Métodos Matemáticos da Física — 2011/12

Exame 1ª época — 11-06-2012

1.a) Determine os valores próprios λ_n e funções próprias $y_n(x)$ do operador d/dx, definidas no intervalo $[-\ell, \ell]$ e satisfazendo a condição fronteira $y(\ell) = y(-\ell)$.
b) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da série $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$ a partir da expressão de uma função $u(x)$.
c) Obtenha as séries de Fourier complexas das funções $u(x) = \cos x$, $v(x) = \delta(x)$, definidas no intervalo $[-\ell, \ell]$.

2. Considere a equação diferencial

$$(2x - x^2)\, y''(x) + 3(1-x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [0, 2] \ .$$

a) Admita que a solução $y(x)$ é um polinómio de grau igual ou inferior a 3: $y(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3$. Determine as relações que devem ser satisfeitas pelos coeficientes a_i e os valores próprios λ possíveis.
b) Explicite as funções próprias $y_n(x)$ associadas aos valores próprios λ_n encontrados na alínea a), sujeitas à condição inicial $y_n(0) = 1$.

3.a) Calcule os integrais:

$$\textbf{1)} \int_{-\ell}^{\ell} \delta(x)\, \cos x\, dx \ , \quad \textbf{2)} \int_{-\ell}^{\ell} \delta(x)\, x\ dx \ , \quad \textbf{3)} \int_{-\ell}^{\ell} \delta(x)\, x\, f(x)\, dx \ .$$

b) Calcule as derivadas $y'(x)$, $y''(x)$, da função $y(x) = c\, x\, \Theta(x) + a_0 + a_1\, x$, onde c, a_0, a_1 são constantes.
c) Determine as constantes c, a_0, a_1, tais que $y(x)$ satisfaça as seguintes condições: $y''(x) = \delta(x)$, $y(\ell) = 0$, $y(-\ell) = 0$.

4. Considere a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R}\, , \ y \leq 0.$$

a) Escreva $u(x, y)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(k, y)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(k, y)$ e a solução geral da equação, $u(x, y)$.
c) Identifique no resultado obtido as soluções da equação separáveis na forma: $u(x, y) = f(x)\, g(y)$.
d) Obtenha a solução $u(x, y)$ que satisfaz a condição fronteira $u(x, 0) = e^{-x^2/\alpha^2}$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x) \ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 x^2}\, e^{-i\,k\,x}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-k^2/(4a^2)}$