Exercícios - 2018/2019

Análise Matemática II e Cálculo Diferencial e Integral II

Ana Rute Domingos e Ana Cristina Barroso

Os exercícios para as disciplinas Análise Matemática II (DM) e Cálculo Diferencial e Integral II (DF) encontram-se agrupados em cinco fichas. Alguns destes exercícios serão discutidos ao longo das aulas teórico-práticas. Os alunos são encorajados a resolver todos os que não forem abordados nas aulas. Sempre que surgirem dúvidas estas devem ser colocadas aos docentes das disciplinas.

Ficha Introdutória

Ficha 1 - Funções vectoriais de uma variável real

Ficha 2 - Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Ficha 3 - Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

Ficha 4 - Análise Vectorial

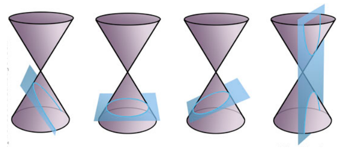
Comentários à Ficha Introdutória

Uma circunferência é um conjunto de pontos, num plano, que estão a uma distância R de um ponto fixo C. Damos a R e a C, respectivamente, o nome de raio e de centro da circunferência.

Aprende-se, no ensino secundário, que o gráfico das funções quadráticas $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é uma parábola. Numa calculadora gráfica (ou num software gráfico) observa-se que o gráfico cartesiano da função $x \mapsto x^4$ é muito semelhante ao da função $x \mapsto x^2$. Também é uma parábola?

A resposta à pergunta anterior é dada através da definição rigorosa de parábola, feita na ficha introdutória, que introduz a definição das chamadas *linhas cónicas* (parábola, elipse, hipérbole). Os conteúdos desta ficha, com excepção das *coordenadas polares*, não serão alvo de avaliação directa. Pretende-se apenas que os alunos tomem contacto com os conceitos abordados e adquiram familiarização com os mesmos.

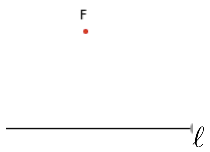
Ficha Introdutória

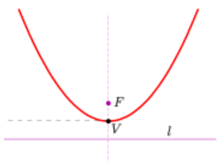


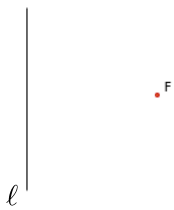
Parábola

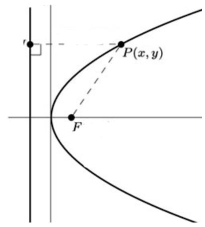
Considere-se uma recta ℓ e um ponto F exterior à recta.

> Ao conjunto dos pontos P equidistantes do ponto F e da recta ℓ chamamos **parábola**.





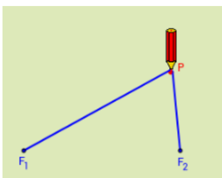


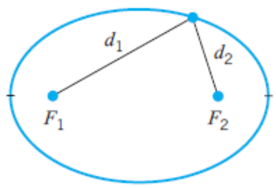


A recta ℓ chama-se **directriz**, o ponto F chama-se o **foco** da parábola. A recta perpendicular a ℓ que passa em F chama-se o **eixo** da parábola e o ponto de intersecção do eixo com a parábola designa-se por **vértice** da parábola.

Elipse

Considerem-se dois pontos F_1 e F_2 e um número k maior do que a distância entre os pontos.

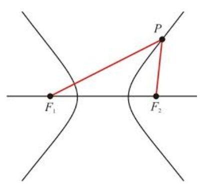




> Ao conjunto dos pontos P para os quais a soma k das distâncias aos pontos F_1 e F_2 (os focos) é constante chamamos **elipse**,
> $$d(P, F_1) + d(P, F_2) = k.$$

Hipérbole

Considerem-se dois pontos F_1 e F_2 e um número k menor do que a distância entre os pontos.



> Ao conjunto dos pontos P para os quais o módulo k da diferença das distâncias aos pontos F_1 e F_2 (os focos) é constante chamamos **hipérbole**,
> $$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k.$$

1. (a) (**Parábola com vértice na origem e foco no eixo** Oy) Sejam $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, ℓ a recta de equação $y = -c$ e F o ponto de coordenadas $(0, c)$. Mostre que os pontos $P(x, y)$ com a propriedade
$$d(P, F) = d(P, \ell)$$
satisfazem a equação cartesiana
$$x^2 = 4cy.$$

   (b) Aplicando a translacção associada ao vector (a, b) à parábola anterior, observe que se obtém a parábola com vértice em (a, b) e com a equação cartesiana
$$(x - a)^2 = 4c(y - b).$$
Mostre que, neste caso, as coordenadas do foco são $(a, b + c)$ (observe que a primeira coordenada do vértice e do foco coincidem) e indique uma equação da directriz da parábola.

2. (a) (**Parábola com vértice na origem e foco no eixo** Ox) Sejam $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, e ℓ a recta de equação $x = -c$ e F o ponto de coordenadas $(c, 0)$. Mostre que os pontos $P(x, y)$ com a propriedade
$$d(P, F) = d(P, \ell)$$
satisfazem a equação cartesiana
$$y^2 = 4cx.$$

   (b) Aplicando a translacção associada ao vector (a, b) à parábola anterior, observe que se obtém a parábola com vértice em (a, b) e com a equação cartesiana
$$(y - b)^2 = 4c(x - a).$$
Mostre que, neste caso, as coordenadas do foco são $(a + c, b)$ (observe que a segunda coordenada do vértice e do foco coincidem) e indique uma equação da directriz da parábola.

3. Desenhe e indique uma equação cartesiana da parábola com:

   (a) vértice em $(0, 0)$ e foco em $(2, 0)$;

   (b) vértice em $(-1, 3)$ e foco em $(-1, 0)$;

   (c) foco em $(1, 1)$ e directriz $y = -1$;

   (d) foco em $(2, -2)$ e directriz $x = -5$.

4. Determine o vértice, o foco, o eixo e a directriz das parábolas que se seguem, desenhando-as também:

   (a) $y^2 = 2x$; (b) $2y = 4x^2 - 1$; (c) $(x + 2)^2 = 12 - 8y$; (d) $x = y^2 + y + 1$.

5. (Elipse) Considere $a > c > 0$, F_1 e F_2 com coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, respectivamente. Seja $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Mostre que os pontos $P(x, y)$ com a propriedade
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$
satisfazem a equação cartesiana
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Os pontos $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ dizem-se os **vértices** da elipse (são os pontos de intersecção da elipse com os eixos coordenados). Os segmentos de recta que ligam os dois primeiros e os dois últimos vértices dizem-se os **eixos** da elipse. O eixo que contém os focos diz-se o **eixo maior** (com comprimento $2a$, neste caso, ou seja a distância entre os dois primeiros vértices) e o outro diz-se o **eixo menor** (com comprimento $2b$, neste caso, ou seja a distância entre os dois últimos vértices). O ponto médio de $[F_1F_2]$ (ponto de intersecção dos dois eixos) diz-se o centro da elipse (neste caso $(0,0)$); é também o ponto médio entre os dois primeiros e os dois últimos vértices.

6. (Elipse) Sejam $a, b, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, com $a > c > 0$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Mostre que uma equação cartesiana da elipse com focos $(c_1 + c, c_2)$ e $(c_1 - c, c_2)$, eixos maior e menor com comprimento, respectivamente, $2a$ e $2b$ é
$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} + \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1.$$
Observe que (c_1, c_2) é o centro da elipse. Determine as coordenadas dos vértices.

7. Indique uma equação cartesiana da elipse com:
   (a) focos em $(-1, 0)$ e em $(1, 0)$ e eixo maior com comprimento 6;
   (b) focos em $(1, 3)$ e em $(1, 9)$ e eixo menor com comprimento 8;
   (c) centro em $(2, 1)$ e vértices em $(2, 6)$ e em $(1, 1)$;
   (d) foco em $(6, 2)$ e vértices em $(1, 7)$ e em $(1, -3)$.

8. Determine o centro, os vértices, os focos e o comprimento dos eixos maior e menor das elipses que se seguem, desenhando-as também:
   (a) $x^2/4 + y^2/9 = 1$; (b) $4y^2 + 3x^2 - 12 = 0$; (c) $16(x-3)^2 + (y+2)^2 = 64$;
   (d) $x^2 + 4x + y^2 - 10y = 7$; (e) $2x^2 - 4x + 3y^2 + 12y = 4$.

9. (Hipérbole com focos no eixo dos xx) Considere $c > a > 0$, F_1 e F_2 com coordenadas $(-c, 0)$ e $(c, 0)$, respectivamente. Seja $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Mostre que os pontos $P(x, y)$ com a propriedade
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$
satisfazem a equação cartesiana
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Os pontos $(\pm a, 0)$ dizem-se os **vértices** da hipérbole (são os pontos de intersecção da hipérbole com a recta onde estão os focos). O segmento de recta que une os vértices chama-se o **eixo transverso**. O ponto médio do eixo transverso chama-se o centro da hipérbole (neste caso o ponto $(0,0)$). As rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ dizem-se as **assíntotas** da hipérbole.

10. (Hipérbole com focos no eixo dos yy) Considere $c > b > 0$, F_1 e F_2 com coordenadas $(0, -c)$ e $(0, c)$, respectivamente. Seja $a = \sqrt{c^2 - b^2}$. Mostre que os pontos $P(x, y)$ com a propriedade
$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2b$$
satisfazem a equação cartesiana
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$
Determine as coordenadas dos vértices da hipérbole.

11. (Hipérbole) Sejam $a, c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c > a > 0$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Mostre que uma equação cartesiana da hipérbole com focos $(c_1 + c, c_2)$ e $(c_1 - c, c_2)$ e eixo transverso com comprimento $2a$ é
$$\frac{(x-c_1)^2}{a^2} - \frac{(y-c_2)^2}{b^2} = 1.$$
Observe que (c_1, c_2) é o centro da hipérbole. Determine as coordenadas dos vértices.

12. Indique uma equação cartesiana da hipérbole com

    (a) focos em $(-5,0)$ e em $(5,0)$ e eixo transverso com comprimento 6;

    (b) focos em $(0,-13)$ e em $(0,13)$ e eixo transverso com comprimento 10;

    (c) focos em $(-1,-1)$ e em $(-1,1)$ e eixo transverso com comprimento $\frac{1}{2}$.

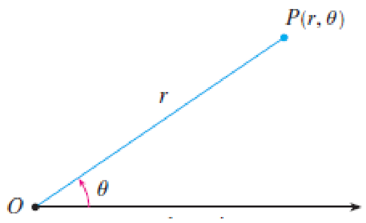
13. Determine o centro, os vértices, os focos, o comprimento do eixo transverso e as assíntotas das hipérboles que se seguem, desenhando-as também:

    (a) $x^2/9 - y^2/16 = 1$; (b) $y^2 - x^2 = 1$; (c) $(x-1)^2/16 - (y-3)^2/9 = 1$;
    (d) $4x^2 - 8x - y^2 + 6y - 1 = 0$; (e) $-3x^2 + y^2 - 6x = 0$.

14. Determine o centro, os vértices, os focos e o comprimento do eixo transverso da hipérbole $xy = 1$. (Sugestão: Considere um novo sistema de coordenadas XY com $x = X - Y$ e $y = X + Y$.)

15. (**Coordenadas polares**)

    O propósito das coordenadas é fixar posições relativamente a um sistema de referência. No caso das coordenadas cartesianas, em $\mathbb{R}^2$, o sistema de referência é constituído por um par de rectas perpendiculares que se intersectam num ponto a que chamamos origem. No sistema de **coordenadas polares** o sistema de referência é constituído por um ponto O a que chamamos **pólo** do qual emana um raio a que chamamos **eixo polar**.



eixo polar

    Dizemos que um ponto $\mathrm{P}(r,\theta)$ (ou $[r,\theta]$), com $r \in [0,+\infty[$, $\theta \in [0,2\pi[$ está dado em **coordenadas polares** se r é a distância do ponto ao pólo e se P está sobre a semi-recta com origem no pólo e que faz um ângulo orientado θ, no sentido directo, com o eixo polar.
    Considerando que O é a origem do sistema de coordenadas cartesianas e que o eixo polar coincide com o semi-eixo positivo Ox, mostre que a relação entre as coordenadas polares (r,θ) e as cartesianas (x,y) de um ponto do plano é dada por

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

    com $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e θ o ângulo orientado, no sentido directo, que o vector (x,y) faz com o semi-eixo positivo Ox.

16. Determine as coordenadas polares dos pontos cujas coordenadas cartesianas são:
    (a) $(x,y) = (-3/2,0)$; (b) $(x,y) = (2,-2)$; (c) $(x,y) = (-\sqrt{3},1)$; (d) $(x,y) = (0,1)$.

17. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cujas coordenadas polares são:
    (a) $(r,\theta) = (\sqrt{3},\pi/6)$; (b) $(r,\theta) = (4,\frac{5\pi}{4})$; (c) $(r,\theta) = (3,\frac{3\pi}{2})$; (d) $(r,\theta) = (2,0)$.

18. Escreva em coordenadas polares as equações que se seguem:
    (a) $x = 2$; (b) $2xy = 1$; (c) $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$; (d) $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 16$; (e) $y = 3x^2$.

19. Nos casos que se seguem, identifique as curvas e escreva a equação em coordenadas cartesianas:
    (a) $r = 2$; (b) $r = 3\cos\theta$; (c) $r\sin\theta = 4$; (d) $\tan\theta = 2$; (e) $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$.

    (Sugestão: Em (e) verifique que a curva é a parábola com foco na origem e directriz $x = -2$.)

Ficha 1 - Funções vectoriais de uma variável real

1. Considere a função $r(t) = \left(\dfrac{\log(1+t)}{t}, \dfrac{\sqrt{t+7}-\sqrt{7}}{t}, \dfrac{\sin(2t)}{t}\right)$.

   (a) Determine o seu domínio.

   (b) Calcule $\lim_{t\to 0} r(t)$. É possível prolongar por continuidade $r(t)$ ao ponto $t=0$?

2. Sendo $r(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{t+1}, t\cos(t+1), \dfrac{4}{1+4t^2}\right)$, para $t \neq -1$, calcule

   (a) $\lim_{t\to -1} r(t)$; (b) $\int_0^1 r(t)\,dt$; (c) $r'(t)$.

3. Sejam $u, v : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(E) \subseteq D$. Mostre que

   (a) se u, v e f são contínuas em $a \in D$, o mesmo sucede a $\|u\|$, $u+v$, fu e $u\cdot v$, onde $\cdot$ representa um produto interno;

   (b) se g é contínua em $a \in E$ e u é contínua em $g(a) \in D$, então $u \circ g$ é contínua em a.

4. Sejam $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $u, v :]a,b[\to \mathbb{R}^n$, $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Supondo que u, v e f são diferenciáveis em $]a,b[$, mostre que para cada, $t \in]a,b[$, se tem

   (a) $\dfrac{d}{dt}(u(t)+v(t)) = u'(t)+v'(t)$;

   (b) $\dfrac{d}{dt}(cu(t)) = cu'(t)$;

   (c) $\dfrac{d}{dt}(f(t)u(t)) = f'(t)u(t)+f(t)u'(t)$;

   (d) $\dfrac{d}{dt}(u(f(t))) = f'(t)u'(f(t))$.

5. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ funções vectoriais diferenciáveis. Mostre que para todo o $t \in I$,

   (a) $[f(t)\cdot g(t)]' = f'(t)\cdot g(t) + f(t)\cdot g'(t)$, onde $\cdot$ representa o produto interno canónico em $\mathbb{R}^n$;

   (b) se $f(t) \neq 0$, então $(\|f(t)\|)' = \dfrac{d}{dt}\|f(t)\| = \dfrac{f(t)\cdot f'(t)}{\|f(t)\|}$.
   Conclua que se a função norma de $f(t)$ é constante, então $f'(t)$ é ortogonal a $f(t)$;

   (c) $(\|f(t)\|^2)' = 2f'(t)\cdot f(t)$.

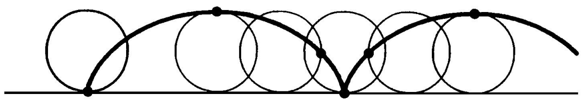
6. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, $u, v : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funções contínuas, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^n$ um vector constante. Mostre que

   (a) $\int_a^b u(t)+v(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + \int_a^b v(t)\,dt$;

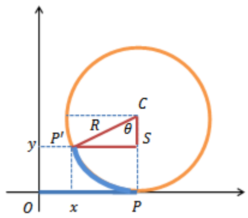
   (b) $\int_a^b \alpha\, u(t)\,dt = \alpha \int_a^b u(t)\,dt$;

   (c) $\int_a^b c\cdot u(t)\,dt = c\cdot\left(\int_a^b u(t)\,dt\right)$, onde $\cdot$ representa um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

7. A *curva* descrita por um ponto da circunferência fronteira de um disco a rolar, sem deslizar, sobre uma linha recta, no plano, chama-se **ciclóide**.



   (a) Suponha que o disco rola sobre o eixo dos xx, que tem raio R e que o ponto se encontra inicialmente na origem O do sistema dos eixos coordenados. Considere a figura que se segue



   Depois do disco rolar um pouco da esquerda para a direita, o ponto (que descreve a ciclóide) encontra-se numa posição com coordenadas (x, y) assinalada por P'. Seja P o ponto da circunferência que se encontra sobre o eixo dos xx e C a posição do centro do disco nesse mesmo instante. Considere θ o ângulo ao centro PCP' e S o ponto de intersecção da recta CP com a recta horizontal que passa em P'. Observando que $\overline{OP}$ é igual ao comprimento do arco PP' (pois o disco roda sem deslizar), ou seja $\overline{OP} = R\theta$, mostre que as coordenadas do ponto P' são dadas por

$$x = R(\theta - \sin\theta), \quad y = R(1 - \cos\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

   (b) Seja $r(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = (R(\theta - \sin\theta), R(1 - \cos\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi]$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \|r'(\theta)\| \, d\theta \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta) \, d\theta.$$

8. Classifique os objectos matemáticos das alíneas que se seguem com as designações "linha parametrizada" ou "curva", atendendo às respectivas definições.

   (a) $\gamma(t) = (6t - e^t, 3t + t^7)$, $t \in \mathbb{R}$;
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 7x^2 + 8y^2 = 56\}$;
   (c) a circunferência de centro $(1, 8)$, raio 2, percorrida duas vezes, no sentido horário, em duas horas, a partir do ponto $(3, 8)$;
   (d) a recta do plano que passa nos pontos $(1, 2)$ e $(4, 5)$.

9. Indique quais dos traços das linhas que se seguem são curvas simples

   (a) $\gamma(t) = (6, 2\sin t, 2\cos t)$, com $t \in [0, 5\pi]$;
   (b) $\gamma(t) = (t^2, 2t)$, com $t \in [-2, 2]$;
   (c) $\gamma(t) = (3\cos t, 4 + \sin t)$, com $t \in [0, 2\pi]$.

10. Para cada uma das seguintes curvas determine o ponto mais próximo da origem das coordenadas:

   (a) segmento de recta definido por $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$;
   (b) segmento de recta definido por $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

11. Considere as linhas $\gamma_1, \gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, com $\gamma_1(t) = (t, 3t^2 - 4)$ e $\gamma_2(t) = (t^5, 3t^{10} - 4)$.

   (a) Mostre que o traço de γ_1 coincide com o traço de γ_2.
   (b) Designando por C o traço das linhas anteriores, determine uma terceira parametrização para C.

12. Determine uma parametrização das seguintes curvas:

    (a) semi-recta com origem em $(1, 2)$ que contém o ponto $(-3, 0)$;
    (b) segmento de recta com início no ponto $(1, 2, 3)$ e fim no ponto $(-1, 0, 7)$;
    (c) circunferência de centro $(1, -1)$ e raio 2, percorrida três vezes no sentido directo;
    (d) arco da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(0, -1)$;
    (e) arco da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1, percorrido no sentido dos ponteiros do relógio, do ponto $(1, 0)$ para o ponto $(0, -1)$;
    (f) arco da parábola $x = 2 - 3y^2$ do ponto $(-1, -1)$ ao ponto $(2, 0)$;
    (g) $x^2 - 6x + y^2 = 7$ do ponto $(3, 4)$ ao ponto $(3 - 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ no sentido directo;
    (h) intersecção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $z = 4$;
    (i) intersecção do cone $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $x = 1$ e os semi-espaços $z > 0$ e $z \leq 2$.

13. Identifique, e represente graficamente indicando o seu sentido, as curvas definidas pelas seguintes trajectórias parametrizadas:

    (a) $r(t) = (7, t)$, $-1 \leq t \leq 1$;
    (b) $r(t) = (2 + 2\cos t, 1 + 2\sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$;
    (c) $r(t) = (t^2, 2t + 1)$, $0 \leq t \leq 2$;
    (d) $r(t) = (e^t, e^{2t})$, $0 \leq t \leq \log 2$;
    (e) $r(t) = \left(t - 1, \dfrac{t}{t-1}\right)$, $2 \leq t \leq 4$;
    (f) $r(t) = (t^3, 3\log t)$, $t \geq 1$;
    (g) $r(t) = (3 + 2\cos t, 7, -1 + 2\sin t)$, $\frac{5\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$;
    (h) $r(t) = (4\cos(2t), 4\sin(2t), t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

14. (a) Do exercício anterior indique, justificando, se há caminhos fechados e diga quais são.
    (b) Também do exercício anterior, determine o caminho inverso em (a), (b) e (d).

15. (a) Verifique que a curva $(\cos t, \sin t, \cos t)$ é plana, mas $(\cos t, \sin t, \cos 2t)$ não é.
    (b) Verifique que a origem e quaisquer outros três pontos distintos da curva (t, t^2, t^3) não são complanares.

16. Verifique se as funções que se seguem são mudanças de parâmetro

    (a) $\alpha :]0, +\infty[\to]0, 1[$, $\alpha(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^2}$;
    (b) $\alpha :]-1, 1[\to \mathbb{R}$, $\alpha(t) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} t\right)$.

17. (a) Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t, \sin t, e^t)$. Mostre que $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^3$ dada por $\psi(t) = (\log t, \sin(\log t), t)$ é uma reparametrização de γ.
    (b) Considere as trajectórias $\gamma, \psi : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, com $\gamma(t) = (t, \sqrt{t})$ e $\psi(t) = (t^2, t)$. Verifique que os traços de γ e ψ coincidem. Mostre que ψ não é uma reparametrização de γ.
    (c) Verifique se a linha parametrizada $\gamma(t) = (t^2, \log(t^2))$, com $t \in]0, +\infty[$ é uma parametrização do gráfico da função $y = \log x$, com $x \in \mathbb{R}^+$.
    (d) Verifique se a linha parametrizada $\gamma(t) = (t^2, t^8)$, com $t \in \mathbb{R}$ é uma parametrização do gráfico da função $y = x^4$, com $x \in \mathbb{R}$.

18. ($\star$) Considere as funções $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ e $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ x, & x \in [0,1] \end{cases} \qquad \text{e} \quad \varphi(t) = \frac{\displaystyle\int_0^t e^{\frac{1}{(s-1)s}}\, ds}{\displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1}{(s-1)s}}\, ds}.$$

   (a) Esboce o gráfico de f e observe que f não é diferenciável em $x = 0$.

   (b) Justifique que φ está bem definida.

   (c) Verifique que φ é de classe $C^2([0,1])$ e que $\varphi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(1) = 0$, para $k = 1, 2$.

   (d) Considere a linha parametrizada $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} (\varphi(t) - 1, 0), & t \in [0,1] \\ (\varphi(t-1), \varphi(t-1)), & t \in [1,2]. \end{cases}$$

   Mostre que o traço de γ (linha C^2) é o gráfico de f (que não é de classe C^1).
   (Sugestão: Observe que $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ é uma bijecção estritamente crescente.)

19. Determine o vector velocidade e um vector tangente unitário em cada ponto das curvas
   (a) $(\cos t, \sin(2t), t^2)$; (b) $(\cos(e^t), \sin(e^t), \sin t)$.

20. Considere a linha definida por $\gamma(t) = (t, e^t, e^{2t})$. Determine a intersecção da recta tangente ao traço de γ no ponto $\gamma(0)$ com o plano $x + y + z = 6$.

21. Considere a função $r(t) = (\cos t, \sin t, 3t)$ e seja C a curva descrita por $r(t)$ para $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine o ponto P da curva C que fica mais próximo da origem.

   (b) Escreva uma equação da recta s, tangente a C no ponto P.

   (c) Determine a intersecção da recta s com o plano $x + 3y + z = 2$.

   (d) Determine os pontos de $r(t)$ tais que a recta tangente à hélice nesses pontos intersecta o eixo Oy.

   (e) Calcule $\displaystyle\int_0^\pi r(t)\, dt$.

22. (a) Determine uma parametrização da elipse de centro no ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ com semi-eixos a, $b > 0$, cuja equação cartesiana é $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

   (b) Determine o ponto P da semi-elipse dada parametricamente por $x = 2 + 3\cos\theta$, $y = 3 + 2\sin\theta$, $\theta \in [0,\pi]$, cuja recta tangente nesse ponto é paralela à recta de equação $3y = 2x$.

23. Considere-se a trajectória $r(t) = (t^2, 5t, t^2 - 16t)$ definida para $t \geq 0$. Qual é o valor mínimo da velocidade escalar?

24. Um ponto move-se no espaço tridimensional de tal modo que a sua velocidade (vectorial) é dada em função do tempo por $v(t) = t\vec{e}_1 + t^2\vec{e}_2 + \cos t\vec{e}_3$. A posição do móvel no instante $t = 0$ é $(0,1,0)$. Determine a expressão da trajectória.

25. Uma partícula inicia o seu movimento na posição inicial $r(0) = (1,0,0)$ com velocidade inicial $v(0) = (1,-1,1)$. A sua aceleração é dada por $a(t) = (4t, 6t, 1)$. Determine a velocidade e a posição da partícula no instante t. Determine ainda a sua velocidade escalar no instante $t = 1$.

26. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ uma linha regular para a qual existe um ponto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\gamma(t) - (a, b, c)$ e $\gamma'(t)$ são ortogonais. Mostre que a curva $\gamma(\mathbb{R})$ é esférica, i.e, todos os pontos da curva estão sobre a mesma superfície esférica.

27. ELIMINADO

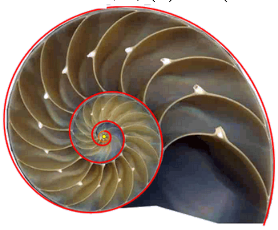
28. Quais das linhas que se seguem são regulares?

    (a) $\gamma_1(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $t \in \mathbb{R}$;

    (b) $\gamma_2(t) = (\sin^2 t, \cos^2 t)$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

    (c) $\gamma_3(t) = (t, \cosh t)$, $t \in \mathbb{R}$. (Recorde que $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.)

29. Considere a espiral logarítmica $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$.



    (a) Mostre que o ângulo entre $\gamma(t)$ e o vector tangente em $\gamma(t)$ não depende de t.

    (b) Determine a função comprimento de arco a partir do ponto $(1, 0)$.

    (c) Calcule $L(\gamma_{|]-\infty,1]})$.

30. Calcule o comprimento do traço das linhas que se seguem.

    (a) $r(t) = \left(2\cos t, -2\sin t, \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$, $0 \leq t \leq 5$;

    (b) $r(t) = \left(t, \sqrt{2}\log t, \frac{1}{t}\right)$, $1 \leq t \leq 5$;

    (c) $r(t) = \left(2\sqrt{2}t, \log(t^2), t^2\right)$, $1 \leq t \leq e$;

    (d) $r(t) = \left(e^t \cos t, e^t \sin t\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

31. Verifique se as linhas que se seguem estão parametrizadas pelo comprimento de arco.

    (a) $\gamma_1(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$, $t \in [0, 1/2]$; (b) $\gamma_2(t) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$.

32. Considere a linha $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$, com $t \in \mathbb{R}_0^+$.

    (a) Reparametrize γ pelo comprimento de arco.

    (b) Calcule o comprimento do arco de γ em $[0, \pi]$.

33. Duas partículas começam no instante $t = 0$ a percorrer as curvas definidas por

$$r(t) = (-2t, 2 - 2t) \ \text{ e } \ s(t) = (2\cos(\pi t), 2\sin(\pi t)), \quad t \geq 0.$$

   (a) Esboce a trajectória das partículas.
   (b) Determine, se existirem, os pontos onde as referidas trajectórias se intersectam.
   (c) Diga, justificando, se existe algum ponto onde se dê a colisão das partículas e, em caso afirmativo, determine a distância percorrida por cada uma delas até ao instante da colisão.

34. Duas partículas deslocam-se no plano segundo as trajectórias $\gamma_1(t) = (t, t^2)$ e $\gamma_2(t) = (2 + t, 8t)$, com $t \geq 0$. Diga, justificando, se as partículas colidem.

35. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 tal que $\|\gamma(t)\| \neq 0$, para todo o $t \in [a, b]$. Mostre que

$$\frac{d}{dt}\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} = \frac{d}{dt}\frac{\gamma}{\|\gamma\|}(t) = \frac{1}{\|\gamma\|^3}((\gamma \times \gamma') \times \gamma)(t).$$

Pode ser útil recordar que, dados $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$(a \times b) \times c = (c \cdot a)b - (c \cdot b)a,$$

onde $\times$ nota o produto externo e $\cdot$ um produto interno.

36. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ uma linha duas vezes diferenciável e regular. Mostre que

$$k(t) = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}(t).$$

(Sugestão: aplique o exercício anterior e tenha em conta propriedades do produto externo.)

37. Seja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, uma linha duas vezes diferenciável e regular. Mostre que a curvatura é dada por

$$k(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2)^{3/2}}.$$

Em particular, observe que se a curva $\gamma([a, b])$ for o gráfico de uma função $y = f(x)$ duas vezes diferenciável, então

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + [f'(t)]^2)^{3/2}}.$$

Sugestão: Encare a linha dada como uma linha com valores em $\mathbb{R}^3$, cuja terceira componente é zero e aplique o exercício anterior.

38. (a) Verifique que a curvatura de um segmento de recta é nula.
   (b) Verifique que a curvatura de uma circunferência de raio r é constante e igual a $\dfrac{1}{r}$.
   (c) Calcule a curvatura da elipse que se segue, em cada ponto (x, y),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

   (d) Calcule a curvatura da parábola $y = ax^2$ num ponto genérico (x, y) ($a > 0$ é uma constante); e do segmento de hélice $(\cos t, \sin t, t)$ num ponto genérico (x, y, z).

39. Para cada $t_0 \in \mathbb{R}$, seja $k(t_0)$ a curvatura da hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, e^{-t})$ no ponto $\gamma(t_0)$. Existem limites de $k(t_0)$ quando $t_0 \to \pm\infty$?

Algumas Soluções da Ficha 1

1. a) $]-1,0[\cup]0,+\infty[$; b) $(1,1/(2\sqrt{7}),2)$.
2. a) $(-2,-1,4/5)$; b) $(-1/2,\sin 2+\cos 2-\cos 1, 2\arctan 2)$;
c) $(1,\cos(t+1)-t\sin(t+1),-32t/(1+4t^2)^2)$.
7. b) $8R$; $3\pi R^2$.
8. a) linha parametrizada; b) curva; c) linha parametrizada; d) curva.
9. b) e c).
10. a) $(2/3,1/3,1/3)$; b) $(1,0,0)$.
11. b) Pode ser escolhida qualquer função h contínua, cujo contradomínio seja $\mathbb{R}$ e considerar $\gamma_1\circ h(t)$. Exemplos; $h(t)=t+2$ e $h(t)=\log t$, que conduzem às parametrizações $\gamma_3(t)=(t+2,3(t+2)^2-4)$ e $\gamma_4(t)=(\log t, 3\log^2 t-4)$, respectivamente.
12. a) $(1-4t,2-2t)$, $t\in[0,+\infty[$; b) $(1-2t,2-2t,3+4t)$, $t\in[0,1]$; c) $(1+2\cos t,-1+2\sin t)$, $t\in[0,6\pi]$; d) $(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,3\pi/2]$; e) $(-\sin t,-\cos t)$, $t\in[3\pi/2,2\pi]$; f) $(2-3y^2,y)$, $y\in[-1,0]$; g) $(3+4\cos t,4\sin t)$, $t\in[\pi/2,5\pi/4]$; h) $(4\cos t,4\sin t,4)$, $t\in[0,2\pi]$; i) $(1,y,\sqrt{1+y^2})$, $y\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.
13. a) Segmento de recta (vertical) com origem em $(7,-1)$ e fim em $(7,1)$; b) Semi-circunferência com centro em $(2,1)$, raio 2, origem em $(4,1)$, fim em $(0,1)$, percorrida no sentido directo; c) Arco da parábola de equação $4x=(y-1)^2$, com origem em $(0,1)$ e fim $(4,5)$; d) Arco da parábola de equação $y=x^2$, com origem em $(1,1)$ e fim em $(2,4)$; e) Arco da hipérbole de equação $y=1+1/x$, com origem em $(1,2)$ e fim em $(3,4/3)$; f) Porção do gráfico da função $y=\log x$, com início em $(1,0)$; g) Arco da circunferência do plano $y=7$, com centro em $(3,7,-1)$, raio 2, com origem em $(3-\sqrt{2},7,-1-\sqrt{2})$ e fim em $(3,7,-3)$, percorrida no sentido directo; h) Dois passos de hélice circular com início em $(4,0,0)$ e fim em $(4,0,2\pi)$.
14. a) Não há caminhos fechados. b) $(7,-t)$, $t\in[-1,1]$; $(2-2\cos t,1+2\sin t)$, $t\in[0,\pi]$; $(2e^{-t},4e^{-2t})$, $t\in[0,\log 2]$.
16. Sim para ambas.
17. c) Sim; d) não.
19. a) $v(t)=(-\sin t,2\cos(2t),2t)$, $T(t)=v(t)/\sqrt{\sin^2 t+4\cos^2(2t)+4t^2}$;
b) $v(t)=(-e^t\sin(e^t),e^t\cos(e^t),\cos t)$, $T(t)=v(t)/\sqrt{e^{2t}+\cos^2 t}$.
20. $(1,2,3)$.
21. a) $(1,0,0)$; b) $(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,3)$, $\lambda\in\mathbb{R}$; c) $(1,1/6,1/2)$; d) São os pontos $r(t)$ tais que t é solução da equação $\cos t+t\sin t=0$ (infinitas soluções); e) $(0,2,3\pi^2/2)$.
22. a) $(x_0+a\cos t,y_0+b\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$; b) $\gamma(3\pi/4)=(2-3\sqrt{2}/2,3+\sqrt{2})$.
23. $\sqrt{153}$.
24. $(t^2/2,t^3/3+1,\sin t)$.
25. $v(t)=(2t^2+1,3t^2-1,t+1)$, $r(t)=(2/3t^3+t+1,t^3-t,t^2/2+t)$, $\|v(1)\|=\sqrt{17}$.
28. a) Não; b) Sim; c) Sim.
29. b) $s(t)=\sqrt{2}(e^t-1)$, $t\geq 0$; c) $\sqrt{2}e$.
30. a) $38/3$; b) $24/5$; c) e^2+1; d) $\sqrt{2}(e-1)$.
31. a) Sim; b) Sim.
32. a) $(t/\sqrt{3}+1)(\cos(\log(t/\sqrt{3}+1)),\sin(\log(t/\sqrt{3}+1)),1)$; b) $\sqrt{3}(e^{\pi}-1)$.
33. b) $(0,2)$ e $(-2,0)$; c) Sim, no ponto $(-2,0)$; $2\sqrt{2}$ e 2π, respectivamente.
34. Não colidem.
38. c) $\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}$; d) $2a/(1+4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}$, $1/2$.
39. $\sqrt{2e^{-2t_0}+1}/(1+e^{-2t_0})^{3/2}$; $\lim_{t_0\to+\infty}k(t_0)=1$, $\lim_{t_0\to-\infty}k(t_0)=0$.

Ficha 2 - Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

1. Considere as funções $g(x, y) = xy$, definida em $\mathbb{R}^2$, e $f(x) = x^2 + x$, $h(x) = x + 1$, definidas em $\mathbb{R}$. Determine

   (a) $g(h(x), f(x))$; (b) $f(g(x, h(y)))$; (c) $g(f(x), h(y))$.

2. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que verifica $f(x + y, x - y) = xy + y^2$.

3. Determine, e represente graficamente, o maior domínio possível das seguintes funções:

   (a) $f(x, y) = \sin(xy) + \dfrac{\log(x + y + 1)}{\sqrt{x}}$;
   (b) $f(x, y) = \arccos(y - x) + \sqrt{-xy}$;
   (c) $f(x, y) = \log(xy - 1)$;
   (d) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - 2}}{\log\left(\sin^2 x\right)}$;
   (e) $f(x, y) = \sqrt{y(1 - |x|)}$;
   (f) $f(x, y) = \left(\log(1 - xy), \log\left(x^2 - y\right)\right)$;
   (g) $f(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \dfrac{\arctan y}{xy}\right)$;
   (h) $f(x, y) = (\sqrt{12 - x^2 - 4x - y^2}, \log(x^2 + y^2))$;
   (i) $f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z$;
   (j) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + e^z$;
   (k) $f(x, y, z) = \left(\log(x^2 + y^2 + z^2 - 4), \cos(xyz), \sqrt{z}\right)$.

   Identifique quais dos conjuntos anteriores são abertos, fechados ou limitados.

4. Para cada uma das seguintes funções, determine e represente graficamente as curvas de nível indicadas:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, para $k = 0, 1, 2, 3$;
   (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, para $k = 0, 1, 2, 3$, e compare com a);
   (c) $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 2$, para $k = 0, 1, 4$;
   (d) $f(x, y) = y - 2x + 1$, para $k = 0, 1, 2$;
   (e) $f(x, y) = e^{xy}$, curvas de nível que passam nos pontos $(0, 0)$, $(1, 1)$ e $(-1, 1)$, respectivamente;
   (f) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x \geq 0 \\ |y|, & x < 0, \end{cases}$ para $k = 1, 2$.

5. Calcule os limites das seguintes sucessões:

   (a) $\left(\dfrac{2n}{n + 1}, ne^{-n}, \dfrac{n!}{(n + 3)!}, n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right)\right)$; (b) $\left(\dfrac{\cos(3n + 1)}{\log n}, \sin\left(\dfrac{1}{n}\right), e^n \sin(e^{-n})\right)$.

6. Considere a função $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: “Existe $a > 0$ tal que, se $0 < x^2 + y^2 + z^2 < a$, então $|f(x, y, z)| < 10^{-20}$.”

7. Determine, se existirem, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+y^2-2}{x+y}$;

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy^3}{2x^4+y^4}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{x^2+y^2-2x+1}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5xy^2-4x^2y}{x^2+y^2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \log(1+x^2)\cos\left(\frac{1}{y^2}\right)$;

(k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-(x^2+y^2)}-1}{x^2+y^2}$;

(l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2}-1}{x^2+y^2}$;

(m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy^2}{x^2+5y^4}, xy\right)$;

(n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{2x^3y^3}{x^6+y^6}, \frac{-xy}{x^2+3y^2}\right)$;

(o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin x - x}{x^3}, \cos(xy), \frac{\operatorname{arctg}(2y)}{3y}, e^{x+y}, \sin(xy)\cos\left(\frac{1}{x^2+y^4}\right)\right)$;

(p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{3x^2y}{x^2+y^2}, 2-\cos(x+y), \log(1+x^2+y^2)+3\right)$.

8. (a) Determine o conjunto dos pontos de continuidade das funções

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{7x^2}{x^2+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 7, & (x,y)=(0,0); \end{cases}$

(ii) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x^2y^3+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0); \end{cases}$

(iii) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x\neq y \\ 0, & x=y. \end{cases}$

(b) Diga, justificando, se é possível redefinir $f(0,0)$ ou $g(0,0)$ de forma a que a função resultante seja contínua no ponto $(0,0)$.

9. Prolongue por continuidade a $\mathbb{R}^2$ as funções $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2}\sin^2 x$ e $g(x,y)=\dfrac{e^{xy}-1}{y}$.

10. Considere a função $f(x,y)=\left(xy\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), \dfrac{x^2+8x^3y^2+y^2}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$.

(a) Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

(b) Diga, justificando, se é possível prolongar por continuidade a função f ao ponto $(0,0)$.

11. Para cada uma das seguintes funções calcule as derivadas parciais indicadas:

    (a) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + 3xy^3$; $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$;
    (b) $f(x,y) = x^2 \sin\left(xy^2\right)$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{\pi})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,\sqrt{\pi})$;
    (c) $f(x,y,z) = e^{xy}\log(xyz)$; $f_x, f_z, f_{zy}, f_{zyx}$;
    (d) $f(x,y,z) = \dfrac{(x-2y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}$;
    (e) $f(x,y,z) = x\arctan(yz)$; f_x, f_y, f_{yz};
    (f) $f(x,y) = \sqrt{x^2(1+\cos y)}$; f_x, f_y;
    (g) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^{x-2y} e^{t^2}\, dt$; f_x, f_y, f_{xy};
    (h) $f(x) = \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$; f_{x_i}, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

12. Mostre que a função $u(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$, $x \neq 0$, satisfaz a equação $xu_x + yu_y = xy + u$.

13. Mostre que a função $u(r,\theta) = r^2\cos(2\theta)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, (r \neq 0).$$

14. Mostre que as funções $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, e $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, satisfazem a equação diferencial $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

15. Determine a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f_x = x + y^2\cos x$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, e $f(0,y) = e^y$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

16. Seja $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F = (F_1, F_2, F_3)$, uma função tal que existem todas as derivadas parciais das suas componentes F_i. Define-se a **divergência** de F, denotada por $\operatorname{div} F$, e o **rotacional** de F, denotado por $\operatorname{rot} F$, respectivamente, por

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

$$\operatorname{rot} F = \Big(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\Big)e_1 + \Big(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\Big)e_2 + \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\Big)e_3,$$

onde (e_1, e_2, e_3) é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcule a divergência e o rotacional de cada um dos campos vectoriais que se seguem:

    (a) $F(x,y,z) = (x, 2y, 3z)$;
    (b) $F(x,y,z) = (xyz, xz, z)$;
    (c) $F(x,y,z) = (3x^2, -y^2, 2yz - 6xz)$;
    (d) $F(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(1,1,1)$;
    (e) $F(x,y,z) = (2x + y + 2z, x + 4y - 3z, 2x - 3y - 6z)$.

17. ($\star$) Sejam $a < b$, $c < d$ números reais e $f : D \to \mathbb{R}$, onde D é o rectângulo de $\mathbb{R}^2$ dado por $D =]a,b[\times]c,d[$, uma função com derivadas parciais finitas em todos os pontos de D.

    (a) Supondo que as derivadas parciais de f são nulas em todos os pontos de D, mostre que f é constante em D.
    (b) Se $f_x(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in D$, mostre que existe uma função diferenciável $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(y), \forall (x,y) \in D$. (Vale um resultado análogo se $f_y(x,y) = 0$, $\forall (x,y) \in D$).

18. Calcule a derivada da função $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ no ponto $(-1,1,1)$ segundo a direcção e sentido que vai deste para o ponto $(2,1,0)$.

19. Seja $f(x,y,z) = |x+y+z|$. Determine os vectores $u \in \mathbb{R}^3$ segundo os quais existe derivada de f no ponto $(1,-1,0)$.

20. Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que f admite derivada segundo o vector v num ponto $a \in \operatorname{int} D$. Mostre que, no ponto a, f admite derivada segundo o vector λv para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e que $f'_{\lambda v}(a) = \lambda f'_v(a)$. Conclua que a derivada direccional de f no ponto a na direcção e sentido de um vector não nulo v é dada por $f'_u(a) = \frac{1}{\|v\|} f'_v(a)$ onde $u = \frac{v}{\|v\|}$.

21. Dados $x, u \in \mathbb{R}^n$, calcule $f'_u(x)$ nos seguintes casos:

    (a) $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbb{R}^n$;

    (b) $f(x) = x \cdot T(x)$, onde $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma aplicação linear.

22. Determine o vector $\nabla f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, em cada um dos seguintes casos:

    (a) $f(x) = \|x\|^2$; (b) $f(x) = \|x\|$; (c) $f(x) = a \cdot x$, onde $a \in \mathbb{R}^n$.

23. Determine uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

    (a) $\nabla f(x,y) = (2xy, 1 + x^2)$; (b) $\nabla f(x,y) = (x + \sin y, x \cos y - 2y)$.

24. Seja $g : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Define-se o **laplaciano** de g, denotado por Δg, por
$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$
Sendo $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^2, mostre que se pode escrever simbolicamente (i.e., efectuando cálculos como se $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ fosse um vector):

    (a) $\operatorname{div}(\nabla g) = \Delta g$;

    (b) $\operatorname{div} f = \nabla \cdot f$;

    (c) $\operatorname{rot}(\nabla g) = \nabla \times (\nabla g) = 0$;

    (d) $\nabla \cdot (\nabla \times f) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$;

    (e) $\nabla \cdot (gf) = (\nabla g) \cdot f + g(\nabla \cdot f)$;

    (f) $\nabla \times (gf) = (\nabla g) \times f + g(\nabla \times f)$.

25. Seja
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{x^2 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Mostre que f admite derivada direccional em $(0,0)$ em qualquer direcção mas que f não é contínua em $(0,0)$.

26. ($\star$) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais de primeira ordem são limitadas no aberto D. Mostre que f é contínua em D. (Sugestão: use o Teorema de Lagrange).

27. Considere a função dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

    (a) Mostre que f é contínua em $(0,0)$.

    (b) Calcule $\nabla f(0,0)$.

    (c) Mostre que f não é diferenciável em $(0,0)$.

28. Verifique que é diferenciável em $(0,0)$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

29. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Determine $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.
   (b) Calcule $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$.
   (c) Diga, justificando, se f é diferenciável em $(0,0)$.
   (d) Mostre que $f_{xy}(0,0) = -1$ e $f_{yx}(0,0) = 1$. Por que motivo isto não contradiz o Teorema de Schwarz?

30. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

   (a) Estude f quanto à continuidade.
   (b) Calcule $\nabla f(0,0)$ e $f'_{(1,1)}(0,0)$.
   (c) Diga, justificando, se f é diferenciável em $(0,0)$.

31. Considere a função $f(x,y,z) = e^x \sin(yz) + \log(y^2+z^2)$.

   (a) Determine $\nabla f(x,y,z)$.
   (b) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(0,1,0)$ na direcção e sentido do vector $(1,-2,1)$.
   (c) Calcule o valor máximo da derivada direccional de f no ponto $(0,1,0)$. Em que direcção e sentido ocorre?

32. Seja $f(x,y) = a\cos x \sin y + \sin x \cos y$, onde a é uma constante real. Determine o valor de a de modo a que o valor máximo da derivada direccional de f em $(0,0)$, $f'_u(0,0)$, quando u percorre o conjunto dos vectores unitários do plano, seja atingido em $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e, para esse valor de a, calcule aquele valor máximo.

33. (a) Sendo f uma função de classe C^1, mostre que f decresce mais rapidamente num ponto $x \in \mathbb{R}^n$ na direcção e sentido do vector $-\nabla f(x)$.
   (b) Determine a direcção e sentido em que a função $f(x,y) = 4x^3y^2 - 2x^2y + y^2$ decresce mais rapidamente no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.
   (c) Sendo f a função da alínea anterior, calcule a derivada direccional de f no ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ na direcção e sentido do vector $(1,3)$.

34. Considere as funções $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ e $g(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 - 4y$. Para o ponto $(2,-1)$ determine a taxa de variação de f na direcção e sentido em que g aumenta mais rapidamente.

35. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que, no ponto $(1,2)$, a sua derivada dirigida na direcção e sentido do vector $(2,2)$ é igual a 2 e na direcção e sentido do vector $(1,-1)$ é igual a -2.

   (a) Determine $\nabla f(1,2)$.
   (b) Calcule, no ponto $(1,2)$, a derivada direccional de f na direcção e sentido do vector $(3,4)$.

36. Um plano perpendicular a $z = 0$ tem em comum com o parabolóide $z = x^2 + 4y^2$ o ponto $(2, 1, 8)$. A intersecção do plano com o parabolóide é uma parábola que tem *declive* nulo no ponto $(2, 1, 8)$. Qual é o plano em questão?

37. Considere função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

    (a) Calcule $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$.

    (b) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de F das curvas $r = 2$ e $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $r > 0$.

38. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = \left(x^2y^2, 2xy\right)$.

    (a) Determine a imagem por meio de f das rectas $x = 0$, $y = 0$ e $x = y$.

    (b) Calcule $f_x(1, 1)$ e $f'_{(1,2)}(0, 2)$.

    (c) Calcule o jacobiano de f em qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.

39. Seja $f(x, y) = \left(\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - y^2}, \log(xy), \arctan y\right)$.

    (a) Determine, e represente graficamente, o maior domínio possível de f.

    (b) Calcule $f_x(\frac{1}{2}, 1)$ e $f_y(\frac{1}{2}, 1)$.

    (c) Calcule $J_f(\frac{1}{2}, 1)$ e $f'_{(1,2)}(\frac{1}{2}, 1)$.

40. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

    (a) Determine a imagem por meio de f do triângulo T limitado pelas rectas $y = 0$, $x + y = 6$ e $x - y = 2$.

    (b) Verifique que
    $$|\det J_f(x, y)| = \frac{A(f(T))}{A(T)},$$
    onde $A(T)$, $A(f(T))$ representam as áreas de T e de $f(T)$, respectivamente.

41. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy. \end{cases}$

    (a) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de f das rectas $y = x$ e $y = -x$.

    (b) Mostre que $f'_{(1,1)}(x, y)$ é constante ao longo da recta de equação $x + y = 1$.

    (c) Determine, e represente graficamente, o maior domínio possível da função $g(x, y) = \log\left(\dfrac{v}{u}\right)$, onde u e v são as funções dadas.

42. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (x^2, xy, y^2)$. Determine a derivada $f'(1, 2)$ e a derivada dirigida de f no ponto $(1, 2)$ na direcção e sentido do vector $u = (3, 4)$.

43. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear e seja $a \in \mathbb{R}^n$. Mostre que f é diferenciável em a e que $f'(a) = f$.

44. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que a função $u(x, y) = f(e^{xy})$ é solução da equação diferencial $xu_x - yu_y = 0$.

45. Seja $z = f(x, y)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $x = \sqrt{t}$, $y = \dfrac{t - 4}{t + 4}$. Determine $\dfrac{dz}{dt}(4)$ sabendo que $z_x(2, 0) = z_y(2, 0) = 8$.

46. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2. Mostre que a função

$$u(x, y) = xf(x + y) + yg(x + y)$$

é solução da equação diferencial $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0$.

47. Seja $w(x, y, z) = f\,(xz, yz)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostre que se tem

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} - z\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

48. Considere a função $\Phi(x, y) = f(x + g(y))$, onde $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções de classe C^2. Sabendo que $g(2) = 3$, $f(4) = 5$, $g'(2) = f'(4) = 2$, $g''(2) = f''(4) = 3$, calcule as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de Φ no ponto $(1, 2)$.

49. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e seja $g(x, y) = f(x^2 - y^2, y^2 - x^2)$.

    (a) Mostre que se tem $y\dfrac{\partial g}{\partial x} + x\dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$.

    (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}$.

50. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\nabla f(1, 1) = (2, -1)$ e considere a função $h(x, y) = f(xe^y, ye^x + 1)$. Calcule $\nabla h(1, 0)$.

51. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e seja $u(x, y) = xyf\left(\dfrac{x + y}{xy}\right)$. Mostre que

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y)u(x, y)$$

para uma certa função $g(x, y)$ e determine-a.

52. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(tx, ty) = tf(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

    (a) Calcule $f(0, 0)$.

    (b) Mostre que $\nabla f(0, 0) = (f(1, 0), f(0, 1))$.

    (c) Mostre que se f é de classe C^1 então f é a aplicação linear dada por

    $$f(x, y) = xf(1, 0) + yf(0, 1).$$

    (Sugestão: derive a igualdade (1) em ordem a t).

53. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ os campos vectoriais dados por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)) \;\text{ e }\; g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, v - u^2).$$

    (a) Determine as matrizes jacobianas J_f e J_g.

    (b) Escreva a expressão analítica da função composta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$.

    (c) Calcule a matriz jacobiana $J_h(1, 1, -1)$.

54. Seja $z = f(x, y)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

    (a) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

    (b) Mostre que
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

    (c) Sendo $z = f(x, y)$, recorde que o laplaciano de z, denotado por Δz, é a soma $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Mostre que
$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}.$$

55. Seja $f(x, y) = g(r(x, y))$ onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Mostre que para $r \neq 0$ se tem

    (a) $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \big(g'(r)\big)^2$;

    (b) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = g''(r) + \dfrac{1}{r}g'(r)$.

56. ($\star$) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $f(1, 1) = 1$, $f_x(1, 1) = a$, $f_y(1, 1) = b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Sendo $g(x) = f(x, f(x, f(x, x)))$, calcule $g(1)$ e $g'(1)$.

57. Determine um vector unitário normal à hipérbole $xy = 1$ no ponto $\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

58. Suponha que a temperatura num aberto Ω do plano é dada pela função
$$T(x, y) = 3yx^2 - x^3 + 60.$$
Determine, no ponto $(1, -1) \in \Omega$, um vector unitário tangente à linha isotérmica que passa nesse ponto.

59. Considere a função $F(x, y) = f(u) + f(v)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e $u = x + 2y$, $v = 3x - 2y$. Supondo que $f'(0) = f''(0) = \dfrac{1}{2}$,

    (a) calcule $\nabla F(0, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, 0)$;

    (b) escreva uma equação da recta tangente à curva de nível da função F que passa em $(0, 0)$;

    (c) sabendo que a superfície $z = F(x, y)$ passa na origem do referencial, calcule $f(0)$.

60. Em cada um dos seguintes casos determine equações do plano tangente e da recta normal à superfície dada no ponto indicado:

    (a) $z = 3x^2 + 2xy + y^2$, $(1, 1, 6)$;

    (b) $z = x^2\log(2y^2 - 1) + e^{xy}$, $(1, 1, e)$;

    (c) $2x^2 - xz + y^2 - yz = -5$, $(1, 3, 4)$.

61. Considere a função $f(x,y) = e^{x^2 y} + \log(x+y) - \log(x-y)$.

   (a) Determine, e represente graficamente, o domínio de f.
   (b) Calcule a derivada direccional de f no ponto $(1,0)$ na direcção e sentido do vector $(3,4)$.
   (c) Determine um vector normal à curva dada por $f(x,y) = 1$ no ponto $(1,0)$.
   (d) Escreva uma equação do plano tangente à superfície definida por $f(x,y) - e^z = 0$ no ponto $(1,0,0)$ e mostre que esse plano é perpendicular ao plano $x = 0$.
   (e) Seja $F(t) = f(t, g(t))$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Calcule $F(1)$ e $F'(1)$ sabendo que $g(1) = 0$ e $g'(1) = 2$.

62. Considere a superfície definida por $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$, onde $y \neq 0$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1. Mostre que em todos os pontos desta superfície o plano tangente passa na origem do referencial.

63. (a) Mostre que o plano tangente à superfície $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a,b,c \neq 0)$, no ponto (x_0, y_0, z_0) dessa superfície, é dado por
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$
   (b) Determine em que pontos é que o plano tangente é paralelo ao plano yz.
   (c) Calcule os pontos para os quais o plano tangente é perpendicular ao vector $(1,1,1)$.

64. Determine os pontos da superfície $z^2 = 3x^2 + 2xy + y^2 - 32$ onde a recta normal é paralela ao vector $(-2,2,-2)$.

65. Considere a função $g(x,y) = 5ye^y + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(x+y)\right) + x - 3$.

   (a) Mostre que a equação $g(x,y) = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,0)$.
   (b) Calcule $y'(1)$ e mostre que a recta tangente ao gráfico da função $y(x)$ no ponto $(x,y) = (1,0)$ passa no ponto $(6,-1)$.

66. Mostre que a equação $xy + x - e^{xy} = 0$ define implicitamente x como função de y numa vizinhança do ponto $(1,0)$ e calcule $x'(0)$ e $x''(0)$.

67. Considere a função $f(x,y) = y^2 - x^3 - xy^2 + 12x - 16$.

   (a) Mostre que o ponto $(0,4)$ pertence ao conjunto de nível 0 de f.
   (b) Mostre que o conjunto de nível 0 de f contém o gráfico de uma função $x = g(y)$, definida numa vizinhança de $y = 4$, que satisfaz $g(4) = 0$.
   (c) Calcule as derivadas $g'(4)$ e $g''(4)$.
   (d) Justifique que existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$4 - \varepsilon < y < 4 \Rightarrow g(y) < 0 \quad \text{e} \quad 4 < y < 4 + \varepsilon \Rightarrow g(y) > 0.$$

68. Seja $h(x,y,z) = x^4 z - 2xy^3 + yz^3 + 2$.

   (a) Mostre que a equação $h(x,y,z) = 0$ define implicitamente uma função $z = f(x,y)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (1,1,0)$.
   (b) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,1)$.
   (c) Escreva uma equação do plano tangente à superfície $h(x,y,z) = 0$ no ponto $(1,1,0)$.
   (d) Justifique que, no ponto $(1,1)$, a função f cresce mais rapidamente na direcção e sentido do vector $(1,3)$.

69. Mostre que a equação $xy - z\log y + e^{xz} = 1$ define implicitamente uma função $y = g(x,z)$ numa vizinhança do ponto $(x,y,z) = (0,1,1)$. Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z \partial x}(0,1)$.

70. Seja $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e suponha que, nas condições do teorema da função implícita, a equação $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, define x como função implícita de y e y como função implícita de x numa vizinhança de um ponto (x_0,y_0) solução da equação. Nestas condições, que relação há entre $\dfrac{dx}{dy}(y_0)$ e $\dfrac{dy}{dx}(x_0)$?

71. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3t^2 \\ x + t = 2 \\ xyt = 1. \end{cases}$$

   (a) Mostre que o sistema anterior define implicitamente uma função $\gamma(t)$, definida nalgum intervalo centrado em $t = 1$, que descreve o movimento de um ponto em $\mathbb{R}^3$ que no instante $t = 1$ ocupa a posição $(x,y,z) = (1,1,1)$.

   (b) Determine a velocidade escalar desse ponto no instante $t = 1$.

72. Verifique que as superfícies $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ têm o ponto $(2,4,4)$ em comum. Existirão outros pontos comuns a estas superfícies?

73. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $T : A \to \mathbb{R}^2$, uma função de classe $C^1(A)$, dada por $T(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ e $(x_0,y_0) \in A$ tal que $\Gamma(x_0,y_0) = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) \neq 0$.

   (a) Seja $(u_0,v_0) = (f(x_0,y_0), g(x_0,y_0))$. Mostre que existe uma bola aberta B centrada em (u_0,v_0) na qual o sistema

$$\begin{cases} u = f(x,y), \\ v = g(x,y), \end{cases}$$

   pode ser resolvido de modo único em ordem às variáveis x e y tendo-se

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v), \\ y = \psi(u,v), \quad \forall (u,v) \in B, \end{cases}$$

   onde $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 em B.
   Este resultado diz-nos que a função T é invertível numa vizinhança do ponto (x_0,y_0) e é conhecido como o *Teorema da Função Inversa*.

   (b) Mostre que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} = -\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial f}{\partial x}.$$

   (c) Seja $\Gamma^* = \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$. Mostre que

$$\Gamma^*(u,v) = \frac{1}{\Gamma(T^{-1}(u,v))}.$$

74. Seja $F(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ onde $u(x,y) = -2x\cos y$ e $v(x,y) = x^2 \sin y$.

   (a) Determine, e represente graficamente, as imagens por meio de F das rectas $y = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = -2$.

   (b) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e considere a função $f(x) = u(x, g(x))$. Sabendo que $g(1) = \dfrac{\pi}{4}$ e que $g'(1) = 2$, calcule $f'(1)$.

   (c) Calcule $F'_{(2,3)}(1,0)$.

   (d) Aplicando o exercício anterior, mostre que F é invertível numa vizinhança do ponto $(x,y) = (1,0)$.

   (e) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$ no ponto $(-2,0)$.

75. (a) Mostre que o sistema $\begin{cases} y\cos x + \log(1 + xzw) + z = 0 \\ \sin(y^2 + z^2) + e^z - 2x = 1 \end{cases}$ define implicitamente y e z como funções de x e w numa vizinhança do ponto $(x,y,z,w) = (0,0,0,0)$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial y}{\partial w}(0,0)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial w}(0,0)$.

76. Mostre que o sistema $\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \sin u \cos v + z = 0 \end{cases}$ define implicitamente x, y e z como funções de u e v numa vizinhança do ponto $(x,y,z,u,v) = (1,1,0,\frac{\pi}{2},0)$. Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial x}{\partial v}$ no ponto $(u,v) = (\frac{\pi}{2},0)$.

77. Determine o polinómio de Taylor de segunda ordem da função $f(x,y) = ye^{xy}$ em torno do ponto $(0,1)$.

78. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ como soma de potências de $x - 1$ e de $y - 2$.

79. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções:

   (a) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$;

   (b) $f(x,y) = x^2 y - e^y$;

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^3$;

   (d) $f(x,y) = e^{2x^2 - 4xy + y^4}$;

   (e) $f(x,y) = y^2 + x^2(x-1)^2$;

   (f) $f(x,y) = y\log(x+y)$;

   (g) $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 - x^4 - y^4$;

   (h) $f(x,y) = \sin x \sin y$, $0 < x < 2\pi$, $0 < y < 2\pi$.

80. Determine os valores máximo e mínimo absolutos das funções dadas nos conjuntos indicados:

   (a) $f(x,y) = x^2 y + y^3 + 2y^2$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$;

   (b) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2\}$;

   (c) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 2y + 2$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2x\}$;

   (d) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$;

   (e) $f(x,y) = 2xy$ em $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \le 8\}$.

81. Seja $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 3)$.

   (a) Determine os extremos locais de f em $\mathbb{R}^2$.

   (b) Diga, justificando, se f tem extremos absolutos em $\mathbb{R}^2$.

   (c) Determine os extremos absolutos de f no círculo $x^2 + y^2 \le 3$.

82. Determine o máximo da função $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ na superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

83. Determine números não negativos x, y, z tais que a sua soma seja 18 e o seu produto seja máximo.

84. Determine os pontos da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ para os quais o quadrado da distância ao ponto $(2,1,2)$ é, respectivamente, máximo e mínimo.

85. Sabendo que de entre todos os paralelepípedos rectangulares de área de superfície S existe um que tem maior volume, mostre que se trata de um cubo e determine a medida da respectiva aresta.

86. Pretende-se construir um contentor em forma de paralelepípedo, aberto em cima, e com capacidade de 32 litros. Determine as dimensões que deve ter o contentor de forma a usar o mínimo de material possível (sabendo que este mínimo existe).

87. ($\star$) Seja $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Determine o máximo da função $f(x_1, \ldots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, se x é um vector unitário de $\mathbb{R}^n$, usando
   (a) a desigualdade de Cauchy-Schwarz;
   (b) o método dos multiplicadores de Lagrange.

88. ($\star$) Determine o máximo da função $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)^2$, se $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$. Use o resultado obtido para provar que, se $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, então $(a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

Algumas Soluções da Ficha 2

1. a) $x(x+1)^2$; b) $x(y+1)(xy+x+1)$; c) $x(x+1)(y+1)$. **2.** $\frac{x^2-xy}{2}$.
5. a) $(2,0,0,2)$; $(0,0,1)$. **6.** verdadeira
7. a) não existe; b) não existe; c) 2; d) não existe; e) não existe; f) 0; g) não existe; h) 0; i) 2, j) 0; k) -1; l) não existe; m) não existe; n) não existe; o) $(-1/6,1,2/3,1,0)$; p) $(0,1,3)$.
8. a) i) contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, descontínua em $(0,0)$; ii) contínua em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, descontínua em $(0,0)$; iii) descontínua em todos os pontos da recta $y=x$ à excepção de $\{(0,0)\}$, contínua nos restantes pontos de $\mathbb{R}^2$; b) $g(0,0)=1$, para f não é possível. **9.** y se $x=0$ para f; x se $y=0$ para g. **10.** a) $(0,1)$; b) sim sendo a imagem de $(0,0)$ dada por $(0,1)$.
11. a) $4x^3+4xy^2+3y^3$, $4x^2y+9xy^2$, $12x^2+4y^2$, $8xy+9y^2$, $4x^2+18xy$; b) $-\pi$, $-2\sqrt{\pi}$; c) $ye^{xy}\log(xyz)+\frac{e^{xy}}{x}$, $\frac{e^{xy}}{z}$, $\frac{xe^{xy}}{z}$, $\frac{e^{xy}}{z}+\frac{xye^{xy}}{z}$; d) $\frac{-2(x-2y+z)(2x^2+2z^2+xy+yz)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$; e) $\arctan(yz)$, $\frac{xz}{1+y^2z^2}$, $\frac{x-xy^2z^2}{(1+y^2z^2)^2}$; f) $\frac{x}{|x|}\sqrt{1+\cos y}$, $\frac{-|x|\sin y}{2\sqrt{1+\cos y}}$; g) $e^{(x-2y)^2}-e^{x^2}$, $-2e^{(x-2y)^2}$, $-4(x-2y)e^{(x-2y)^2}$; h) $2x_i$.
15. $x^2/2+y^2\sin x+e^y$. **16.** a) 6, $(0,0,0)$; b) $yz+1$, $(-x,xy,z-xz)$; c) 0, $(2z,6z,0)$; d) $2e^{x^2+y^2+z^2}(x+y+z)$, $2e^{x^2+y^2+z^2}(y-z,z-x,x-y)$; e) 0, $(0,0,0)$.
18. 6. **19.** $|u_1+u_2+u_3|=0$. **21.** a) $a\cdot u$; b) $x\cdot T(u)+u\cdot T(x)$.
22. a) $2x$; b) $\frac{x}{\|x\|}$; c) a. **23.** a) x^2y+y+C, $C\in\mathbb{R}$; b) $x\sin y-y^2+x^2/2+C$, $C\in\mathbb{R}$. **27.** b) $(0,0)$.
29. a) $\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$; b) 0, 0; c) sim; d) f não é de classe C^2. **30.** b) $(0,0)$, 3; c) não.
31. a) $\left(e^x\sin(yz), ze^x\cos(yz)+\frac{2y}{y^2+z^2}, ye^x\cos(yz)+\frac{2z}{y^2+z^2}\right)$; b) $\frac{-3}{\sqrt{6}}$; c) $\sqrt{5}$, $(0,2,1)$.
32. 2, $\sqrt{5}$. **33.** b) $(-1,-3)$; c) $\sqrt{10}$. **34.** $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **35.** a) $(0,2\sqrt{2})$; b) $\frac{8\sqrt{2}}{5}$. **36.** $x+2y=4$.
37. a) r. **38.** b) $(2,2)$, $(0,4)$; c) 0. **39.** b) $(-1/\sqrt{3},2,0)$, $(-1/\sqrt{3},1,1/2)$; c) $(-\sqrt{3},4,1)$.
42. $(2x,2x+y,4y)$, $(6/5,2,16/5)$. **45.** 3.
48. $\Phi_x(1,2)=2$, $\Phi_y(1,2)=4$, $\Phi_{xx}(1,2)=3$, $\Phi_{xy}(1,2)=6$, $\Phi_{yy}(1,2)=18$.
49. b) $2\frac{\partial f}{\partial u}-2\frac{\partial f}{\partial v}+4x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\right)$. **50.** $(2,2-e)$. **51.** $g(x,y)=x-y$. **52.** a) 0.
53. a) $J_f=\begin{bmatrix} e^{x+2y} & 2e^{x+2y}\\ 2\cos(y+2x) & \cos(y+2x)\end{bmatrix}$, $J_g=\begin{bmatrix} 1 & 4v & 9w^2\\ -2u & 1 & 0\end{bmatrix}$;
b) $(e^{u+2v^2+3w^3+2v-2u^2}, \sin(v-u^2+2u+4v^2+6w^3))$; c) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 9\\ 0 & 9 & 18\end{bmatrix}$.
54. a) $\cos\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial z}{\partial y}$, $-r\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}$, $-\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial z}{\partial y}+r\cos\theta\sin\theta(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2})+r(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. **56.** 1, $a+ab+ab^2+b^3$.
57. $\pm(\frac{1}{\sqrt{17}},\frac{4}{\sqrt{17}})$. **58.** $\pm(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}})$. **59.** a) $(2,0)$, 5; b) $x=0$; c) 0.
60. a) $8x+4y-z=6$, $(x,y,z)=(1,1,6)+t(8,4,-1)$, $t\in\mathbb{R}$; b) $ex+(4+e)y-z=4+e$, $(x,y,z)=(1,1,e)+t(e,4+e,-1)$, $t\in\mathbb{R}$; c) $y-2z=-5$, $(x,y,z)=(1,3,4)+t(0,2,-4)$, $t\in\mathbb{R}$.
61. a) $\{(x,y): y<x, y>-x\}$; b) $12/5$; c) $(0,3)$; d) $3y-z=0$; e) 1, 6.
63. b) $(\pm a,0,0)$; c) $\pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a^2,b^2,c^2)$. **64.** $(-4,8,4)$, $(4,-8,-4)$. **65.** b) $-1/5$. **66.** 0, 1.
67. c) 2, $-15/2$. **68.** b) 2, 6, -18; c) $2x+6y-z=8$. **69.** -1. **70.** $\frac{dx}{dy}(y_0)=\frac{1}{\frac{dy}{dx}(x_0)}$. **71.** b) $\sqrt{17}$.
74. b) $\sqrt{2}$; c) $(-4,3)$; e) $-1/2$, 0, 1. **75.** b) -2, 2, 0, 0. **76.** 0, $\frac{\pi}{12}$.
77. $-x+y+\frac{1}{2}x^2+2xy$. **78.** $7+4(x-1)+5(y-2)+(x-1)^2+(x-1)(y-2)+(y-2)^2$.
79. a) $(0,0)$ ponto de min local, $(2,1)$ e $(-2,1)$ pontos de sela; b) $(1,0)$ e $(-1,0)$ pontos de sela; c) $(0,0)$ ponto de sela; d) $(0,0)$ ponto de sela, $(1,1)$ e $(-1,-1)$ pontos de min local; e) $(0,0)$ e $(1,0)$ pontos de min local, $(1/2,0)$ ponto de sela; f) $(1,0)$ ponto de sela; g) $(0,0)$ ponto de sela, $(-1,1)$, $(1,-1)$ pontos de máx local; h) (π,π) ponto de sela, $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ pontos de máx local, $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ e $(\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ pontos de min local.
80. a) 16, -2; b) 9, 0; c) 10, -1; d) $9/4$, $-1/4$; e) 4, -4. **81.** a) 2, -2; b) não; c) 2, -2. **82.** 9.
83. 6, 6, 6. **84.** $(-2/3,-1/3,-2/3)$, $(2/3,1/3,2/3)$. **85.** $\sqrt{\frac{S}{6}}$. **86.** 4, 4, altura 2. **87.** $\|a\|$. **88.** $\frac{1}{n^n}$.

Ficha 3 - Cálculo Integral em $\mathbb{R}^n$

1. Determine a medida n-dimensional e a fronteira dos intervalos de $\mathbb{R}^n$, em cada uma das alíneas que se seguem:

   (a) $n = 2$, $[1, 2] \times [3, 4]$;

   (b) $n = 2$, $]0, 5[\times[1, 6]$;

   (c) $n = 3$, $[1, 2] \times [3, 4] \times [0, 1]$.

   Verifique que a fronteira de cada um dos intervalos tem medida nula.

2. Prove que qualquer conjunto finito é desprezável.

3. Mostre que um conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, é mensurável se, e só se, a função (chamada **função característica de A**)
$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$
é integrável em qualquer intervalo limitado I, tal que $A \subseteq I$.

4. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa ($f \geq 0$), tal que existe um $x_0 \in \operatorname{int}\Omega$ onde $f(x_0) > 0$. Mostre que $\displaystyle\int_\Omega f > 0$.

5. Calcule os seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^4 (x + y)\, dy\, dx$;

   (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^3 5xy^2\, dx\, dy$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 v(u + v^2)^4\, du\, dv$;

   (d) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^1 \sqrt{s + t}\, ds\, dt$;

   (e) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-1}^5 \cos y\, dx\, dy$;

   (f) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{x^2} \frac{1}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) dy\, dx$;

   (g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos x} y \sin x\, dy\, dx$;

   (h) $\displaystyle\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx\, dy$;

   (i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (x - \sqrt{y})\, dy\, dx$;

   (j) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin y} e^x \cos y\, dx\, dy$;

   (k) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 \int_3^4 xe^z\, dy\, dx\, dz$;

   (l) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x^2} e^z\, dz\, dy\, dx$;

   (m) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} yx \cos z\, dy\, dx\, dz$;

   (n) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^x \int_0^x x \cos(xz)\, dz\, dy\, dx$.

6. Esboce uma região que

   (a) seja do tipo I mas não seja do tipo II;

   (b) seja do tipo II mas não seja do tipo I;

   (c) seja do tipo I e do tipo II;

   (d) não seja do tipo I nem do tipo II.

7. Esboce a região Ω e calcule os integrais duplos que se seguem

   (a) $\displaystyle\int_\Omega x^2 + y^2\,dx\,dy$, onde $\Omega = [1,2] \times [1,2]$;

   (b) $\displaystyle\int_\Omega \sqrt{xy}\,dA$, onde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\, y^2 \le x \le y\}$;

   (c) $\displaystyle\int_\Omega x + y\,dA$, onde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^3 \le y \le 2\sqrt{x}\}$;

   (d) $\displaystyle\int_\Omega 2 + y\,dA$, onde Ω é a região do plano limitada pelas curvas $x = y^2 - 1$ e $x = 1 - y^2$;

   (e) $\displaystyle\int_\Omega x^2\,dx\,dy$, onde Ω é definido pela conjunção de condições $xy \le 16$, $0 \le y \le x \le 8$;

   (f) $\displaystyle\int_\Omega y^3\,dA$, onde Ω é o triângulo de vértices $(0,2)$, $(1,1)$ e $(3,2)$;

   (g) $\displaystyle\int_\Omega x - 1\,dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $x = 0$, $y = x^2$ e $y = 2 - x$;

   (h) $\displaystyle\int_\Omega x - 1\,dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = 0$, $y = x^2$ e $y = 2 - x$.

8. Esboce a região Ω e calcule os integrais triplos que se seguem

   (a) $\displaystyle\int_\Omega (xy - z^3)\,dx\,dy\,dz$, com $\Omega = [-1,1] \times [0,1] \times [0,2]$;

   (b) $\displaystyle\int_\Omega xz \sin y^5\,dx\,dy\,dz$, com $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le y \le 1,\, y \le z \le 2y\}$;

   (c) $\displaystyle\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, com Ω a região do primeiro octante limitada pelos planos $x+y = 1$, $y+z = 1$;

   (d) $\displaystyle\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz$, com Ω a região do primeiro octante limitada pelo plano $y = 3x$ e pela superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 9$.

9. Sem calcular o integral duplo, justifique que $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9 - x^2 - y^2}\,dy\,dx = \frac{9\pi}{2}$.

10. Seja $f(x,y)$ uma função contínua. Esboce as regiões de integração e exprima os integrais que se seguem como integrais iterados pela ordem de integração diferente da dada:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx$;

    (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

    (c) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_0^{\log x} f(x,y)\,dy$;

    (d) $\displaystyle\int_0^9 dy \int_0^{\sqrt{9-y}} f(x,y)\,dx$;

    (e) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx$;

    (f) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,dy$;

    (g) $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy$, com $a > 0$.

11. Determine $b \in \mathbb{R}$ e expressão designatória da função g de modo a que

$$\int_0^2 dx \int_{x^2}^{2\sqrt{2x}} e^y\,dy = \int_0^b e^y g(y)\,dy.$$

12. Esboce a região de integração e calcule os integrais que se seguem

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy$;

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} \, dy \, dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\pi y}^{\pi} f(x) \, dx \, dy$, com

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

13. Determine os valores pedidos em cada alínea, esboçando a região de integração,

(a) a área da região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$;
(b) o volume da pirâmide cujos vértices são $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,1)$;
(c) a massa da placa que ocupa a região do plano limitada pela parábola $x = y^2$ e pela recta $y = x - 2$ e que tem densidade constante e igual a 3;
(d) o volume da região tridimensional definida pela conjunção $x^2 \leq y \leq 4$, $0 \leq z \leq x^2$;
(e) o volume do tetraedro definido pela conjunção de $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \leq 1$;
(f) a média de $f(x,y) = e^y \sqrt{x + e^y}$ no rectângulo que tem $(0,0)$, $(4,0)$ e $(4,1)$ como vértices;
(g) a massa da placa triangular de vértices $(0,0), (1,0)$ e $(0,2)$ cuja densidade é dada pela função $\mu(x,y) = e^{x+y}$;
(h) o volume do sólido, no primeiro octante, limitado pelo plano $z = 1 - x - y$ e pelos três planos coordenados;
(i) a área da região do plano limitada pelas curvas $x = 0$, $y = 0$, $y = 3 - x$ e $y = 1 + x^2$;
(j) o momento de inércia I_y relativo ao eixo dos yy de uma placa com a forma de um paralelogramo cujos vértices são os pontos $(3,0)$, $(0,6)$, $(-1,2)$, $(2,-4)$, assumindo que a densidade é 1.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f(1) = f(0)$.

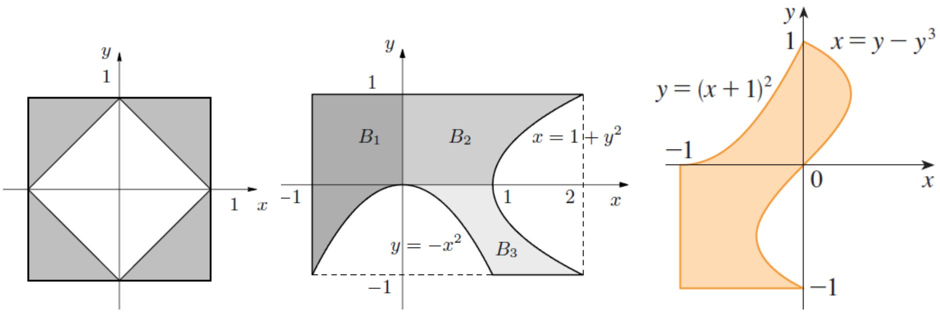
a) Mostre que $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 f''(y) \, dy dx = f'(1)$.
b) Calcule o integral anterior usando a outra ordem de integração.

15. (**1.º Teorema da Média**) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, mensurável e conexo por arcos. Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, com $g \geq 0$. Mostre que existe $x_0 \in \Omega$ tal que

$$\int_\Omega fg = f(x_0) \int_\Omega g.$$

16. Expresse A, B e C (as regiões a sombreado) como união de regiões do tipo I ou do tipo II e calcule os integrais:

$$\int_A x^2 \, dx \, dy, \qquad \int_B xy \, dx \, dy, \qquad \int_B y \, dx \, dy, \qquad \int_C y \, dx \, dy.$$



A $\qquad$ $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ $\qquad$ C

17. Para cada $R \geq 0$ calcule o integral $\displaystyle\int_\Omega y\, dx\, dy$, onde

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, R^2 \leq x^2 + y^2\}.$$

18. Calcule $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x \sin |x^2 - y|\, dx\, dy.$

19. Calcule o integral triplo

$$\int_M \frac{1}{(x + y + z + 1)^3}\, dx\, dy\, dz$$

onde M é a região de $\mathbb{R}^3$ limitada pelos planos coordenados e pelo plano determinado pela equação $x + y + z = 1$.

20. ($*$) Sabendo que a área da região limitada por uma elipse de semi-eixos a e b é πab, e usando o método de Cavalieri, calcule o integral triplo $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{3 - z}\, dx\, dy\, dz$, onde Ω é a região de $\mathbb{R}^3$ definida pelas condições

$$9z \leq 1 + y^2 + 9x^2, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{9 - (y^2 + 9x^2)}.$$

21. **(Mudança de variáveis linear)**

   (a) Calcule $\displaystyle\int_D \cos\left(\frac{x - y}{x + y}\right) dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas rectas $x + y = 3$, $x + y = 1$, $x = 0$ e $y = 0$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_D \frac{y + 2x}{\sqrt{y - 2x - 1}}\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas rectas $y - 2x = 2$, $y + 2x = 2$, $y - 2x = 5$ e $y + 2x = 1$.

22. Esboce, em coordenadas cartesianas, as regiões cujas áreas são dadas pelos integrais que se seguem, expressos em coordenadas polares

   (a) $\displaystyle\int_{3\pi/4}^{7\pi/6} \int_2^3 r\, dr\, d\theta;$

   (b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{5\pi/4} \int_0^{-2\cos\theta} r\, dr\, d\theta;$

   (c) $\displaystyle\int_{5\pi/3}^{2\pi} \int_{1/\cos\theta}^{2} r\, dr\, d\theta.$

23. Calcule, usando **coordenadas polares**

   (a) $\displaystyle\iint_D 4 - x^2 - y^2\, dx\, dy$, onde D é o círculo de centro na origem e raio 2;

   (b) $\displaystyle\iint_D \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$, onde $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0,\ y \leq 0\big\};$

   (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx\right) dy;$

   (d) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = 0$ e $y = \sqrt{2x - x^2}$;

   (e) a área da porção do círculo $x^2 + y^2 \leq 4$ para $x \geq 1$;

   (f) o centro de massa da placa semi-circular, do semi-plano superior, centrada na origem, de raio a, cuja função densidade é em cada ponto proporcional à distância do ponto à origem.

24. Use coordenadas polares para escrever a soma de integrais que se segue como um único integral

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xy\,dy\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy\,dy\,dx$$

e calcule o seu valor.

25. Calcule

$$\int_D \frac{\log(r(\cos\theta+\sin\theta))}{\cos\theta}\,dr\,d\theta, \quad \text{onde} \quad D=\{(r,\theta):\, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4},\ 1\le r\cos\theta\le 2\}.$$

26. **(Outras mudanças de variáveis)** Esboce a região de integração e calcule os integrais que se seguem usando a mudança de variáveis indicada:

(a) $\displaystyle\int_D \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=y^2$, $x=3y^2$; mudança de variáveis $u=y/x^2$, $v=x/y^2$;

(b) $\displaystyle\int_D \frac{x^5y^5}{x^3y^3+1}\,dx\,dy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pelas curvas $y=x$, $y=3x$, $xy=2$ e $xy=6$; mudança de variáveis $u=xy$, $v=y/x$.

27. Considere a função

$$F:[0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, \quad F(r,\theta,z)=(x(r,\theta,z),y(r,\theta,z),z),$$

com $x=r\cos\theta$ e $y=r\sin\theta$. Mostre que

(a) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}=r.$

(b) Determine e represente graficamente as imagens por meio de F dos conjuntos

i. $\mathbb{R}_0^+\times\{0\}\times\mathbb{R}$;

ii. $\{0\}\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$.

A função F é injectiva?

(c) Mostre que

i. $F([0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R})=\mathbb{R}^3$;

ii. a restrição H de F a $A=]0,+\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R}$ é injectiva e que

$$H(A)=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z):\, z\in\mathbb{R}\};$$

iii. restrição T de F a $B=]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ é injectiva e que

$$T(B)=\mathbb{R}^3\setminus\{(x,0,z):\, x\ge 0,\ z\in\mathbb{R}\};$$

(d) Determine a imagem por meio de T e por meio de F do conjunto $r=4$.

28. Escreva em coordenadas cilíndricas o sólido limitado

(a) pelas superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=6-x^2-y^2$;

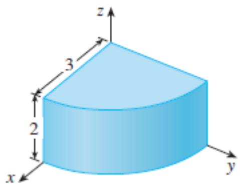
(b) pela superfície cilíndrica $x^2+y^2=4$ e pelos planos $z=-1$, $z=3$, $y=1$ e $y=2$.

29. Faça um esboço, em coordenadas cartesianas, dos conjuntos que em coordenadas cilíndricas são dados por

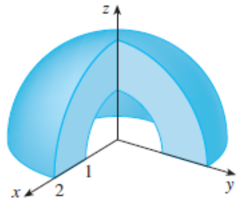
(a) $0\le r\le 3$, $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$, e $-2\le z\le 0$;

(b) $0\le r\le 1$, $0\le\theta\le\pi$ e $r\le z\le 5$.

30. Escreva em coordenadas cilíndricas os conjuntos que estão representados em coordenadas cartesianas, nas figuras seguintes,



A



B

31. Use **coordenadas cilíndricas** para calcular

(a) o volume do sólido limitado da superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e pelo plano $z = 1$;

(b) o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$;

(c) o volume do sólido limitado pelos planos $z = 0$ e $z = 3$ e pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$;

(d) o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ e pelos planos $z = 0$ e $z + y = 3$;

(e) o volume do sólido limitado pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 9$ e no interior da superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$;

(f) o volume da região de $\mathbb{R}^3$ dada por $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z^2 \leq x^2 + y^2 + a^2$, com $a > 0$;

(g) o integral $\displaystyle\iiint_D dxdydz$ onde D é a região limitada pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, pela superfície cónica $x^2 + y^2 = z^2$ e que contém o ponto $(0, 0, R)$, $R > 0$.

32. Considere a função

$$F : [0, +\infty[\times[0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad F(\rho, \theta, \phi) = (x(\rho, \theta, \phi), y(\rho, \theta, \phi), z(\rho, \theta, \phi)),$$

com $x = \rho \cos\theta \sin\phi$, $y = \rho \sin\theta \sin\phi$ e $z = \rho \cos\phi$. Mostre que

(a) $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = -\rho^2 \sin\phi$.

(b) Determine e represente graficamente as imagens por meio de F

i. do conjunto $\rho = 7$;

ii. do conjunto $\theta = \frac{\pi}{4}$;

iii. do cubo $[0, 5] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$;

iv. do conjunto $]0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times]0, \pi[$.

(c) Seja $C = [0, 3] \times [0, 2\pi] \times \{\frac{\pi}{3}\}$. Determine a, b, $c \in \mathbb{R}^+$ de modo a que $F(C)$ esteja contido em

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\right\}.$$

(d) Mostre que a restrição T de F ao conjunto $B =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ é injectiva e que

$$T(B) = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \geq 0,\ z \in \mathbb{R}\}.$$

33. Identifique em coordenadas cartesianas os conjuntos que em coordenadas esféricas são dados por

(a) $\rho = 8$;

(b) $\theta = \pi$;

(c) $\phi = \frac{\pi}{6}$;

(d) $\sin\phi = 1$;

(e) $\rho = 2\cos\phi$.

34. Escreva em coordenadas esféricas os conjuntos que se seguem

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \leq 0\}$;
   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ x \geq 0\}$;
   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3,\ y \geq 0\}$;
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y\}$.

35. Escreva em coordenadas esféricas o conjunto B do exercício 30. Verifique se este sistema de coordenadas é adequado para descrever o conjunto A do mesmo exercício.

36. Use **coordenadas esféricas** para calcular

   (a) $\displaystyle\iiint_E xz\, dV$, onde E é o sólido do primeiro octante compreendido entre as superfícies esféricas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
   (b) $\displaystyle\iiint_E y^2\, dV$, onde E é a região do primeiro octante limitada pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
   (c) o volume da região do espaço dada por
   $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\};$$
   (d) o integral $\displaystyle\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ dxdydz$ sendo $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq x\}$.

37. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e superiormente pelo hemisfério $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

   a) usando coordenadas cilíndricas;
   b) usando coordenadas esféricas.

38. Calcule

   (a) o volume do sólido limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
   (b) o volume do sólido dado por
   $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2y, z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\};$$
   (c) o integral $\displaystyle\int_D xy\, dA$, onde D é a região limitada pelas curvas $y = x$, $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$ e $y = 0$, com $xy \geq 0$;
   (d) o integral $\displaystyle\int_\Omega e^{y^2}\, dA$, onde Ω é a região do primeiro quadrante limitada pelas rectas $x = 0$, $y = 1$ e $y = x$;
   (e) o integral $\displaystyle\int_T y\, dV$, onde T é o tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x + y + z = 2$;
   (f) o integral $\displaystyle\int_S xyz\, dV$, onde S é a região do primeiro octante limitada pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
   (g) o integral $\displaystyle\int_D 3x\, dx\, dy$, onde D é a região do plano limitada pelas curvas $x = \sqrt{2y - y^2}$ e $x = 0$;
   (h) o volume do sólido limitado pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, acima do plano $z = 1$;

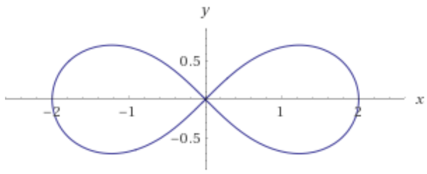
(i) o volume do sólido limitado pelo plano $x = 9$ e pelo parabolóide elíptico $4y^2 + 9z^2 = 4x$;

(j) o volume do sólido limitado pela superfície cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $z = 0$ e $z = 2 + y$;

(k) o integral

$$\int_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$$

sendo D a região do semi-plano $x \geq 0$ limitada pela lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, com $a > 0$;

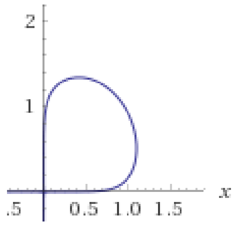


Lemniscata para $a = 2$

(l) o volume do sólido D definido por $0 \leq z \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b}\right)$ e $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0$, com a e b números reais positivos;

(m) o volume do sólido limitado pelo elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a, b, c > 0$;

(n) $\displaystyle\int_D \sqrt{xy}\, dxdy$, onde D é a região do primeiro quadrante definida por $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}\right)^4 \leq \dfrac{xy}{\sqrt{6}}$;

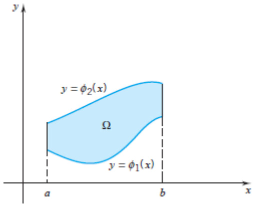


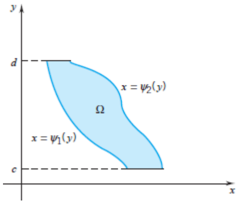
(o) o integral $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{x^2+z^2}^{2-x^2-z^2} (x^2 + z^2)^{3/2}\, dy\, dx\, dz$.

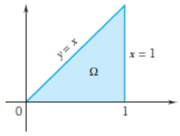
Algumas soluções da Ficha 3

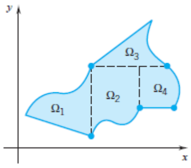
1. b) $m(I) = 25$, $\text{fr}\,(I) = \{0\} \times [1,6] \cup [0,5] \times \{6\} \cup \{5\} \times [1,6] \cup [0,5] \times \{1\}$; c) $m(I) = 1$, $\text{fr}\,(I) = \{1\} \times [3,4] \times [0,1] \cup \{2\} \times [3,4] \times [0,1] \cup [1,2] \times \{3\} \times [0,1] \cup [1,2] \times \{4\} \times [0,1] \cup [1,2] \times [3,4] \times \{0\} \cup [1,2] \times [3,4] \times \{1\}$.

5. a) 24; b) 160/3; c) $\frac{31}{30}$; d) $\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1)$; e) 3; f) 1; g) 1/6; h) $\pi/6 + \sqrt{3} - 2$; i) $-\pi/4$; j) $e - 2$; k) $\frac{3}{2}(e-1)$; l) $e - 2$; m) 1/8; n) 1.

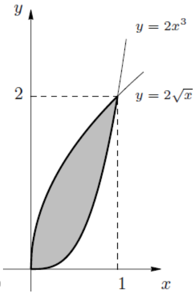
6. a) 

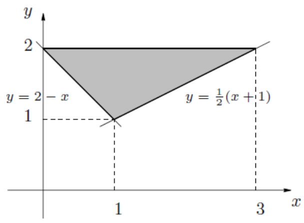
b) 

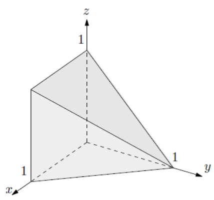
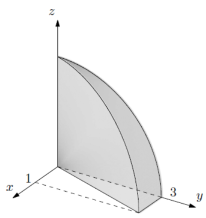
c) 

d) 

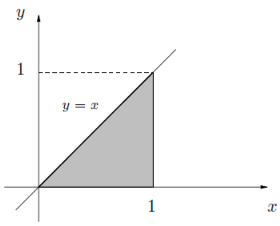
7. a) 14/3; b) $\frac{2}{27}$; c) $\frac{39}{35}$; d) 16/3; e) 448; f) $\frac{147}{20}$; g) $-3/4$; h) $\frac{1}{12}$.

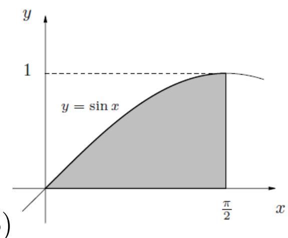
7 c) 

7 f) 

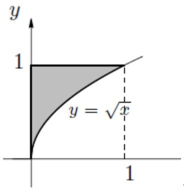
8. a) -8; b) $\frac{3}{20}(1 - \cos 1)$; c) $\frac{1}{12}$;  d) 27/8. 

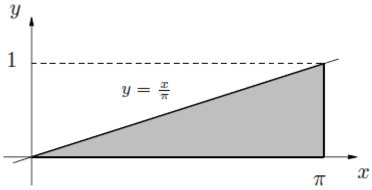
10. a) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 f(x,y)\,dx\,dy$; b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} f(x,y)\,dx\,dy$; d) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{9-x^2} f(x,y)\,dy\,dx$;
e) $\displaystyle\int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_0^1 \int_0^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/3}^{y/2} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^3 \int_{y/3}^1 f(x,y)\,dx\,dy$;
g) $\displaystyle\int_0^{a/2} \int_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{a/2}^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$.

10 a) 

10 b) 

11. $b = 4$, $g(y) = \sqrt{y} - y^2/8$. **12.** a) $\frac{1}{4}(1 - \cos 1)$; b) $\frac{1}{3}(e-1)$; c) $2/\pi$.

12 b) 

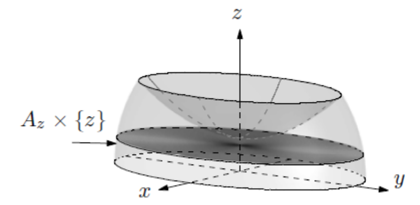
12 c) 

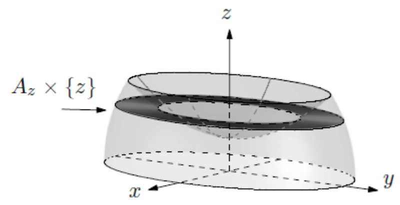
13. a) 1/3; b) 1/6; c) 27/2; d) $\frac{128}{15}$; e) 1; f) $1/15((4+e)^{5/2} - 5^{5/2} - e^{5/2} + 1)$; g) $(e-1)^2$; h) 1/6; i) 10/3; j) 33.

16. $1,\ 0,\ 4/5,\ -\frac{2}{15}$.

17. $\begin{cases} \frac{\sqrt{2}-2}{6}R^3+\frac{1}{6}, & 0\le R<1,\\ \frac{\sqrt{2}}{6}R^3-\frac{R^2}{2}+\frac{1}{3}, & 1\le R<\sqrt{2},\\ 0, & R\ge\sqrt{2}. \end{cases}$

18. $1-\sin 1$. **19.** $\frac{1}{2}\log 2-\frac{5}{16}$. **20.** $\frac{23\pi}{6}+\frac{26\pi}{3}\log\frac{9}{13}$.

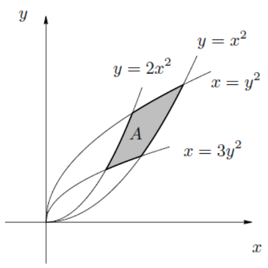




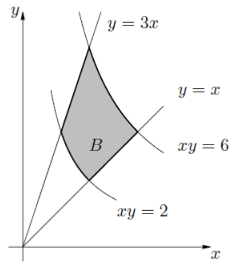
21. a) $4\sin 1$; b) $3/4$.

23. a) 8π; b) $\frac{\pi}{4}(\sin 4-\sin 1)$; c) $\frac{\pi}{8}\log 5$; d) $16/9$; e) $\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{3}$; f) $(0,\frac{3a}{2\pi})$.

24. $\frac{15}{16}$. **25.** $4\log 2-2$. **26.** a) $2/3$; b) $\dfrac{1}{3}\log\sqrt{3}\left(208+\log\dfrac{9}{217}\right)$.



26 a)



26 b)

27. i) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y=0,\ x\ge 0\}$; ii) eixo dos zz; não;
d) $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=16\}\setminus\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=4,\ y=0\}$; $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2=16\}$.

28. a) $\{(r,\theta,z):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le\sqrt{3},\ r^2\le z\le 6-r^2\}$;
b) $\{(r,\theta,z):\ \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5\pi}{6},\ -1\le z\le 3,\ \frac{1}{\sin\theta}\le r\le 2\}$.

30. A: $\{(r,\theta,z):\ 0\le r\le 3,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le 2\}$ e
B: $\{(r,\theta,z):\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi, 1\le r\le 2,\ \sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\}$.

31. a) $\pi/3$; b) 8π; c) $15\pi/2$; d) 12π; e) $4\pi\frac{27-16\sqrt{2}}{3}$; f) $\frac{4\pi a^3}{3}(2\sqrt{2}-1)$; g) πR^3.

32. b) i) A superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2=49$; ii) o semi-plano $\{(x,x,z):\ x\ge 0,\ z\in\mathbb{R}\}$; iii) a esfera $x^2+y^2+z^2\le 25$; iv) $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,z):\ z\in\mathbb{R}\}$; c) $a=b=\sqrt{3}$, $c=1$.

33. a) A superfície esférica com centro em $(0,0,0)$ e de raio 8; b) o semi-plano $\{(x,0,z):\ x\le 0,\ z\in\mathbb{R}\}$; c) a superfície cónica de equação $z^2=3x^2+3y^2$; d) o plano $z=0$; e) a superfície esférica com centro em $(0,0,1)$ e de raio 1.

34. a) $\{(\rho,\theta,\phi): 0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \pi/2\le\phi\le\pi\}$;
b) $\{(\rho,\theta,\phi): 0\le\rho\le\sqrt{3}\wedge(0\le\theta\le\pi/2\vee 3\pi/2\le\theta\le 2\pi)\wedge 0\le\phi\le\pi\}$;
c) $\{(\rho,\theta,\phi): 0\le\rho\le\sqrt{3},\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\phi\le\pi\}$;
d) $\{(\rho,\theta,\phi): 0\le\phi\le\pi,\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\rho\le 2\sin\theta\sin\phi\}$;

35. $1\le\rho\le 2,\ 0\le\phi\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$.

36. a) $\frac{31}{15}$; b) $\frac{\pi}{30}$; c) $\pi\sqrt{2}/3$; d) $\frac{\pi}{10}$. **37.** $4\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3}\right)$.

38. a) $\pi/6$; b) $32/9$; c) $15/8$; d) $(e-1)/2$; e) $1/3$; f) $\frac{1}{48}$; g) 2; h) $5\pi/3$; i) 27π; j) 2π;
k) $\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{10-8\sqrt{2}}{9}\right)a^3$; l) $\frac{(a+b)ab\pi}{8}$; m) $4\pi abc/3$; n) $6^{-1/4}$; o) $\frac{8\pi}{35}$.

Ficha 4 - Análise Vectorial

1. Sejam $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) uma linha parametrizada secc. C^1, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função secc. contínua, tais que $\gamma([a,b]) \subset D$ e seja $r : [c,d] \to \mathbb{R}^m$ uma reparametrização de γ. Mostre que
$$\int_c^d f(r(t))\|r'(t)\|\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\,dt.$$

2. Demonstre as propriedades listadas na Proposição 4.3 do resumo teórico.

3. Calcule os seguintes integrais de linha

   a) $\displaystyle\int_C \frac{x}{y+7}\,ds$, onde $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 25,\ x \leq 0\}$;

   b) $\displaystyle\int_C y\,ds$, onde C é a curva dada por $x = \sqrt{2}t$, $y = \log t$, $z = \dfrac{t^2}{2}$ para $1 \leq t \leq e$;

   c) $\displaystyle\int_C y^2\,dx$, onde C é o arco da parábola $x = y^2$ do ponto $(1,1)$ ao ponto $(4,2)$;

   d) $\displaystyle\int_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, onde C é o segmento de recta do ponto $(0,1,2)$ ao ponto $(3,-1,4)$.

   (Soluções: a) $-5\log 6$; b) $(e^2+3)/4$; c) $15/2$; d) 6)

4. Calcule a massa da circunferência C, do plano, unitária, centrada na origem e com densidade $|x|+|y|$. (Sol. 8)

5. Pretende-se colocar uma rede assente numa curva do plano xOy, com parametrização $\gamma(t) = (30\cos^3 t, 30\sin^3 t)$, com $0 \leq t \leq \pi$, e com altura $z = 1 + y/3$ (em metros).

   Quantos metros quadrados terá a rede? (Sol. 450)

6. Sejam $C = [\gamma]$ uma curva orientada e F um campo vectorial contínuo tal que C está contida no seu domínio. Dadas γ_1, $\gamma_2 \in [\gamma]$ mostre que $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dr = \int_{\gamma_2} F \cdot dr$.

7. Demonstre as propriedades listadas na Proposição 4.5 do resumo teórico.

8. Calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde

   (a) $F(x,y) = (x^2, xy)$ e C é a semi-circunferência dada por $r(t) = (2\cos t, 2\sin t)$ com $0 \leq t \leq \pi$;

   (b) $F(x,y) = (2y - x, 3x + y)$ e C é o arco da parábola $x = y^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$;

   (c) $F(x,y) = (2y - x, 3x + y)$ e C é o segmento de recta do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$;

   (d) $F(x,y,z) = (2xz + \sin y,\ x\cos y,\ x^2)$ e C é o arco de hélice $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$;

   (e) $F(x,y,z) = (y + e^x, e^y, -yz)$ e C é a curva dada por $r(t) = (t, \cos t, \sin t)$ com $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$.

   (Soluções: a) 0; b) $7/3$; c) $5/2$; d) 2π; e) $2/3 + e^{\pi/2} - e$)

9. Sejam P, Q pontos de $\mathbb{R}^3$ e C o segmento de recta que une P a Q.

   (a) Se F é um campo de forças constante, use a noção de integral de linha para confirmar que o trabalho realizado pela força F ao deslocar um objecto ao longo de C é dado por $F \cdot (Q - P)$.

   (b) Sendo $P = (1, 0, 0), Q = (1, -1, 2)$ e $F(x, y, z) = (y, -x^2, e^z)$, calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dr$. (Sol. e^2)

10. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ no deslocamento de uma partícula ao longo da curva dada por $r(t) = \left(t^2, t, \dfrac{1}{t}\right)$, para $1 \leq t \leq 2$. (Sol. 3)

11. Considere o campo gravítico definido em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $\vec{F}(\vec{r}) = -\dfrac{GMm}{\|\vec{r}\|^3}\vec{r}$ para o vector de posição $\vec{r} = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, onde G é a constante gravitacional, M e m as massas dos dois corpos envolvidos. Verifique que $V(\vec{r}) = \dfrac{GMm}{\|\vec{r}\|}$ é um potencial de $\vec{F}$.

12. Determine o trabalho realizado pela força $\Phi(x, y) = (-y, x)$

   (a) ao longo da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ percorrida n vezes no sentido directo; (Sol. $2\pi abn$)

   (b) ao longo do gráfico da função $y = |x - 1|$, para $-2 \leq x \leq 2$, com início em $(-2, 3)$. (Sol. -2)

13. Qual o trabalho realizado pela força $F(x, y) = (3y^2 + 2, 6x)$ ao mover uma partícula de $(-1, 0)$ até $(1, 0)$ ao longo da metade superior da elipse $b^2x^2 + y^2 = b^2$?

    Qual a elipse, da família anterior, que torna o trabalho mínimo? (Sol. $3\pi/8$)

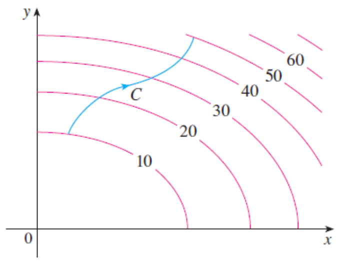
14. Desprezando o atrito, qual o trabalho realizado pela acção da gravidade quando um corpo de massa m cai duma altura de 2m sobre uma calha parabólica de equações $z = x^2 + y^2, x = y$? (Sol. 2mg)

15. Em cada um dos seguintes casos verifique se o campo vectorial dado é gradiente e, caso seja, determine um potencial φ tal que $F = \nabla\varphi$

    (a) $F(x, y) = (x, y)$;
    (b) $F(x, y) = (3x^2 + 2xy, x + y^2)$;
    (c) $F(x, y) = (6xy - 4y^2, 3x^2 + 3y^2 - 8xy)$;
    (d) $F(x, y) = (y, xy - x)$;
    (e) $F(x, y) = (2xe^y + y\cos x, \sin x + x^2e^y + 2)$;
    (f) $F(x, y, z) = (y^2, 2xy, y + z)$;
    (g) $F(x, y, z) = (yz, xz + y, xy + 2)$;
    (h) $F(x, y, z) = (z^2 - y\sin x, \cos x - 2z, 2xz - 2y + z)$.

    (Sol. (a) $(x^2 + y^2)/2$; (b) não; (c) $3x^2y - 4y^2x + y^3$;(d) não; (e) $x^2e^y + y\sin x + 2y$; (f) não; (g) $xyz + y^2/2 + 2z$; (h) $xz^2 + y\cos x - 2yz + z^2/2$)

16. Na figura que se segue estão representadas uma curva C (a azul), de classe C^1, o sentido em que é percorrida, assim como porções de algumas curvas de nível (a rosa) do campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, identificadas com o respectivo nível.



Indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação "$\int_C \nabla f \cdot dr = 0$". (Sol. Falsa)

17. Indique quais dos integrais que se seguem são independentes do caminho considerado

(a) $\displaystyle\int_C y\,dx - x\,dy$; (Sol. Não)

(b) $\displaystyle\int_C (x^3 - 2xy)\,dx + (e^y - x^2)\,dy$; (Sol. Sim)

(c) $\displaystyle\int_C (x^3 + yz)\,dx + (xz + y^3)\,dy + (xy + z^3 + 1)\,dz$; (Sol. Sim)

(d) $\displaystyle\int_C (e^{x+2y} - xz^2)\,dx + \frac{1}{x^2+2}\,dy + (e^{2x+y} + z)\,dz$. (Sol. Não)

18. (Teorema de Poincaré num círculo ou rectângulo) Se F_1, F_2 são funções de classe C^1 num círculo ou rectângulo R de centro (a, b), e $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$ em R, mostre que a função

$$V(x, y) = \int_a^x F_1(s, b)\,ds + \int_b^y F_2(x, t)\,dt$$

é um potencial de $F = (F_1, F_2)$. Para isso, use a derivação do *integral paramétrico*: se $f(x, y)$ é contínua com $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ contínua, tem-se $\dfrac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_a^b f(x, y)\,dy\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy$.

19. Mostre que o campo $F(x, y) = \left(\dfrac{-2xy}{(1+x^2)^2+y^2}, \dfrac{1+x^2}{(1+x^2)^2+y^2}\right)$ é gradiente e determine um potencial para F. Qual é o valor de $\displaystyle\int_C F \cdot dr$, onde C é um caminho C^1, com origem em $(0, 0)$ e extremidade em $(0, 1)$? (Sol. $\pi/4$)

20. (a) Calcule $\displaystyle\int_C (y + z)\,dx + (x + 1)\,dy + (x + y)\,dz$, onde C é a linha poligonal que liga $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 1)$ a $(0, 1, 2)$ na ordem descrita. (Sol. $3/2$)

(b) Calcule $\displaystyle\int_C y^2\,dx + x^2\,dy$, onde C é o arco da circunferência $x^2 + y^2 = 4$ que liga o ponto $(2, 0)$ a $(0, 2)$ seguido do segmento de recta que une $(0, 2)$ a $(4, 3)$. (Sol. $92/3$)

21. Determine o valor de k de modo a que o integral de linha

$$\int_C \left(2\sin x + y^2\right)\,dx + \left(kxy + e^y\right)\,dy$$

seja independente de caminho e, para o valor de k encontrado, calcule o valor do integral, sendo C uma curva de classe C^1 do ponto $(0, 1)$ para o ponto $(\pi, 2)$. (Sol. $4(1 + \pi) + e^2 - e$)

22. a) Mostre que o campo vectorial $F(x,y) = \big(y\sin(x^2y^2), x\sin(x^2y^2)\big)$ é conservativo.

b) Calcule $\displaystyle\int_C y\sin(x^2y^2)\,dx + x\sin(x^2y^2)\,dy$, onde C é o segmento de recta do ponto $(0,2)$ ao ponto $(2,0)$. (Sol. 0)

23. Seja C uma curva de Jordan, secc. C^1 orientada positivamente. Mostre que a área da região limitada por C (o interior de C) é dada por cada um dos seguintes integrais de linha

$$\oint_C -y\,dx, \quad \oint_C x\,dy, \quad \frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy.$$

24. Usando o Teorema de Green, mostre que, dados a, $b > 0$, a área da região delimitada pela elipse de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ é dada por πab.

25. Use o Teorema de Green para calcular os seguintes integrais de linha

(a) $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$, onde $F(x,y) = (xy, x+y)$ e C é o rectângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(2,0)$ percorrido no sentido directo; (Sol. 0)

(b) $\displaystyle\oint_C \left(2x - y^2\right)\,dx + \left(xy - 1 + \sqrt[3]{y^2 + e^{y^7-2y}}\right)\,dy$, onde C é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ e $(0,1)$; (Sol. ± 1)

(c) $\displaystyle\oint_C xy\,dy$, onde C consiste no segmento de recta do ponto $(-a,0)$ ao ponto $(a,0)$ seguido da semi-circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ com $y \geq 0$, de $(a,0)$ a $(-a,0)$, $(a > 0)$; (Sol. $2a^3/3$)

(d) $\displaystyle\oint_C (x+2y)\,dx + (x-2y)\,dy$, onde C consiste no arco da parábola $y = x^2$ do ponto $(0,0)$ ao ponto $(1,1)$ seguido do segmento de recta do ponto $(1,1)$ ao ponto $(0,0)$; (Sol. $-1/6$)

(e) $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$, onde $F(x,y) = (x^2+2x-xy^2, y^3-4y)$ e a curva C consiste no arco da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ de $(4,0)$ a $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ seguido dos segmentos de recta de $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ a $(0,0)$ e de $(0,0)$ a $(4,0)$; (Sol. 32)

(f) $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$, onde $F(x,y) = (3y - e^{x^2}, 7x + \sqrt{y^5+1})$ e C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$, percorrida no sentido retrógrado. (Sol. -36π)

26. Calcule

(a) $\displaystyle\int_Q e^y dx + 2xe^y dy$ onde Q é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, percorrido na ordem dada; (Sol. $e-1$)

(b) $\displaystyle\int_C xy^2 dy - x^2 y dx$, onde C é a semi-circunferência de centro $(0,0)$ e raio $a > 0$, percorrida no sentido directo, do ponto $(a,0)$ ao ponto $(-a,0)$. (Sol. $a^4\pi/4$)

27. Seja $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma solução da equação diferencial $\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$. Mostre que

$$\oint_C \phi_y\,dx - \phi_x\,dy = 0$$

para toda a curva C seccionalmente de classe C^1, simples e fechada.

28. Considere em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o campo vectorial $F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\log(\|(x,y)\|), -\frac{\partial}{\partial x}\log(\|(x,y)\|)\right)$. Seja C uma curva de Jordan secc. C^1 contida em Ω. Determine os valores possíveis para $\displaystyle\oint_C F\cdot dr$. (Sol. $0, \pm 2\pi$)

29. Seja C uma curva de Jordan, em $\mathbb{R}^2$, secc. C^1, tal que $(0,0) \in \operatorname{int} C$. Calcule

$$\oint_C \frac{-y^3}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy.$$

(Sol. $\pm\pi$)

30. (a) Entre as circunferências C de centro na origem orientadas positivamente, determine a que maximiza o integral

$$\oint_C y^3dx + (3x - x^3)dy. \tag{2}$$

(Sol. $3\pi/2$)

(b) Encontre a curva que maximiza o integral de linha (2), entre todas as curvas C de Jordan, secc. C^1 e orientadas positivamente.
(Sol. A circunferência centrada na origem e de raio 1.)

31. (*) Seja φ uma bijecção entre abertos de $\mathbb{R}^2$, de classe C^1, tal que $\det J_\varphi \neq 0$. Sejam C uma curva de Jordan, secc. C^1, $D = \operatorname{int} C \cup C$, e assuma que Γ, a fronteira de $\varphi(D)$, é uma curva de Jordan secc. C^1. Use o Teorema de Green para mostrar que

$$A(\varphi(D)) = \iint_D |\det J_\varphi(u,v)|\; du\, dv.$$

32. Em cada uma da alíneas que se seguem, escreva as equações paramétricas e elimine os parâmetros u e v para obter uma equação cartesiana dos traços das parametrizações dadas.

(a) $r(u,v) = (2u\cos v, 5u\sin v, u^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$ (parabolóide elíptico).
(b) $r(u,v) = (u, 2\sin v, 2\cos v)$, $u, v \in \mathbb{R}$ (cilindro).
(c) $r(u,v) = \left(\frac{1}{2}v\cos u, \frac{1}{2}v\sin u, \frac{\sqrt{3}}{2}v\right)$, $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \frac{2}{\sqrt{3}}$ (cone).
(d) $r(u,v) = ((3+2\cos u)\sin v, (3+2\cos u)\cos v, 2\sin u)$, $u, v \in \mathbb{R}$ (toro).

(Sol. a) $z = x^2/4 + y^2/25$; b) $y^2+z^2 = 4$; c) $z^2 = 3x^2+3y^2$; d) $(\sqrt{x^2+y^2}-3)^2 + z^2 = 4$)

33. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine uma parametrização regular para cada subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ e calcule a respectiva área de superfície

(a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 6x+3y+2z = 6, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$;
(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, z \ge \sqrt{2}\}$;
(c) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, 0 \le z \le 4\}$;
(d) S é a porção do plano $x+y+z = a$ que é interior ao cilindro $x^2+y^2 = a^2$, com $a > 0$;
(e) S é porção da superfície cónica $x^2+y^2 = 3z^2$ que fica acima do plano XOY e dentro do cilindro $x^2+(y-2)^2 = 1$.

(Soluções: a) $\frac{7}{2}$, b) $4\pi(2-\sqrt{2})$, c) $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)$, d) $\sqrt{3}\pi a^2$, e) $2\sqrt{3}\pi/3$.)

34. Calcule os seguintes integrais de superfície

(a) $\displaystyle\int_S x^2y + z^2\, d\sigma$, onde S é a porção do cilindro $x^2+y^2 = 9$ para $0 \le z \le 2$; (Sol.: 16π)
(b) $\displaystyle\int_S \sqrt{16-x^4}\, d\sigma$, com $S = r(D)$, $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\, u \ge 0,\, v \ge 0,\, u^2+v^2 \le 4,\, \left(\frac{u}{2}\right)^2 + v^2 \ge 1\}$ e $r(u,v) = (u, v, \frac{1}{2}u^2 + \sqrt{3}v)$, $(u,v) \in D$. (Sol.: $2^6/5$)

35. Parametrize a superfície que resulta de rodar a curva C^1, $y = f(x)$, com $x \in [a, b]$, em torno do eixo dos yy, e mostre que a área dessa superfície é dada por $A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}|x|\,dx$.

36. Considere a superfície parametrizada S traço da parametrização admissível $r : [0, 2]\times[0, 2] \to \mathbb{R}^3$, dada por $r(u, v) = (u + v, u - v, uv)$.

    (a) Determine uma equação cartesiana de S. (Sol.: $z = x^2/4 - y^2/4$)

    (b) Escreva uma equação do plano tangente a S no ponto $r(1, 1)$. (Sol.: $x - z = 1$)

37. A Banda de Möbius é o traço da parametrização $r : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$, dada por

$$r(u, v) = \Big((2 + v \sin \frac{u}{2}) \cos u, (2 + v \sin \frac{u}{2}) \sin u, v \cos \frac{u}{2}\Big).$$

    (a) Verifique que $r(0, 1) = r(2\pi, -1)$ e que $r(0, -1) = r(2\pi, 1)$. Interprete geometricamente.

    (b) Determine a normal $N(u)$ à Banda de Möbius sobre a linha central, ou seja, calcule $N(u) = r_u \times r_v(u, 0)$, para $u \in]0, 2\pi[$.

    (c) Calcule $\lim_{u\to 0^+} N(u)$ e $\lim_{u\to 2\pi^-} N(u)$ e interprete geometricamente. (Sol.:$(2, 0, 0)$, $(-2, 0, 0)$)

38. Calcule o fluxo de $F(x, y, z) = (x, y, z)$ através do cilindro S dado por $r(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ com $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 2$, na direcção e sentido do vector normal "exterior". (Sol.: 4π)

39. O campo de velocidades de um fluido é dado por $V = (0, \sqrt{y}, 0)$ em metro/segundo. Calcule, em cada segundo, quantos metros cúbicos de fluido atravessam a superfície $x^2 + z^2 = y$, com $0 \leq y \leq 1$, na direcção e sentido da normal com a segunda componente negativa. (Sol.: $-2\pi/3$)

40. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2 \leq z \leq 4,\ y \geq 0 \text{ e } 4x^2 + 4y^2 = z^2\}$.

    (a) Parametrize e oriente S.

    (b) Calcule $\int_S F \cdot n\,d\sigma$ onde $F(x, y, z) = (2y, -3x, 0)$ e a normal unitária a S $n = (n_1, n_2, n_3)$ é tal que $n_3 < 0$. (Sol.: 0)

41. Seja S a superfície cujo bordo é o triângulo de vértices $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, com orientação tal que a terceira componente do vector normal unitário a S é positiva. Parametrize S e calcule o fluxo através de S do campo de velocidades $F(P) = P$, $P \in \mathbb{R}^3$. (Sol.: 1/2)

42. Considere o elipsóide E de equação $x^2 + y^2 + 4z^2 = 5$ e a curva L, com uma das orientações possíveis, que resulta da intersecção de E com o plano de equação $z = 1$. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo definido por $F(x, y, z) = (-y, e^z, x + z)$.

    (a) Calcule $\int_L -y\,dx + e^z\,dy + (x + z)\,dz$. (Sol.: $\pm\pi$)

    (b) Determine, parametrizando convenientemente, uma porção de superfície orientada, não plana, S, e um campo $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tais que $\int_L F \cdot dr = \int_S G \cdot n\,d\sigma$.

43. Em cada uma das alíneas que se seguem, use o Teorema de Stokes para mostrar que o integral de linha é igual ao valor dado, para uma orientação conveniente da curva C envolvida.

    (a) $\oint_C y\,dx + z dy + x\,dz = -2\pi\sqrt{2}$, onde C é a intersecção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ com o plano $x + y = 2$.

    (b) $\oint_C (2xy)\,dx + [(1 - y)z + x^2 + x]\,dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right) dz = \pi$, onde C é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $z \geq 0$ com o cone $z^2 = x^2 + (y - 1)^2$.

44. (a) Seja S_1 a porção do plano $z = 1/\sqrt{2}$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 1/4$, orientada pela normal cuja terceira componente é positiva. Sendo $V(x, y, z) = (-3y, 3x, z^4)$, mostre que

$$\int_{S_1} \operatorname{rot} V \cdot n \, d\sigma = \frac{3\pi}{2}.$$

(b) Sendo S_2 a porção do elipsóide $2x^2+2y^2+z^2 = 1$ acima do plano $z = 1/\sqrt{2}$, orientada pela normal cuja terceira componente é positiva, use a) para concluir que $\displaystyle\int_{S_2} \operatorname{rot} V \cdot n \, d\sigma = \frac{3\pi}{2}$.

45. Seja C a curva (elipse) que resulta de intersectar o plano de equação $z = ax+by+c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ com a superfície cilíndrica de equação $x^2 + y^2 = 1$.

(a) Construa uma superfície orientada S tal que $\partial S = C$.

(b) Mostre que $\displaystyle\int_C -y^2 \, dx + x \, dy + z^2 \, dz$ não depende de (a, b, c).

46. Considere em $\mathbb{R}^3$ o elipsóide E de equação $x^2+2y^2+2z^2 = 1$ e o cone C de equação $z^2 = 2x^2+4y^2$.

(a) Parametrize a curva fechada L definida pelo conjunto

$$\{(x, y, z) \in E \cap C : \; z > 0\}$$

e calcule $\displaystyle\int_L F \cdot dr$ onde F é o campo vectorial definido em $\mathbb{R}^3$ por $F(x, y, z) = (xy^2, yz, xz)$. (Sol.: 0)

(b) Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1, \, z^2 \geq 2x^2 + 4y^2, \, z \geq 0\}$. Determine uma parametrização contínua, regular e injectiva, e uma orientação para S. Indique, justificando, o valor de $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma$, sem calcular o integral. (Sol.: 0)

47. Usando o teorema da divergência, calcule o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2, y^2, -z)$ que sai através do cubo no primeiro octante com base definida pelos vértices $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$. (Sol.: 1)

48. Calcule o fluxo de F através da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 1$ orientada pela normal exterior, onde:

(a) $F(x, y, z) = (x, y, 0)$; (Sol.: $\frac{8}{3}\pi$)

(b) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$. (Sol.: $\frac{12}{5}\pi$)

49. Recorrendo ao teorema da divergência, calcule $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} F \cdot n \, d\sigma$, onde S é a união do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$ com a porção do plano $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$, orientada com a normal exterior e $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x, z^3yx + y, z^4x^2)$. (Sol.: π)

50. Para cada $a > 0$, seja S uma qualquer superfície fechada contendo a esfera S_a centrada na origem e de raio a, no seu interior. Usando o teorema da divergência, mostre que o fluxo do campo $F(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-3/2}(x, y, z)$ que sai de S não depende de é a. Mostre que o valor desse fluxo é 4π.