Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III
(DF - 2019/20)

Capítulo I - Equações Diferenciais (1^a parte)

EDOs

1.1. Equações diferenciais ordinárias escalares

1. Determine a solução geral das equações que se seguem.
   a) $y' + xy = 0$, b) $y' - 4y = 16x$, c) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \sin x$.

2. Determine a única solução de cada um dos seguintes PVI's:
   (a) $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 \sin x, \quad y(-\pi/2) = 0$ (cf. ex.1.c))
   (b) $(t^2 + 1)y' + t(2y - 1) = 0, \quad y(0) = 1$

3. Seja $N(t)$ o tamanho de uma população no instante t. Suponha que a população cresce de acordo com a equação $N'(t) = \dfrac{1}{100} N^2(t)$ e que no instante inicial $t = 0$ a população tem o valor 10. Determine $N(t)$ e o intervalo onde está definida. O que acontece à população quando $t \to 10^-$?

4. Determine a solução geral das equações seguintes:
   a) $y' = -\dfrac{x^2}{y^2}$; b) $y' = y^2$ (esboce o gráfico das soluções);
   c) $y' = 3xy^2$; d) $y' + y^2 \sin x = 0$.

5. Encontre a solução do problema logístico $\begin{cases} y' = 2y(3 - y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$. (Sol: $y(t) = \frac{6e^{6t}}{1+2e^{6t}}$.)

6. Seja $y = y(t)$ a população (medida em milhares) de uma espécie biológica no instante t, cujo crescimento é regido pela equação logística $y' = y(1 - \frac{1}{6}y)$.
   a) Sem resolver a equação diferencial, justifique se há ou não populações $y(t)$ que tomam valores 1 e 12 (milhares) em diferentes instantes de tempo.
   b) Determine a solução $y(t)$ que tem o valor 1 (milhar) no instante $t = 0$.

7. Um tanque com 2000 litros de capacidade está inicialmente cheio de água pura. A partir de determinado instante (considerado inicial, i.e., $t = 0$), começa a entrar líquido poluído no tanque, contendo 20% de poluente, a um ritmo de 4 l/min. O tanque possui um sistema de esvaziamento que permite manter o volume total de líquido constante. Obtenha uma expressão analítica para a quantidade de poluente no tanque, no instante t (tempo em minutos, volume em litros).
   Qual a percentagem de poluente ao fim de 10^3 minutos? E ao fim de um dia? (Use uma calculadora para obter um valor aproximado.) (Sol. $\approx 17,3\%; \approx 18,9\%$.)

8. Determine a solução da equação $y'' = 1 + (y')^2$ que satisfaz as condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$. (Sugestão: faça $y' = u$.) (Sol. $y(t) = -\log(\cos t) + 1, t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.)

9. O chamado *modelo de predador-presa de Lotka-Volterra* (Lotka: 1880-1949; Volterra: 1860-1940) é dado por

$$x' = ax - bxy, \quad y' = -cy + dxy, \tag{1}$$

onde a, b, c, d são constantes positivas e $x(t), y(t)$ representam respectivamente a população de presas e de predadores no instante t.

a) Ache as soluções de equilíbrio (i.e., constantes).

b) Supondo que se pode escrever $y(t)$ como função de $x(t)$, ou vice-versa, resolva (1) como uma equação de variáveis separáveis. Verifique que as soluções $(x, y) = (x(t), y(t))$ estão sobre curvas de nível da função $F(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}$.
(De facto, pode mostrar-se que as curvas de nível de F são curvas fechadas, circulando em volta do ponto de equilíbrio $(c/d, a/b)$. Cf. M. Braun, pp. 443).

10. As curvas de nível para a temperatura numa placa metálica são dadas por elipses de equação $4x^2 + y^2 = 120 - c$ (c constante positiva), correspondendo a localização da fonte de calor ao ponto $(x, y) = (0, 0)$, com temperatura 120 C. Estando uma partícula na posição plana $(x, y) = (2, -3)$, encontre a trajectória da partícula quando ela se move continuamente sobre a placa, na direcção de maior crescimento da temperatura.

    (Sugestão: Recorde as propriedades do gradiente e use trajectórias ortogonais.)

11. Calcule as trajectórias ortogonais à família de hipérboles dada pelas equações $x^2 - y^2 = c, c \geq 0$. (Sol. hipérboles dadas por $y = k/x,\ k \in \mathbb{R}$.)

12. O modelo de Gompertz (1779-1865) é um dos modelos matemáticos mais usados em medicina para o crescimento de tumores. De início, o volume das células cancerígenas aumenta exponencialmente por divisão, mas, à medida que o volume aumenta, o tumor cresce mais devagar. Supondo que $V(t)$ designa o volume do tumor no instante t, este modelo propõe a taxa de variação do volume dada por

$$V'(t) = r(t)V(t), \tag{1}$$

onde $r(t)$ (a taxa de reprodução das células) tem valor inicial $r(0) = r_0$ e decresce exponencialmente de acordo com a Lei de Malthus: $r'(t) = -\alpha r(t)$, onde $\alpha > 0$ é uma constante calculada com base em dados experimentais e estatísticos.

    a) Determine as soluções de (1) em função do volume inicial ($t = 0$) do tumor V_0.

    b) Calcule $\lim_{t\to\infty} V(t)$. (Sol. $V = V_0 e^{\frac{r_0}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$.)

13. Resolva as EDOs exactas seguintes:

    (a) $y \cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2 e^y + 2)y' = 0$;

    (b) $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$.

14. Escolhendo adequadamente um factor integrante da forma $\mu(x) = e^{G(x)}$, resolva os PVI seguintes:

   (a) $y + (x^2y^3 - x)y' = 0$ $(x > 0)$, $y(4) = 1$; (Sol. $y = \sqrt[3]{4/x}$ em $]0, +\infty[$.)

   (b) $x^3 - xy^2 + 2x^2yy' = 0$ $(x > 0)$, $y(1) = 1$. (Sol. $y = \sqrt{x(2-x)}$ em $]0, 2[$.)

15. Recorde que uma **equação de Bernoulli** é uma EDO que se pode escrever na forma

$$x' + a(t)x = b(t)x^n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{B}$$

   e que a mudança de variável $u = x^{1-n}$ transforma (B) numa equação linear. Efectuando uma mudança de variável adequada, determine a solução geral da EDO:

   a) $x' + x = tx^3$. (Sol. $x \equiv 0, x = \frac{\pm 1}{\sqrt{t+\frac{1}{2}+Ce^{2t}}}$.)

   b) $x' - \frac{x}{2t} = 5t^2x^5$ $\quad (t > 0)$. (Sol. $x \equiv 0$, $\frac{\pm\sqrt{t}}{\sqrt[4]{C-4t^5}}$.)

16. Uma **equação homogénea** é uma equação que se pode escrever na forma

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \text{ com } \quad f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{H}$$

   Mostre que a mudança de variável $u = \frac{y}{t}$ transforma (H) numa equação de variáveis separáveis $u' = \frac{f(u)-u}{t}$.

   Resolva a EDO $y' = \dfrac{y^2}{ty + y^2}$. (Sol. $ye^{-t/y} = C$)

17. Determine a expressão analítica e o domínio das soluções da EDO $y' = \sqrt{y}$.

18. Resolva a EDO $y'' + e^ty' = e^t$. (Sol. $y = t + C_1 + C_2 \int e^{-e^t}\, dt$.)

1.2. Equações diferenciais lineares de ordem n

19. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere a equação linear homógenea de ordem n de coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

   (a) Com $n = 2$, sabendo que as raízes do polinómio característico são 2 e 5, escreva a solução geral da equação dada.

   (b) Com $n = 2$, sabendo que uma raiz do polinómio característico é $2 - i$, escreva a solução geral da equação dada.

   (c) Com $n = 2$, sabendo que a única raiz do polinómio característico é 2, escreva a solução geral da equação dada.

   (d) Com $n = 3$, sabendo que as raízes do polinómio característico são 0, -3 e 5, escreva a solução geral da equação dada.

   (e) Com $n = 3$, sabendo que as raízes do polinómio característico são -7 e 5, a segunda com multiplicidade 2, escreva a solução geral da equação dada.

(f) Com $n = 3$, sabendo que 1 e $-3+5i$ são raízes do polinómio característico, escreva a solução geral da equação dada.

(g) Com $n = 4$, sabendo que as raízes do polinómio característico são 2, com multiplicidade 3, e -1, escreva a solução geral da equação dada.

20. Indique a solução dos seguintes problemas de valores iniciais, sem efectuar cálculos:

(a) $7y''' - 3y'' + y' - 9y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

(b) $y'' + 4y = 8, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

21. Determine a solução geral da equação $y'' - y = 2\sin t$, sabendo que uma solução particular é $y_p(t) = -\sin t$.

22. Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere a EDO $y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$.
a) Determine uma base da soluções da EDO e o wronskiano dessa base.
b) Para $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ qualquer, resolva o PVI

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0,\ y(t_0) = x_1, y'(t_0) = x_2,$$

para os casos $t_0 = 0$ e $t_0 = 2/a\,(a \neq 0)$.
(Sol. $x_1e^{-\frac{a}{2}t} + (\frac{a}{2}x_1 + x_2)te^{-\frac{a}{2}t}$; $-\frac{2e}{a}x_2e^{-\frac{a}{2}t} + e(\frac{a}{2}x_1 + x_2)te^{-\frac{a}{2}t}$

23. Considere a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \qquad \text{com } p, q, g \in C(I).$$

(a) Mostre que a substituição $y = u(t)\varphi(t)$, onde $\varphi(t)$ é uma solução não trivial da equação homogénea, reduz a equação dada à equação linear de primeira ordem

$$\varphi(t)w' + (2\varphi'(t) + p(t)\varphi(t))w = g(t),$$

onde $w = u'$.

(b) Use o método anterior (designado por **método de redução da ordem**) para encontrar a solução geral da seguinte equação:

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{4}{t^2}y = 1 - \frac{1}{t^3}, \qquad t > 0$$

verificando que $\varphi(t) = t^2$ é solução particular da equação homogénea associada.

(Sol. $y = \frac{t^2}{4}\log t + \frac{1}{3t} - \frac{C_1}{4t^2} + C_2t^2,\ t > 0$.)

24. Determine a solução geral das equações seguintes:

a) $y'' + 3y = -9$

b) $y'' + 2y' - y = 10$

c) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^{-2t} + 1}$

d) $y'' + y' = 1$

e) $y'' - y = -11x^2 + 1$; e qual a solução com $y(-1) = y'(-1) = -1$?

f) $y''' + y' = \sec x,\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

(Sol particular: c) $y_P = -\frac{1}{2}\log(1 + e^{-2t})e^{2t} + \arctan(e^{-t})e^t$; f) $y_P = -\frac{1}{2}\log(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}) + \log(\cos x)\sin x - x\cos x$.)

25. (Abel-Liouville) Sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções de $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, com a e b contínuas num intervalo I. Recorde o wronskiano dado por $W(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t)$. Prove que

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}, \quad \forall t_0, t \in I.$$

26. Considere o movimento de um pêndulo simples (sem atrito e sem termo forçante) no plano dado pela 2ª lei de Newton,

$$x'' = -k \sin x\,, \tag{1}$$

onde: x é a posição angular do pêndulo (sendo $x = 0$ a posição de repouso), o pêndulo tem uma massa m aplicada no extremo de uma vara rígida sem peso e de comprimento ℓ, g é a aceleração da gravidade e $k = g/\ell$. Para amplitudes x pequenas tem-se $x \approx \sin x$, pelo que frequentemente se substitui (1) pela equação aproximada (dita do **oscilador harmónico**)

$$x'' = -kx. \tag{2}$$

a) Verifique que as soluções de (2) podem ser escritas na forma $x(t) = A\sin(\omega t + \delta)$, $A \geq 0, \delta \in [0, 2\pi]$, onde $\omega = \sqrt{k}$.

Nota. Diz-se que $\frac{\omega}{2\pi}$ é a frequência natural do pêndulo, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ o seu período e A a amplitude da oscilação.

b) Determine ainda a solução de (2), sabendo que o pêndulo está inicialmente em repouso (i.e., $x(0) = 0$) e foi sujeito a uma velocidade inicial v. (Sol. $x = \frac{v}{\omega}\sin \omega t$.)

c) Resolva a equação do oscilador harmónio *amortecido*, i.e., *com atrito*, dada por

$$x'' = -kx - 2\lambda x'. \qquad (k, \lambda > 0). \tag{3}$$

d) Usando o método dos coeficientes indeterminados, mostre que para a equação do oscilador harmónico *forçado* sem atrito, dada por

$$x'' = -kx + f_0 \cos(\omega_0 t), \quad \text{onde } \omega_0 > 0,$$

se obtêm, para o caso $\omega \neq \omega_0$, soluções $x(t) = A\sin(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$, com A, δ como em a). E para $\omega = \omega_0$?

Adenda. Se $\omega = \omega_0$, a força exterior está em *ressonância* com o sistema, dando origem a oscilações de amplitudes "infinitas", que um sistema físico não pode suportar. Isto explica alguns fenómenos desastrosos, como o da queda da ponte de Tacoma em 1940 (ver e.g. livro de M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, pp. 173, ou Carlos Sarrico, *Análise Matemática*, pp. 258).

27. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem $y'' + 2y' - 3y = g(x)$. Indique a forma de uma solução particular quando $g(x)$ é igual a:

a) $x + 1$ b) $e^x + 2e^{2x}$ c) $7\cos(3x) + x^2$ d) $5e^{-3x}$ e) $x^2 e^x$.

(Nota: Não se pede para calcular uma solução particular.)

1.3. Sistemas lineares de EDOs

28. Considere o sistema de EDOs $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y + 10\cos t\,. \end{cases}$

    a) Usando a primeira equação para tirar $y = x' + 2x$, derive esta expressão, e obtenha uma equação linear de segunda ordem para x.

    b) Resolva o sistema dado a partir da resolução da equação obtida em a).

    (Observação: Este método é chamado <u>*método de eliminação*</u> e é frequentemente muito eficaz.)

29. Mostre que todas as soluções $(x(t), y(t))$ do sistema $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$ satisfazem

    $\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. E, para soluções com $y(t) \neq 0$, qual o limite $\lim_{t\to\pm\infty} \dfrac{x(t)}{y(t)}$?

30. Determine a solução geral dos sistemas:

    a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x + y \end{cases}$; b) $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$ c) $x' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x\,;$

    d) $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$; e) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$; f) $x' = \begin{bmatrix} -4 & -3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x\,.$

31. Determine a solução do problema de Cauchy

    $$x' = Ax + h(t), \quad x(0) = x_0,$$

    com: a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

    b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$

    c) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

32. Para um sistema linear homogéneo $x' = Ax$ ($A \in \mathcal{M}_n$), justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

    (a) se $\det A = 0$, então existem soluções não nulas que são limitadas em $\mathbb{R}$.

    (b) se existem soluções não nulas que são limitadas em $\mathbb{R}$, então $\det A = 0$.

    (c) se todos os valores próprios de A têm parte real negativa, então todas as soluções $x(t)$ satisfazem $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

    (d) se todas as soluções $x(t)$ satisfazem $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$, então todos os valores próprios de A têm parte real negativa.

1.4. Soluções de EDOs: miscelânea

33. Segue-se uma lista de problemas de Cauchy. Para quais deles pode garantir a existência de uma única solução *local* (i.e., definida numa vizinhança do instante t_0 onde é dada uma condição inicial)?

    (a) $x'(t) = x^2 + \sin x + 2t^5,\ x(1) = 9.$

    (b) $x'(t) = |x|,\ x(0) = k\ (k > 0).$

    (c) $x'(t) = \sqrt{|x|},\ x(1) = 0$ e $x'(t) = \sqrt{|x|},\ x(0) = 1.$

    (d) $x'(t) = \sqrt[3]{x^2} + tx,\ x(4) = 0.$

34. Justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

    (a) Qualquer solução da equação $x' = x^2 + t^6 + 1$ é estritamente crescente.

    (b) A solução do PVI $x' = \cos^2 x - 2,\ x(0) = 0$ é uma função não negativa em $\mathbb{R}$.

    (c) A solução do PVI $x' = x^4 + t$, $x(-1) = 1$ tem um mínimo em $t = -1$.

Algumas soluções:

28. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 3\cos t - \sin t,\ y(t) = 4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 7\cos t + \sin t.$

30. $X(t)C$ com m.f.s. $X(t)$ dadas por:

a) $X(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -2e^t \sin 2t & 2e^t \cos 2t \end{bmatrix}$; b) $X(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} & -\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \\ e^{(1+\sqrt{2})t} & e^{(1-\sqrt{2})t} \end{bmatrix}$;

d) $X(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$; f) $X(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & -(\frac{4}{3}+t)e^{-t} \\ 6e^{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

31. a) $x(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ -3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$; b) $x(t) = \begin{bmatrix} \cos t\big(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{1}{3}\big) + \sin t\big(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2\big) \\ -\sin t\big(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{1}{3}\big) + \cos t\big(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2\big) \end{bmatrix}$;

c) $x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^t + e^{3t}(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t) \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$.

32. V,F,V,V. 33. Sim; Sim; Não,Sim; Não. 34. V,F,V.