Métodos Matemáticos da Física 2013/14

Exame 2ª época 30-06-2014

1.a) Determine os valores próprios e funções próprias $y(x)$ do operador d^2/dx^2 no domínio $x \in [0, \ell]$, que satisfazem as condições fronteira: $y(0) = 0$, $y(\ell) = 0$.
b) Considere a seguinte equação diferencial com as condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad u(t, 0) = 0 , \qquad u(t, \ell) = 0 .$$

Encontre soluções particulares $u(t, x)$ pelo método de separação de variáveis. Obtenha a solução geral $u(t, x)$ sujeita às condições fronteira indicadas.

2. Considere a equação diferencial

$$x\, y''(x) + (1 - x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 , \qquad x \in [0, +\infty[.$$

a) Coloque a equação na forma de Sturm-Liouville caso não esteja.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado ao problema.
c) Dadas as funções $y_0(x) = 1$, $y_2(x) = a - 4\,x + x^2$, calcule o produto interno $\langle y_0 |\, y_2 \rangle$. Determine a constante a para a qual o produto interno se anula.
d) Verifique que $y_0(x)$, $y_2(x)$, são ambas soluções da equação, para um certo valor da constante a. Obtenha os respetivos valores próprios.
e) Confronte e comente os resultados encontrados nas alíneas c), d).

3.a) Calcule a derivada da função $f(x) = e^{-a\,x}\, \Theta(x)$, sendo a uma constante real positiva.
b) Calcule as transformadas de Fourier de $f(x)$ e de $f'(x)$.

4. Considere a equação diferencial não homogénea

$$y''(x) - a^2\, y(x) = -f(x) , \qquad x \in \mathbb{R} , \qquad a \in \mathbb{R}_+ .$$

a) Explicite a expressão de uma solução particular $y(x)$ em termos de uma função de Green $G(x, z)$.
b) Admita que estão bem definidas as transformadas de Fourier $\tilde{y}(k)$, $\tilde{f}(k)$, assim como as respetivas transformadas inversas. Determine $\tilde{y}(k)$ em função de $\tilde{f}(k)$.
c) Obtenha a transformada de Fourier da função de Green, $G(x, z) = g(x - z)$, mantendo-se as condições referidas na alínea anterior.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx , \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x) , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$

$$\int_0^{\infty} x^n\, e^{-x}\, dx = n!$$