Esta distribuição que aparece como caso limite da distribuição binomial em determinadas circunstâncias, é um bom modelo probabilístico de fenómenos aleatórios como número de clientes que chegam a um determinado posto de atendimento, número de chamadas que chegam a uma central telefónica num certo período de tempo, número de acidentes de viação que ocorrem numa determinada via durante um certo período de tempo, nº de partículas emitidas por uma substância radioactiva num intervalo de tempo, etc.

Exercício: A um balcão de atendimento de um departamento dum Centro Comercial chegam clientes de acordo com uma distribuição de Poisson de média 7 clientes/hora. Para uma determinada hora qual é a probabilidade de:

i) Não chegarem mais de 3 clientes?

ii) Chegarem pelo menos 2 clientes?

iii) chegarem exactamente 5 clientes?

RESOLUÇÃO: X-nº de clientes que chegam ao departamento do C.C./hora $X \cap P(7) \quad E(X) = 7$.

i) $P(X \leq 3) = \sum_{i=0}^{3} P(X = i) = \sum_{i=0}^{3} e^{-7} \frac{7^i}{i!} = 0.0818$

ii) $P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 0.9927$

iii) $P(X = 5) = 0.1277$

Há vários modelos de probabilidades que correspondem a distribuições de v.a.'s contínuas, mas vamos somente estudar o modelo Gaussiano por ser um dos mais importantes, senão o mais importante dada a sua aplicabilidade.

1.5.3 Distribuição Exponencial

Definição: Uma v.a. X com função densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por

$$f(x;\lambda) = \lambda\, exp(-\lambda x) \quad x \geq 0, \lambda > 0 \qquad (1)$$

tem distribuição Exponencial de parâmetro λ, isto é $X \cap Exp(\lambda)$.

Facilmente se verifica que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, isto é, o valor médio é o inverso do parâmetro e $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Sendo portanto $E(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}$

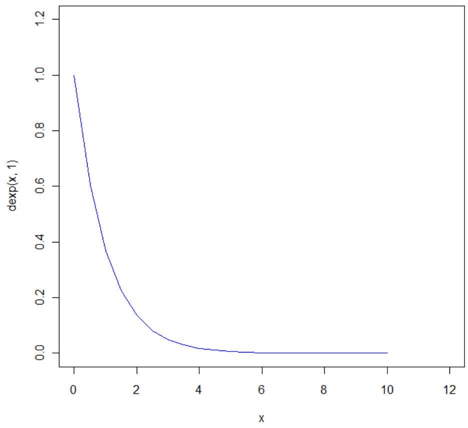

Figura 1

1.5.4 Distribuição Gaussiana

Definição: Uma v.a. cuja f.d.p. tem a seguinte expressão:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2 / 2\sigma^2}, \quad x \in \Re,\ \mu \in \Re,\ \sigma > 0 \tag{1}$$

tem distribuição Gaussiana de parâmetros μ e σ, respectivamente o valor médio e o desvio-padrão da distribuição, isto é, designa-se por $X \cap Gau(\mu, \sigma)$.

No caso de μ=0 e σ=1, temos a v.a. "standard" Gau(0, 1) e a sua f.d.p. obtém-se de (1) e representa-se pela letra grega φ, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $x \in \Re$. Na figura seguinte encontra-se representada esta função (curva de Gauss).

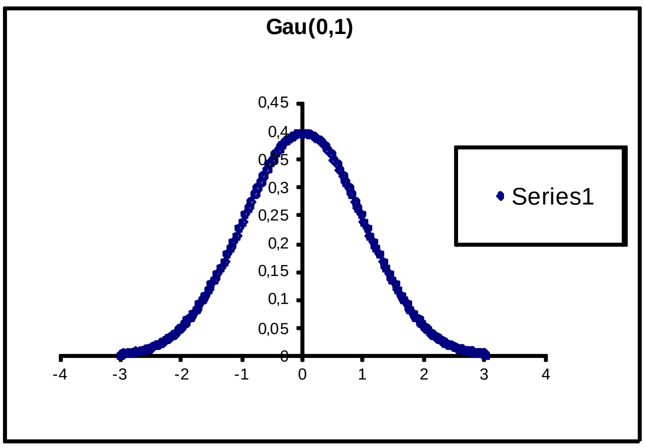

Figura 2

As f.d.p. das gaussianas não standard têm formas semelhantes como se pode ver.

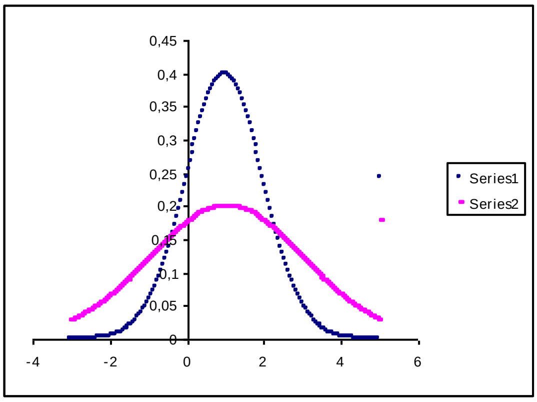

Figura 3

Na figura anterior encontram-se as f.d.p. de duas gaussianas com o mesmo valor médio igual a 1, e desvios-padrão diferentes. A curva mais achatada corresponde ao desvio-padrão 2 (maior dispersão em relação ao valor médio) e a outra tem desvio-padrão igual a 1. De facto a f.d.p. tem um máximo no ponto $\mu = 1$ e a ordenada da f.d.p. nesse ponto é igual a $f(\mu) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, isto é, decresce com σ (ver (1)).

Na figura 4 podemos ainda ver vários gráficos da f.d.p. da Gaussiana com diferentes valores médios e /ou desvios-padrão.

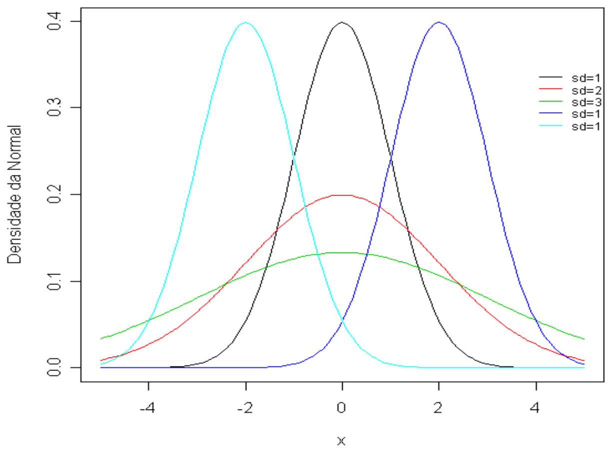

Figura 4

Note-se que se $X \cap Gau(\mu,\sigma)$ então $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \cap Gau(0,1)$. (2)

A f.d. da v.a. X é dada por

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2\right) dt \quad , \forall x \in \Re \tag{3}$$

e analogamente a f.d. da v.a. Y ($Gau(0,1)$) é dada por:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-t^2/2} \, dt \, , \qquad \forall x \in \Re \tag{4}$$

Estes integrais não têm solução analítica logo tem de se recorrer a solução numérica. Uma vez que toda a gaussiana se pode converter numa gaussiana "standard" por meio da transformação (2), somente está tabelada a f.d. da Gau(0, 1).

Dada a simetria da curva de Gauss tem-se a seguinte relação:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \ \forall x \in \Re \tag{5}$$

E assim, basta tabelar a função Φ para valores positivos do argumento. Para exemplificação temos aqui alguns destes valores:

x	Φ(x)	x	Φ(x)
0	0.5	1.7	0.955435
0.1	0.539828	1.6	0.945201
0.2	0.579260	1.7	0.955435
0.3	0.617911	1.8	0.964070
0.4	0.655422	1.9	0.971284
0.5	0.691463	1.6	0.945201
0.6	0.725747	2	0.977250
0.7	0.758036	2.1	0.982136
0.8	0.788145	2.2	0.986097
0.9	0.815940	2.3	0.989276
1	0.841345	2.4	0.991803
1.1	0.864334	2.5	0.993790
1.2	0.884930	2.6	0.995339
1.3	0.903199	2.7	0.996533
1.4	0.919243	2.8	0.997445
1.5	0.933193	2.9	0.998134
1.6	0.945201	3	0.998650

Exemplo 1: Seja

$$X \cap Gau(1,2) \text{ então } Y = \frac{X-1}{2} \cap Gau(0,1)$$

$$P(X \le 1) = P\left(\frac{X-1}{2} \le 0\right) = \Phi(0) = 0.5;$$

$$P(-1 < X \le 3) = P\left(\frac{-1-1}{2} < \frac{X-1}{2} \le \frac{3-1}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$$

$$= 2\Phi(1) - 1 = 0.6827$$

$$P(-3 < X \le 5) = P\left(\frac{-3-1}{2} < \frac{X-1}{2} \le \frac{5-1}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 = 0.9545$$

$$P(-5 < X \le 7) = P\left(\frac{-5-1}{2} < \frac{X-1}{2} \le \frac{7-1}{2}\right) = 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$$

Exemplo 2: Para uma variável aleatória gaussiana temos:

$$X \cap Gau(\mu,\sigma) \; P(\mu - k\sigma < X \leq \mu + k\sigma) = P\left(-k < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq k\right) = \Phi(k) - \Phi(-k)$$

$k = 1 \qquad 2\Phi(1) - 1 = 0.6827$

$k = 2 \qquad 2\Phi(2) - 1 = 0.9545$

$k = 3 \qquad 2\Phi(3) - 1 = 0.9973$

Exercício: O tempo X necessário para realizar um teste de uma determinada disciplina é uma v.a. normalmente distribuída com valor médio 70 minutos e desvio-padrão 12 minutos. Quanto tempo se deve dar para fazer o teste se quisermos que pelo menos 90% dos alunos o completem?

$$P(X \leq x) = P\left(\frac{X-70}{12} \leq \frac{x-70}{12}\right) = \Phi\left(\frac{x-70}{12}\right) \geq 0.90$$

$$\frac{x-70}{12} \geq \Phi^{-1}(0.90) = 1.28 \Leftrightarrow x \geq 12 \times 1.28 + 70 = 85.36$$

1.6 Aproximação da Binomial à Gaussiana

Recordemos que uma v.a. binomial é uma v.a. discreta cuja função massa de probabilidade é $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n$, $0 \leq p \leq 1$. Quando o valor de n é grande esta expressão envolve cálculos muito morosos e podemos recorrer à distribuição gaussiana como aproximação. A justificação deste facto reside numa propriedade da distribuição binomial (entre outras distribuições).

Exercício: A soma de v.a.'s X_i independentes de parâmetros n_i (i=1, …, k) e **p** é ainda uma v.a. binomial de parâmetros $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ e **p.**

(Intuitivamente este resultado é de fácil compreensão. Se a cada sucessão de n_i provas de Bernoulli associarmos uma v.a. X_i (i=1,…, k) que representa o número de sucessos nessas n_I provas, sendo a probabilidade de sucesso constante e igual a p, $X_i \cap bi(n_i, p)$, a v.a. $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ representa o número de sucessos na totalidade das $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ provas e assim é fácil perceber que se deverá ter $X \cap bi(n,p)$). Logo, qualquer v.a. binomial pode ser considerada como soma de v.a.'s binomiais independentes todas com o mesmo parâmetro p.

Um resultado muito importante em probabilidade é o **Teorema Limite Central**, segundo o qual a soma de v.a.'s independentes com valor médio e variância finitos tem uma distribuição aproximadamente gaussiana (normal). Este teorema aplicado ao caso particular da distribuição binomial é conhecido por teorema de **De Moivre-Laplace**

TEOREMA Seja X uma v.a. com distribuição binomial de parâmetros **n** e **p**. Se **n** é "grande" e p não está muito perto de 0 ou de 1, a distribuição binomial é aproximada pela distribuição Gaussiana, isto é,

$$P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq x\right) \approx \Phi(x) \quad , \quad \forall x \in \Re \tag{1}$$

ou de outro modo a v.a. $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ tem uma distribuição aproximadamente gausssiana standard.

OBSERV: Note-se que $E(X) = np$ e $Var(X) = npq$ $(q = 1 - p)$.

Como podemos comprovar pelos gráficos da página seguinte, esta aproximação é tanto melhor quanto mais simétrica for a distribuição da v.a. X, isto é, para valores de p próximos de 0.5.

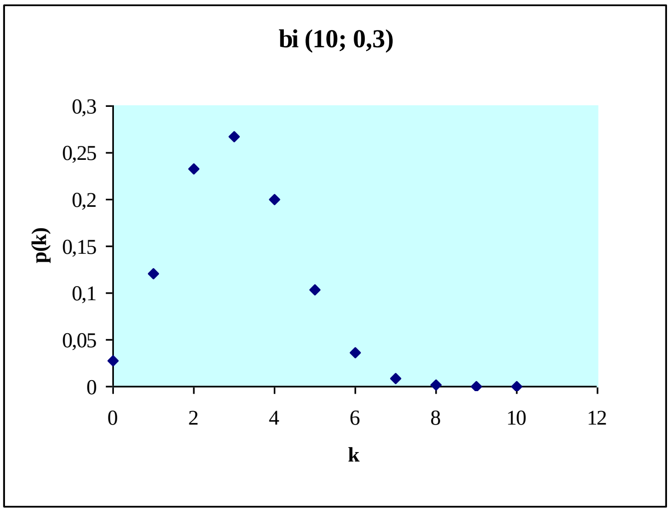

Figura 5- f.m.p. Bi (10; 0,3)

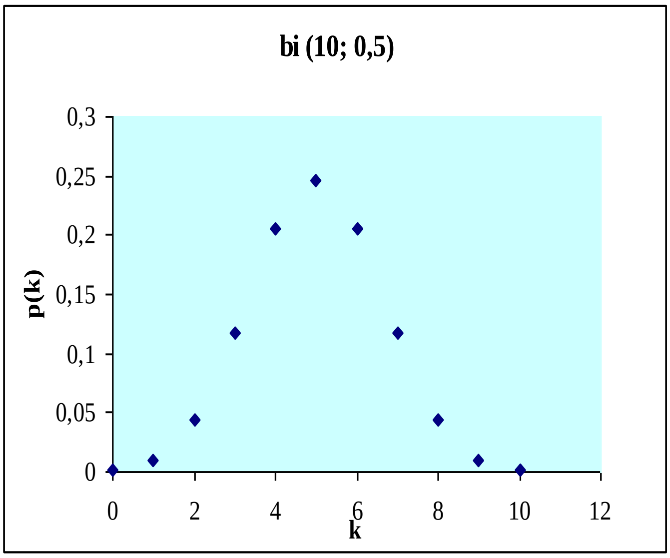

Figura 6- f.m.p. Bi (10; 0,5)

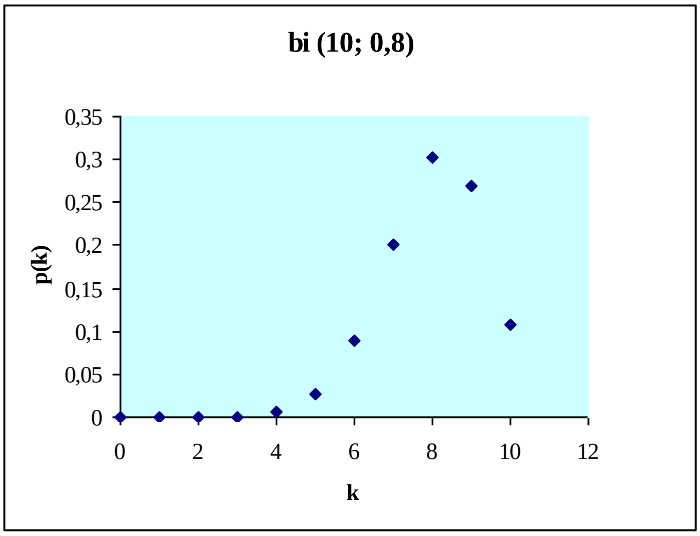

Figura 7- f.m.p. Bi (10; 0,8)

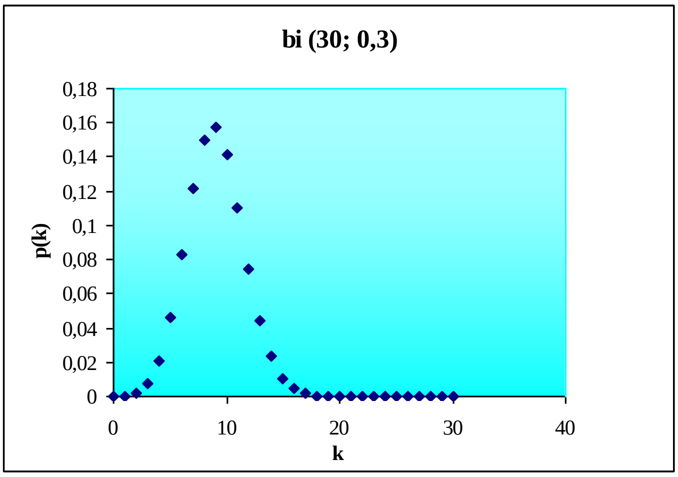

Figura 8- f.m.p. Bi (30; 0,3)

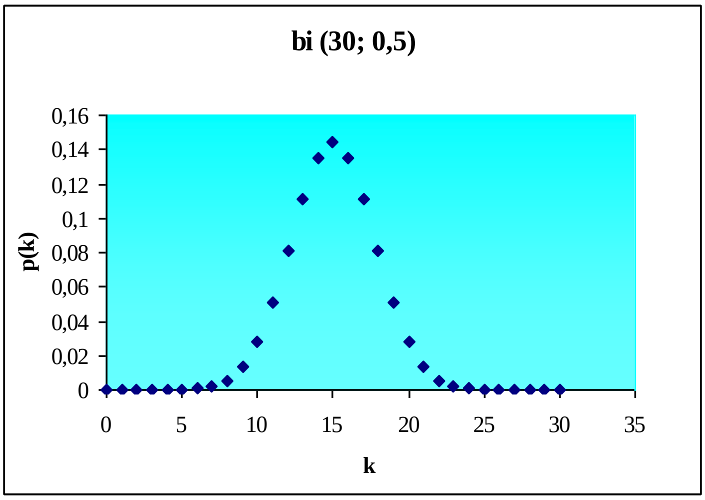

Figura 9- f.m.p. Bi (30; 0,5)

Exemplo: Calculemos a probabilidade de uma v.a. binomial com n=25 e p=0.5 ser igual a 8, 9 ou 10 usando a aproximação à normal e comparemos com a probabilidade exacta. O que pretendemos é

$$P(8 \le X \le 10) = P(7 < X \le 10) = P\left(\frac{7-12.5}{\sqrt{25/4}} \le \frac{X-12.5}{\sqrt{25/4}} \le \frac{10-12.5}{\sqrt{25/4}} \right)$$

$$\approx \Phi(-1) - \Phi(-2.2) = 1 - \Phi(1) - (1 - \Phi(1.8)) = \Phi(2.2) - \Phi(1) \qquad (2)$$

$$= 0.9861 - 0.8413 = 0.1448$$

Se calcularmos a probabilidade exacta obtém-se:

$$P(8 \le X \le 10) = P(X \le 10) - P(X \le 7) = \sum_{i=8}^{10} \binom{25}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{25} = 0.190 \qquad (3)$$

Quando estamos a considerar distribuições discretas a aproximação (2) pode ser melhorada fazendo a seguinte correcção de continuidade:

$$P(8 \le X \le 10) = P(7.5 \le X \le 10.5) \approx \Phi\left(\frac{10.5-12.5}{2.5}\right) - \Phi\left(\frac{7.5-12.5}{2.5}\right) = \qquad (4)$$

$$\Phi(-0.8) - \Phi(-2) = 0.4772 - 0.2881 = 0.1891$$

(No caso de estarmos a trabalhar com somas de v.a.'s contínuas não tem sentido utilizar esta correcção).