Métodos Matemáticos da Física — 2018/19

Exame 1 — 19-06-2019

1.a) Determine o espectro de valores próprios e funções próprias $y_n(x)$ do operador d^2/dx^2 no domínio $x \in [0,\ell]$, que satisfazem as condições: $y_n(0) = 0$, $y_n(\ell) = 0$.
b) Diga, justificando, se os valores próprios encontrados são ou não degenerados e se as funções próprias são ou não ortogonais entre si. Justifique porque se devem observar essas propriedades.
c) Determine as normas das funções próprias $y_n(x)$.
d) Seja $u(x)$ uma função que satisfaz as condições $u(0) = u(\ell) = 0$. Demonstre como se calculam os coeficientes c_n da expressão dessa função como combinação linear das funções $y_n(x)$: $u(x) = \sum c_n\, y_n(x)$.
e) Determine em particular os coeficientes c_n de $u(x) = \delta(x - z)$, onde $z \in]0,\ell[$.

2. Encontre pelo método de separação de variáveis soluções $u(t,x)$ da equação de difusão que obedecem às condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad u(t,0) = 0\,, \quad u(t,\ell) = 0\,.$$

Explicite a expressão da solução geral $u(t,x)$ sujeita àquelas condições fronteira.

3. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\,y''(x) - 2x\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\,, \qquad x \in [-1,1]\,.$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x. Deduza a relação de recorrência entre os seus coeficientes e escreva a expressão da solução encontrada até à ordem x^5 para um valor de λ arbitrário.
b) Determine os valores próprios associados a funções próprias, $P_n(x)$, dadas por polinómios de grau n bem definido.
c) Obtenha as funções próprias $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ admitindo que $P_n(1) = 1$.

4. Seja a função definida em $\mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}\,\Theta(x)$.
a) Represente graficamente a função $f(x)$ e calcule a sua derivada incluindo eventuais termos com a função delta de Dirac.
b) Determine as transformadas de Fourier de $f(x)$ e $f'(x)$ usando a expressão de $f'(x)$ obtida na alínea a).
c) Demonstre a relação entre as transformadas de Fourier de uma função e da sua derivada. Verifique se os seus resultados da alínea b) satisfazem essa relação.
d) Utilize o teorema de Parseval para determinar o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx\,.$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\,, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk\,,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\,\delta(x)\,, \qquad 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\,\tilde{g}(k)\,dk$$