi) f_r - \sin(k_0 x - \omega_0 t + \varphi) f_i\right]^2 dt \\ &= \frac{|A_0|^2}{T} \int_0^T \left[\cos^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi) f_r^2 + \sin(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)^2 f_i^2 \right. \\ &\qquad \left. -2\cos^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\sin^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi) f_r f_i \right] dt \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Podemos aproximar

$$\begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T \cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)^2 f_r^2 dt \approx f_r^2 \langle \cos^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{f_r^2}{2} \\ &\frac{1}{T}\int_0^T \sin(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)^2 f_i^2 dt \approx f_i^2 \langle \sin^2(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\rangle = \frac{f_i^2}{2} \\ &\frac{1}{T}\int_0^T \cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\sin(k_0 x - \omega_0 t + \varphi) f_r f_i dt \approx \\ &\quad \approx f_r f_i \langle \cos(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\sin(k_0 x - \omega_0 t + \varphi)\rangle = 0 \end{aligned}$$

Assim temos

$$\langle u_r^2 \rangle = \frac{|A_0|^2}{2}(f_r^2 + f_i^2) = \frac{|A_0|^2}{2}\left|\frac{1}{\kappa\sqrt{\sigma}} e^{-\xi^2/(2\sigma)}\right|^2 = \frac{1}{2}|u(x,t)|^2. \tag{2.4.4}$$

2.5 Efeito Doppler.

Nesta cadeira nós focamos sobre propagação de ondas, sem entrar em detalhes de excitação (ou emissão) e de deteção (ou receção) de ondas. Entretanto, pode acontecer que as frequências duma onda emitida por uma fonte e detetada por um observador pode não ser iguais. Isto acontece se a fonte e o observador se encontram num movimento relativo um ao outro. Este fenômeno, que se chama *efeito Doppler* (veja ilustração na Figura 2.7). Consideremos o efeito Doppler para uma onda que se descreve pela equação

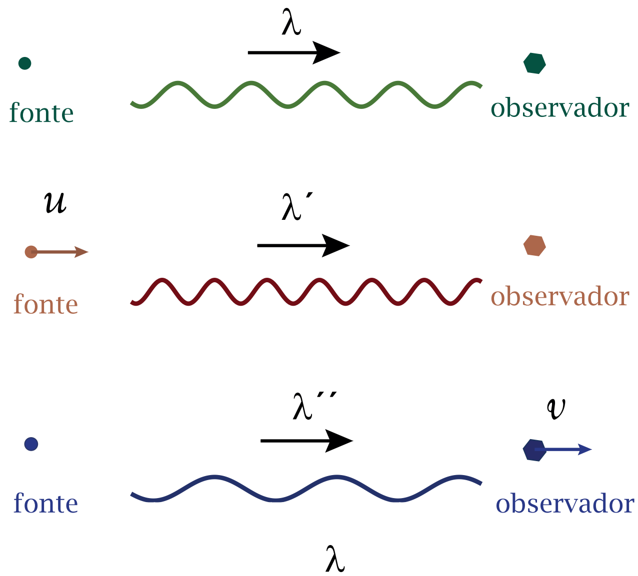

Figura 2.7: Ilustração do efeito Doppler.

de onda (1.4.7) admitindo o limite não relativista, i.e., a validade transformação de Galileu. As velocidades da fonte u e do observador v, são menores do que a velocidade c.

Suponhamos que a frequência duma fonte que esta em repouso é $\nu = 1/T$ e o comprimento de onda emitida é λ. A lei de dispersão (2.1.4) determina que $\nu\lambda = c$. Consideremos um intervalo do tempo de emissão igual a um período de onda, i.e. $T = 1/\nu$. Se a $t = 0$ a amplitude da onda tinha mínimo na fonte, o mínimo seguinte vai aparecer no instante $t = T$. Suponhamos agora, que a fonte propaga-se na direção do observador com a velocidade u (i.e., $u > 0$) como se mostra a linha no meio na Figura 2.7, e que a frequência de emissão de onda se mantem ν. Neste caso a distância entre dois sucessivos mínimos da amplitude de onda após do intervalo de tempo T será $(c-u)T = (c-u)/\nu$ o que é exatamente o comprimento de onda emitido neste caso, i.e. $\lambda' = (c-u)/\nu$. Entretanto para o observador vai detetar a frequência ν' que é ligada com o comprimento de onda ditada pela lei de dispersão, i.e., $\nu'\lambda' = c$. Logo obtemos

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c-u}\nu > \nu. \tag{2.5.1}$$

Agora consideramos que a mesma fonte fica em repouso enquanto o observador desloca-se com a velocidade $v > 0$ no sentido fora da fonte (a linha no embaixo na Figura 2.7). Podemos usar o argumento anterior se vamos mudar para o sistema de coordenadas que se move com a velocidade v do observador. Para isso basta em (2.5.1) substituir $u \to -v$ e $c \to c - v$ (i.e., fazer transformação de Galileu), logo obtemos, que a frequência registada pelo observador será

$$\nu'' = \frac{c-v}{c}\nu < \nu. \tag{2.5.2}$$

Os casos $\nu' > \nu$ (2.5.1) $\nu'' < \nu$ (2.5.2) referem-se como *blue detuning* (desvio para azul) e *red detuning* (desvio para vermelho), respetivamente. Se combinamos dois tipos de movimento, i.e., o movimento do observador e da fonte obtemos que o observador deteta a frequência

$$\nu''' = \frac{c-v}{c-u}\nu. \tag{2.5.3}$$

2.6 Exercícios

1. Calcule a lei de dispersão das ondas lineares no sistema de osciladores acoplados no limite contínuo (Exercício 17 na página 15) a partir da equação (1.5.16). Compare com a lei de dispersão do sistema discreto e explique de ponto de vista físico as diferenças obtidas.

2. [3, 7] Verificar que $u_+ = f(x-ct)$, $u_- = g(x+ct)$, e $u = f(x-ct) + g(x+ct)$, onde $f(z)$ e $g(z)$ são funções duas vezes diferenciáveis, são soluções da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.6.1}$$

   (a) Dar interpretação física destas soluções

   (b) Demonstrar que a equação de onda pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) u = 0 \tag{2.6.2}$$

   (c) Demonstrar que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) g = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0 \tag{2.6.3}$$

(d) Introduzimos as novas coordenadas $\xi = x - ct$ e $\eta = x + ct$. Escrever a equação de onda nestas novas coordenadas.

(e) Obter a solução de equação de onda que satisfaz as condições iniciais $u(x,0) = u_0(x)$ e $u_t(x,0) = u_1(x)$.

3. [7] Para as equações seguintes ($\alpha > 0$)

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = 0 \tag{2.6.4}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \omega_0^2 \psi = 0 \tag{2.6.5}$$

obter as leis de dispersão $\omega(k)$, as velocidades de grupo $v(k)$, e os coeficientes de dispersão $\omega'' = dv(k)/dk$ respectívos. Fazer os gráficos de $\omega(k)$, de $v(k)$, e de ω''.

4. [3] A lei de dispersão para ondas superficiais na água (não viscosa e incompressível) - *gravity-capillary waves* - de densidade ρ é dada por

$$\omega^2(k) = \left(gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3\right)\tanh(kh), \tag{2.6.6}$$

onde σ é a tensão superficial, g é a aceleração da gravidade e h é a profundidade da água. O comprimento de onda designamos por λ. Quando $h \ll \lambda$ - a água é de pouca profundidade, e se $h \gg \lambda$ diz-se que a água é profunda.

(a) Demonstrar que quando a gravidade e a tensão superficial são ambos importantes e $h \gg \lambda$ a velocidade de fase da onda é minimal quando $v^4 = 4g\sigma/\rho$, onde v é a velocidade de fase. Demostre que isto acontece ao comprimento de onda crítico $\lambda_c = 2\pi\sqrt{\sigma/\rho g}$

(b) Se $\lambda \gg \lambda_c$ a tensão superficial desprezável e diz-se que a onda é gravítica. Demonstrar que a onda gravítica em água pouco profunda não tem dispersão e se propaga com a velocidade $v = \sqrt{gh}$.

(c) Calcule a velocidade de grupo $v_g(k)$ para ondas gravíticas-capilares.

(d) Demonstre que ondas gravíticas na água profunda têm a velocidade de fase $v = \sqrt{g/k}$ e $v_g(k) = v(k)/2$.

(e) A condição $\lambda < \lambda_c$ determina *ondulação* (dominada pela tensão superficial). Demostre que a ondulação na agua profunda tem a velocidade de fase $v = \sqrt{\sigma k/\rho}$ e a velocidade de grupo $v_g = 3v/2$.

5. [7] Uma onda num meio não local descreve-se pela equação

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - i\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x-x')\psi(x',t)dx' = 0 \tag{2.6.7}$$

   Calcule a lei de dispersão, a velocidade de grupo, e a dispersão de velocidade de grupo.

6. [7] Considere as leis de dispersão seguintes

$$(i)\ \omega = vk + \omega_0, \quad (ii)\ \omega^2 = \omega_0^2 + \alpha k^2 + \beta k^3, \quad (iii)\ \omega^2 = \frac{c^2k^2}{1+r^2k^2}$$

   faser esboços de $v_f(k)$ e $v_g(k)$.

   (a) Calcule as velocidades de fase $v_f(k)$ e de grupo $v_g(k)$ respetivos
   (b) Sugere as equações ondulatórias que descrevem ondas com estas leis de dispersão.

7. [3, 7] Suponha que $\lambda = 2\pi/k$ é o comprimento duma onda com a frequência ω. Demonstre a fórmula de Rayleigh que liga a velocidade de fase v_f e a velocidade de grupo v_g:

$$v_g = v_f - \lambda\frac{dv_f}{d\lambda} \tag{2.6.8}$$

8. [3] Um pacote de ondas consiste de duas ondas de comprimento λ e $\lambda + \Delta\lambda$, onde $\Delta\lambda/\lambda \ll 1$. Demonstre que o número de comprimentos de onda λ entre dois zeros da envelope de modulação é $\approx \lambda/\Delta\lambda$.

   Explore analogia entre este fenômeno e os batimentos de oscilações harmónicas descritas na Sec. 1.2.1.

9. [2] Considere sobreposição de duas ondas

$$u_1 = A\cos(\omega t - kx + \pi), \qquad u_2 = A\cos\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.6.9}$$

   Calcule a intensidade media (no tempo).

10. [2] Considere sobreposição de três ondas

$$E_\alpha = E_0\cos(kx - \omega t - \delta_\alpha), \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{2.6.10}$$

   Encontre os valores máximo e mínimo de amplitude que se pode produzir por ajustamento das fases constantes δ_1, δ_2 e δ_3

11. Considere o impulso que tem a forma

$$u(t) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{para } t_1 < t < t_2 \\ 0 & \text{para } t < t_1 \text{ e } t > t_2 \end{cases} \tag{2.6.11}$$

onde $\Delta t = t_2 - t_1$. Demonstre que este impulso admite representação Fourier na forma

$$u(t) = \int_0^\infty A(\omega) \cos[\omega(t - t_0)] d\omega, \tag{2.6.12}$$

onde

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\frac{1}{2}\Delta t\omega)}{\Delta t\omega} \quad \text{e} \quad t_0 = \frac{t_2 + t_1}{2} \tag{2.6.13}$$

Faça o esboço da função $A(\omega)$.

Capítulo 3

Ondas progressivas e ondas estacionárias.

3.1 Ondas transversais numa corda

Nós deduzimos a equação de onda (1.4.7) como um limite contínuo de propagação de excitações numa cadeia de osciladores. Entretanto a equação é genérica, como nós vamos ver alguns outros exemplos outros exemplos físicos de aplicação dela. E começámos por descrever oscilações transversais (na direção y) numa corda estendida ao longo do eixo x como se ilustra a Figura 3.1[1]. Nesta figura mostra-se a posição instantânea, num dado intervalo de tempo t, dum intervalo curto, de comprimento $d\ell$, que é sujeito as forças de tensão $\boldsymbol{T}_1 = (T_{1x}, T_{1y})$ e $\boldsymbol{T}_2 = (T_{2x}, T_{2y})$ (de lado esquerdo e direito respetivamente). A condição importante que vamos usar é que o ângulo θ de inclinação do segmento em ralação ao eixo x é pequeno:

$$|\theta| \ll 1 \tag{3.1.1}$$

Começamos por extressar o comprimento de corda em coordenadas (x, y):

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dx \approx \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx \tag{3.1.2}$$

[1] O mesmo tipo de analise pode encontrar em [3].

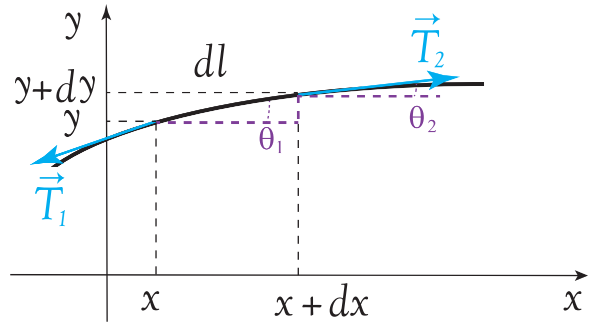

Figura 3.1: Deslocamento vertical duma corda.

Nota-se que aqui usamos a aproximação $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ válida para $|x| \ll 1$, uma vez que devido a condição (3.1.1) tem-se

$$|\frac{dy}{dx}| = |\tan\theta| \approx |\theta| \ll 1, \tag{3.1.3}$$

e substituímos a derivada total dy/dx, que era obtida para um dado intervalo do tempo t pela derivada parcial $\partial y/\partial x$ que toma em conta que a coordenada y pode variar-se com tempo (o que será usado a seguir).

A massa do elemento $d\ell$ da corda determina-se através da densidade linear do material da corda ρ como

$$m = \rho d\ell \approx \rho dx \tag{3.1.4}$$

onde usamos a primeira ordem da aproximação (3.1.1). Para calcular a força, que atua ao longo do eixo y observamos que

$$T_{2x} = -T_{1x} \quad \Rightarrow \quad |T_{2x}| \approx |T_{1x}| \approx |\boldsymbol{T}_2| \approx |\boldsymbol{T}_1| = T \tag{3.1.5}$$

uma vez que não há movimento ao longo de eixo x e, portanto, a força de tensão resultante que atua sobre o segmento é dada por

$$\begin{aligned} T_{2y} - T_{1y} &= T_{2x}\tan\theta_2 - T_{1x}\tan\theta_1 \\ &\approx T\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x\right] \approx T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

onde usamos que na aproximação (3.1.1) tem-se $\tan\theta \approx \theta$. Tendo em conta que a aceleração na direção y é dada por $\partial^2 y/\partial t^2$ podemos escrever a Segunda Lei de Newton na forma

$$\rho\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)dx = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \tag{3.1.7}$$

Logo chegamos a equação de onda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.8}$$

onde a velocidade de ondas transversais é dada por

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{3.1.9}$$

3.2 Reflexão e transmissão duma onda progerssiva

Até agora nós analisamos meios estacionários e homogéneos, i.e., meios que têm parâmetros que não dependem nem do tempo nem do ponto no espaço. Agora vamos analisar o que acontece quando uma onda se propaga através de fronteira entre dois meios diferentes.

Consideremos uma corda ao longo do eixo x que tem densidades lineares diferentes: ρ_1 para $x < 0$ e ρ_2 para $x > 0$. Respetivamente temos as velocidades c_1 e c_2 para $x < 0$ e $x > 0$. Suponhamos que uma onda progressiva com o numero de onda k e a frequencia ω, se propaga ao longo a corda de $x = -\infty$ no sentido positivo (como se ilustra a Figura 3.2). O campo de deslocamentos verticais vamos denominar como o campo incidente. Temos

$$y_i = Ae^{i(kx-\omega t)} \tag{3.2.1}$$

Vamos analisar o que acontece quanto a onda atravessa a "fronteira"em $x = 0$ entre partes da corda com caraterísticas diferentes. Podemos esperar, que uma parte de energia da onda será refletida pela fronteira: chamamos onda refletida u_r, uma parte será transmitida através da fronteira: chamamos onda transmitida, u_t. Vamos designar as frequências, números de onda, e amplitudes da onda refletida (transmitida) por ω_1, k_1, e A_1 (respetivamente ω_2, k_2 e A_2). Portanto temos

$$y_r = A_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)}, \qquad y_t = A_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)} \tag{3.2.2}$$

Nas definições introduzidas, u usando o princípio de sobreposição podemos escrever o campo de deslocamentos verticais como

$$y_-(x,t) = y_i(x,t) + y_r(x,t), \quad x < 0, \qquad y_+(x,t) = y_t(x,t), \quad x > 0 \tag{3.2.3}$$

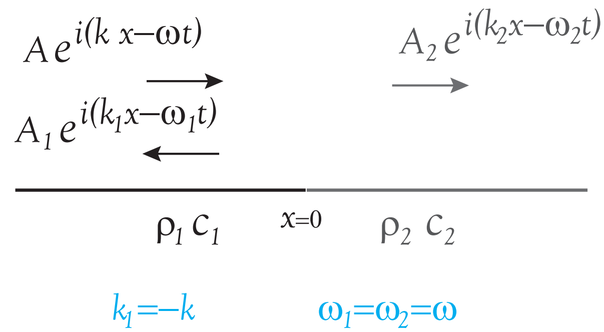

Figura 3.2: Representação esquemática de reflexão e de transmissão duma onda progressiva por uma fronteira entre dois meios. Em azul mostram-se as relações entre números de onda e frequências no caso descrito no texto.

Uma vez que todas as ondas (incidente, refletida e transmitida) devem resolver a equação de onda com so parâmetros respetivos, i.e., com a velocidade de onda do meio correspondente:

$$\frac{\partial^2 y_-}{\partial x^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 y_-}{\partial t^2} = 0, \qquad x < 0 \tag{3.2.4}$$

$$\frac{\partial^2 y_+}{\partial x^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2 y_+}{\partial t^2} = 0, \qquad x > 0 \tag{3.2.5}$$

devem verificar-se as leis de dispersão

$$\omega k = \omega_1 |k_1| = c_1, \qquad \omega_2 k_2 = c_2. \tag{3.2.6}$$

Colocamos o problema de obtenção de todas as características de ondas refletida e transmitida, i.e., o *problema de de dispersão* (de espalhamento). Para isso devemos estabelecer as condições de fronteira:

(i) Continuidade de deslocamento

$$u_-(0,t) = u_+(0,t) \tag{3.2.7}$$

(ii) Continuidade de força (a Terceira Lei de Newton)

$$\left.\frac{\partial u_-}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u_+}{\partial x}\right|_{x=0} \tag{3.2.8}$$

Vamos aplicar primeiramente a condição (3.2.7). No ponto $x = 0$ temos:

$$Ae^{-i\omega t} + A_1 e^{-i\omega_1 t} = A_2 e^{-i\omega_2 t} \tag{3.2.9}$$

Podemos reescrever esta equação na forma

$$A = -A_1 e^{i(\omega-\omega_1)t} + A_2 e^{i(\omega-\omega_2)t} \tag{3.2.10}$$

Uma vez que esta igualdade deve ser válida para qualquer instante do tempo concluimos que

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 \tag{3.2.11}$$

i.e., as frequências das ondas refletida e transmitida são iguais a frequência da onda incidente. Uma consequência imediata da igualdade de frequências (3.2.11) é que a partir de (3.2.6) concluímos, que $|k_1| = k$, e portanto $k_1 = -k$.

Mais genericamente, uma vez que as frequências são iguais podemos considerar uma onda monocromática

$$y_i = e^{-i\omega t} u_i(x), \quad y_r = e^{-i\omega t} u_r(x), \quad y_t = e^{-i\omega t} u_t(x) \tag{3.2.12}$$

e portanto $y_\pm = u_\pm e^{-i\omega t}$ e logo em vez de (3.2.4) e (3.2.5) considerar o *problema de espalhamento estacionário*

$$\frac{d^2 u_-}{dx^2} + k^2 u_- = 0, \qquad \frac{d^2 u_+}{dx^2} + k_2^2 u_+ = 0, \tag{3.2.13}$$

onde usamos (3.2.6) e (3.2.11), i.e.,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2}, \qquad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}. \tag{3.2.14}$$

Uma vez que as condições de fronteira não dependem do tempo explicitamente também podemos usar (3.2.7) e (3.2.8) com $y_\pm$ substituídos por $u_\pm$.

Assim podemos "excluir"o tempo de consideração e reescrever (3.2.9) como

$$1 + r = t \tag{3.2.15}$$

onde nós definimos o *coeficiente de reflexão* r e de o *coeficiente de transmissão* t [2]

$$r = \frac{A_1}{A}, \qquad t = \frac{A_2}{A} \tag{3.2.16}$$

[2] Não confundir com o tempo, que não vai figurar no problema de dispersão estacionário.

A condição (3.2.8) agora pode ser escrita como

$$k(1-r) = k_2 t. \tag{3.2.17}$$

Equações algébricas (3.2.15) e (3.2.17) facilmente resolvem-se:

$$r = \frac{k-k_2}{k+k_2}, \quad t = \frac{2k}{k+k_2} \tag{3.2.18}$$

Os coeficientes de reflexão e de refração obtidos são expressões em termos dos úmeros de onda incidente (k) e transmitida (k_2). Para relacionar os parâmetros de espalhamento diretamente com as caraterísticas físicas da corda introduzimos a *impedância* (transversal):

$$Z = \frac{T}{c} = \rho c \tag{3.2.19}$$

O significado físico desta grandeza pode ser esclarecido se consideremos uma onda progressiva

$$y = A_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \tag{3.2.20}$$

e calculamos a força que atua no sentido vertical

$$F = -T\frac{\partial y}{\partial x} = kA_0 T \sin(kx - \omega t + \varphi) \tag{3.2.21}$$

e a velocidade (do elemento infinitezimal) da corda

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A_0 T \sin(kx - \omega t + \varphi). \tag{3.2.22}$$

Usando a lei de dispersão (3.2.6) obtemos

$$\frac{F}{v} = \frac{kT}{\omega} = \frac{T}{c} = Z \tag{3.2.23}$$

Logo

$$\text{impedância} = \frac{\text{força transversal}}{\text{velocidade transversal}}. \tag{3.2.24}$$

Agora podemos verificar que os coeficientes de reflexão e de transmissão se escrevem como

$$r = \frac{Z-Z_2}{Z+Z_2}, \quad t = \frac{2Z}{Z+Z_2}. \tag{3.2.25}$$

Em particular, obtemos que

$$r \to -1, \quad t \to 0 \quad \text{se} \quad Z_2 \to \infty \tag{3.2.26}$$

i.e., quando a impedância da rate da corda sobre a qual a onda é incidente se torna infinita acontece a reflecção total com a alteração da fase π; onde usa-se que $-1 = e^{i\pi}$ e portanto $\varphi \to \varphi + \pi$.

3.3 Energia duma onda

Nós já usamos os argumentos da energia em muitas considerações. Mas até agora consideramos só a energia de osciladores individuais e de interação entre vizinhos. Agora vamos definir a energia duma onda. Para perceber o significado físico desta definição usamos os argumentos do limite contínuo e analogia com a rede de osciladores.

Vamos uzar o exemplo da corda. Energia cinética de cadeia de osciladores é dada por

$$E_{\text{cin}}^{\text{osc}} = \frac{1}{2}\sum_{n} m\left(\frac{du_n}{dt}\right)^2 \tag{3.3.1}$$

No limite contínuo $u_n(t) \to y(x,t)$ e $m \to \rho dx$, e portanto neste limite

$$E_{\text{cin}}^{\text{corda}} = \frac{1}{2}\int \rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \tag{3.3.2}$$

Energia potencial de cadeia de osciladores é dada por

$$E_{\text{pot}}^{\text{osc}} = \frac{1}{2}\sum_{n} \kappa\left(u_{n+1} - u_n\right)^2 \tag{3.3.3}$$

Calculamos a energia potencial duma corda pela fármula

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}}^{\text{corda}} = \int T(d\ell - dx) = \int T\left[\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) - 1\right] dx \\ = \frac{1}{2}T\int\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

onde usamos (3.1.2). Uma vez que a energia da corda se define como

$$E_{\text{tot}}^{\text{corda}} = E_{\text{cin}}^{\text{corda}} + E_{\text{pot}}^{\text{corda}} \tag{3.3.5}$$

e tendo em conta que a dinâmica da corda é descrita pela equação de onda, podemos formula o resultado final, que escrevemos na forma adimensional, i.e., substituindo $y(x,t)$ por $u(x,t)$ e $E_{\text{tot}}^{\text{corda}}/T$ por E:

> A *energia E duma onda*, que se descreva pela equação de onda (adimensional)
>
> $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3.3.6}$$

é dada por

$$E = \int \mathcal{E}(x,t)dx, \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] \quad (3.3.7)$$

onde $\mathcal{E}(x,t)$ é a *densidade linear de energia* da onda.

3.4 Exercícios

1. [3] Deslocamento numa onda que se propaga numa corda tem a forma

$$y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + rA\cos(\omega t + kx) \quad (3.4.1)$$

onde r é o coeficiente de reflexão. Demonstre, que esta solução ainda admite a representação em forma de sobreposição de duas ondas:

$$y(x,t) = A(1+r)\cos(\omega t)\cos(kx) + A(1-r)\sin(\omega t)\sin(kx) \quad (3.4.2)$$

2. [3] Demonstre que a alteração da frequência detetada pelo observador no instante quando a fonte passa ele é dada por $\Delta\nu = \dfrac{2\nu c v}{c^2 - v^2}$, onde $c = \nu\lambda$ é a velocidade de propagação da onda e v é a velocidade da fonte.

3. [3] A luz duma estrela com o cumprimento de onda $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ é deslocado por $\Delta\lambda = 10^{-11}$m para vermelho quando se compara com uma fonte laboratorial de mesmo cumprimento de onda. Tomando em conta que a velocidade da Luz é aproximadamente 3×10^8m/s demonstre que a Terra e a estrela se separam com a velocidade de 5 km/s.

4. Demonstre que N definido em (2.2.13) é uma integral de movimento da equação de Schrödinger (2.2.3).

5. Demonstre que a grandeza

$$E = \frac{1}{2}\int (u_t^2 + v_0^2 u_x^2 + \omega_0^2 u^2)dx \quad (3.4.3)$$

onde $u = u(x,t)$ satisfaz a equação (2.6.4) i.e.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = 0 \quad (3.4.4)$$

não depende do tempo (i.e. é uma integral de movimento): $dE/dt = 0$.

6. Demonstrar que

$$E = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3} \left[u_t^2 + (\nabla u)^2\right] d^3\boldsymbol{r}$$

com $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ é uma integral de movimento da equação de onda tridimensional:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (3.4.5)$$

Considera-se, que as integrais existem.

7. Considere uma cadeia de massas m ligadas com molas com a constante elástica K, que é descrita pelo Hamiltoniano

$$H = \sum_n \left[\frac{p_n^2}{2m} + \frac{K}{2}(u_{n+1} - u_n)^2\right]. \qquad (3.4.6)$$

   (a) Obtenha equações de movimento na forma da Segunda Lei de Newton (i.e. para d^2u_n/dt^2);
   (b) Demonstre pelo cálculo direto que $dH/dt = 0$.

Capítulo 4

Ondas acústicas

4.1 Alguns teoremas matemáticos

Considere um campo vetorial $\boldsymbol{F}$ (que pode ser, por exemplo, o campo de velocidades de escoamento dum fluido $\boldsymbol{v}$, o campo elétrico $\boldsymbol{E}$, o campo magnético $\boldsymbol{B}$, etc.) e uma superfície $\mathcal{S}$. A integral $\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}$, onde $d\boldsymbol{\Sigma}$ é normal à superfície e $|d\boldsymbol{\Sigma}| = d\Sigma$ é a área do elemento da superfície respectivo, chama-se *o fluxo do campo $\boldsymbol{F}$ através da superfície S*. Se a superfície é fechada

O teorema de Gauss

> *O fluxo do campo $\boldsymbol{F}$ através duma superfície fechada $\mathcal{S}$ é igual á integral da divergência do campo pelo volume V limitado por esta superfície*:
>
> $$\oiint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint\limits_{V} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, dV \,. \tag{4.1.1}$$
>
> (a direção do vector $d\boldsymbol{\Sigma}$ entende-se no sentido para exterior do volume)

O operador ∇ em sistema de coordenadas cartesianas é

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{4.1.2}$$

onde $\boldsymbol{i}_\alpha$ $(\alpha = x, y, z)$ são os versores, e

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} \equiv \mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \tag{4.1.3}$$

é *a divergência do* $\boldsymbol{F}$.

Consideremos um contorno fechado ℓ no espaço do campo $\boldsymbol{F}$. *O teorema de Stokes*

> *A integral curvilíneo dum campo vectorial ao longo duma curva fechada é iqual ao fluxo do rotacional deste campo através da superfície limitada pela curva*:
>
> $$\oint\limits_l \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{l} = \iint\limits_{\mathcal{S}} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot d\boldsymbol{S}\,. \tag{4.1.4}$$
>
> onde $\oint_l d\boldsymbol{l}$ é a integral de linha ao longo da curva ℓ.

Em sistema de coordenadas cartesianas o rotacional é dado por

$$\nabla \times \boldsymbol{F} \equiv \mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{4.1.5}$$

O teorema de gradiente

$$\oiint_{\mathcal{S}} \Phi \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = \iiint\limits_V \nabla\Phi \, dV\,. \tag{4.1.6}$$

4.1.1 Equações de hidrodinâmica.

A equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho\mathbf{v}) = 0 \tag{4.1.7}$$

A equação de Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P \tag{4.1.8}$$

4.2 Exercícios

1. [3] Considere ondas acusticas num tubo de comprimento ℓ com

   (a) os dois lados abertos, i.e. com as condições de fronteira:

   $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0 \tag{4.2.1a}$$

   (b) um lado aberto ($x = 0$) e um lado fechado ($x = \ell$), i.e. com as condições de fronteira:

   $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u_{x=\ell} = 0 \tag{4.2.1b}$$

   Demonstre que as harmonicas em cada destes casos são

   $$\begin{array}{ll} (a) & u = A\cos kx \sin(\omega t) \quad \text{com} \quad \lambda = \dfrac{2\ell}{n} \\ (b) & u = A\cos kx \sin(\omega t) \quad \text{com} \quad \lambda = \dfrac{4\ell}{2n+1} \end{array}$$

   Faça esboço dos primeiros três modos para cada dos casos.

   Calcule as energias estacionárias em cada dos casos

2. [3] Considere as ondas sonoras no ar.

   (a) Considerando que a densidade do ar é de 1.29 kg/m^3 e a velocidade do som é de 330m/s, demostre que a pressão acustica para um som doloroso de intensidade 10 W/m^2 $\approx 6.5\times10^{-4}$ atmosfera.

   (b) Demonstre que a amplitude de deslocamento duma molecula do ar no nivel de som doloroso com a freqência de 500 Hz $\approx 6.9 \times 10^{-5}$m.

Capítulo 5

Ondas electromagnéticas

5.1 Equações de Maxwell no vácuo

5.1.1 As leis da teoria de electromagnetismo.

A lei de Gauss[1]

> *O fluxo do campo eléctrico através de uma superfície fechada é proporcional à carga total no interior do volume limitado por esta superfície*:
> $$\oiint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{\Sigma} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \, dV \qquad (5.1.1)$$

Aqui ρ é a densidade da carga dentro do volume V, ε_0 chama-se *permitividade do vácuo* e tem o valor em unidades SI [a unidade de carga é *coulomb* (C) e a unidade da intensidade de corrente eléctrica é *ampère* (A)]

$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12} \, \frac{F}{m} \, \left(\frac{\text{farad}}{\text{metro}} = \frac{C^2}{N \cdot m^2} \right) .$$

[1] Johann Carl Friedrich Gauss, 1777-1855

Com o teorema de Gauss a formula (5.1.1) pode ser reescrita como

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, dV\,. \tag{5.1.2}$$

Logo temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\,. \tag{5.1.3}$$

Uma véz que não existe carga magnética, temos

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = 0$$

onde $\mathbf{B}$ é *o campo magnético* (também chama-se a indução magnética). Logo concluimos que

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,. \tag{5.1.4}$$

A lei de inducção de Faraday[2] descreve o efeito eléctrico dum campo magnético variável.

> *A circulação do campo eléctrico ao longo duma curva fechada é egual à variação negativa do fluxo magnético através da superfície limitada pela curva, na unidade do tempo.*
>
> $$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\boldsymbol{\Sigma}. \tag{5.1.5}$$

Uzando o teorema de Stokes a equação (5.1.5) reescreve-se como

$$\iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} = -\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \tag{5.1.6}$$

Portanto

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{5.1.7}$$

[2] Michael Faraday, 1791-1867

como a superfície seja arbitrária.

De acordo com a *lei de Ampére*[3]

> *A circulação do campo magnético ao longo duma curva fechada é proporcional à corrente total através da superfície limitada por esta curva*:
> $$\oint_l \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{\Sigma} \qquad (5.1.8)$$
> Aqui $\mathbf{J}$ é a densidade da corrente.

A grandeza μ_0 chama-se *permeabilidade do vácuo*. Em unidades SI

$$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7} \approx 1,26\times 10^{-6}\,\frac{H}{m}\,\left(\frac{\text{henry}}{\text{metro}} = \frac{N\cdot s^2}{C^2}\right).$$

A corecção da lei (5.1.8) foi sugerida pelo Maxwell[4] quem descobriu a necessidade de tomar em conta a variação do campo eléctrico $\varepsilon_0(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ que pode ser considerada como uma corrente complementar e chama-se *a corrente de deslocamento*. Então (5.1.8) toma a forma

$$\oint_l \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int\!\!\int_S \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{\Sigma}\,.$$

Com o teorema de Stokes esta fórmula transforma-se em

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \qquad (5.1.9)$$

Ao combinar as equações (5.1.3), (5.1.4), (5.1.7) e (5.1.9) obtemos as *equações de Maxwell*

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad (5.1.10)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad (5.1.11)$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (5.1.12)$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right). \qquad (5.1.13)$$

[3]André-Marie Ampère, 1775-1836
[4]James Clerk Maxwell, 1831-1879

5.1.2 Ondas da luz no vácuo

A equação de onda

Consideremos o vácuo onde não existe nem carga eléctrica ($\rho = 0$), nem corrente eléctrica ($\mathbf{J} = 0$). Por isso as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0\,, \tag{5.1.14}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5.1.15}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{5.1.16}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,. \tag{5.1.17}$$

Aplicamos o operador $\nabla\times$ à (5.1.16) e tomamos em conta (5.1.17):

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}\,. \tag{5.1.18}$$

Por outro lado apartir da fórmula (5.5.3) deduzimos

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla (\nabla \boldsymbol{E}) - (\nabla \nabla) \boldsymbol{E}\,. \tag{5.1.19}$$

Tomando em conta (5.1.14), apartir de (5.1.18) e (5.1.19) obtemos *a equação de onda*

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{5.1.20}$$

Analogamente obtemos

$$\Delta \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{5.1.21}$$

Ondas planas

As fórmulas (5.1.20) e (5.1.21) têm corolários importantes.

1. Cada componente da onda electromagnética satisfaz a equação de onda. Por exemplo

$$\Delta E_x - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \tag{5.1.22}$$

(aqui E_x é a componente x do vector do campo eléctrico: $\boldsymbol{E} = E_x \mathbf{i}_x + E_y \mathbf{i}_y + E_z \mathbf{i}_z$).

2. A quantidade $(\mu_0 \varepsilon_0)^{-1}$ tem a dimensão duma velocidade. A grandeza

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \approx 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s} \tag{5.1.23}$$

é *a velocidade da luz no vácuo*.

3. Como as equações de Maxwell (e consequentemente a equaçaõ de onda) são lineares com coeficientes reais, podemos encontrar soluções na forma complexa:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i\Phi}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 e^{i\Phi}, \qquad \Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi \tag{5.1.24}$$

Aqui ω é a frequência, $\mathbf{k}$ é o vector de onda ligados pela lei de dispersão:

$$\omega = ck, \qquad k = |\mathbf{k}|, \tag{5.1.25}$$

$\boldsymbol{E}_0$ e $\boldsymbol{B}_0$ são amplitudes vectoriais, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é a fase total, e ϕ é a fase constante.

A superfície no qual a fase do campo $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é uma constanta chama-se *a frente de onda*. Logo a frente de onda determina-se pela equação

$$\Phi(\mathbf{r}, t_0) = \Phi_0 \tag{5.1.26}$$

onde Φ_0 é uma constanta.

Como no nosso caso $\nabla\Phi(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{k}$, concluimos que a frente da onda (5.1.24) é um plano ortogonal a $\mathbf{k}$. Por isso a onda (5.1.24) chama-se *onda plana*.

As soluções reais, que correspondem a (5.1.24) têm a forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi) \tag{5.1.27}$$

O vector de onda determina a direcção de propagação de onda:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = c\mathbf{s}, \qquad \mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}}{k}.$$

Escolhemos o eixo x ao longo do vector $\mathbf{k}$. Neste caso $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx$ e obtemos o comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

4. Para uma onda plana e $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{E}$, $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{B}$. Logo a partir das equações (5.1.14) e (5.1.15) calculamos

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

Os campos eléctrico e magnético são ortogonais ao vector de onda, são ortogonais a direção de propagação: $\boldsymbol{E} \perp \mathbf{k}$, $\boldsymbol{B} \perp \mathbf{k}$ - *ondas transversais*.

Apartir de (5.1.24) calculamos

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{B}\,, \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = i\mathbf{k} \times \boldsymbol{E}$$

Portanto a equação (5.1.16) pode ser reescrita como

$$\mathbf{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B} \tag{5.1.28}$$

o que significa que $\boldsymbol{B} \perp \boldsymbol{E}$. Agora é facil de representar $\boldsymbol{B}$ através de $\boldsymbol{E}$ e $\mathbf{k}$:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{k} \times \boldsymbol{E}}{c|\mathbf{k}|} = \frac{1}{c}\mathbf{s} \times \boldsymbol{E} \tag{5.1.29}$$

onde $\mathbf{s} = \frac{|\mathbf{k}|}{k}$, i.e. $|\mathbf{s}| = 1$.

A formula (5.1.29) diz que $\boldsymbol{B} = 0$ se $\boldsymbol{E} = 0$. Por outras palavras, os vectores $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ têm a mesma fase ϕ [isto já foi tomado em conta em (5.1.27)].

5. As relações (5.1.28) e (5.1.29) são válidas também para os campos reais $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ obtemos uma relação

$$|\mathbf{B}|^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{s} \times \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{c^2}|\mathbf{E}|^2\,. \tag{5.1.30}$$

A densidade da energia. O fluxo de energia

A densidade de energia de um campo electromagnético nas unidades SI é dada por (ver o Exercício 7)

$$U = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{B}|^2\right)\,. \tag{5.1.31}$$

Como se segue de (5.1.30) $|\mathbf{B}|^2 = \varepsilon_0 \mu_0 |\mathbf{E}|^2$, portanto temos para uma onda plana

$$U = \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 = \frac{1}{\mu_0}|\mathbf{B}|^2\,. \tag{5.1.32}$$

A partir das equações (5.1.16) e (5.1.17) para componentes reais do campo electromagnético obtemos

$$\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \tag{5.1.33}$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) \tag{5.1.34}$$

$$= \frac{1}{\mu_0} [\boldsymbol{E} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E})] \tag{5.1.35}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \tag{5.1.36}$$

[para obter a última fórmula uazamos a fórmula (5.5.2)].

Logo, usando o teorema de Gauss verificamos que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V U(\boldsymbol{r}, t) dV = -\oiint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{\Sigma} \tag{5.1.37}$$

Thus, o fluxo de energia através da superfície de área unitária é descrita pelo *vector de Poynting*[5]

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \tag{5.1.38}$$

(note-se que aqui consideram-se as grandezas reais).

Para uma onda plana a partir da equação (5.1.29) obtemos

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0 c k} \mathbf{E} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \varepsilon_0 c \mathbf{s} |\mathbf{E}|^2 = c \mathbf{s} U \tag{5.1.39}$$

[5] John Henry Poynting, 1852-1914

5.2 Equações de Maxwell num meio

5.2.1 Espectro electromagnêtico

Tipo de radiação	λ(m)	ν (Hz)
Raios γ	$< 10^{-11}$	$> 10^{18}$
Raios X	$10^{-11} - 10^{-8}$	$10^{16} - 10^{19}$
Ultravioleta	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{14} - 10^{16}$
Luz visível	$5 \cdot 10^{-7} - 7 \cdot 10^{-7}$	$\sim 10^{14}$
Infra-vermelho	$10^{-6} - 10^{-4}$	$10^{12} - 10^{14}$
Micro-ondas	$10^{-4} - 10^{-1}$	$10^{9} - 10^{12}$
Rádio	$> 10^{-1}$	$< 10^{9}$

Tabela 5.1: Espectro electromagnêtico (valores indicatívos)

5.2.2 Equações de Maxwell macroscópicas

Considerando a propagação de ondas electromagnéticas num meio temos de distinguir *cargas ligadas* e *cargas livres*, bem como *correntes ligadas* e *correntes livres*. Cargas e correntes livres geralmente têm caracter macroscópico e não dependem diretamente da estructura da matéria. As cargas e correntes ligadas são detrminadas pela estructura microscópica do meio.

As cargas ligadas podem ser descritas como $\rho_b = -\nabla \boldsymbol{P}$ onde $\boldsymbol{P}$ é o *vetor de densidade de polarização* que determina momento dipolar eléctrico por unidade de volume. A densidade de corrente de carga ligada determina-se como $\boldsymbol{J}_b = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}$.

As propriedades magnéticas do meio próprio descrevem-se pelo *vector de densidade de magnetização* $\mathbf{M}$ que determina densidade de corrente $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$.

Com os termos introduzidos as duas equações de Maxwell reescrevem-se como

$$\nabla \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho_b + \rho_f) = \frac{\rho_f}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \boldsymbol{P}\,, \tag{5.2.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \left(\boldsymbol{J}_f + \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} + \nabla \times \boldsymbol{M} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) . \tag{5.2.2}$$

Aqui ρ_f e $\boldsymbol{J}_f$ são a carga e a corrente livres. Introduzimos *o vetor deslocamento eléctrico*

$$\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \tag{5.2.3}$$

e o vector do campo magnético $\boldsymbol{H}$ (neste caso o vector $\boldsymbol{B}$ refere-se como vetor da indução magnética; ainda $\boldsymbol{H}$ chama-se vetor de excitação magnética):

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M} \tag{5.2.4}$$

As relações (5.2.3) e (5.2.4) chamam-se *as relações constitutivas* e permitem reescrever (5.2.1) e (5.2.2) como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_f\,, \tag{5.2.5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_f + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\,. \tag{5.2.6}$$

Finalmente as equações de Maxwell num meio podem ser reescritas

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho\,, \tag{5.2.7}$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5.2.8}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{5.2.9}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5.2.10}$$

(aqui não usamos o índice 'f' mas as cargas e as correntes são só livres) Nestas equações entram quatro vetores que são ligadas pelas equações (5.2.3) e (5.2.4).

A densidade de energia do campo electromagnetico e vector de Poynting agora são dados por

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \tag{5.2.11}$$

e

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}\,. \tag{5.2.12}$$

Vamos considerar só as situações quando não existem nem caragas nem correntes livres, i.e. nas equações de Maxwell (5.2.7)–(5.2.10) vamos assumir $\rho = 0$ e $\boldsymbol{J} = 0$.

5.3 Ondas num meio homogéneo, isotrópico, local e linear

Diz-se que um meio homogéneo, isótropico, local (i.e. sem dispersão), e linear se a ligação entre o vector de polarização e o campo eléctrico é

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi \boldsymbol{E}\,. \tag{5.3.1}$$

onde a constanta χ chama-se a susceptibilidade eléctrica do meio. Portanto

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E}\,. \tag{5.3.2}$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_0(1+\chi)$ é a *permitividade dieléctrica do meio* .

Análogamente introduz-se a susceptibilidade magnética χ_m: $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$. Portanto, no nosso caso

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}\,. \tag{5.3.3}$$

onde μ é a *permeabilidade magnética*.

Agora, tomando em conta que ε e μ são constantes, as equações de Maxwell reescrevem-se como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0\,, \tag{5.3.4}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{5.3.5}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\,, \tag{5.3.6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{5.3.7}$$

Logo, no caso do meio infinito podemos aplicar os resultados para ondas planas no vácuo, com substituição $\mu_0 \to \mu$ e $\varepsilon_0 \to \varepsilon$. Logo concluimos, que o campo eléctrico e a indução magnética satisfazem a equação de onda:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0\,, \qquad \Delta \mathbf{B} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0\,. \tag{5.3.8}$$

[compare com (5.1.27)] com a lei de dispersão $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$.

As soluções das equações (5.3.8) na forma de onda plana são

$$\boldsymbol{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)}, \qquad \boldsymbol{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t+\phi)} \tag{5.3.9}$$

[compare com (5.1.24)]

Logo concluimos que a velocidade da luz num meio é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.3.10}$$

Introduzimos o índice de refracção

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0} \tag{5.3.11}$$

No vácuo $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$ e portanto $n_{vac} = 1$. Podemos verificar a partir de difinição (5.3.11) e (5.3.10) que existe a relação

$$c = nv \tag{5.3.12}$$

Nestes designações a lei de dispersão tem a forma

$$k^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} \tag{5.3.13}$$

5.4 As leis da refracção e da reflexão.

Consideremos dois meios (1 e 2) com constantes dieléctricas ε e ε' (reais) que são separados por uma superfície plana $z = 0$. Na superfície de separação os campos eléctrico e magnético satisfazem as condições de fronteira

$$\varepsilon E_{1n} = \varepsilon' E_{2n}\,, \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau}\,, \qquad B_{1n} = B_{2n}\,, \qquad \frac{B_{1\tau}}{\mu} = \frac{B_{2\tau}}{\mu'} \tag{5.4.1}$$

onde índeces n e τ usam-se para os componentes normais e tangenciais à superfície de separação.

Analizamos a incidência de uma onda plana sobre uma superfície entre uns dois meios com os índeces de refracção n e n'. Introduzimos

- o vector da onda incidente $\mathbf{k}$,

- o vector da onda refractada (transmitida) $\mathbf{k}'$,

- o vector da onda reflectida $\mathbf{k}''$, A representação (5.3.9) significa que existem as propriedades

$$\boldsymbol{E} \sim e^{i\mathbf{kr}}, \;\; \boldsymbol{E}' \sim e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}, \;\; \boldsymbol{E}'' \sim e^{i\mathbf{k}''\mathbf{r}} . \tag{5.4.2}$$

Sem restrição de generalidade podemos considerar que $\mathbf{k}$ fica no plano $y = 0$, que vamos chamar o plano de incidência: $\mathbf{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, onde θ é o ângulo de incidência.

A partir da lei de disperção (5.3.13) temos

$$|\mathbf{k}'|^2 = k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2 = \left(\frac{n'\omega}{c}\right)^2 , \qquad |\mathbf{k}''|^2 = k_x''^2 + k_y''^2 + k_z''^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 . \tag{5.4.3}$$

As igualdades (**??**), (**??**) para as componentes tangenciais dos campos eléctrico e magnético dão-nos

$$E_\tau e^{ixk_x} + E''_\tau e^{i(xk''_x + yk''_y)} = E'_\tau e^{i(xk'_x + yk'_y)} , \tag{5.4.4}$$

$$\left(\frac{B_\tau}{\mu}\right) e^{ixk_x} + \left(\frac{B''_\tau}{\mu}\right) e^{i(xk''_x + yk''_y)} = \left(\frac{B'_\tau}{\mu'}\right) e^{i(xk'_x + yk'_y)} . \tag{5.4.5}$$

Aqui E_τ, E'_τ e E''_τ são as amplitudes do campo eléctrico do campo eléctrico das três ondas e todos B_τ determinam-se de modo análogo. A dependência do tempo em (5.4.4) e (5.4.5) subentende-se cortada.

As equações (5.4.4), (5.4.5) devem ser satisfeitas para y arbitrário, o que é possivel somente quando

$$k'_y = k''_y = 0 . \tag{5.4.6}$$

Portanto *todos os raios estão no mesmo plano* (x, z). Este plano chama-se *o plano de incidência*. Logo $\mathbf{k}' = k'(\operatorname{sen}\theta', 0, \cos\theta')$ e $\mathbf{k}'' = k''(\operatorname{sen}\theta'', 0, \cos\theta'')$. Uma vez que (5.4.4) e (5.4.5) são alidas para qualquer x concluimos que

$$k'_x = k''_x = k_x . \tag{5.4.7}$$

Tomando em conta (5.4.6) a partir das equações (5.4.3) obtemos as representações

$$k'_x = \frac{n'\omega}{c}\sin\theta', \quad , \; k''_x = \frac{n\omega}{c}\sin\theta'' . \tag{5.4.8}$$

Substituindo estas fórmulas em (5.4.7) deduzimos as fórmulas já conhecidas

$$\theta = \theta'' \qquad n\,\sin\theta = n'\sin\theta' . \tag{5.4.9}$$

Para obter as relações entre as amplitudes consideremos dois casos separadamente.

Relações entre amplitudes. O caso TE.

Começaremos com a situção quando o campo eléctrico é ortogonal ao plano de incidência: $\boldsymbol{E} = (0, E, 0)$, e respectivamete $\boldsymbol{B} == \frac{1}{\omega}(-k_z E, 0, k_x E)$, o que significa que $\boldsymbol{B}$ está no plano (x, z). Isto é o caso duma onda eléctrica transversal (a onda TE) (também chama-se o caso σ). A partir da Eq. (5.4.4) com $x = 0$ obtemos

$$E + E'' = E' \,. \tag{5.4.10}$$

Admitindo, que os meios têm as mesmas propriedades magnéticas: $\mu = \mu'$ a Eq. (5.4.5) com $x = 0$ dá

$$k_z E + k_z'' E'' = k_z' E' \,.$$

Como se segue da lei do Snell $k_z'' = -k_z$, e portanto

$$E - E'' = \frac{k_z'}{k_z} E' \,. \tag{5.4.11}$$

Como uma consequência das equações (5.4.10) e (5.4.11) temos

$$E' = \tau_\sigma E \,, \qquad E'' = \rho_\sigma E \,. \tag{5.4.12}$$

com os coeficientes

$$\tau_\sigma = \frac{2}{1 + k_z'/k_z} \qquad \text{e} \qquad \rho_\sigma = \frac{k_z - k_z'}{k_z + k_z'} \tag{5.4.13}$$

que se chamam *o coeficiente de transmissão* e *o coeficiente de reflexão*, respectivamente.

Estas relações são conhecidas como *as fórmulas de Fresnel*.

Relações entre amplitudas. O caso TM

Agora consideremos o campo eléctrico no plano da incidência: $\boldsymbol{E} = (E_x, 0, E_z)$, e portanto $\boldsymbol{B} = (0, B, 0)$. Isto é o caso duma onda magnética transversal, TM, (ou o caso π). A partir da equação (5.3.7) obtemos $\mathbf{k} \times \boldsymbol{B} = -\mu\varepsilon\omega\boldsymbol{E}$ e portanto $\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu\varepsilon\omega}(k_z B, 0, -k_x B)$ i.e.

$$E_x = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega n^2} k_z B, \qquad E_z = -\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0 \omega n^2} k_x B \,. \tag{5.4.14}$$

Introduzimos

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}n}B. \tag{5.4.15}$$

Verificamos que

$$|\mathbf{E}|^2 = E_x^2 + E_z^2 = \frac{k_x^2 + k_z^2}{\mu_0^2\varepsilon_0^2 n^4\omega_0^2}|\mathbf{B}|^2 = \mathcal{E}^2.$$

Agora (5.4.4) pode ser reescrita

$$\frac{k_z\mathcal{E}}{n} + \frac{k_z''\mathcal{E}''}{n} = \frac{k_z'\mathcal{E}'}{n'}$$

ou, como $k_z = -k_z''$,

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}'' = \left(\frac{n}{n'}\right)\left(\frac{k_z'}{k_z}\right)\mathcal{E}'\,. \tag{5.4.16}$$

Agora a equação (5.4.5) toma a forma

$$n(\mathcal{E} + \mathcal{E}'') = n'\mathcal{E}'\,. \tag{5.4.17}$$

Resolvendo (5.4.16) e (5.4.17) obtemos as fórmulas de Fresnel para o caso TM

$$\mathcal{E}' = \tau_\pi\mathcal{E}; \quad \mathcal{E}'' = \rho_\pi\mathcal{E} \tag{5.4.18}$$

onde

$$\tau_\pi = \frac{2(n/n')}{1+\gamma}; \;\; \rho_\pi = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\,, \qquad \gamma = \left(\frac{n}{n'}\right)^2\left(\frac{k_z'}{k_z}\right)\,. \tag{5.4.19}$$

As fórmulas para os coeficientes de reflecção e de transmissão podem ser reescritas como (ver o problema 9)

$$\tau_\sigma = \frac{2\operatorname{sen}\theta'\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta+\theta')},, \qquad \rho_\sigma = \frac{\operatorname{sen}(\theta'-\theta)}{\operatorname{sen}(\theta'+\theta)} \tag{5.4.20}$$

no caso TE e

$$\tau_\pi = \frac{2\operatorname{sen}\theta'\cos\theta}{\operatorname{sen}(\theta+\theta')\cos(\theta-\theta')}, \qquad \rho_\pi = \frac{\tan(\theta-\theta')}{\tan(\theta'+\theta)} \tag{5.4.21}$$

no caso TM.

Como se pode verificar a partir das fórmulas (5.4.20) e (5.4.21) existe uma situação quando temos $\rho_\sigma \neq 0$ mas $\rho_\pi = 0$. Isto acontece quando $\theta + \theta' =$

$\pi/2$. Usando a lei de Snell encontramos o ângulo de incidência necessário para observar este fenômeno:

$$\theta = \theta_B = \arctan \frac{n'}{n} \,. \tag{5.4.22}$$

O ângulo θ_B chama-se *o ângulo de Brewster*.

Reflexão e transmissão da energia

Consideremos os componentes do vector de Poynting (5.2.12)

- da onda incidente: $\langle S_z \rangle = \frac{\varepsilon v}{2} |\mathbf{E}|^2 \cos\theta$
- da onda reflectida: $|\langle S_z'' \rangle| = \frac{\varepsilon v}{2} |\mathbf{E}''|^2 \cos\theta$
- da onda refractada: $\langle S_z' \rangle = \frac{\varepsilon v}{2} |\mathbf{E}'|^2 \cos\theta'$

Para descrever as propriedades de transmissão e de reflexão da energia, introduzimos a *reflectância*, R, e a *transmitância* T:

$$R \equiv \frac{|\langle S_z'' |\rangle}{\langle S_z \rangle} = \frac{|\mathbf{E}''|^2}{|\mathbf{E}|^2}, \qquad T \equiv \frac{\langle S_z' \rangle}{\langle S_z \rangle} = |\tau|^2 \frac{n' \cos\theta'}{n \cos\theta} \,. \tag{5.4.23}$$

As grandezas R e T chamam-se *reflectância* e *transmitância*. É valida a relação

$$T + R = 1 \tag{5.4.24}$$

(exercício 11).

Vamos agora designar os dois meios com índices 1 e 2. Se no caso acima considerado o meio 1 tem o índice de refracção n, podemos designar os índices de reflecção e de transmissão por ρ_{12} e τ_{12} o que signifíca que a luz passa do meio 1 para o meio 2. De modo análogo introduzimos ρ_{21} e τ_{21} que descrevem a propagação da luz do meio 2 para o meio 1. As grandezas introduzidas são relacionadas entre si (exercício 11).

$$\rho_{12} = -\rho_{21} = \rho, \quad \tau_{21}\tau_{12} = 1 - \rho^2. \tag{5.4.25}$$

5.5 Exercícios

1. Demonstrar as fórmulas

$$\nabla \cdot (\psi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \tag{5.5.1}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2) = \boldsymbol{A}_2 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}_1) - \boldsymbol{A}_1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}_2), \tag{5.5.2}$$

$$\boldsymbol{A}_1 \times (\boldsymbol{A}_2 \times \boldsymbol{A}_3) = \boldsymbol{A}_2 (\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_3) - (\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2) \boldsymbol{A}_3, \tag{5.5.3}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A}_1 \times \boldsymbol{A}_2) = (\boldsymbol{A}_2 \cdot \nabla) \boldsymbol{A}_1 - (\boldsymbol{A}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_1 (\nabla \cdot \boldsymbol{A}_2) - \boldsymbol{A}_2 (\nabla \cdot \boldsymbol{A}_1) \tag{5.5.4}$$

$$\nabla (\boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2) = (\boldsymbol{A}_1 \cdot \nabla) \boldsymbol{A}_2 + (\boldsymbol{A}_2 \cdot \nabla) \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1 \times \nabla \times \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_2 \times \nabla \times \boldsymbol{A}_1 \tag{5.5.5}$$

Sugestão: onde possível use que em coordenadas Euclidianas os produtos interno e extremo podem ser escritos como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_k B_k, \qquad (\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k \tag{5.5.6}$$

onde se usa a regra de somatório de Einstein (pelos índices que se repitam), e

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & ijk = 123,\, 231,\, 312 \\ -1, & ijk = 213,\, 321,\, 132 \\ 0 & \text{outros casos} \end{cases} \tag{5.5.7}$$

2. Calcular $\nabla \mathbf{r}$, $\nabla |\mathbf{r}|$, ∇r^2.

3. [6] Considere uma onda electromagnética plana (em unidades SI) dada pelas expressões:

$$E_x = 0, \quad E_y = 2 \cos \left[2\pi \times 10^{14} \left(t - \frac{x}{c} \right) + \frac{\pi}{2} \right], \quad E_z = 0 \tag{5.5.8}$$

(a) Determine a frequência, o comprimento de onda, a direcção da propagação, a amplitude, a fase inicial, e a polarização da onda.

(b) Determine o vetor da indução magnética e calcule o vetor de Poynting.

4. Considere a velocidade de grupo como uma função de frequência:

$$v_g(\omega) = (dk/d\omega)^{-1} \tag{5.5.9}$$

Para uma onda eletromagnética que se propaga num meio com dispersão caraterizado pelo índice de refração $n(\omega)$ calcule as velocidades de grupo e de fase (como funções de $n(\omega)$ e $dn/d\omega$. Demonstre que a dispersão normal (anómala) corresponde a $dn/d\omega > 0$ ($dn/d\omega < 0$).

5. [6] Uma onda electromagnética de 550 nm, com o campo eléctrico orientado na derecção z e que se propaga na dereção y no vácuo. (a) Qual é a frequência da onda? (b) Determine o vector de onda. (c) Se a amplitude do campo eléctrico é de 600 V/m, qual é a amplitude de campo magnêtico? (d) Escreva as expressões para $E(t)$ e $B(t)$ na suposição que os dois são zero em $y = 0$ e $t = 0$.

6. Provar que as relações (5.1.28) e (5.1.29) são válidas para os campos reais.

7. Uzando uma onda plana como exemplo, verifique, que a definição de energia (5.1.31) é consistente com a definição da energia duma onda (3.3.7) em unidades dimensionais como elas aparecem nas equações (5.1.20), (5.1.21).

8. *Ondas esféricas.* A equação de onda tem umas soluções de outros tipos. Por exemplo, umas ondas emitidas por uma fonte pontual são ondas esféricas.

   Verifique que uma onda esfêrica

   $$\Psi = \frac{\Psi_1(r - ct)}{r} + \frac{\Psi_2(r + ct)}{r}. \tag{5.5.10}$$

   onde $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, é uma solução da equação de onda (use o operador de Laplace é a em coordenadas esféricas) que, para o campo que depende só de r e de t, permite reescrever a equação de onda na forma

   $$\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\Psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} r\Psi = 0\,. \tag{5.5.11}$$

   Dar interpretação física a cada termo em (5.5.10).

   As fases das ondas $\Psi_{1,2}$ dependem das coordenadas como $\Phi_{1,2} = \Phi_{1,2}(r \mp ct)$. Use este facto para demonstrar que as frentes de ondas resectívas, são esferas.

9. Prove as relações (5.4.20) e (5.4.21).

10. Proponha um aparelho baseado no fenómeno de diferenças entre τ_π e τ_σ (ρ_π e ρ_σ) que podia ser utilizado para separação das polarizações diferentes da luz.

11. Provar as relações (5.4.24) e (5.4.25).

Capítulo 6

Óptica geométrica

6.1 A equação eikonal

A óptica geométrica corresponde ao limite formal quando o cumprimento de onda tende para zero: $\lambda \to 0$. Introduzimos a designação f para qualquer componente complexo do campo eléctrico $\mathbf{E}$ ou da indução magnética $\mathbf{B}$. No caso geral podem representar

$$f = a(\boldsymbol{r}, t)e^{i\psi(\boldsymbol{r},t)} \tag{6.1.1}$$

onde a e ψ são funções reais das coordenadas e do tempo. Substitimos (6.1.1) na equação de onda

$$\Delta f - \frac{n^2(\boldsymbol{r})}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \tag{6.1.2}$$

e separaramos as partes real e imaginária desta equação:

$$\nabla^2 a - a(\nabla\psi)^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + a\frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{6.1.3}$$

$$2\nabla a \cdot \nabla\psi + a\nabla^2\psi - 2\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial a}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial t} - a\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{6.1.4}$$

Vamos supor que L e T são as escalas que caracterizam a variação da amplitude do campo no espaço e no tempo, e que ℓ e τ são as escalas caracterísiticas da fase ψ. Temos as seguintes estimativas

$$|\nabla a| \sim \frac{a}{L}; \quad \left|\frac{\partial a}{\partial t}\right| \sim \frac{|a|}{T}; \quad |\nabla\psi| \sim \frac{1}{\ell}; \quad \left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| \sim \frac{1}{\tau}; \tag{6.1.5a}$$

As condições de validade da óptica geométrica agora podem ser formalizadas. Nomeadamente consideramos a situação em queas escalas de mudança da intensidade da onda são muito maiores do que as escalas características da mudanças de fase. Em termos matemáticos

$$L \gg \ell, \quad T \gg \tau \tag{6.1.6}$$

Logo na primeira aproximação a Eq. (6.1.3) reduz-se a

$$(\nabla\psi)^2 - \frac{n^2}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{6.1.7}$$

Esta fórmula chama-se *a equação eikonal* e a phase ψ chama-se *o eikonal*.

Consideremos agora propagação duma onda monocromática, que em termos de eikonal significa que

$$\psi(\boldsymbol{r}, t) = \omega t - \Psi(\boldsymbol{r}) \tag{6.1.8}$$

Neste caso, introduzimos $k_0 = \omega/c$ para o modulo do vector de onda no vácuo e obtemos a equação eikonal estacionária

$$(\nabla\Psi)^2 - k_0^2 n^2(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{6.1.9}$$

Recordamos que a superfície de onda (ou *a frente geométrica de onda*) definida-se pela equação

$$\Psi(\mathbf{r}) = \text{const} \tag{6.1.10}$$

Definimos *o raio* como *uma linha que é ortogonal à superfície de onda*. A partir da primeira das equações (6.2.3) verificamos que o raio como uma linha em cada ponto do qual o vector de onda $\boldsymbol{k}$ é tangencial a esta linha (recorda-se que estamos a considerar meios isótropos). A direcção do raio determina-se pela direcção do $\boldsymbol{k}$.

Por exemplo, uma vez que no espaço livre para uma onda plana $\boldsymbol{k}$ é um vector constante, obtemos que $d\mathbf{k}/d\tau = 0$, i.e. que o raio duma onda plana é uma linha recta.

6.2 Equações do Hamilton

A equação eikonal é uma equação não linear em dirivadas parciais da primeira ordem, e é do tipo de equações que se chamam as equações de Hamilton-

Jacobi, i.e.

$$\mathcal{H}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x},\frac{\partial\Psi}{\partial y},\frac{\partial\Psi}{\partial z},x,y,z\right)=0 \tag{6.2.1}$$

ou

$$\mathcal{H}\left(k_i,x_i\right)=0,\quad \boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3) \tag{6.2.2}$$

onde $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3)$ e

$$\boldsymbol{k}\equiv\nabla\Psi \tag{6.2.3}$$

A integração da Eq. (6.2.1) (ou (6.2.2)) faz-se usando o método de características, i.e. reduz-se ao sistema de equações em derivadas totais

$$\frac{dx_j}{\partial\mathcal{H}/\partial k_j}=-\frac{dk_j}{\partial\mathcal{H}/\partial x_j}=\frac{d\Psi}{\sum_{j=1}^{3}k_j\left(\partial\mathcal{H}/\partial k_j\right)} \tag{6.2.4}$$

Podemos introduzir um parámetro auxiliar τ e reduzir (6.2.2) as equações de Hamilton

$$\frac{dx_j}{d\tau}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k_j},\quad \frac{dk_j}{d\tau}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_j},\quad \frac{d\Psi}{d\tau}=\sum_{j=1}^{3}k_j\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial k_j} \tag{6.2.5}$$

ou na forma vectorial

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{k}},\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{d\tau}=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{r}},\quad \frac{d\Psi}{d\tau}=\boldsymbol{k}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{k}}. \tag{6.2.6}$$

Agora Eq. (6.1.9) pode ser reescrita como

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{k_0^2}-n^2(\boldsymbol{r})\right) \tag{6.2.7}$$

(aqui introduzimos o factor $1/(2k_0^2)$ para fazer $\mathcal{H}$ adimensional) e as equações de Hamilton tomam a forma seguinte

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}=\frac{\boldsymbol{k}}{k_0^2},\quad \frac{d\boldsymbol{k}}{d\tau}=\frac{1}{2}\nabla n^2(\boldsymbol{r}) \tag{6.2.8}$$

Uma vez que $d\ell = |d\boldsymbol{r}|$ é o cumprimento do arco infinitesimal da curva descrita pelo $\boldsymbol{r}(\tau)$, apartir da primeira das equações de Hamiltom obtemos

$$d\ell^2 = |d\boldsymbol{r}|^2 = (d\tau)^2 \left|\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{k}}\right|^2 \tag{6.2.9}$$

Logo temos a relação

$$d\tau = \frac{k_0^2}{k} d\ell, \qquad k = |\boldsymbol{k}| \tag{6.2.10}$$

Logo se a onda se propaga no vacuo $d\tau = k_0 d\ell$.

6.3 Cálculos formais na ótica geométrica

Suponha que uma superfície é descrita por um vector normal $\boldsymbol{\eta}$ e o vector tangencial $\boldsymbol{\tau}$ que se encontra no plano de incidência duma onda com o vetor de onda $\boldsymbol{k}$.

Introduzimos os vectores unitários $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$, e $\boldsymbol{s}''$ pelas relações

$$\boldsymbol{k} = n\frac{\omega}{c}\boldsymbol{s}, \quad \boldsymbol{k}' = n'\frac{\omega}{c}\boldsymbol{s}', \quad \boldsymbol{k}'' = n\frac{\omega}{c}\boldsymbol{s}''.$$

Para descrever as posições mútuas dos vectores vamos usar os ângulos de incidência θ, de refracção θ', e o ângulo de reflexão θ''. Usando as relações geométricas temos

$$\begin{aligned} n\mathbf{s} &= n\cos\theta\boldsymbol{\eta} + n\sin\theta\boldsymbol{\tau}, \\ n'\boldsymbol{s}' &= n'\cos\theta'\boldsymbol{\eta} + n'\sin\theta'\boldsymbol{\tau}\,, \\ n\mathbf{s}'' &= n\cos\theta''\boldsymbol{\eta} + n\sin\theta''\boldsymbol{\tau}\,. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Usando a lei de Snell (5.4.9) obtemos

$$n'\boldsymbol{s}' = n'\cos\theta'\boldsymbol{\eta} + n\sin\theta\boldsymbol{\tau} = (n'\cos\theta' - n\cos\theta)\boldsymbol{\eta} + n\mathbf{s} \tag{6.3.2}$$

e

$$n'\cos\theta' = \sqrt{n'^2 - n^2\sin^2\theta} = \sqrt{n'^2 - n^2 + n^2\cos^2\theta}\,. \tag{6.3.3}$$

Finalmente a expressão para o vector $\boldsymbol{s}$ toma a forma

$$\mathbf{s}' = \frac{1}{n'}\left(\sqrt{n'^2 - n^2 + n^2(\boldsymbol{\eta}\mathbf{s})^2} - n\boldsymbol{\eta}\mathbf{s}\right)\boldsymbol{\eta} + \frac{n}{n'}\mathbf{s}\,. \tag{6.3.4}$$

Uma vez que $\theta'' = \pi - \theta$

$$\cos\theta'' = -\cos\theta \quad \text{e} \quad \sin\theta'' = \sin\theta$$

usando (6.3.1) obtemos

$$\boldsymbol{s}'' = -2\cos\theta\boldsymbol{\eta} + \mathrm{s} \qquad (6.3.5)$$

6.4 Raios paraxiais

Cada vector unitário pode ser caracterizado pelos co senos directores os quais são as coordenadas deste vector. Consideremos um sistema de coordenadas (x, y, z). Temos

$$\boldsymbol{s} = (\alpha, \beta, \gamma), \;\; \boldsymbol{s}' = (\alpha', \beta', \gamma'), \;\; \boldsymbol{s}'' = (\alpha'', \beta'', \gamma'') .$$

Aqui α, β e γ são *os co senos directores*. Claro que

$$\alpha = \boldsymbol{s} \cdot \hat{\boldsymbol{i}}, \;\; \beta = \boldsymbol{s} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}, \;\; \gamma = \boldsymbol{s} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} .$$

onde, como sempre, $\hat{\boldsymbol{i}}$, $\hat{\boldsymbol{j}}$ e $\hat{\boldsymbol{k}}$ são os versores ao longo dos eixos x, y e z. (as mesmas formulas são validas para os co senos directores com a linha e com as duas linhas). Portanto α é o co-seno do ângulo entre $\boldsymbol{s}$ e $\hat{\boldsymbol{i}}$, e os outros co senos são definidos de modo análogo.

Há só dois co senos directores independentes, porque

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad (6.4.1)$$

que simplesmente significa que $|\boldsymbol{s}| = 1$.

Consideremos uma superfície entre dois meios com índices de refracção n e n' e analizamos uma situação quando $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são quase-parallelos. Escolhemos o sistema de coordenadas com um exio, digamos o eixo z, quase-paralelo a $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{\eta}$. Neste caso

$$\gamma \leq 1 \;\text{ e }\; \alpha,\, \beta \ll \gamma\, . \qquad (6.4.2)$$

Se também a diferença entre os coeficientes de refracção $\Delta n = n' - n$ é uma grandeza suficentemente pequena, temos

$$\gamma' \leq 1 \;\text{ e }\; \alpha',\, \beta' \ll \gamma'\, ; \qquad \gamma'' \leq 1 \;\text{ e }\; \alpha'',\, \beta'' \ll \gamma''\, . \qquad (6.4.3)$$

Os raios que satisfazem (6.4.2) e (6.4.3) chamam-se *os raios paraxiais*. A óptica do sistema dos raios paraxiais é *a óptica paraxial*.

Suponhamos que temos um sistema óptico e o raio incidénte caracterizados pelos co-senos directores (α, β, γ). Como o resultado da interacção do raio com o sistema temos os raios reflectido $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ e refractado $(\alpha', \beta', \gamma')$. Podemos dizer que a lei do refracção pelo sistema é a transformação

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto (\alpha', \beta', \gamma')\,.$$

A lei da reflexão pelo sistema óptico é a transformação

$$(\alpha, \beta, \gamma) \longmapsto (\alpha'', \beta'', \gamma'')\,.$$

Geralmente os raios paraxiais fazem um ângulo sólido bastante pequeno mas não estão no mesmo plano. Os raios incidente, reflectido e refractado os quais estam no mesmo plano chamam-se *os raios meridionais*. Sem restrição de generalidade podemos escolher o plano (x, z) como o plano dos raios. Neste caso $\beta = \beta' = \beta'' = 0$.

6.5 Refracção numa superfcie esférica

Consideremos refracção de raios paraxiais meridionais por uma interface entre dois meios com os indices de refração n e n'. Uma vez, que qualquer superfície localmente aproxima-se por uma parabola podemos aproxima-la por uma superfcie esférica com um dado raio R. Consideremos a geometria descrita na Figura 6.1.

A lei da refracção vectorial (6.3.2) agora toma a forma

$$n'\alpha' = n\alpha - (n'\cos\theta' - n\cos\theta)\frac{x}{R}, \tag{6.5.1}$$

$$n'\gamma' = n\gamma + (n'\cos\theta' - n\cos\theta)\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}, \tag{6.5.2}$$

onde usam-se as relações (6.3.1), bem como

$$\boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{i}} = -\frac{x}{R}, \quad \boldsymbol{\eta} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} \tag{6.5.3}$$

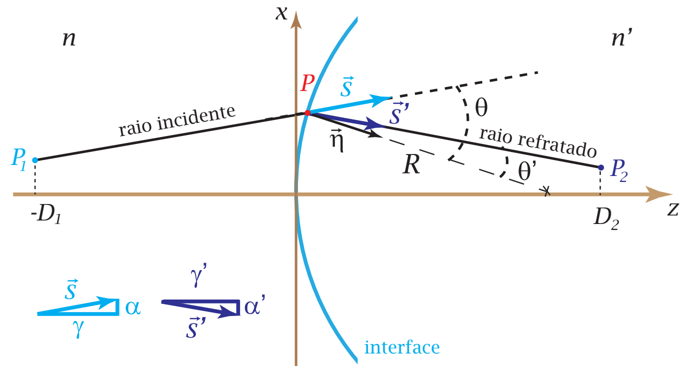

Figura 6.1: Refracção dum raio pela interface esférica entre dois meios com os indices de refração n e n'. O raio passa do ponto $P_1 = (x_1, z_1)$, através de $P = (x, z)$ para o ponto $P_2 = (x_2, z_2)$. Considera-se que $|x| \ll R$.

Uma vez que $\theta \ll 1$ a lei de Snell pode ser escrita como

$$n\theta = n'\theta' \,. \tag{6.5.4}$$

Também neste caso $\theta' \approx \frac{n}{n'}\theta \ll 1$ e, portanto, $\cos\theta \approx \cos\theta' \approx 1$. Agora as equações (6.5.1), (6.5.2) podem ser reescritas como

$$n'\alpha' = n\alpha + \frac{n - n'}{R}x \,, \tag{6.5.5}$$

$$n'\gamma' = n\gamma + (n' - n) \,. \tag{6.5.6}$$

A equação (6.5.6) não depende de x. Logo passamos a análize de (6.5.5).

Suponha que um raio que passa por um ponto P_1, com coordenadas (x_1, z_1), no meio com o índice de refração interseta a interface entre dois meios num ponto P, com coordenadas (x, z), e segue através dum ponto P_2 com coordenadas (x_2, z_2) no meio com o índice de refração n', como se mostra a figura 6.1. Colocamos o problema de encontrar as coordenadas do ponto P_2 sabendo as cooredendas do ponto P_1 e os cosenos-diretores do raio incidente, i.e. $\boldsymbol{s} = (\alpha, \gamma)$ (recorda-se que $\beta = 0$). Usando a geometria do problema encontramos

$$x = x_1 + \alpha D_1, \tag{6.5.7}$$

onde $D_1 = |z - z_1|$. Agora equação (6.5.5) pode ser reescrita como

$$n'\alpha' = n\alpha + \frac{n - n'}{R}x_1 + \frac{n - n'}{R}\alpha D_1$$

e portanto

$$\alpha' = \frac{n-n'}{Rn'}x_1 + \left(\frac{n}{n'} + \frac{(n-n')D_1}{n'R}\right)\alpha\,. \tag{6.5.8}$$

Analogamente obtemos

$$x_2 = x + D_2\alpha' \tag{6.5.9}$$

onde $D_2 = |z - z_2|$. Finalmente, usando (6.5.8)

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{n-n'}{Rn'}D_2\right) + \alpha\left(D_1 + \frac{nD_2}{n'} + \frac{(n-n')D_1D_2}{n'R}\right)\,, \tag{6.5.10}$$

6.5.1 Sobre formação da imagem

Consideremos alguns aspectos da formação de imagem dum objeto por um sistema ótico. Cada objeto macroscópico pode ser considerado como um conjunto de fontes pontuais. Por isso começamos por considerar a formação de imagem duma fonte pontual. Os raios luminosos reflectidos ou emitidos pelo ponto o crusam. Claro que para formar a imagem deste ponto os raios refractados também devem passar pelo ponto da imagem. Os raios que passam um ponto (foco) chama-se *feixe homocêntrico*. Portanto para formar uma imagem o sistema ótico deve transformar um feixe homocêntrico no outro feixe homocéntrico. Na práctica isto não se conseque e uns raios diferentes imitidos por uma fonte encontram-se numas pontes diferentes. Este fenómeno chama-se *astigmatismo*.

Distinguem-se dois casos (Fig. 6.2)

A imagem real forma-se fora do sistema ótico. Os raios luminosos do objeto convergem no ponto da imagem real.

A imagem virtual aparece dentro (ou por trás) do dispositivo ótico.

Suponha agora que estamos interessadod na formação da imagem pela superfície esférica, i.e. que o ponto P_2 é a imagem de P_1. Neste caso todos os raios que partem do ponto P_1 devem passar no ponto P_2. Como a diferença entre raios é caracterizada pelo ângulo α concluimos que x_2 não deve depender de α ou

$$D_1 + \frac{nD_2}{n'} + \frac{(n-n')}{n'}\frac{D_1D_2}{R} = 0\,.$$

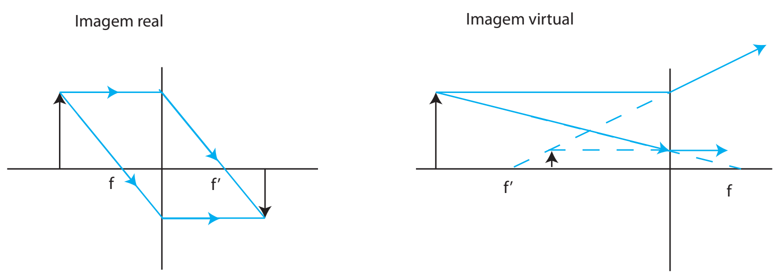

Figura 6.2:

Outra forma deste equação é

$$\frac{n'}{D_2} + \frac{n}{D_1} = \frac{n' - n}{R}. \tag{6.5.11}$$

Usa-se a *Convensão de sinais*

- Os raios passam da esquerda para a direita.
- $R > 0$ se a superfície é convexa para a esquerda, $R < 0$ se a superfície é convexa para a direita.
- $D_1 > 0$ e $D_2 > 0$ se P_1 está do lado esquerdo de A e P_2 está do lado direito, $D_1 < 0$ e $D_2 < 0$ se P_1 está do lado direito de A e P_2 está do lado esquerdo.
- α, α' são positivos se a direcção do raio é obtida pela rotação do eixo z no sentido contrário aos ponteiros do relógio através dum ângulo agudo.
- Os sinais de x_i são naturais

Se $D_1 = \infty$ (ou o ponto P_1 está em $-\infty$) o ponto imágem é definido por

$$D_2 = f_2 \equiv \frac{n'R}{n' - n}. \tag{6.5.12}$$

f_2 chama-se *a distância focal imagem.* No caso $D_2 = \infty$

$$D_1 = f_1 \equiv \frac{nR}{n' - n}. \tag{6.5.13}$$

A grandeza f_1 chama-se *a distância focal objeto*. Podemos escrever

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n'}{f_2} = \frac{n'-n}{R} = \Pi\,.$$

A grandeza

$$\Pi = \frac{n'-n}{R}$$

chama-se *a potência da superfície* (*surface power*). A potência de superfície mede-se em *dióptrias* se o raio de curvatura mede-se em metros.

Tendo em conta (6.5.11) reescrevemos a fórmula (6.5.10) na forma

$$x_2 = x_1 m_x \tag{6.5.14}$$

onde

$$m_x = -\frac{n}{n'}\frac{D_2}{D_1} \tag{6.5.15}$$

chama-se *a ampliação lateral*. Se $D_2 D_1 > 0$ os sinais de x_2 e x_1 são diferentes.

A grandeza

$$m_\alpha = \frac{d\alpha'}{d\alpha} = -\frac{D_1}{D_2} \tag{6.5.16}$$

que calculamos a partir de (6.5.8), chamaa-se *a ampliação dos ângulos dos raios*. Agora a equação (6.5.8) toma a forma

$$\alpha' = -\frac{1}{f_1}x_1 + m_\alpha \alpha\,. \tag{6.5.17}$$

6.5.2 Método matricial

Introduzimos os vetores-colunas

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} n\alpha_1 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_1' = \begin{pmatrix} n'\alpha_1' \\ x_1' \end{pmatrix}$$

e a matriz

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\Pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Agora a refracção pela superfície, i.e. a equação (6.5.7), pode ser escrita na forma matricial

$$\boldsymbol{r}' = \hat{R}\boldsymbol{r} \tag{6.5.18}$$

A propagação da luz entre dois pontos entre os quais não existem superfícies, i.e. a equação (**??**), também pode ser descrita pela equação matricial

$$\boldsymbol{r}_2' = \hat{T}_{12}\boldsymbol{r}_1' \tag{6.5.19}$$

onde

$$\hat{T}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_{12}/n & 1 \end{pmatrix} . \tag{6.5.20}$$

Suponha que há duas superfícies de refracção e que D_{12} e n são a distância e a índice de refracção entre elas. Então a sucessão de trasfarmações do raio

$$\boldsymbol{r}_1 \to \boldsymbol{r}_1' \to \boldsymbol{r}_2 \to \boldsymbol{r}_2'$$

pode ser descrita por

$$\mathbf{r}_2' = \hat{R}_2\hat{T}_{12}\hat{R}_1\mathbf{r}_1 \equiv \hat{M}\mathbf{r}_1 . \tag{6.5.21}$$

Aqui

$$\hat{M} \equiv \hat{R}_2\hat{T}_{12}\hat{R}_1 \tag{6.5.22}$$

é *a matriz do sistema óptico.*

Verificamos propriedades evidentes

$$\det \hat{R}_i = \det \hat{T}_{ij} = \det \hat{M} = 1 . \tag{6.5.23}$$

A relação

$$\boldsymbol{r}' = \hat{M}\boldsymbol{r}$$

é geral porque na aproximação paraxial todas equações são lineares. Portanto qualquer sistema óptico pode ser caracterizado por uma matriz $\hat{M}$.

Vamos supor que P e P' são o objecto e a imagem respectivamente. Os planos que contem P e P' e são perpendicular ao eixo z chamam-se *os planos conjugados*

Consideremos $\hat{M}$ entre os planos conjugados. Temos

$$\begin{pmatrix} n'\alpha' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix} \tag{6.5.24}$$

Logo obtemos

$$\alpha' = \tilde{M}_{11}\frac{n}{n'}\alpha + \tilde{M}_{12}\frac{1}{n'}x\,,$$

$$x' = \tilde{M}_{21}n\alpha + \tilde{M}_{22}x\,.$$

A partir dos princípios de criação de imagem concluimos que x' deve não depender de α. Portanto

$$\tilde{M}_{21} = 0\,. \tag{6.5.25}$$

Também temos

$$\tilde{M}_{22} = m_x\,. \tag{6.5.26}$$

e a partir da definição da ampliação angular

$$m_\alpha = \frac{d\alpha'}{d\alpha} = \tilde{M}_{11}\frac{n}{n'}\,. \tag{6.5.27}$$

Finalmente concluimos que a forma da matriz $\hat{M}$ é seguinta

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} m_\alpha(n'/n) & \tilde{M}_{12} \\ 0 & m_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n\alpha \\ x \end{pmatrix} \tag{6.5.28}$$

Usando a propriedade (6.5.23) obtemos a relação

$$m_x m_\alpha \frac{n'}{n} = 1\,. \tag{6.5.29}$$

6.5.3 Lente delgada

A lente consiste de duas superfícias como se mostra na Figura 6.3

Temos

$$\Pi = \frac{n_L - n}{R}\,, \quad \Pi' = \frac{n' - n_L}{R'}\,,$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\Pi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{R}' = \begin{pmatrix} 1 & -\Pi' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ D_L/n_L & 1 \end{pmatrix}.$$

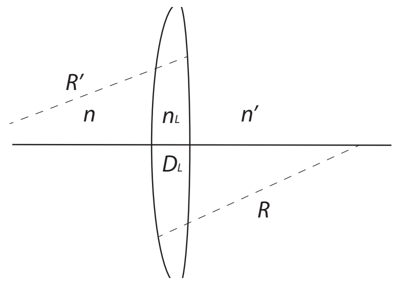

Figura 6.3: *A geometria duma lente. De acordo com a convenção de sinais* $R' < 0$ e $R > 0$

Portanto

$$\hat{M} = \hat{R}'\hat{T}\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\Pi' D_L}{n_L} & -\Pi - \Pi' + \frac{\Pi\Pi' D_L}{n_L} \\ \frac{D_L}{n_L} & 1 - \frac{\Pi D_L}{n_L} \end{pmatrix} . \tag{6.5.30}$$

O límite $D_L \to 0$ corresponde *à lente delgada*. Neste caso

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & -\Pi_{del} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.5.31}$$

onde

$$\Pi_{del} = \frac{n_L - n}{R} + \frac{n' - n_L}{R'} \tag{6.5.32}$$

No caso particular de uma lente no ar temos

$$\Pi_{del} = (n_L - 1)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) . \tag{6.5.33}$$

Se $R' = -R$

$$\Pi_{del} = 2\frac{n_L - 1}{R} . \tag{6.5.34}$$

Pontos focais

Consideramos uma lente delgada de ponto de vista de formação da imagem. Suponhamos que l_0 e l_i são distâncias entre o sistema, o objecto P e a imagem P_1, respectivamente. Temos

$$\hat{M}_{oi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_i/n' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\Pi_{del} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l_0/n & 1 \end{pmatrix} \tag{6.5.35}$$

ou

$$\hat{M}_{oi} = \begin{pmatrix} 1 - \Pi_{del} l_0/n & -\Pi_{del} \\ l_i/n' + l_0/n - \Pi_{del} l_0 l_i/(nn') & 1 - \Pi_{del} l_i/n' \end{pmatrix} \tag{6.5.36}$$

Como P e P_1 são o objecto e a imagem, devemos ter $M_{21} = 0$ ou

$$\frac{l_i}{n'} + \frac{l_0}{n} - \frac{\Pi_{del} l_0 l_i}{n'n} = 0\,.$$

Outra maneira de escrever esta equação é

$$\Pi_{del} = \frac{n}{l_0} + \frac{n'}{l_i} \tag{6.5.37}$$

e chama-se *equação da lente fina*.

Definem-se:

o foco imagem (ou segundo ponto focal) duma lente é o ponto através do qual passam todos os raios incidentes que são ortogonais á lente depois da refracção pela lente;

o foco objecto (ou primeiro ponto focal) é o ponto no qual deve encontra-se uma fonte pontual para produzir raios refractados paralelos.

Claro que para obter o primeiro ponto focal a imagem deve ser formada no infinito (do lado direito da lente), e para obter o segundo ponto focal temos de ter o objecto no infinito (do lado esquerdo da lente). Logo a partir de (6.5.37) obtemos as distâncias focais objecto f_1 e imagem f_2

$$f_1 = \frac{n}{\Pi_{del}}, \quad f_2 = \frac{n'}{\Pi_{del}}.$$

Combinação destas expressões com (6.5.33) da para uma lente colocada no ar ($f_1 = f_2 = f$)

$$\frac{1}{f} = (n_l - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{6.5.38}$$

(a *equação dos fabricantes de lentes*).

Agora podemos determinar as regras de construção grafica da imgem dum objecto (Fig. 6.4). Para isso reparamos que há dois raios que têm propriedades importantes

O raio paralelo ao exio óptico (i.e. a linha que passa através dos pontos focais) que tem origem na fonte passa através do foco imagem (o raio 1).

O raio que parte do objecto e passa atravś do foco objecto depois de refracção pela lente é paralelo ao eixo óptico (o raio 2).

A intersecção destes dois raios constitue o ponto da imagem.

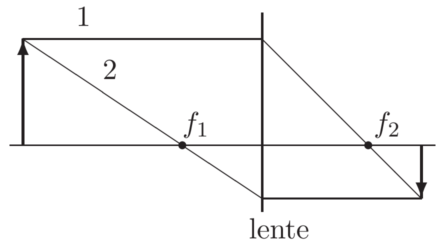

Figura 6.4: *Construção geométrica de imagem.*

6.6 A equação de raio de luz

Introdusimos o versor, tangencial ao raio:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{k}}{k} = \frac{\boldsymbol{k}}{k_0 n} \tag{6.6.1}$$

Verificamos que

$$\frac{dn}{d\ell} = \frac{d\boldsymbol{r}}{d\ell} \cdot \nabla n = \frac{k_0^2}{k}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau} \cdot \nabla n = \frac{\boldsymbol{k}}{k} \cdot \nabla n = \boldsymbol{s} \cdot \nabla n \tag{6.6.2}$$

Calculamos

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{d\ell} = \boldsymbol{s} \tag{6.6.3}$$

e

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{d\ell} = \frac{k_0^2}{k^2}\frac{d\boldsymbol{k}}{d\tau} + \frac{\boldsymbol{k}}{k_0}\frac{d}{d\ell}\frac{k_0}{k} = \frac{1}{2}\frac{\nabla n^2}{n^2} - \boldsymbol{s}\left(\boldsymbol{s} \cdot \frac{\nabla n}{n}\right) \tag{6.6.4}$$

Finalmente obtemos *a equação do raio*

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{d\ell} = \nabla_\perp \ln(n), \qquad \nabla_\perp \equiv \nabla - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}\cdot\nabla) \tag{6.6.5}$$

Desta fórmula obtemos que $\boldsymbol{s}(d\boldsymbol{s}/d\ell) = 0$, i.e. que $\boldsymbol{s}$ é ortogonal a $d\boldsymbol{s}/d\ell$.

Introduzimos o vector unitário $\boldsymbol{s}_0$ ao longo do $d\boldsymbol{s}/d\ell$. Multiplicando (6.6.5) por $\boldsymbol{s}_0$ obtemos

$$\boldsymbol{s}_0 \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{d\ell} = \boldsymbol{s}_0 \cdot \frac{\nabla n}{n}\,. \tag{6.6.6}$$

O vector ∇n tem a direcção do crescimento de n. Portanto o raio curva na direcção de aumnto do índice de refracção.

6.7 O princípio de Fermat

Consideremos uma trajectória do raio entre os pontos A e B com os raios vectores $\boldsymbol{r}_0$ e $\boldsymbol{r}$. A partir da mecânica clássica sabemos que no caso quando a energia se conserva, (no nosso caso $\mathcal{H} = const$) as equações de Hamilton implicam que para uma partícula que se move ao longo desta trajectória o integral

$$\int_A^B \boldsymbol{p} d\boldsymbol{r} \tag{6.7.1}$$

onde $\boldsymbol{p}$ é o momento linear da partícula tem extremo (o princípio do Maupertuis). Uma vez que no nosso caso o análogo matematico do momento linear é $\boldsymbol{k}/k_0$ temos que o mínimo atinge o integral

$$L = \int_A^B n(\boldsymbol{r}) d\ell \tag{6.7.2}$$

O percurso do raio luminoso chama-se *caminho ótico*. Integral (6.7.2) é o comprimento do caminho ótico. Para verificar, calculamos, usando (6.2.7), (6.2.10), bem como as equações de Hamilton,

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r})}{k_0}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_A^B \frac{\boldsymbol{k}(\boldsymbol{r})}{k_0}\frac{d\boldsymbol{r}}{d\tau}\cdot d\tau = \int_A^B \frac{\boldsymbol{k}}{k_0}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{k}} d\tau \\ &= \int_A^B \frac{k^2}{k_0}\cdot\frac{k_0^2}{k} d\ell = \int_A^B n(\boldsymbol{r}) d\ell \end{aligned} \tag{6.7.3}$$

Isto leva-nós ao Princípio de Fermat [1]:

> *A luz propaga-se entre dois pontos ao longo da trajetória que tem o caminho ótico extremo.*

Uma vez que $n(\boldsymbol{r}) = c/v(\boldsymbol{r})$ e

$$\int_A^B \frac{d\ell}{v(\boldsymbol{r})} = t_{AB}$$

é o tempo de propagação da luz entre os pontos A e B, podemos formular o Princípio de Fermat numa outra forma

> *Um raio da luz propagando-se de um ponto para outro segue um percurso que comparado com as trajetórias vizinhas, exige que o tempo dispendido seja um máximo, um mínimo ou permanença inalterado, i.e. δL*

6.7.1 Exercícios

1. Provar, que se uma lente se encontra num meio (i.e. os meios dos dois lados da lente têm iguais índices de refração) o raio que liga os pontos de objeto e de imágem passa pelo ponto em que o eixo ótico crusa com a lente.

2. Deduzir as leis re reflexão e de refração (a Lei de Snell) directamente apartir do Princípio de Fermat.

   Sugestão: a solução pode ser encontrada por exemplo em [3]

3. Descreva, i.e., determia os pontos focais e ampliações lateral e angular das lentes na Fig. 6.5.

4. Considere a superfície entre dois meios com $n = 1$ e $n = 1.5$. Suponha que a superfície encontra-se no plano (x, y). O raio passa atravez do ponto $(x, y, z) = (-10\,cm,\, 0,\, -10\,cm)$ e tem $\boldsymbol{s} = 0.34\mathbf{i} + 0.94\mathbf{k}$. Determine a coordenada z do ponto em que o raio atravessa a superfície (y, z).

[1] Pierre de Fermat, 1605-1665

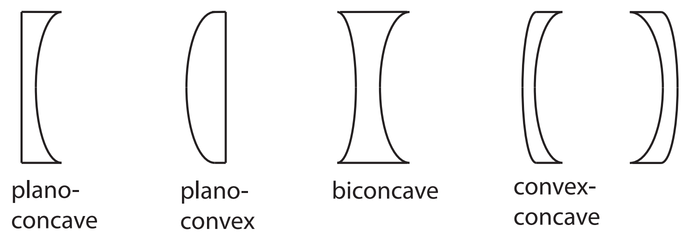

Figura 6.5:

5. [3] Demonstrar que a potência dum aparelho óptico que consiste de duas lentes delgadas separadas pela distância d no ar é

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 - d\Pi_1\Pi_2 \tag{6.7.4}$$

onde Π_1 e Π_2 são poderes das lentes.

6. Sabendo que $\hat{M}$ é a matriz duma lente (não delgada), determiar se os pontos focais do objeto e da imagem podem estar do mesmo lado da lente (i.e. uma ser virtual e outra real ou *vice versa*) e se possivel obter as condições quendo isto acontece.

Bibliografia

[1] H. Georgi, "The Physics of Waves"(PRENTICE HALL Englewood Cliffs, New Jersey 07632)

HTTPS://WWW.PEOPLE.FAS.HARVARD.EDU/ HGEORGI/ONENEW.PDF

[2] F. S. Crawford, Jr "Waves"Berkley physics course. Vol. 3 (McGraw-Hill, 1968)

[3] H. J. Pain, "The Physics of Vibrations and Waves"(John Wiley & Sons, 1999)

[4] H. Georgi, The Physics of Waves, (Prentice Hall, 1993)

[5] K. D. Möller, Optics. Learning by Computing. (Springer Science+Business Media, LLC, 2007)

[6] E. Hecht, "Optics"(Addison Wesley, 2002)

[7] A. P. Kuznetsov, A. G. Rozhnev, D. I. Trubetskov "Oscilações e ondas lineares (exercícios)"