Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III

(DF - 2019/20)

Capítulo II - Análise Complexa

1. Determine geometricamente o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:
   a) $x + i2y = |x + iy|$;
   b) $-\pi/2 < \arg(x + iy) < \pi/2,\ |x + iy| > 2$;
   c) $1 < |x + iy - 2i| < 2$;
   d) $2|x + iy| \leq |x + iy - 1|$.

2. Determine e represente geometricamente:
   a) as raízes cúbicas de 2; b) as raízes quartas de i.

3. Escreva na forma polar e represente geometricamente os números $2 + 2i$, $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ e $(2 + 2i)(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$.

4. Se z é uma raiz cúbica de -1, verifique que $z^2 + \bar{z} = 0$.

5. No primeiro quadrante (fechado):
   (i) quantas soluções tem a equação $z^9 + 1 = 0$?
   (ii) quantos zeros tem o polinómio $z^5 + z^4 - 16z - 16$?

6. Para $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$, mostre que $|z| = 1$ se e só se $z^{-1} = \bar{z}$.

7. a) Qual a imagem do segundo quadrante pela aplicação $z \mapsto z^3$?
   b) Qual a imagem do complementar do círculo unitário pela aplicação $z \mapsto 1/z$?

8. Represente geometricamente o conjunto de pontos em $\mathbb{C}$ da forma:
   a) $-2 + e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi$; b) $Im\, z = 1, z \in \mathbb{C}$; c) $e^{x+i},\ x \in \mathbb{R}$.

9. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
   a) A função e^z é sobrejectiva.
   b) A função z^3 é sobrejectiva.
   c) Nenhuma das funções z^3 e e^z é injectiva.
   d) $|\sin z| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

10. Escreva na forma $x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ os complexos: $e^{3+i}, \sin i, \cos(1 + i), \log(1 + i)$.

11. Resolva as equações (fixado um ramo conveniente do logaritmo para e) e f)):
    a) $e^z = 3i$; b) $e^z = e^{iz}$; c) $\sin z = 0$; d) $\cos z = 3$; e) $\log z = 1+2i$; f) $\log z = 1+i2\pi$.

12. Fixemos o ramo principal do logaritmo (correspondente ao intervalo $[-\pi, \pi[$).
    Sob que condições se tem: (i) $\log(a^b) = b \log a$? (ii) $\log(\frac{1}{z}) = -\log z$ $(z \neq 0)$?

13. Fixemos o ramo principal do logaritmo. Qual a imagem do conjunto $Re\, z > 0$ pela aplicação $z \mapsto \sqrt{z}$.

14. Para as funções seguintes, determine o conjuntos dos pontos onde são holomorfas e calcule a sua derivada:
a) $z + \dfrac{1}{z}$; b) $\dfrac{1}{(z^3-1)(z^2+i)}$; c) $\sin(\sqrt{z})$ (ramo principal do logaritmo).

15. Para as funções $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seguintes, e com $z = x + iy$, determine o conjuntos dos pontos onde são diferenciáveis e calcule a sua derivada:
a) $f(z) = xy - iy$; b) $f(z) = 2i\bar{z}$; c) $f(z) = z - |z|^2 + (1+2i)(\mathrm{Re} z)^2$;
d) $f(z) = iz + \frac{1}{8}(z+\bar{z})^2 + i\, Im\, z$; e) $f(z) = x^2y + i(xy + x^2)$; f) $f(z) = 2x^2 + y + i(y^2 - x)$.

16. Calcule, se existirem:
a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^z - 1}{z}$; b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$; c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin |z|}{z}$; d) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{|z|^2}{z}$.

17. Se $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função holomorfa num aberto conexo D e $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$ é constante, onde $z = x + iy \in D\, (x, y \in \mathbb{R})$, mostre que f é constante.

18. Determine para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$:
a) $u(x, y) = x^3 + axy^2 + bxy$ é a parte real de uma função <u>*inteira*</u> (holomorfa em $\mathbb{C}$);
b) $\alpha(x, y) = ax^2 - 3xy + by^3$ é a parte imaginária de uma função inteira;
c) $h(x, y) = ax^2 + 2xy + by^2 + i(y^2 - x^2)$ é uma função inteira.

19. Verifique que aplicação $u(x, y) = x^2 - y^2$ é harmónica em C e determine um seu harmónico conjugado.

20. Determine, se possível, uma função inteira f tal que $Re\,(f(x+iy)) = xy - x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, e: (i) $f(-1) = 1$; (ii) $f(i) = i$.

21. Determine, se possível, uma função inteira f tal que

$$Im\,(f(x+iy)) = e^x(x\cos y - y\sin y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(0) = 1.$$

22. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
a) A aplicação $x^2 + y^2$ é a parte real de uma função inteira.
b) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira, então $g(z) = f(\bar{z})$ é sempre inteira.
c) Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira, então $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ é sempre inteira.
d) Se f é holomorfa num aberto conexo D e $Imf = 0$, então f é constante em D.

23. Seja f holomorfa numa bola B tal que $|f|$ é constante em B. Justifique que f é constante em B. (Sugestão: Derive em ordem a x e y a expressão $|f|^2$=constante.)

24. Calcule os seguintes integrais de caminho (quando omitido, o sentido dos caminhos é o directo e as circunferências são percorridas uma vez):
a) $\int_\gamma |z|\, dz$, onde γ é a semi-circunferência unitária de centro em 0, desde $-i$ até i;
b) $\int_\gamma Im\, z\, dz$, onde γ é a fronteira do rectângulo $0 \to i \to 2+i \to 2 \to 0$; será $Im\, z$ primitivável num aberto que contenha o rectângulo?

c) $\int_\gamma \sin(2z)\,dz$, onde γ é o segmento de recta unindo $1+i$ a $-i$.

d) $\int_\gamma e^{\pi\bar{z}}\,dz$, onde γ é o segmento de recta unindo 0 a $a-ai$ ($a\in\mathbb{N}$ ímpar).

e) $\int_\gamma \frac{z+2}{z},dz$, onde γ é a semi-circunferência unitária centrada em 0 de i a $-i$, com a orientação negativa.

f) $\int_\gamma \frac{z+2}{z},dz$, onde γ é a semi-circunferência unitária centrada em 0 de 1 a -1.

(Sol: a) $2i$ b) 2. c) $\frac{e^2}{4}(1-e^{-2i})+\frac{e^{-2}}{4}(1-e^{2i})$. d) $i(e^{a\pi}+1)/\pi$. e) $-2i(1+\pi)$. f) $-2+2i\pi$.)

25. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação: $\mathrm{Re}\int_\gamma f=\int_\gamma \mathrm{Re}\,f$, para quaisquer $f:D\subset C\to C$ contínua e γ curva secc C^1 contida em D.

26. Considerando o ramo principal do logaritmo, calcule $\int_\gamma \log z\,dz$, onde γ é o segmento de recta $[1,i]$. (Sol. $1-\frac{\pi}{2}-i$.)

27. Sendo C a semi- circunferência unitária $C=\{e^{i\theta}:0\le\theta\le\pi\}$ percorrida num dos sentidos, mostre que $\left|\int_C \frac{\sin z}{z^2}\,dz\right|\le\pi e$. (Sugestão: mostre que $|\sin z|\le e$ em C).

28. Diga se é verdadeira ou falsa a afirmação $\int_\gamma f=0$, no caso em que (por defeito, a circunferência unitária está centrada em 0 e o sentido dos caminhos é o directo):

a) $f(z)=z^3+3$, γ é a circunferência unitária;
b) $f(z)=z^3+3z$, γ é a semi-circunferência unitária de 1 a -1;
c) $f(z)=z^2+\bar{z}$, γ é a circunferência unitária;
d) $f(z)=e^{1/z}$, γ é a circunferência de centro $2+5i$ e raio 3;
e) $f(z)=\frac{1}{z^2}$, γ é a circunferência unitária;
f) $f(z)=\sqrt{z}$, γ é a circunferência unitária (considere o ramo principal de $\log z$);
g) $f(z)=\frac{e^z}{z}$, γ é a circunferência de raio 1/2 centrada em 0;
h) $f(z)=\frac{\log(z+i)}{z^2+9}$, γ é a circunferência de raio 2 centrada em 2.
(Sol: V, V, F, V, V, F, F,V.)

29. Calcule os seguintes integrais, onde o sentido dos caminhos é o directo (esboce as curvas e apresente o resultado na forma $a+ib$):

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{3z-10}{z^2-6z+8}\,dz$, onde γ é a circunferência de raio 3 centrada em 0;

b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^2-1}$, onde C é a circunferência de raio 1 centrada em 1;

c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^2(z^2+2)}$, onde Γ é a circunferência de raio 2 centrada em 0;

d) $\displaystyle\int_E \frac{e^z\cos z}{(z-1)}\,dz$, onde E é a elipse de equação $4(x-1)^2+y^2=1$;

e) $\displaystyle\int_E \frac{e^z\cos z}{(z-1)^2}\,dz$, onde E é a elipse de equação $4(x-1)^2+y^2=1$;

f) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^4}\,dz$; g) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$.

h) $\displaystyle\int_C \frac{\sin(\pi z/2)}{z^2(z-1)}\,dz$, onde C a circunferência de centro 1 e raio 2.

(Sol.: a) $4\pi i$. b) πi. c) $-2\pi i$. d) $2\pi i e \cos 1$. e) $2\pi i e(\cos 1 - \sin 1)$. f) $\pi i/3$ g) $-2\pi i$. h) $i\pi(2-\pi)$)

30. Justifique que, para qualquer $A \subset \mathbb{C}$ aberto, a função $h(x+iy) = 2x(1-y) + i(x^2 + 2y - y^3)$ não tem primitiva em A.

31. Seja f holomorfa na bola $B_6(-2)$ e tal que $f(-2) = 2i$. Calcule $\int_0^{2\pi} f(-2+3e^{it})\,dt$. (Sol.: $4\pi i$)

32. Calcular o integral de caminho $\int_\gamma \frac{z^2}{(1+z^3)^2}\,dz$, sendo γ o segmento de recta com origem 0 e extremidade i; obter a partir desses cálculos o valor de $\int_0^1 \frac{t^2-t^8}{(1+t^6)^2}\,dt$. (Sol.: $(1-i)/6, 1/6$)

33. Verifique se são convergentes ou divergentes as séries: (i) $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{3ni}}{n^2}$; (ii) $\sum_{n\geq 0} \frac{\cos(ni)}{e^n}$.

34. Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n}}$, mostre que:
(i) a série converge no interior da circunferência unitária.
(ii) a série converge no exterior da circunferência unitária. (Sug.: Use (i).)

35. Desenvolva em série de potências de $z - z_0$, indicando o raio de convergência, as funções f, onde:
a) $f(z) = \frac{1}{z}$, $z_0 = 3$; b) $f(z) = e^{z/2}$, $z_0 = i\pi$; c) $f(z) = z^3$, $z_0 = 1$
d) $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $z_0 = 0$; e) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$, $z_0 = 0$; f) $f(z) = \log(1 - z^3/3)$, $z_0 = 0$.

36. Para as funções f das alíneas d), e) do exercício anterior, calcule $f^{(4)}(0)$ e $f^{(11)}(0)$. (Sol.: $4!, 0$ e $5!, 12!$.)

37. Justifique se as afirmações são verdadeiras ou falsas para qualquer sucessão $(a_n) \subset \mathbb{C}$:
(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-2)^n$ converge para $z=0$, então a série também converge para $z=3$.
(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-i)^n$ converge para $z=0$, então a série também converge para $z=1$.
(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n$ converge para $z=0$, então $\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-1)^n\right) dz = 0$.
(d) Sendo $\log(2i+z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-1)^n$ (ramo principal do logaritmo), o raio r da maior bola $B_r(1)$ onde este desenvolvimento é válido é $r=2$. (Sol.: V, F, V, F)

38. Em que *domínio* (aberto conexo) definem as seguintes séries funções holomorfas?
(a) $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{z}{n}\right)^n$; (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^n}{2n+1}$.

39. Seja f uma função analítica num aberto D e z_0 o único zero de f num disco $B_r(z_0) \subset D$. Sendo γ uma curva de Jordan contida em $B_r(z_0)$ com $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$, mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^+} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m,$$

onde m é a ordem do zero de f. (Sugestão: escreva f na forma $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$.)

40. Determine a série de Laurent de $\frac{1}{z(z-4)}$, válida: (a) numa vizinhança de 0 privada de 0, indicando o maior anel de convergência; (b) para $|z| > 4$. Qual o resíduo da função em $z = 0$?

41. Escreva a série de Laurent das funções f seguintes num anel $0 < |z - z_0| < R$, indicando o maior valor possível de R:

(a) $z^3 e^{1/z}$, $z_0 = 0$; (b) $\frac{1-\cos z}{z^2}$, $z_0 = 0$; (c) $\frac{1}{(z-2)(z-i)}$, $z_0 = 2$; (d) $z \sin \frac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

Em cada um dos casos, calcule $\int_{|z-z_0|<R/2} f(z)\, dz$.

42. Determine o tipo de singularidade da origem, e a ordem como pólo se for esse o caso, de: (a) $\frac{\cos z}{z^2}$; (b) $\frac{e^z-1}{z^2}$; (c) $\frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z}$; (d) $\frac{1}{z-\sin z}$; (e) $\frac{z}{(e^z-1)^2}$.

43. Sejam g, h analíticas em z_0, com $g(z_0) \neq 0$ e z_0 um zero simples de h. Mostre que $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ tem um pólo simples em z_0 e que $\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

44. Calcule $\int_C \frac{1}{e^z-1}\, dz$, onde $C(t) = -2\pi i + \pi e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. (Sol. $2\pi i$.)

45. (a) Calcule $\int_{|z|=r} \frac{dz}{z(2+z^2)}$ para $r = 1$ e $r = 2$. (Sol. $\pi i, 0$.)

(b) A partir do cálculo do integral para $r = 1$ em a), obtenha $\int_0^{2\pi} \frac{2+\cos 2t}{5+4\cos 2t}\, dt$. (Sol. π)

46. Calcule $\int_{|z-\pi|=4} \frac{e^z}{\sin z}\, dz$. (Sol. $2\pi i(1 - e^{\pi} + e^{2\pi})$.)

47. Usando resíduos, calcule $\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4} + (z - z^3)e^{1/z}\right) dz$, onde:

(i) $\gamma = C_1(2)$; (ii) $\gamma = C_1(4)$; (iii) $\gamma = C_2(0)$; (iv) $\gamma = C_5(0)$. (Sol. $0, 2\pi i, \frac{11\pi i}{12}, \frac{35\pi i}{12}$.)

48. Usando resíduos, calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$. (Sol. $\frac{\pi}{3}$.)

(Sugestão: Note que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}\, dz = 0$, onde γ_R é a semi-circunferência de centro 0 e raio R contida em no semi-plano $\operatorname{Im} z \geq 0$.)

Algumas fórmulas úteis

Fórmula Integral de Cauchy (incluindo a das derivadas): nas condições conhecidas,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad \text{com} \quad z_0 \in \operatorname{int} \gamma$$

Fórmula dos Resíduos: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Res}(f, z_i)$, com $z_i \in \operatorname{int} \gamma, i = 1, \ldots, p$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$