# Exercício 06: Integração Numérica

Ernesto González, Iara Tiago, Ariana Dias

Integração numérica de funções contínuas com a regra do trapézio, de Simpson e método de Romberg. Exemplo do trabalho da impulsão da esfera. Integração numérica em conjuntos discretos de dados com a regra do trapézio e de Simpson. Exemplo de velocidade de saída de uma flecha.

## I. ESFERA IMERSA EM ÁGUA

Considere-se uma esfera de 2 metros de raio, parcialmente imergida em água. Sabe-se que o volume da esfera fora da água é $V = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$, em que $h$ é a altura da secção fora de água. Pretende-se calcular o trabalho realizado pela impulsão durante o processo de submergir metade da esfera.
Utilizaram-se a regra do trapézio, de Simpson e método de Romberg para calcular numericamente o trabalho realizado pela impulsão. Pelo princípio de Arquimedes, a impulsão, $I$, é obtida através da equação $I = \rho V g$, sendo $\rho = 10^3 \mathrm{Kg/m^3}$ e $g = 9.81 \mathrm{m/s^2}$. Como $r = 2$, o volume é dado por $V = \frac{\pi}{3}h^2(6 - h)$. Inicialmente, com a esfera fora de água a altura da secção fora de água é o diâmetro da esfera, $h = 4$. Após submergir metade da esfera, a altura da secção fora de água é $h = 2$.

Assim, o trabalho realizado pela impulsão é dado por

$$\int_2^4 F dr = \int_2^4 I(h) dh = \int_2^4 \rho\frac{\pi}{3}(32 - 6h^2 + h^3) g dh \quad (1)$$

De forma a verificar os valores obtidos do cálculo deste trabalho com os métodos mencionados, foi utilizada a função Integrate do *Mathematica*.

Tabela I. Valores do trabalho, $W$, obtidos em cada método de integração e no *Mathematica*, com uma precisão de $10^{-16}$ e $n$ correspondente ao número de partições no método.

| $n$ | Método | $W$ |
|---|---|---|
| 100 | Trapézio | 123280.20493 |
| 100 | Simpson | 123276.09573 |
| 100 | Romberg | 123276.09587 |
| - | Integrate | 123276.09573 |

O método de Simpson só funciona corretamente, perante uma boa escolha do número de divisões de integração, $n$. Este método, aproxima a função com que trabalha, por meio de segmentos de parábolas, que são obtidas por polinómios de segundo grau. Como tal, para a regra de Simpson, deve ser escolhido um $n$ par. Por outro lado, a regra trapézio leva mais tempo a convergir, sendo necessário um maior número de divisões de integração para que se observe a sua curva a aproximar-se de um valor específico. Pela Figura 1 consegue-se, assim, observar e confirmar, que a regra de Simpson converge mais rapidamente que a regra do trapézio para funções classe $C^2$, o que também pode ser confirmado pela Tabela I, uma vez que a regra do trapézio em *Python* e a função Integrate do *Mathematica* dão o mesmo resultado.

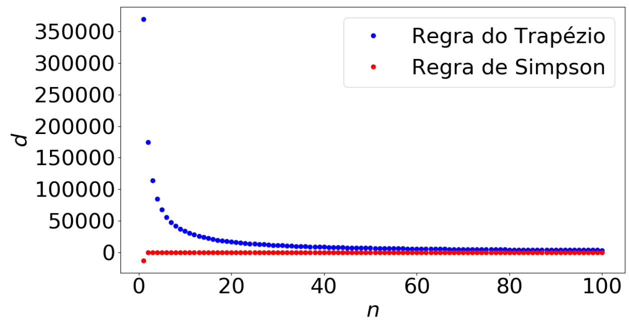


Figura 1. Desvio, $d = W_{real} - W_{numerico}$, do resultado do trabalho calculado numericamente ao valor real do trabalho, pela regra do trapézio e regra de Simpson, em função do número de divisões, $n$.

Para o método de Romberg fez-se um gráfico do erro do método em função do número de iterações, $k$, (em escala log-lin) como na Figura 2. Observa-se que o erro decai rapidamente, em apenas 19 iterações, para uma precisão de $\epsilon = 10^{-16}$, para um valor de 0.0. Para a primeira iteração, $k = 1$, o valor do integral corresponde a $-123276.09573$. Este valor é igual ao valor do cálculo do integral pela regra de Simpson. Face à rapidez de diminuição do erro associado ao método opta-se por representar este numa escala logaritmica para a melhor compreensão do processo possível.

## II. INTEGRAL DO INVERSO DO QUADRADO

Considere-se a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Pretende-se calcular o integral de $f$ em, por exemplo, $x \in [0.1, 5, 1]$. Resolvendo analiticamente, vem

$$\int_{0.1}^{50.1} f(x) = \left[-\frac{1}{x}\right]_{0.1}^{50.1} = -\frac{1}{50.1} + 10 \approx 9.98003992 \quad (2)$$

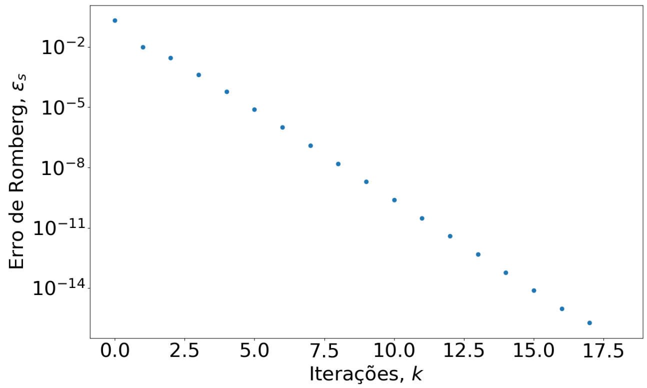


Figura 2. Gráfico do logaritmo do erro associado ao Método de Romberg, $\epsilon_s$ em função do número de iterações, $k$. Pode-se observar que o erro diminui rapidamente, ao final de 19 iterações para 0.0.

Calculemos agora o valor do integral usando a regra do trapézio, a regra de Simpson e o método de Romberg. Na Figura 3 encontra-se o valor do desvio $d = I_{numrico} - I_{real}$ em função do do tamanho da divisão usada no método numérico, em que $I_{numrico}$ é o valor do integral obtido numericamente e $I_{real} = 9.98003992$.

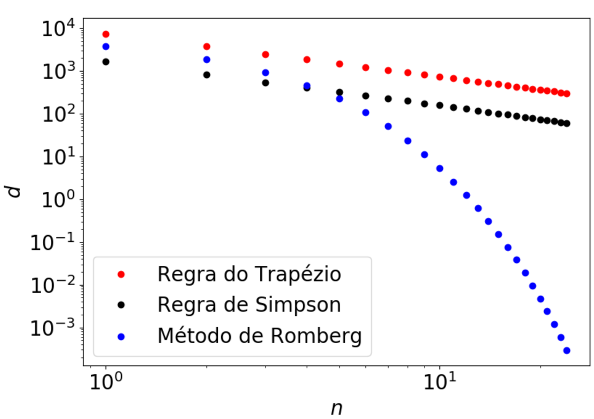


Figura 3. Desvio, $d = I_{real} - I_{numerico}$, do resultado do integral calculado numericamente ao valor real do integral, pela regra do trapézio, regra de Simpson e método de Romberg, em função do número de divisões, $n$. O método de Romberg foi aplicado com número de iterações máximo $k_{max} = 25$ e critério de convergência $\epsilon = 10^{-6}$.

## III. ARCO E FLECHA

A força, $F(x)$, necessária para esticar o fio de um arco é apresentada na Tabela II.

A velocidade de saída de uma flecha de $m = 0.00075\,kg$ quando o fio é esticado $0.5\,m$ é dada por

Tabela II. Valor da força $F(x)$ necessária para esticar o fio do arco para um afastamento $x$.

| x(m) | 0.00 | 0.05 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| F(N) | 0 | 37 | 71 | 104 | 134 | 161 |
| x(m) | 0.30 | 0.35 | 0.40 | 0.45 | 0.50 | |
| F(N) | 185 | 207 | 225 | 239 | 250 | |

$$W = \Delta E_c \iff \int_{0.00}^{0.50} F(x)dx = \frac{mv^2}{2} \iff v = \sqrt{2\int_{0.00}^{0.50} \frac{F(x)}{m}\,dx} \tag{3}$$

Recorreu-se, assim, ao método do trapézio, adaptado a conjuntos discretos, para o cálculo do integral a partir de uma lista de dados como na Tabela II. Obteve-se $F = 74.4N$ para o valor do integral e uma velocidade de saída $v = 44.54211ms^{-1}$.

De seguida, recorreu-se à função Interpolation para ordem 1 do *Mathematica* e fez-se o gráfico da função interpolada, como se pode verificar na Figura 4.

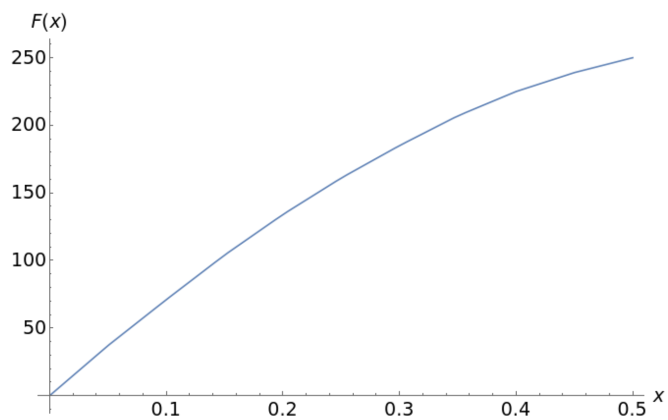


Figura 4. Gráfico resultante da função **Interpolation** para ordem 1 do *Mathematica* em relação à função $F(x)$ em relação à distância,$x$. $F$ varia entre 0 e 250 e $x$ entre 0.00 e 0.50

Recorreu-se ainda a função NIntegrate do *Mathematica* para o resultado obtido para a interpolação anteriormente calculada no intervalo $x = [0, 0.5]$ obtendo-se um valor de $F = 74.4\,N$. Pode-se verificar que ambos os valores obtidos por recurso ao método do Trapézio como ao NIntegrate do *Mathematica* são iguais, que pode ser justificado pelo facto de o *Mathematica* por *default* recorrer a um método muito similar ao método do trapézio para o cálculo do integral. O motivo pelo qual se optou por uma interpolação de ordem 1 no *Mathematica* deve-se ao desconhecimento da dependência de $F$ sobre $x$ pelo que, primeiramente, se considera a aproximação linear.

De seguida pretendeu-se calcular $W_{0.00\to 0.50}$ pela regra de Simpson. Para tal foram seguidos três procedimentos diferentes:

a) usou-se a função scipy.interpolate.interp1d para interpolar os dados, obtendo-se uma função interpolada de terceira ordem e, de seguida, aplicou-se a regra de Simpson para funções contínuas;

b) usou-se o método Interpolate[] e depois aplicou-se Series[] para obter o desenvolvimento de Taylor de ordem 3 em $x = 0.25$ da função interpolada pelo *Mathematica* e aplicou-se a regra de Simpson para funções contínuas;

c) usou-se a regra de Simpson para conjuntos discretos de dados.

Na Tabela III encontram-se os resultados obtidos para os diferentes procedimentos. Os três procedimentos diferem por um máximo de treze centésimas. As diferenças devem-se às diferenças nas interpolações aplicadas em cada método. Sendo que a regra de Simpson inclui interpolações a polinómios de segundo grau, a regra de Simpson para conjuntos de dados discretos inclui, tal como os outros dois procedimentos, interpolações.

Tabela III. Cálculo do integral pela regra de Simpson e respetiva velocidade de saída associada por três procedimentos: interpolação dos dados com scipy para um polinómio de grau 3 e aplicação da regra de Simpson; interpolação dos dados com Interpolate[] e aplicação da regra de Simpson ao desenvolvimento de Taylor de ordem 3 em $x = 0.25$ obtido pelo Series[]; aplicação da regra de Simpson para conjuntos discretos de dados.

| Procedimento | $W_{0.00\to 0.50}$ | $v$ |
|---|---|---|
| scipy.interpolate.interp1d | 74.523840 | 44.579170 |
| Series[Interpolate[]] | 74.750000 | 44.646762 |
| Simpson Discreto | 74.533333 | 44.582009 |