Métodos Matemáticos da Física 2010/11

Exame 1ª época 14-06-2011

1.a) Determine os valores próprios e as funções próprias do operador d^2/dx^2,

$$y''(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ ,$$

definidas no intervalo $[0, \ell]$, e satisfazendo as condições fronteira $y'(0) = 0,\ y'(\ell) = 0$.
b) Defina justificando o produto interno adequado a estas funções.
c) Calcule a norma e o produto interno de duas funções próprias arbitrárias $y_n(x)$, $y_m(x)$. Comprove a sua ortogonalidade.

2. Os polinómios de Hermite $H_n(x)$ são soluções da equação de Hermite,

$$y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in \mathbf{R} \ ,$$

com valores próprios $\lambda_n = 2n$, $n \in \mathbf{N}_0$. Os polinómios $H_n(x)$ estão normalizados de forma a que $\langle H_n | H_n \rangle = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}$.
a) Determine uma solução da equação

$$y''(x) - 2x\, y'(x) = -f(x) \ , \quad f(x) = c_1\, H_1(x) + c_n\, H_n(x) \ .$$

Sugestão: considere que $y(x)$ é uma combinação linear de $H_1(x)$ e $H_n(x)$.
b) Calcule os produtos internos $\langle H_1 | y \rangle$, $\langle y | y \rangle$.

3. Considere a equação diferencial não homogénea

$$y''(x) = -f(x), \qquad y(0) = y(\ell) = 0 \ , \qquad x \in [0, \ell] \ .$$

a) Escreva a solução $y(x)$ em termos da função de Green: $y(x) = \int G(x,u)\, f(u)\, du$. Fazendo $f(x) = \delta(x - z)$ deduza a equação diferencial e condições fronteira a que deve satisfazer a função de Green $G(x, z)$.
b) Admitindo que

$$G(x,z) = c(z)\ \Theta(x - z)\,(x - z) + c_1(z)\, x + c_2(z) \ ,$$

determine as funções $c(z)$, $c_1(z)$, $c_2(z)$ e a expressão final de $G(x, z)$.

4. Considere a equação de onda a uma dimensão

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ .$$

a) Escreva $u(t, x)$ em termos da transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t, k)$.
b) Obtenha a solução geral para $\tilde{u}(t, k)$ e a expressão resultante de $u(t, x)$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \ ,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,(x - x')} dk = 2\pi\, \delta(x' - x)$