Métodos Matemáticos da Física — 2019/20

Teste 1 - auto-avaliação — **27-03-2020**

1.a) Encontre pelo método de separação de variáveis funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de difusão, e funções $u(t,x)$ que satisfazem a equação de Schrödinger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,.$$

b) Determine a solução da equação de difusão que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, onde

$$y(x) = a\,\cos(kx) + b\,\sin(2kx)\,, \qquad a, b, k \in \mathbb{R}\,.$$

c) Determine a solução da equação de Schrödinger que obedece à condição inicial $u(0,x) = y(x)$, com $y(x)$ definida acima.

d) Caracterize a dependência no tempo das soluções da equação de difusão e da equação de Schrödinger encontradas nas alíneas b) e c).

2.a) Determine os valores próprios e as funções próprias, $y(x)$, do operador segunda derivada, d^2/dx^2, definidas no domínio, $x \in [-\ell, \ell]$, e sujeitas às condições fronteira, $y(\ell) = y(-\ell)$, $y'(\ell) = y'(-\ell)$.

b) Explique se os valores próprios são ou não degenerados.

3. Num espaço vectorial bidimensional os vectores da base têm os seguintes produtos internos:

$$\langle e_1|e_1\rangle = 2\,, \qquad \langle e_1|e_2\rangle = 0\,, \qquad \langle e_2|e_2\rangle = 3\,.$$

a) Os produtos internos de um dado vector, $u = \sum_n u_n\, e_n$, com os vectores da base são dados por:

$$\langle e_n|u\rangle = \frac{1}{n+1}\,, \quad n = 1, 2\,.$$

Determine o vector u e as suas componentes, u_n.

b) Calcule os produtos internos, $\langle u|u\rangle$, $\langle v|v\rangle$, $\langle u|v\rangle$, $\langle v|u\rangle$, onde $v = e_1 + i\,e_2$.