Exercício 07: Equações diferenciais ordinárias

Ernesto González, Inês Rebanda, Rafael Lopes

Utilização e análise dos métodos de Euler e de Runge-Kutta de 4^a ordem para a resolução de EDOs. Comparação entre diferentes passos de integração e soluções analíticas. Estudo do decaímento radioativo, epidemia de zombies e lançamento oblíquo de um projétil.

I. Decaímento radioativo

O decaimento radioativo do Polónio-201 é dado pela equação $\dot{N}(t) = -kN(t)$ onde N(t) é a densidade de núcleos radioativos no instante t e k é a taxa de decaimento dada por $k = 2.3 horas^{-1}$. Sendo $N(0) = 1$ implementamos o método de Euler e o de Runge-Kutta de 4^a ordem.

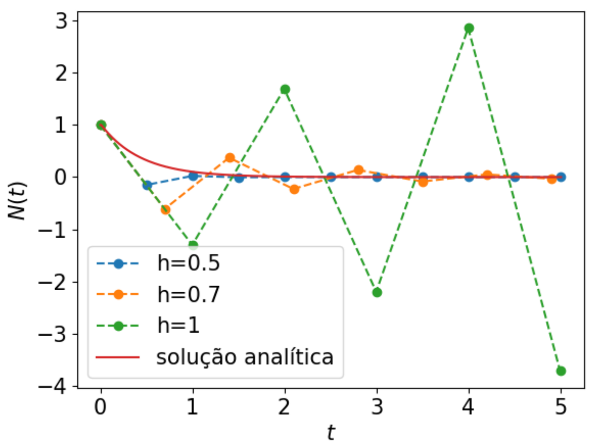

Figura 1. Gráfico do decaimento radioativo definido por $\dot{N}(t) = -kN(t)$ e $N(0) = 1$, calculado pelo método de Euler para passos de integração $h = \{0.5, 0.7, 1\}$ e gráfico da solução analítica $N(t) = e^{-2.3t}$.

Primeiramente implementou se o método de Euler e traçou-se o gráfico para a solução numérica de N(t) com passos de integração $h = \{0.5, 0.7, 1\}$. Comparamos também com a solução analítica $N(t) = e^{-2.3t}$. Para $h = 0.5$ o gráfico converge rapidamente para a solução e a suas oscilações são ligeiras sendo especialmente pequenas após $t = 1$. Para $h = 0.7$ o gráfico também converge rapidamente para a solução mas não tão rápido como $h = 0.5$ e as suas oscilações são também de maior amplitude. Para $h = 1$ o comportamento do gráfico muda e em vez de convergir ele diverge aumentando a cada iteração a amplitude das oscilações. Isto acontece pois enquanto que com $h = 0.5$ e $h = 0.7$ ao efetuar a equação $\dot{N}(t) = -kN(t)$ o resultado é menor que 1 (que é o resultado inicial), em $h = 1$ o resultado vai ser maior que 1, em módulo, fazendo com que divirja.

Seguidamente utilizou-se o método de Runge-Kutta de 4^a ordem e traçou-se o gráfico do seu desvio e do de Euler ao valor analítico em $t = 5\,horas$ em função do tamanho do passo (em escala log-log), com passos $h = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$.

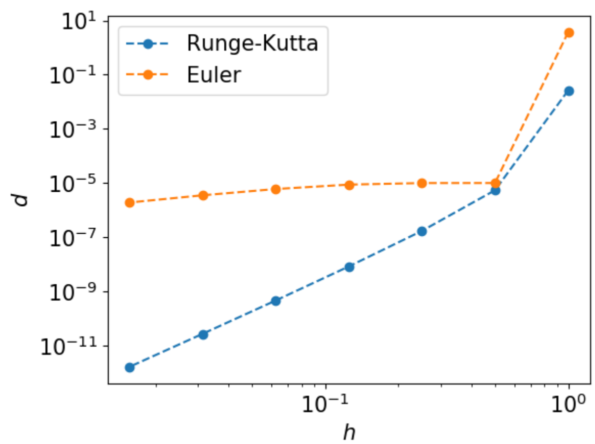

Figura 2. Desvio, d, dos valores $N(t = 5)$ econtrados para as soluções do PVI $\dot{N}(t) = -kN(t)$ e $N(0) = 1$, calculadas numericamente pelos métodos de Euler e Runge-Kutta de 4^a ordem, em função do passo de integração usado no método. Os passos usados foram $h = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\}$.

Pelo gráfico vê se que o método de Runge-Kutta de 4^a ordem tem sempre um erro inferior ou igual, para o mesmo valor de h, do que o método de Euler. Por isso neste caso é o método mais eficaz dos dois.
O declive das linhas dão-nos a ordem de convergência do respetivo método, isto é, o expoente pelo qual o desvio, d varia com o passo de integração h. Para o método de Euler, em $h \in [\frac{1}{64}, \frac{1}{2}]$ a ordem de convergência é, aproximadamente $O(h^{0.5})$. Já em $h \in [\frac{1}{2}, 1]$ é $O(h^{18})$. Para o método de Runge-Kutta de ordem 4, em $h \in [\frac{1}{64}, \frac{1}{2}]$ a ordem de convergência é, aproximadamente $O(h^4)$ e em $h \in [\frac{1}{2}, 1]$ é $O(h^{12})$.

II. Epidemia de zombies

Considere-se o cenário de uma epidemia de zombies. Sabe-se que um zombie contagia um humano com taxa c, um humano mata um zombie com taxa a e um zombie mata um humano com taxa b. Assim, as equações da população de humanos, H, e de zombies, Z são

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -(b+c)HZ \\ \frac{dZ}{dt} &= (c-a)HZ\end{aligned} \tag{1}$$

Nas Figuras 3 e 4 encontram-se os resultados das simulações para $a = 0.05$, $b = 0.06$, $c = 0.02$ usando o método de Euler e $a = 0.01$, $b = 0.03$, $c = 0.04$ usando o método Runge-Kutta de ordem 4, partindo de várias populações iniciais.

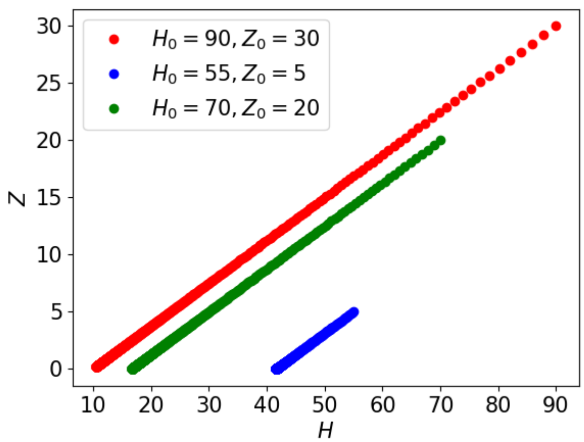

Figura 3. Resultados da simulação da epidemia de zombies descrita por $\dot{H} = -(b+c)HZ \;\wedge\; \dot{Z} = (c-a)HZ$ usando o método de Euler para $a = 0.05$, $b = 0.06$, $c = 0.02$ e diferentes pares H_0, Z_0.

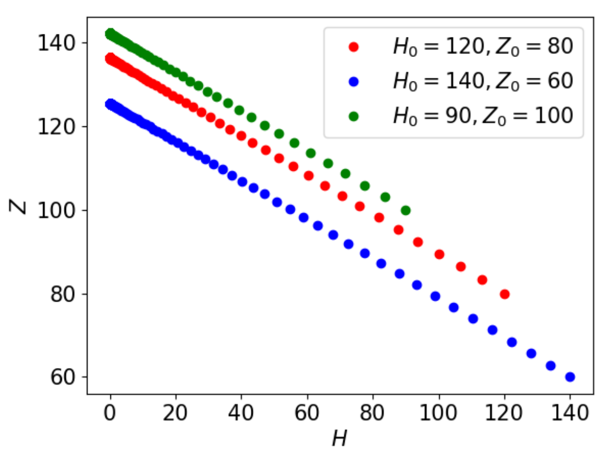

Figura 4. Resultados da simulação da epidemia de zombies descrita por $\dot{H} = -(b+c)HZ \;\wedge\; \dot{Z} = (c-a)HZ$ usando o método de Runge-Kutta para $a = 0.01$, $b = 0.03$, $c = 0.04$ e diferentes pares H_0, Z_0.

Nos três casos analisados na Figura 3, a população de zombies, Z, ficou extinta. Já nos casos expostos na Figura 4, a população de humanos, H, ficou extinta.
Estudemos o sistema (1). Se $c - a > 0$, então a taxa a que os zombies contagiam humanos, c, é maior do que a taxa a que os humanos matam zombies, a. Neste caso, os humanos são extintos.
Se a taxa a que os humanos matam zombies, a, for maior do que a taxa a que os zombies contagiam humanos, c, temos $c - a < 0$. Neste caso o destino do sistema será definido pelas condições iniciais e pelas taxas de crescimento das populações. Vejamos com mais atenção este caso. Definindo $\alpha = b+c$ como a taxa total de destruição de humanos e $\beta = c - a$ a taxa de criação de zombies, reescrevemos o sistema (1) como

$$\frac{d(\beta H + \alpha Z)}{dt} = -\beta\alpha HZ + \alpha\beta HZ = 0, \tag{2}$$

pelo que $\beta H + \alpha Z$ é constante. Se a população de zombies for extinta, então a população final de zombies é nula: $Z_f = 0$. Assim, do facto de $\beta H + \alpha Z$ ser constante vem

$$-\beta H_f = -\beta H_0 - \alpha Z_0 \tag{3}$$

Logo para que os humanos tenham sobrevivido vem

$$\begin{aligned}-\beta H_f > 0 &\iff -\beta H_0 - \alpha Z_0 > 0 \\ &\iff -\beta H_0 > \alpha Z_0\end{aligned} \tag{4}$$

III. Lançamento oblíquo

Considere-se um lançamento oblíquo de um projétil. As equações do movimento são:

$$\begin{cases}\ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \\ \dot{x}(t) = \dot{v}_x(t) \\ \dot{y}(t) = \dot{v}_y(t)\end{cases} \tag{5}$$

em que g é o módulo da aceleração da gravidade, e a velocidade $v_0 = 20\,ms^{-1}$ faz um ângulo de $\pi/4$ com a horizontal. Na Figura 5, encontra-se a trajetória seguida pelo projétil calculada numericamente pelos métodos de Euler e Runge-Kutta, bem como a solução analítica do sistema, partindo de $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Na Tabela I encontram-se os valores de $y(t = 5)$ para os diferentes métodos utilizados.

Na Figura 5, pode ser observado a representação da trajétoria de y(x) calculada para cada Método, e ainda pode ser observada a curva da trjetória real, obtida analiticamente. Ao observar a curva obtida através do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem podemos verificar que esta curva coicide com a curva analitíca. Podemos então inferir que isto dá-se pois o seu erro estará associado À 4ª ordem de t, o que significaria que os valores de x e y analíticos serão sempre idênticos aos

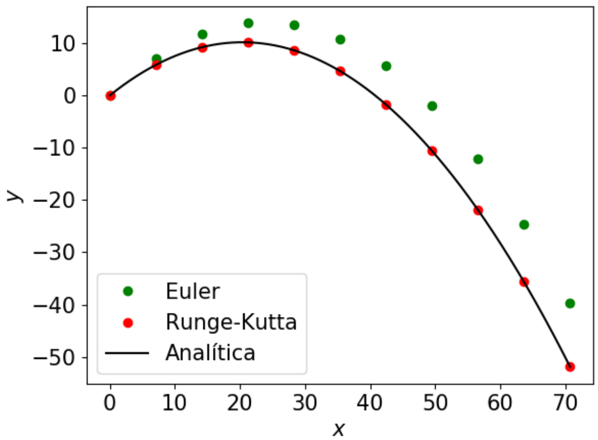

Figura 5. Trajetória do projétil cujo movimento é dado por $\dot{v}_x(t) = 0 \wedge \dot{v}_y(t) = -g \wedge x(t) = v_x(t) \wedge y(t) = v_y(t)$, calculado numericamente com os métodos de Euler e Runge-Kutta de ordem 4 e analiticamente com $x = x_0 + v_0 t \wedge y = y_0 + v_y t - 0.5gt^2$, para valores iniciais $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x_0} = 20cos(\frac{\pi}{4})$ e $v_{y_0} = 20sin(\frac{\pi}{4})$.

Tabela I. Valores de y quando $t = 5\,s$ para os métodos de Euler e Runge-Kutta de ordem 4 e da solução analítica para o sistema $\dot{v}_x(t) = 0 \wedge \dot{v}_y(t) = -g \wedge x(t) = v_x(t) \wedge y(t) = v_y(t)$, partindo de $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x_0} = 20cos(\frac{\pi}{4})$ e $v_{y_0} = 20sin(\frac{\pi}{4})$.

Método	y(t=5)
Euler	-39.65182188134526
Runge-Kutta	-51.91432188134523
Analítica	-51.914321881345415

obtidos com o Método Runge-Kutta de 4ª ordem, pois as funções x e y são funções de t de 2ª ordem.
A partir da Figura 5 pode ser também inferido que a trajetória obtida através dos valores do método de Euler começa a divergir da curva analítia apresentando um desvio cada vez maior. Então, podemos concluir que o Método de Euler tem uma precisão inferior ao Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Sendo que esta conclusão é também corroborada pelos valores da Tabela I.

Consideremos agora que o projétil está sujeito à resistência do ar, em que a aceleração tem um termo adicional de γv^2 na mesma direção da velocidade, mas sentido contrário. As equações do movimento passam a

$$\begin{aligned} \dot{v}_x(t) &= -\gamma v_x^2(t) \\ \dot{v}_y(t) &= -g + \gamma v_y^2(t), \quad \text{se } v_y(t) < 0 \\ \dot{v}_y(t) &= -g - \gamma v_y^2(t), \quad \text{se } v_y(t) \geqslant 0 \\ \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \end{aligned} \tag{6}$$

Na Figura , encontra-se a trajetória do projétil encontrada pelos métodos de Euler e Runge-Kutta de ordem 4. Veja-se como para velocidades iniciais iguais o projétil atinge alturas e alcances menores devido à dissipação de energia provocada pela resistência do ar, como era de esperar.

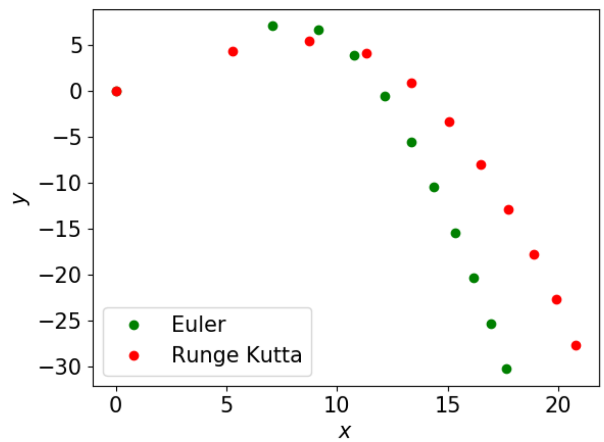

Figura 6. Trajetória do projétil cujo movimento é dado por $\dot{v}_x(t) = -\gamma v_x^2(t) \wedge \dot{v}_y(t) = -g + \gamma v_y^2(t), \quad \text{se } v_y(t) < 0 \wedge \dot{v}_y(t) = -g - \gamma v_y^2(t), \quad \text{se } v_y(t) \geqslant 0 \wedge x(t) = v_x(t) \wedge y(t) = v_y(t)$, calculado numericamente com os métodos de Euler e Runge-Kutta de ordem 4, para valores iniciais $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{x_0} = 20cos(\frac{\pi}{4})$ e $v_{y_0} = 20sin(\frac{\pi}{4})$.