Métodos Matemáticos da Física 2017/18

Teste 2 12-05-2018

1. Considere o problema de Sturm-Liouville associado à equação diferencial

$$x\, y''(x) + (1-x)\; y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \;, \qquad x \in [0, +\infty[\;.$$

a) Coloque a equação sob a forma de Sturm-Liouville.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema.
c) Verifique que as funções $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - x$, $y_2(x) = 2 - 4x + x^2$, são funções próprias e determine os respectivos valores próprios.
d) Calcule o produto interno de funções $\langle y_0 | y_1 \rangle$. Diga qual seria o seu valor esperado e explique porquê.

2. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\, y''(x) - 3\, x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \;, \qquad x \in [-1, +1] \;.$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x. Obtenha a relação de recorrência entre os seus coeficientes e escreva a expressão da solução encontrada até à ordem x^6.
b) Determine os valores próprios, λ_n, associados a funções próprias, $y_n(x)$, dadas por polinómios de grau n.
c) Obtenha as expressões das funções próprias, $y_3(x)$, $y_4(x)$, assumindo que em $x = 1$ se tem $y_n(1) = n + 1$. Explicite os respectivos valores próprios.

3. Uma certa função harmónica esférica é dada por: $Y(\theta, \phi) = c\, \sin^2\theta\, \cos\theta\, e^{2i\,\phi}$, onde c é uma constante real.
a) Mostre que $Y(\theta, \phi)$ é função própria do operador

$$A = \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right)^2 = \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} = \frac{\partial}{\partial\cos\theta}\,\sin^2\theta\,\frac{\partial}{\partial\cos\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \;.$$

Sugestão: escreva as funções de θ a diferenciar em termos de $\cos\theta$.
b) Encontre, justificando, os valores l, m, da função $Y(\theta, \phi)$.
c) Defina o produto interno aplicável nos espaço das coordenadas angulares e calcule o produto interno $\langle Y | Y_2^2 \rangle$ sabendo que $Y_2^2(\theta, \phi) = \sqrt{15/32\pi}\, \sin^2\theta\, e^{2i\,\phi}$. Diga qual seria o resultado esperado para este produto interno e porquê.