Axiomas de congruência e produto interno de vectores

Aula 12 - 03/04/2019

Sumário

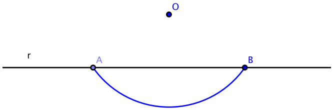
- Axioma da intersecção recta-circunferência
- Construção de rectas perpendiculares a uma dada recta
- Alturas de um triângulo
- Projecção ortogonal de um vector sobre uma recta
- Produto interno de vectores
- Propriedades do produto interno

Circunferência

A forma mais intuitiva de comparar comprimentos em rectas não paralelas é através da noção de circunferência.
Esta noção também permite a construção de rectas perpendiculares.
O último axioma de congruência relaciona rectas e circunferências

Definição. Seja P um ponto num plano $\mathcal{P}$ e $r > 0$. A circunferência com centro em P e raio r é o conjunto de todos os pontos $Q \in \mathcal{P}$ tais que $\overline{PQ} = r$.

R.12 *Axioma da intersecção recta-circunferência.* Seja O um ponto e r uma recta. Então existe uma circunferência com centro em O que intersecta a recta r em exactamente dois pontos.



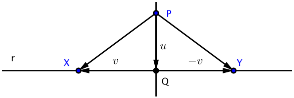
Tirar uma perpendicular

Lema. Seja r uma recta e P um ponto que não pertence a r. Sejam $X, \ Y \in r$ tais que $\overline{PX} = \overline{PY}$ e seja Q o ponto médio de $[XY]$. Então a recta PQ é perpendicular à recta r.

Dem. Sejam $\overrightarrow{PQ} = u, \ \overrightarrow{QX} = v, \ \overrightarrow{QY} = -v$. Então

$$\overrightarrow{PX} = u + v \ \text{ e } \ \overrightarrow{PY} = u - v.$$

Como $\overline{PX} = \overline{PY}$, temos que $|u + v| = |u - v|$, logo u e v são ortogonais. Como u é paralelo à recta PQ e v é paralelo à recta r, temos que r e PQ são perpendiculares.



Proposição. Seja r uma recta e P um ponto. Então existe um único ponto $Q \in r$ tal que a recta PQ é perpendicular a r.

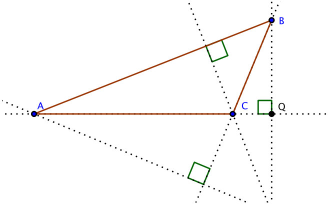
Dem Exercício.

Definição. O único ponto Q de r tal que PQ é perpendicular a r designa-se pé da perpendicular por P sobre r.

Corolário. Duas rectas complanares perpendiculares à mesma recta são paralelas.

Altura de um triângulo

Definição. Sejam A, B, C pontos não colineares. Dado um vértice de $\triangle(ABC)$, a altura por esse vértice é a única recta que o contém e que é perpendicular ao lado oposto ao vértice considerado.



Proposição. Sejam $[ABC]$ e $[A'B'C']$ triângulos congruentes. Sejam BQ e $B'Q'$ as alturas pelos vértices B e B', com $Q \in AC$ e $Q' \in A'C'$. Então $AQ : QC = A'Q' : Q'C'$ e $\overline{BQ} = \overline{B'Q'}$.

Dem. Exercício.

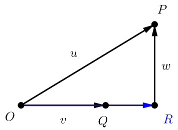
Projecção ortogonal de um vector

A projecção ortogonal de um vector sobre uma recta é uma noção fundamental para definir geometricamente o produto interno de vectores.

Proposição. Sejam u e v vectores, $v \neq \vec{0}$. Então existe um único número real λ tal que $u = \lambda v + w$ com w ortogonal a v.

Dem. Seja O a origem e sejam P e Q pontos tais que $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$. Seja R o pé da perpendicular por P sobre a recta OQ. Então $\overrightarrow{OR} = \lambda v$, $OQ : OR = 1 : \lambda$. Como R é único, o escalar λ também é único. Temos que o vector $\overrightarrow{RP} = u - \overrightarrow{OR} = w$ é ortogonal a v.

Definição. Dados vectores u e v, com $v \neq \vec{0}$, o único vector λv tal que $u = \lambda v + w$, com w ortogonal a v é designado projecção ortogonal de u na direcção de v. O vector w é a componente de u na direcção perpendicular a v.



Produto interno de vectores

Definição. Sejam u e v vectores. O produto interno de u por v é um número real, denotado por $u \cdot v$, que é definido por

$$u \cdot v = \begin{cases} \lambda |v|^2 & se \quad v \neq \vec{0} \\ 0 & se \quad v = \vec{0} \end{cases}$$

sendo λv a projecção ortogonal de u na direcção de v.

Propriedades do produto interno

Para quaisquer vectores u, v, w e para quaisquer escalares λ, μ, tem-se:

- $u \cdot u \geq 0$, com igualdade se e só se $u = \vec{0}$ (definido positivo).
- $u \cdot v = v \cdot u$ (simétrico).
- $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda u \cdot w + \mu v \cdot w$ (linear).

Nota. Devido à simetria, tem-se também que

$$u \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda u \cdot v + \mu u \cdot w,$$

portanto o produto interno é bilinear.

Demonstração da simetria do produto interno (I)

Sejam u e v vectores linearmente independentes. Seja O a origem e A, B, C tais que

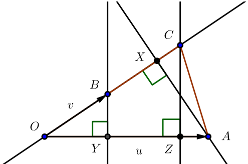
$$\overrightarrow{OA} = u, \ \overrightarrow{OB} = v, \ \overrightarrow{OC} = \lambda v, \text{ com } \lambda = \frac{|u|}{|v|}.$$

Temos assim que $\overline{OC} = \overline{OA}$.
Seja X o pé da perpendicular por A sobre a recta OB e sejam Y e Z os pés das perpendiculares por B e C respectivamente sobre a recta OA. Como, por construção,

$$\overline{OC} = \overline{OA} = |u|,$$

os triângulos $[OAC]$ e $[OCA]$ são congruentes, logo pela proposição das alturas,

$$OZ : ZA = OX : XC.$$



Demonstração da simetria do produto interno (II)

As rectas CZ e BY são paralelas, porque são ambas perpendiculares à reta OA. Pelo axioma da semelhança, temos que

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|.$$

Por definição de produto interno, temos

$$\overrightarrow{OX} = \frac{u \cdot v}{|v|^2} \overrightarrow{OB} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OY} = \frac{v \cdot u}{|u|^2} \overrightarrow{OA},$$

logo

$$OX : OB = u \cdot v : |v|^2 \quad \text{e} \quad OY : OA = v \cdot u : |u|^2.$$

Como

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|,$$

temos

$$OX : OC = u \cdot v : |u|\,|v| \quad \text{e} \quad OZ : OA = v \cdot u : |u|\,|v|.$$

Como

$$OZ : OA = OX : OC$$

segue que $u \cdot v = v \cdot u$.