(B)

TESTE DE MATEMÁTICA DISCRETA/FINITA - 27/4/2017

Duração: 50 minutos

NOME COMPLETO ....Solução....NÚMERO................

I *(7 valores)*

ATENÇÃO: *Neste grupo respostas erradas descontam.*

1) Nas alíneas desta pergunta a e b são os números naturais dados pela sua factorização em números primos:

$a = 2^4 \times 7^5 \times 11^2 \times 13^3$ e $b = 2^2 \times 3^4 \times 7^3 \times 11^4 \times 13$.

Escreva a resposta final a cada pergunta, no lugar indicado a ponteado:

a) $mdc(a, b) =$ $2^2 \times 7^3 \times 11^2 \times 13$

$mmc(a, b) =$ $2^4 \times 3^4 \times 7^5 \times 11^4 \times 13^3$

b) Quantos divisores naturais e quantos divisores inteiros tem a?

$|Div^+(a)| =$ $5 \times 6 \times 3 \times 4 = 360$

$|Div(a)| =$ $2 \times 360 = 720$

c) Quantos são os divisores naturais comuns a a e a b ?

$|Div^+(a) \cap Div^+(b)| =$ $|Div^+ \, mdc(a,b)| = 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 72$

2) Responda a cada alínea na linha de resposta (a ponteado) e da seguinte forma:

- se a proposição é verdadeira escreva: VERDADEIRA (não é preciso justificar)

- se a proposição é Falsa escreva: FALSA e DÊ EXEMPLO de valores concretos para a, b, m e (eventualmente) n que tornem a afirmação Falsa.

a) Sejam $a, b, m \in \mathbb{N}$. Se $m|ab$ então $m|a$ ou $m|b$.

$m|ab$ mas

$m = 2\times 3$

Falsa exemplo: $a=2$ $b=3$ $m\nmid a$ e $m\nmid b$

b) Sejam $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Se $a|m$ e $b|n$ então $ab|mn$.

Verdadeira

c) Sejam $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Se $a|m$ e $b|n$ então $a + b|m + n$.

$\underset{a}{2} | \underset{m}{4}$ $\quad \underset{b}{3} | \underset{n}{9}$ $\quad \underset{a+b}{5} \nmid \underset{m+n}{13}$

Falsa

d) Sejam $a, b, m \in \mathbb{N}$. Se $m|ab$ então $m|mmc(a, b)$.

Falsa $\underset{2\times 3}{a=6}$ $\underset{2\times 5}{b=10}$ $mmc(a,b) = 2\times 3\times 5 = 30$ $m=60$

$60|ab$ mas $60 \nmid 30$

NOME ....Soluções.... NÚMERO................

II *(5 valores)*

ATENÇÃO: *Na resposta às perguntas deste grupo apresente todos os cálculos que fizer.*

Considere a sucessão u_n definida pela relação de recorrência:

$$u_n = -u_{n-1} + 6u_{n-2}, \quad u_0 = 2 \ \ e \ \ u_1 = 3$$

1) Escreva os cinco primeiros termos da sucessão.

2) Determine o termo geral da sucessão.

1) $u_0 = 2$, $u_1 = 3$

$u_2 = -3 + 12 = 9$

$u_3 = -9 + 18 = 9$

$u_4 = -9 + 54 = 45$

2) equação caract. da rel. de Rec.:

$t^2 + t - 6 = 0$ $\qquad t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$

$u_n = a\,2^n + b\,(-3)^n$

$\begin{matrix} u_0 = 2 \rightarrow \\ u_1 = 3 \rightarrow \end{matrix} \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a - 3b = 3 \end{cases} \quad \ldots \quad \begin{cases} a = \dfrac{9}{5} \\ b = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

R: $u_n = \dfrac{9}{5}\, 2^n + \dfrac{1}{5}\, (-3)^n$

NOME solução ....NÚMERO..........

III *(8 valores)*

ATENÇÃO: *Na resposta às perguntas deste grupo apresente justificações e todos os cálculos que fizer.*

Considere os números 561 e 27.

1) Determine $mdc(561, 27)$ e escreva-o como combinação linear inteira de 561 e 27.

2) Indique, justificando, $mmc(561, 27)$.

3) Da seguinte lista de inteiros: -4, -3, 2, 5, 6 escreva como combinação linear inteira de 561 e 27 os que podem ser expressos dessa forma.

4) Determine inteiros $a, b, c \in \mathbb{Z}$ que satisfaçam a igualdade:

$$1 = a561 + b27 + c14$$

(1) $mdc(561,27) = mdc(27,21) = mdc(21,6) = mdc(6,3) = 3$

$561 = 27 \times 20 + 21$
$27 = 21 + 6$
$21 = 6 \times 3 + 3$
$6 = 2 \times 3$

$3 = 21 - 6 \times 3$
$= 21 - (27 - 21) \times 3$
$= 21 \times 4 - 27 \times 3$
$= (561 - 27 \times 20) \times 4 - 27 \times 3$
$= 4 \times 561 - 83 \times 27$

R: $mdc(561,27) = 3$
$3 = 4 \times 561 - 83 \times 27$

(2) $mmc(561,27) = \dfrac{561 \times 27}{mdc(561,27)} = 561 \times 9 = 5049$

(3) Pelo Teo. de Euclides sabemos que só os multiplos do $mdc(561,71) = 3$ se escrevem como combinação inteira de 561 e 27 logo apenas -3 e 6 podem ser escritos dessa forma. Usando (1) temos:

$-3 = (-4) \times 561 + 83 \times 27$
$6 = 8 \times 561 - 166 \times 27$.

(4) de (1) temos (*) $\boxed{3 = 4 \times 561 - 83 \times 27}$. Como $mdc(3,14) = 1$ 1 escreve-se como comb. linear inteira de 3 e 14 p. exemplo $1 = 3 \times 5 - 14$ substituindo 3 por (*)

$1 = 5 \times 561 - 415 \times 27 - 14$