Paralelogramos e suas propriedades

Teorema de Désargues

Aula 6 - 13/03/2019

Sumário

- Propriedades dos paralelogramos
- Teorema do alongamento
- Teorema de Désargues

Propriedades dos paralelogramos

As proposição seguinte é fundamental para estabelecer a definição de vector a partir dos axiomas de medida e incidência.

Proposição. Sejam A, B, C, D três pontos. Então existe um único ponto D tal que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Tem-se ainda que o ponto D pertence ao único plano que contém os pontos A, B, C.
Dem. Exercício.

Num paralelogramo de vértices não colineares, podemos afirmar que lados opostos são paralelos.

Proposição. Sejam A, B, C, D quatro pontos não colineares. Então $[ABCD]$ é um paralelogramo se e só se a recta AB é paralela à recta CD e a recta AD é paralela à recta BC.
Dem. Exercício.

Nota. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo degenerado de vértices distintos e centro M.
Se $A \mapsto a$; $B \mapsto b$; $C \mapsto c$; $D \mapsto d$; $M \mapsto m$, em relação a uma régua na recta que contém os pontos A, B, C, D, M, então $a + c = b + d$. De facto, tem-se

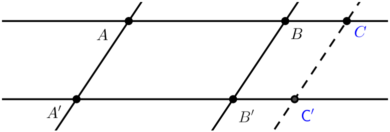
$$AM : MC = 1 : 1 = BM : MD \Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Teorema do alongamento do paralelogramo

Se "alongarmos" uniformemente um paralelogramo numa dada direcção, obtemos um novo paralelogramo.

Teorema. Seja $[ABB'A']$ um paralelogramo com vértices distintos. Sejam C um ponto da recta AB e C' um ponto da recta $A'B'$ tais que $AB : AC = A'B' : A'C'$. Então $[ACC'A']$ é um paralelogramo.

Dem. Caso 1. Os pontos A, B, B', A' são não colineares.
Pela proposição anterior, temos que a recta $AC(= AB)$ é paralela à recta $A'C'(= A'B')$. Por hipótese, temos $AB : AC = A'B' : A'C'$. Então $AB : BC = A'B' : B'C'$ e, pelo teorema de Tales, conclui-se que a recta CC' é paralela à recta AA'.



Teorema do alongamento do paralelogramo - continuação

Caso 2. Os pontos A, B, C, A', B', C' são colineares.
Consideremos uma régua na recta que os contém onde

$$A \mapsto a;\ B \mapsto b;\ C \mapsto c;\ A' \mapsto a';\ B' \mapsto b';\ C' \mapsto c'.$$

Como $ABB'A'$ é paralelogramo, temos que $a + b' = b + a'$, ou seja

$$b - a = b' - a'.$$

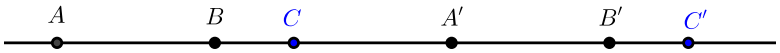
Por outro lado, como por hipótese, $AB : AC = A'B' : A'C'$, temos

$$(b - a)(c' - a') = (c - a)(b' - a').$$

Como os pontos A, B, A', B' são distintos, podemos dividir ambos os membros por $(b - a)$, obtendo

$$c - a = c' - a',$$

o que equivale a afirmar que $[ACC'A']$ é paralelogramo.



Teorema de Désargues - versão restrita (sec. XVII)

Este teorema é fundamental para definir soma de vectores a partir dos axiomas de medida e de incidência.

Teorema. Sejam A, B, C, A', B', C' seis pontos. Se $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ forem paralelogramos, então $[ACC'A']$ também é um paralelogramo.

Dem. Caso 1. Os pontos A, C, C', A' são não colineares.
Como $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ são paralelogramos, pela transitividade do paralelismo, as rectas AA' e CC' são paralelas. Sejam X e Y os centros de $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ respectivamente. Tem-se que

$$AX : XB' = 1 : 1 = CY : YB' \;\text{ e }\; A'X : XB = 1 : 1 = C'Y : YB.$$

Pelo recíproco do axioma da semelhança, conclui-se que a recta XY é paralela às rectas AC e $A'C'$. Pela transitividade do paralelismo, conclui-se que as rectas AC e $A'C'$ são paralelas.