O Pêndulo
Física Experimental I

PL23 - Grupo 4

Filipe Correia - 51120
Duarte Santos - 51142
Guilherme Calé - 51144

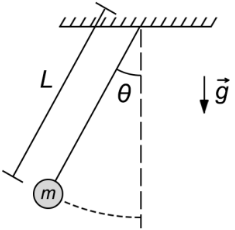
Ciências ULisboa

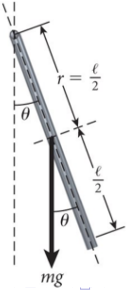
Introdução

Neste trabalho, pretendeu-se estudar movimentos periódicos e, para tal, recorreu-se aos pêndulos simples e físico.

Objetivos do trabalho:

- estudar o movimento períodico de um pêndulo quase simples e determinar a aceleração gravítica;
- estudar o movimento de um pêndulo físico e determinar o seu momento de inércia.





Método experimental I

Equipamento:

- Suporte universal;
- Pêndulo de comprimento variável;
- Fita métrica (com uma incerteza associada de $\pm 0,0005\ m$);
- Craveira (com uma incerteza associada de $\pm 0,00005\ m$);
- Palmer (com uma incerteza associada de $\pm 0,000005\ m$);
- Balança (com uma incerteza associada de $\pm 0,00001\ kg$);
- Cronómetro (com uma incerteza associada de $\pm 0.01\ s$);
- Barra metálica retangular;
- Interface com *PhotoGate* e programa *DataStudio*.

Método experimental II

Procedimento (pêndulo simples):

1. Montou-se o pêndulo simples com um comprimento inicial;
2. Mediu-se 3 períodos usando o cronómetro manual;
3. Mediu-se novamente o período de oscilação e a velocidade do pêndulo dando uso ao *PhotoGate* e ao *DataStudio*;
4. Determinou-se a incerteza do período, a partir de:

$$\Delta T = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

em que σ foi calculado através da função *DESVPAD.S* do *Excel*;

Método experimental III

5. Calculou-se a aceleração da gravidade, utilizando a média dos últimos 30 períodos obtidos, recorrendo à equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{1}$$

calculando também a incerteza associada:

$$\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\Delta T + \left|\frac{\partial g}{\partial \ell}\right|\Delta\ell$$

6. Repetiram-se as etapas 3-5 para mais 7 comprimentos do pêndulo diferentes;
7. Fez-se duas regressões lineares a partir dos valores obtidos para calcular a aceleração gravítica "média".

Método experimental IV

Procedimento (pêndulo físico):

1. Mediu-se a massa, as dimensões do pêndulo físico e a distância do centro de massa ao eixo de rotação;
2. Calculou-se o momento de inércia:

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) + Md^2 \tag{2}$$

3. Determinou-se os períodos do pêndulo, empregando o *PhotoGate* e o *DataStudio*;
4. Calculou-se de novo o momento de inércia, desta vez através da equação:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{dMg}} \tag{3}$$

5. Comparou-se os dois valores do momento de inércia calculados.

Resultados I

Pêndulo simples:
Com o cronómetro manual ($\ell = (0,450 \pm 0,001)\ m$) e, tendo em conta que o tempo de reação do ser humano é aproximadamente $0,284\ s$, obtemos os seguintes resultados:

$$T_1 = (1,14 \pm 0,28)\ s$$

$$T_2 = (1,12 \pm 0,28)\ s$$

$$T_3 = (1,09 \pm 0,28)\ s$$

Como temos apenas 3 medições, a incerteza de $\overline{T}$ é o maior desvio ao valor médio.

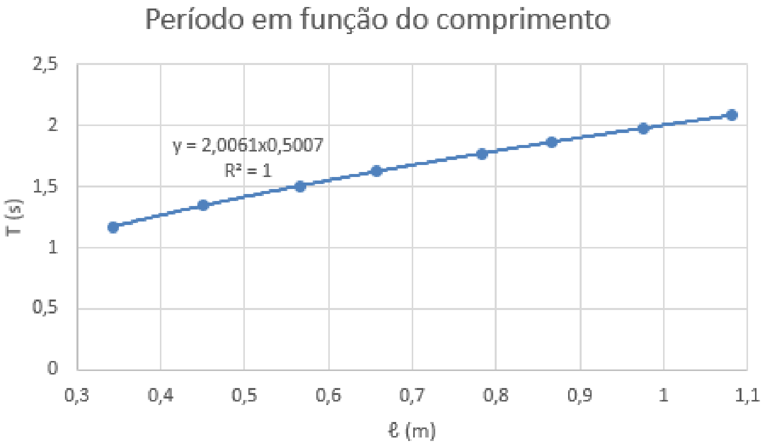
$$\overline{T} = (1,12 \pm 0,03)\ s$$

Resultados II

Com o *PhotoGate* e o *DataStudio*:

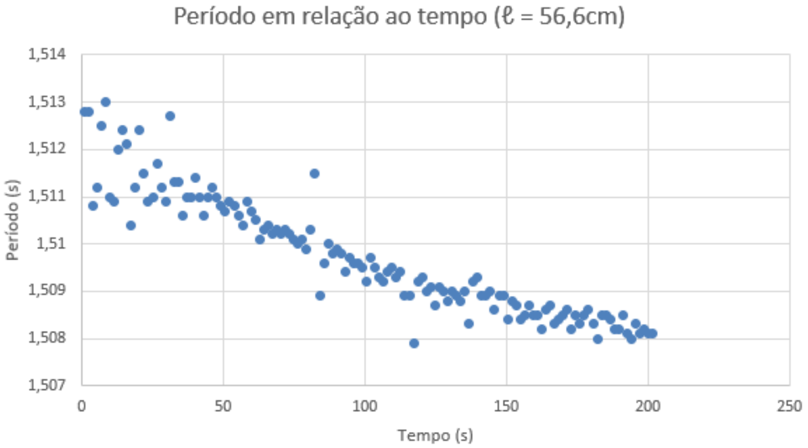
$\ell\ (m)$	$T\ (s)$	$g\ (m\,s^2)$
$0,343 \pm 0,001$	$1,17268 \pm 0,00007$	$9,86 \pm 0,03$
$0,450 \pm 0,001$	$1,34802 \pm 0,00006$	$9,78 \pm 0,02$
$0,566 \pm 0,001$	$1,50836 \pm 0,00004$	$9,82 \pm 0,02$
$0,657 \pm 0,001$	$1,62695 \pm 0,00004$	$9,80 \pm 0,02$
$0,784 \pm 0,001$	$1,77394 \pm 0,00006$	$9,83 \pm 0,01$
$0,867 \pm 0,001$	$1,86762 \pm 0,00004$	$9,81 \pm 0,01$
$0,976 \pm 0,001$	$1,98183 \pm 0,00004$	$9,81 \pm 0,01$
$1,082 \pm 0,001$	$2,08596 \pm 0,00004$	$9,817 \pm 0,009$

Resultados III

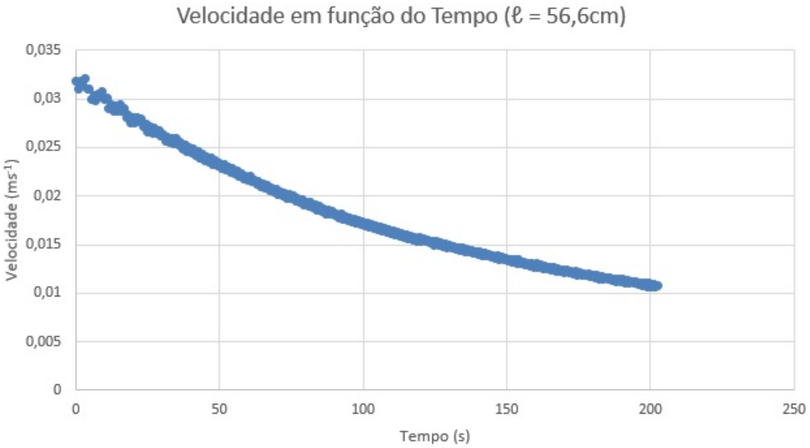


$$y = 1,0061x^{0,5007} \qquad R^2 = 1$$

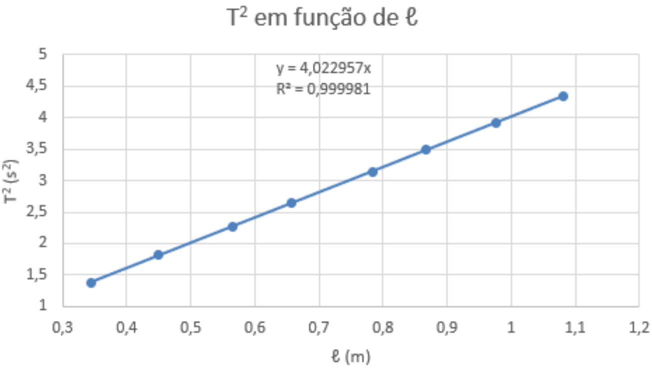
Resultados IV



Resultados V



Resultados VI



$$y = 4,022957x \qquad R^2 = 0,999981$$

Resultados VII

Tendo em conta a equação (1), e elevando os dois membros ao quadrado, tem-se que

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell$$

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2}{m}$$

$$g = \frac{4\pi^2}{4,022957} = 9,81328 \ m\,s^{-2}$$

$$\Delta g = \left|\frac{dg}{dm}\right|\Delta m \Leftrightarrow \Delta g = \frac{4\pi^2}{m^2}\Delta m$$

$\Delta m = 0,002141706 \ m\,s^{-2}$ obtido através da função *LINEST* do *Excel*.

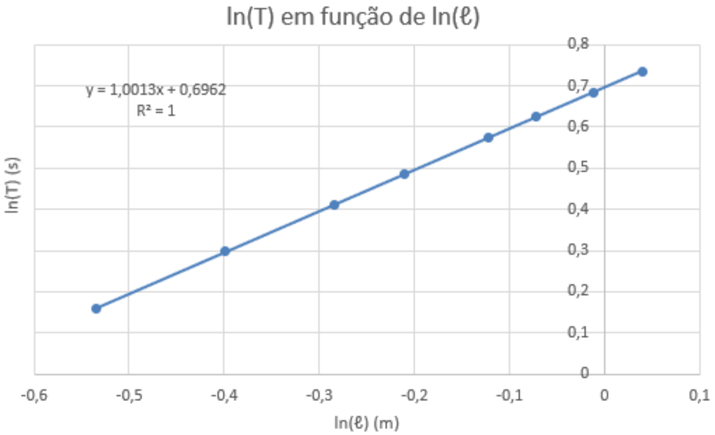
Resultados VIII

Daqui resulta que $\Delta g = 0,005224308\ m\,s^{-2}$.
Assim,

$$g \pm \Delta g = (9,813 \pm 0,005)\ m\,s^{-2}$$

Tomando o valor padrão de g_0 como $9,80665\ m\,s^{-2}$, obteve-se um erro relativo de $0,065\%$.

Resultados IX



$$y = 1,0013x + 0,6962 \qquad R^2 = 1$$

Resultados X

Voltando à equação (1), e usando uma escala logarítmica, obtemos a equação

$$\ln(T) = \frac{\ln(\ell)}{2} + \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$$

$$b = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) \Leftrightarrow g = \frac{4\pi^2}{e^{2b}}$$

$$g = 9,80952\ m\,s^{-2}$$

Resultados XI

$$\Delta g = \left|\frac{dg}{db}\right| \Delta b$$

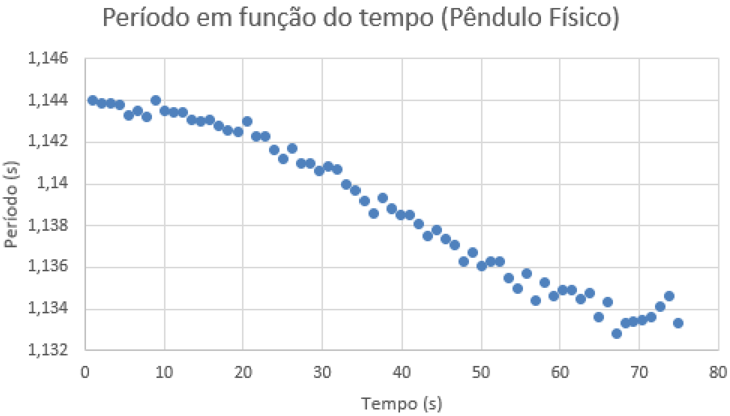
em que $\Delta b = 0,0007 m^{-1}\, s^2$ foi obtido através da *Data Analysis* no *Excel*.
Assim, $\Delta g = 0,01287\ m\, s^{-2}$
Como tal, o valor para g é

$$g \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,01)\ m\, s^{-2}$$

Tomando, novamente, o valor padrão de g_0 como $9,80665\ m\, s^{-2}$, obteve-se um erro relativo de $0,034\%$.

Resultados XII

Pêndulo físico:



Resultados XIII

Tendo em conta a equação (2), o momento de inércia do pêndulo é $I_1 = 0,004400 \ kg\, m^2$, cuja incerteza é dada por

$$\Delta I_1 = \left|\frac{\partial I_1}{\partial M}\right|\Delta M + \left|\frac{\partial I_1}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial I_1}{\partial b}\right|\Delta b + \left|\frac{\partial I_1}{\partial d}\right|\Delta d$$

de onde vem que $\Delta I_1 = 0,0000326 \ kg\, m^2$.

$$I_1 \pm \Delta I_1 = (0,00440 \pm 0,00003) \ kg\, m^2$$

Desenvolvendo a equação (3) vem que

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{I_2}{dMg} \Leftrightarrow I_2 = \frac{T^2 dMg}{4\pi^2}$$

Resultados XIV

Assim, o pêndulo tem $I_2 = 0.004324\ kg\, m^2$ de momento de inércia, e a sua incerteza é dada por

$$\Delta I_2 = \left|\frac{\partial I_2}{\partial T}\right|\Delta T + \left|\frac{\partial I_2}{\partial d}\right|\Delta d + \left|\frac{\partial I_2}{\partial M}\right|\Delta M$$

Logo, $\Delta I_2 = 0,0000286\ kg\, m^2$.

$$I_2 \pm \Delta I_2 = (0,00432 \pm 0,00003)\ kg\, m^2$$

Resultados XV

Pela equação (3) conclui-se também que o pêndulo simples é um caso particular do pêndulo físico, dado que o momento de inércia do pêndulo simples é dado por $I = Md^2$, em que d é a distância do centro de massa ao eixo de rotação.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Md^2}{dMg}} \Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$$

Conclusões

- Para o pêndulo simples, os resultados foram preciso e exatos, tendo sido obtidos valores da aceleração gravítica de $(9,813 \pm 0,005)\ m\,s^{-2}$ e de $(9,81 \pm 0,01)\ m\,s^{-2}$, com erros em relação ao valor padrão de $0,065\%$ e $0,034\%$, respetivamente;
- Houve discrepância entre os valores de g, devido à diferença de cálculos;
- Momentos de inércia semelhantes para o pêndulo físico, com valores de $(0,00440 \pm 0,00003)\ kg\,s^2$ e de $(0,00432 \pm 0,00003)\ kg\,s^2$, o que indica precisão.