Exame de Cálculo Diferencial e Integral III

10 Janeiro 2019 - duração: Parte I: 1h30m; Parte II (2^o Teste): 1h30m; Total: 3h

Indique a sua versão do exame/teste na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.
Recorde que, por convenção, as circunferências são percorridas uma vez no sentido directo.

Versão A

Parte I

1. (a) Encontre a solução da EDO $y''' + 9y' = 0$ que satisfaz $y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0, y''(\pi) = 1$.

   (b) Prove que a mudança de variável $u = y^{-4}$ transforma a equação de Bernoulli $y' - y(1 + \frac{1}{2t}) - \frac{4}{t^2}y^5 = 0\,(t > 0)$ na EDO $u' + (4 + \frac{2}{t})u = -\frac{16}{t^2}$; encontre a solução da equação inicial que satisfaz $y(1) = 1$, indicando o seu intervalo de definição.

   (c) Encontre as trajectórias ortogonais à família de curvas dadas por $y^3(e^{-x} + 3) = c$, c constante. (Pode apresentar as soluções na forma implícita.)

2. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Sendo $S(x)$ a soma da série de Fourier da função 2π-periódica f com $f(x) = (x + \pi)^3$ em $]-\pi, \pi[$, o valor de $S(9\pi)$ é: A: $8\pi^3$. B: $4\pi^3$. C: $1000\pi^3$.

   (b) A EDO $y'' - y' - 6y = 3e^t + 2t$ tem uma solução particular da forma (com a, b, c constantes): A: $e^{3t} + (at + b)e^t + ct$. B: $e^{3t} + ae^t + bt + c$. C: $ae^{3t} + be^t + ct$.

   (c) Se A é matriz 2×2 e $X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix}$ é uma matriz de soluções de $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, todas as soluções $(x(t), y(t))$ deste sistema com $x(t)$ não nula satisfazem:

   A: $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 1$. B: $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$. C: $\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$.

   (Nota: cada resposta correcta = 0,7 val., cada resposta errada = −0,2 val.)

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função em $SC(\mathbb{R})$ e 2π-periódica, cuja série de Fourier em $[-\pi, \pi]$ é

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2\pi \cos(nx)}{n^2} + \frac{2\pi \sin(nx)}{n} \right)$$

   (a) Escreva o polinómio de Fourier P_2 de segunda ordem de f em $[-\pi, \pi]$.

   (b) Indique o valor do integral $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(7x) f(x)\, dx$.

   (c) Escreva a série de Fourier em $[-\pi/2, \pi/2]$ da função π-periódica $g(x) = f(2x) + f(-2x)$.

4. Seja $A(t) = \left[a_{ij}(t)\right]$ uma matriz $n \times n$ de funções $a_{ij} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e T-periódicas e considere o sistema de EDOs

$$x' = A(t)x. \tag{1}$$

   a) Justifique que se $\varphi(t)$ é uma solução em $\mathbb{R}$ de (1), então $\psi(t) = \varphi(t + T)$ $(t \in \mathbb{R})$ é também solução de (1).

   b) Sendo $X(t)$ uma matriz fundamental de soluções de (1), justifique que todas as soluções de (1) são T-periódicas se e só se $X(T) = X(0)$.

(v.v.)

Parte II

5. (a) Para o rectângulo $R = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 2, -\pi \leq y \leq 0\}$, represente geometricamente a imagem de R pela aplicação $z \mapsto e^z$, apresentando os cálculos.

   (b) Sendo $f(z) = z - |z|^2 + (1 + 2i)(\mathrm{Re} z)^2$, determine em que pontos $z \in \mathbb{C}$ existe derivada $f'(z)$ e calcule-a.

6. Faça o esboço das curvas, indique o domínio onde as funções integrandas são holomorfas e calcule os integrais de caminho seguintes, apresentando o resultado na forma $a + ib$:

   (i) $\int_{|z+i|=3} \frac{e^{iz}}{(z-i)(z+1)^2}\, dz$; (ii) $\int_{|z|=2} \frac{\cos z - 1}{z^2+9}\, dz$; (iii) $\int_{|z|=2} z^2 \mathrm{e}^{\frac{i}{2z}}\, dz$.

7. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Sendo $u(t,x)$ a solução da equação das ondas $u_{tt} = 9u_{xx}$ em $\mathbb{R}^2$, com posição e velocidade iniciais dadas respectivamente por $u(0,x) = e^{-2x}, u_t(0,x) = 5$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ o valor de $\lim_{x \to +\infty} u(t,x)$ é: A: 0. B: $5t$. C: 5.

   (b) A parte imaginária dos números complexos $z = 3^i$ (sem ramo fixado do logaritmo) é:
   A: $\ln 3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. B: $e^{-2k\pi}\cos(\ln 3)$, $k \in \mathbb{Z}$. C: $e^{-2k\pi}\sin(\ln 3)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) Sendo $\frac{\log(1+z)}{(z-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-1)^n$ (para o ramo principal de log), tem-se:
   A: esta série diverge para $z = i/2$. B: esta série converge para $z = -0,9$. C: esta série converge para $z = 2,1$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,7$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

8. Considere a função $g(z) = \frac{1}{(z-2i)^7(z-i)}$.

   (a) Determine o resíduo de g em i.

   (b) Determine a série de Laurent de g, válida numa vizinhança de $2i$ privada de $2i$, $B_r^*(2i) = B_r(2i) \setminus \{2i\}$, indicando o maior valor possível para r.

9. Seja $f : D \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa num aberto $D \subset \mathbb{C}$ que contém uma bola fechada $\overline{B_r(z_0)}$ e tal que $f(z)$ é constante sobre a circunferência de equação $|z - z_0| = r$. Mostre que f é constante em $B_r(z_0)$.

FIM

Cotações: Parte I. 4,8+2,1+1,8+1,3=10. Parte II. 2+3,2+2,1+1,5+1,2=10.

Algumas fórmulas úteis

Série de Fourier de $f \in SC([-L,L])$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Identidade de Parseval: para $f \in SC([-L,L])$: $\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\Big)$.

Fórmula de D'Alembert: $u(t,x) = \frac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$, $\quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Fórmulas Integrais de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$, $\quad n = 0,1,2,\ldots$, $\quad$ com $\quad z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

Fórmula dos Resíduos: $\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Res}\,(f, z_i)$, $\qquad$ com $\quad z_i \in \operatorname{int}\gamma, i = 1,\ldots,p$

Algumas séries de Taylor: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1+z+z^2+z^3+\cdots, \quad |z|<1; \qquad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad |z|<1$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}; \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$