# Equações cartesianas

Recorde-se:

Sejam $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R}), \mathbf{b} \in M_{k\times 1}, r(A) = r \leq k \leq n$.

Se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível, sendo $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, então cada solução deste sistema pertence ao conjunto

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \alpha_{t1} \\ \vdots \\ \alpha_{tn} \end{bmatrix} \right\rangle \text{ onde } t = n - r,$$

$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ é uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

e $\left( \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \alpha_{t1} \\ \vdots \\ \alpha_{tn} \end{bmatrix} \right)$ é uma base do subespaço nulo de $A$, $N(A)$.

$\mathcal{F}$ é um subespaço afim de dimensão $n - r(A)$.

Em particular, se $k = n = r(A)$, $A$ é uma matriz invertível e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução única, um ponto.

### Teorema

*Sejam $m < n$. Qualquer subespaço afim $\mathcal{G} = P + G$ de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m$ é o conjunto solução de um sistema de equações lineares $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ com $n$ incógnitas cuja matriz simples tem característica $n - m$, em que $P$ é uma solução particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, e $G$, o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ associado a $\mathcal{G}$, é o conjunto solução do sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

# Equações cartesianas em $\mathbb{R}^3$

## Planos

Seja $\pi = P + \langle u, v\rangle$ um plano de $\mathbb{R}^3$, onde
$P = (p_1, p_2, p_3)$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$.
Como $(u, v)$ é l.i., $\dim \langle u, v\rangle = 2$ e $\dim \langle u, v\rangle^\perp = 3 - 2 = 1$.
Seja $c = (c_1, c_2, c_3) \in \langle u, v\rangle^\perp$, $c \neq 0$.
Então $\langle c\rangle^\perp = \langle u, v\rangle$.
e $\langle u, v\rangle$ é o subespaço vetorial das soluções da equação

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0.$

Tomando $-d = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$ tem-se que
$\pi = P + \langle u, v\rangle$ é o conjunto das soluções da equação

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + d = 0$$

## Retas

Seja $r = P + \langle u\rangle$ uma reta de $\mathbb{R}^3$, onde
$P = (p_1, p_2, p_3)$ e $u = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$.
Seja $(c_1, c_2) = ((c_{11}, c_{12}, c_{13}), (c_{21}, c_{22}, c_{23}))$ uma base de $\langle u\rangle^\perp$.
Então $\langle c_1, c_2\rangle^\perp = \langle u\rangle$ e $\langle u\rangle$ é o subespaço vetorial das soluções do sistema de equações

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = 0 \end{cases}$$

Tomando $-\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + d_1 = 0 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + d_2 = 0 \end{cases}$$

é um sistema de equações cartesianas da reta $r$ em $\mathbb{R}^3$.

## Exemplo

*Seja* $r = (1, 2, -1) + \langle(-1, 1, 0)\rangle$ *uma reta de* $\mathbb{R}^3$*.*
*Uma base de* $\langle(-1, 1, 0)\rangle^{\perp}$ *é* $((1, 1, 0), (0, 0, 1))$*,*
*portanto o subespaço vetorial associado a r é o conjunto solução do sistema* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

*Calculando* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

*Assim, um sistema de equações cartesianas de r é*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ x_3 + 1 = 0 \end{cases}$$

## Exemplo

*Seja* $\gamma = (5,2,1) + \langle (1,1,1),(1,-1,2)\rangle$ *um plano de* $\mathbb{R}^3$.

*Uma base de* $\langle (1,1,1),(1,-1,2)\rangle^{\perp}$ *é* $((3,-1,-2))$,

*portanto o subespaço vetorial associado a* $\gamma$ *é o conjunto solução da equação* $3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

*Calculando* $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$

*Assim, uma equação cartesiana de* $\gamma$ *é*

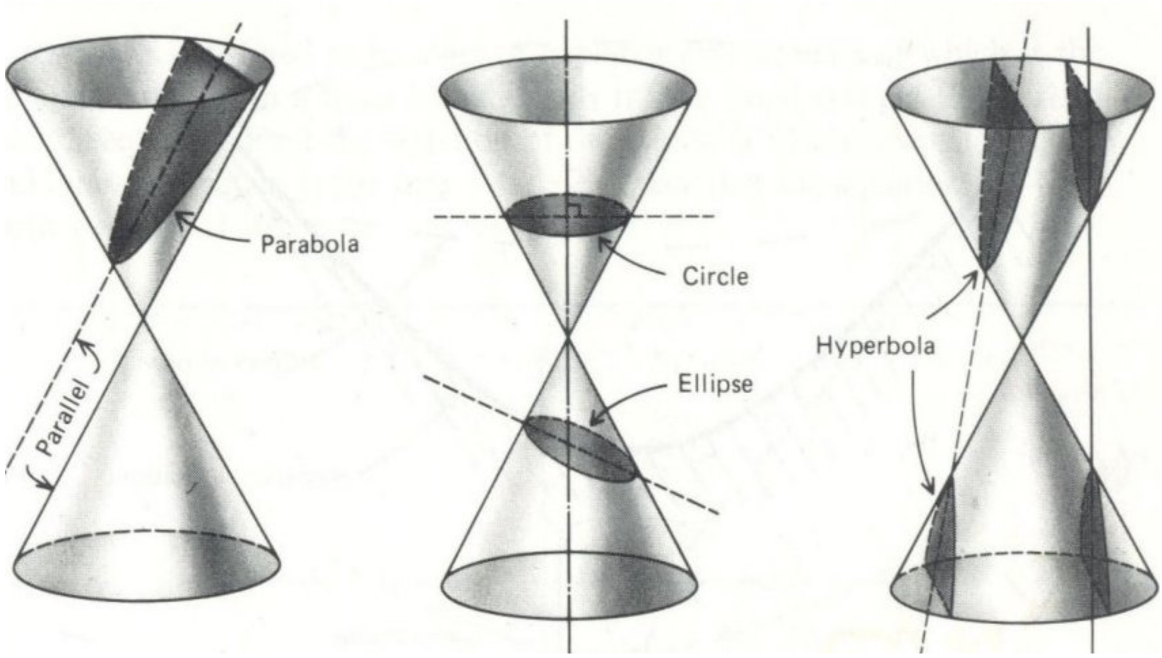
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 - 11 = 0.$$

# Secções Cónicas

Cada secção cónica resulta de intersetar um duplo cone (infinito) com um plano

Dependendo da posição relativa do cone e do plano de corte, obtém-se

- uma parábola
- uma elipse
- uma hipérbole
- ou, nos casos degenerados, um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes.




# Parábola

*Caracterização Geométrica.* Fixados uma reta $l$, a diretriz, e um ponto $P \notin l$, o foco, a *parábola* é o lugar geométrico de todos os pontos do plano equidistantes de $l$ e $P$.

Uma *equação reduzida* da parábola é $\boxed{x^2 = 4cy}$

onde $\begin{cases} \text{foco: } (0, c) \\ \text{diretriz: } y = -c \\ \text{eixo de simetria: eixo } OY \end{cases}$

ou $\boxed{y^2 = 4cx}$

onde $\begin{cases} \text{foco: } (c, 0) \\ \text{diretriz: } x = -c \\ \text{eixo de simetria: eixo } OX \end{cases}$