Métodos Matemáticos da Física 2010/11

Exame de época especial de conclusão 22-07-2011

1.a) Determine os valores próprios e funções próprias determinadas pela equação, $y''(x) = -\lambda\, y(x)$, em $x \in [0, \ell]$, e pelas condições fronteira: $y(0) = y(\ell)$, $y'(0) = y'(\ell)$.
b) Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad x \in [0, \ell] \ ,$$

sujeita às condições fronteira: $u(t, 0) = u(t, \ell)$, $\partial u/\partial x(t, 0) = \partial u/\partial x(t, \ell)$.
Obtenha a solução da equação $u(t, x)$ com a condição inicial: $u(0, x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$, onde $y_n(x)$ são as funções próprias determinadas na alínea a).

2.a) Diga, justificando, se a equação diferencial,

$$(1 - x^2)\, y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [-1, 1] \ ,$$

está sob a forma de Sturm-Liouville, e se não estiver, coloque-a sob essa forma.
b) Defina, justificando, o produto interno adequado a esta equação.
c) Determine as duas funções próprias, $y_1(x)$, $y_3(x)$, dadas por polinómios de grau 1 e grau 3 respectivamente, e os seus valores próprios. Aplique a seguinte normalização das funções próprias: $y_n(1) = 1$.
d) Calcule os produtos internos de funções: $\langle y_1 | y_1 \rangle$, $\langle y_1 | y_3 \rangle$.

3. Considere a equação diferencial não homogénea

$$y'(x) + a\, y(x) = -f(x), \qquad y(0) = 0 \ , \qquad x \in [0, \ell] \ .$$

a) Escreva a equação diferencial e a condição fronteira a que deve satisfazer a respectiva função de Green $G(x, z)$.
b) Determine a função de Green $G(x, z)$.
Sugestão: encontre expressões adequadas de $G(x, z)$ nos domínios $x < z$, $x > z$.

4.a) Calcule as transformadas de Fourier da função $f(x) = \delta(x)$ e da função $g(x)$ dada por: $g(x) = c$ para $x \in [-a, a]$; $g(x) = 0$ para $|x| > a$, sendo c uma constante.
b) Defina a constante c em função de a, $c = c(a)$, de tal modo que:
$\lim_{a \to 0} g(x) = \delta(x)$.
c) Verifique se a mesma relação é obedecida pelas transformadas de Fourier, isto é, $\lim_{a \to 0} \tilde{g}(k) = \tilde{f}(k)$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,(x - x')} dk = 2\pi\, \delta(x' - x)$$