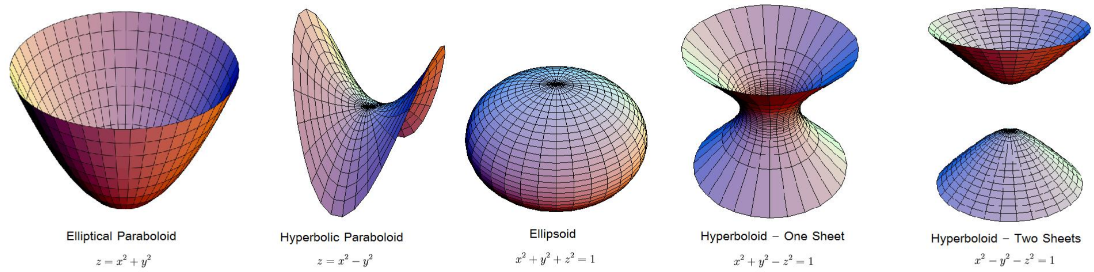
Quádricas



Passamos a estudar superfícies no espaço definidas por equações do segundo grau nas incógnitas x, y, z.

Definição

Designa-se por quádrica *o lugar geométrico de dos pontos do espaço* $\mathbb{R}^3$ *que satisfazem uma equação* 2^o. *grau nas incógnitas* x, y, z *representada matricialmente por*

$$X^T A X + B^T X + c = 0$$

sendo $0 \neq A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *simétrica,* $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$, $X^T = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$.

No site
`https://faculty.math.illinois.edu/~nmd/quadrics/`
é possível visualizar de forma interativa diversas quádricas.

Exemplo

Seja a equação $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 4 = 0$.

Tem-se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $c = 4$.

Completando os quadrados obtém-se

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 1 = 0$

que é uma equação da esfera de centro $(1, -2, 0)$ *e raio 1.*

Reduções

Vamos proceder como no estudo das cónicas para classificar as quádricas recorrendo a equações reduzidas.

Primeira redução.

Eliminamos os termos cruzados xy, xz, yz fazendo a mudança de variável $X' = Q^T X$,

onde Q é uma matriz ortogonal diagonalizadora de A,

com $\det(Q) = 1$ e $D = Q^T AQ$, uma matriz diagonal cujas entradas principais são os valores próprios de A

Segunda redução.

De seguida eliminamos os termos de grau 1 que for possível fazendo uma mudança de variável $X'' = X' + K$, $K \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Na mudança de variável $X' = Q^T X$, faz-se uma mudança de eixos coordenados, sendo os novos eixos do referencial gerados por vetores próprios de A, que são *o.n.* – as colunas de Q.

No caso da mudança de variável $X'' = X' + K$ efetuamos uma translação do referencial, mudando a respetiva origem.

Para determinar uma matriz Q, ortogonal, diagonalizadora de A, tal que $\det(Q) = 1$, podemos fazer uso de algumas propriedades que passamos a enunciar (sem demonstração).

Lema

Seja $Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *uma matriz ortogonal, com* $\det(Q) = 1$*. Tem-se*

(a) *1 é valor próprio de Q.*

(b) *Existe uma matriz ortogonal* $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *tal que*

$$Q = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{bmatrix} P^T$$

onde $Q_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *é ortogonal.*

Observação

Escolhendo uma matriz Q com $\det(Q) = 1$*, pode-se provar que os novos eixos do referencial foram obtidos aplicando uma rotação em torno de um eixo, gerado por um vetor próprio de Q associado ao valor próprio 1. [referências: exercícios 1.4.8, 5.2.6a, 7.1.11, 7.1.12, 7.5.10 do livro de Queiró e Santana]*

Exemplo

Seja a quádrica de equação
$x^2 - y^2 - z^2 + 6yz + 2x + 4y + 4z + 1 = 0$*.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}; \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}; \quad c = 1.$$

Os valores próprios de A são $1, 2, -4$*.*

São vetores próprios de A, associados respetivamente a $1, 2, -4$

os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ *é uma matriz diagonalizadora de A, ortogonal, com* $\det(Q) = 1$.

Q é a matriz da rotação no sentido direto em torno do eixo OX com ângulo $\pi/4$.

Note-se que $X' = Q^T X \Leftrightarrow X = QX' \Rightarrow B^T X = \underbrace{B^T Q}\, X'$.

Sendo $B'^T = B^T Q = \begin{bmatrix} 2 & 4\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ *e* $D = diag\,(1, 2, -4)$,

$$X^T AX + B^T X + 1 = 0 \Leftrightarrow X'^T DX' + B'^T X' + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x'^2 + 2y'^2 - 4z'^2 + 2x' + 4\sqrt{2}y' + 1 = 0$$

Completando os quadrados obtém-se

$$(x' + 1)^2 + 2(y' + \sqrt{2})^2 - 4z'^2 - 4 = 0$$

Fazendo a mudança de variável

$$x'' = x' + 1, y'' = y' + \sqrt{2}, z'' = z'$$

$$x''^2 + 2y''^2 - 4z''^2 - 4 = 0$$

Finalmente,

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{2} - z''^2 = 1$$

que é a equação de um hiperbolóide de uma folha.

`https://www.wolframalpha.com`