Métodos Matemáticos da Física 2011/12

Exame de Época Especial 19-07-2012

1. Seja $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$ uma série de Fourier complexa em termos das funções próprias do operador d/dx, $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, no intervalo $x \in [-\ell, \ell]$.
a) Calcule o produto interno $\langle y_n | y_n \rangle$ e demonstre como se determinam os coeficientes c_n a partir da expressão de $u(x)$.
b) Determine a série de Fourier complexa da função $\Theta(x)$.
c) Diga, justificando, quais os valores esperados da série de Fourier de $\Theta(x)$ nos pontos $x = \ell$ e $x = -\ell$.
d) Obtenha $\Theta(x)$ como uma série de senos e cosenos.

2. Seja $u(\theta, \phi)$ uma função própria simultânea dos operadores $\partial/\partial\phi$ e

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ ,$$

que satisfaz a condição de periodicidade: $u(\theta, \phi) = u(\theta, \phi + 2\pi)$.
a) Determine os valores próprios possíveis de $\partial/\partial\phi$ e a dependência das respetivas funções próprias em ϕ.
b) Deduza a equação diferencial ordinária a que obedece a função $y(\theta) = u(\theta, 0)$.

3. Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + (1-x)\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

a) Coloque a equação acima na forma de Sturm-Liouville.
b) Identifique, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado a este problema.
c) Calcule os produtos internos $\langle u|u\rangle$, $\langle u|v\rangle$, para as funções $u(x) = 1$, $v(x) = a + x$, onde a é uma constante real.
d) Determine o valor da constante a para o qual se anula o produto interno $\langle u|v\rangle$. Verifique se nessas condições as funções $u(x)$, $v(x)$ satisfazem a equação diferencial acima definida identificando os respetivos valores próprios.

4. Considere a equação diferencial no domínio $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, +\infty[$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ ,$$

com a condição fronteira $\lim_{y\to+\infty} u(x, y) = 0$.
a) Escreva $u(x, y)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(k, y)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(k, y)$ e a solução geral da equação $u(x, y)$ que obedece à condição fronteira acima indicada.
c) Obtenha a solução $u(x, y)$ que satisfaz a condição $u(x, 0) = \delta(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\,\delta(x)\ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$