MATEMÁTICA FINITA/ MATEMÁTICA DISCRETA 2018-2019

EXERCÍCIOS - **Prof. Ilda Perez**

.

1. Conjuntos

1. Considere o conjuntos $A := \{x \in \mathbb{Z} : \; x^2 < 10\}$ e $B = \{1, 3, 7, a, b\}$

   (a) Descreva A em extensão e indique $|A|$.

   (b) Descreva (em extensão) os conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ e $A \Delta B$.

   (c) Considere os conjuntos $A \times B$, $B \times A$, $A^2 = A \times A$ e B^2:

      i. A quais dos 4 conjuntos pertencem os pares: $(-8, a)$, $(3, a)$, $(3, 7)$, $(3, 3)$, $(2, 3)$, $(a, -2)$?

      ii. Determine o número de elementos de cada um dos quatro conjuntos.

2. Sejam A e B dois conjuntos. Sabendo que $|A| = 4$ e $|B| = 7$ o que pode dizer sobre:

   (a) $|A^2|$ e $|A \times B|$?

   (b) Quantos subconjuntos com 2 elementos tem o conjunto A? e o conjunto B?

   (c) $|\mathcal{P}(A)| :=$ *n^o total de subconjuntos de A* ?

   (d) $|A \cap B|$ e $|A \cup B|$?

3. Indique o número de elementos de cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $\emptyset$

   (b) $A = \{\emptyset\}$

   (c) $B = \{n \in \mathbb{N} : \; n = 2k + 1 \; \textit{para algum} \; k \in \mathbb{N}\} \cap [100]$

   (d) $C = \{$ *sequências de comprimento 3 que se podem fazer com os símbolos* 0 *e* 1$\}$.

4. Dado um número natural k designamos por $k\mathbb{Z}$ o conjunto de todos os múltiplos inteiros de k, isto é :

$$k\mathbb{Z} := \{kn : \ n \in \mathbb{Z}\}$$

Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(a) $7 \in 2\mathbb{Z}$.

(b) $-10 \in 2\mathbb{Z}$

(c) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = \emptyset$.

(d) $2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} = 6\mathbb{Z}$.

(e) $2\mathbb{Z} \subseteq 6\mathbb{Z}$.

(f) $6\mathbb{Z} \subset 3\mathbb{Z}$.

(g) $3\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z} = \{3 + 6k : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

(h) Se $p \in \mathbb{N}$ é um número primo então, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, $p \notin k\mathbb{Z}$.

5. Sejam A e B dois conjuntos. Sabendo que $|A| = 5$ e $|B| = 7$ diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

(a) Não existe nenhuma aplicação injectiva de B para A.

(b) Qualquer aplicação $f : A \longrightarrow B$ é injectiva.

(c) Existe uma aplicação injectiva de A para B.

(d) Existe uma aplicação sobrejectiva de A para B.

(e) Existe uma aplicação sobrejectiva de B para A.

6. **(Teste 2017)** Responda às perguntas deste grupo escrevendo um **V** ou **F** no quadrado do lado esquerdo, consoante a afirmação da alínea é **V**erdadeira ou **F**alsa. **Respostas erradas descontam**.

Sejam A e B dois conjuntos. Sabendo que $|A| = 7$ e $|B| = 9$ diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

☐ **a)** $|A \cup B| \leq 16$.

☐ **b)** $|A \cap B| < 5$.

- [ ] **c)** $|A \setminus B| < |B \setminus A|$.
- [ ] **d)** Qualquer aplicação de A para B é injectiva.
- [ ] **e)** Existem aplicações sobrejectivas de A para B.
- [ ] **f)** Existem aplicações sobrejectivas de B para A.
- [ ] **g)** Se $|A \cup B| = 13$ então $A \cap B \neq \emptyset$.
- [ ] **h)** Se $|A \cup B| = 13$ então $|A \setminus B| = 4$.

7. **Composição de aplicações e injectividade, sobrejectividade**

   Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ aplicações. Mostre que:

   a) Se f e g são injectivas, $g \circ f$ também o é.

   b) Se f e g são sobrejectivas, $g \circ f$ também o é.

8. Uma saco tem 12 bolas pretas, 10 bolas brancas, 10 bolas encarnadas e 8 verdes.

   (a) Qual o número mínimo de bolas que temos de tirar (sem ver a cor) para garantir que tiramos duas da mesma cor?

   (b) E para garantir que tiramos 2 bolas de cor diferente?

9. Escolhemos 38 números naturais pares, todos menores do que 1000. Prove que entre eles há dois cuja diferença é menor ou igual que 26.

10. Uma sequência de 12 inteiros positivos soma 103. Mostre que há dois números consecutivos da sequência que somam 18 ou mais.

11. **Conjuntos infinitos 1**

    (a) Mostre que existe uma bijecção entre os conjuntos $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ e entre $\mathbb{N}_0$ e $\{n \in \mathbb{N} : n > 7\}$.

    (b) Prove a afirmação: *Sejam A e B dois conjuntos tais que $A \subseteq B$. Então, se A é infinito B também o é.*

    (c) Prove $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é um conjunto numerável. Deduza que o conjunto dos racionais, $\mathbb{Q}$, também é numerável.

12. **Conjuntos infinitos 2** Mostre, definindo bijeções, que:

(a) Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$: $\#[a, b] = \#[0, 1]$.

(b) $\#\mathbb{R} = \#]a, b[$, *com* $a < b$

(c) $\#[0, 1] = \#[0, 1[= \#]0, 1[$.

2. Problemas básicos de contagem.

13. Considere $A = [4]$.

    (a) Defina em extensão $\mathcal{P}_i(A)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

    (b) Defina em extensão A^i, $i = 1, 2, 3, 4$.

    (c) Defina em extensão $\mathcal{A}_i := \{i$-*sequências de elementos diferentes de* A $\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

    (d) Como relaciona $|\mathcal{A}_i|$ e $|\mathcal{P}_i(A)|$?

14. (a) Quantos números naturais têm quando muito 6 algarismos (notação decimal)?

    (b) Quantos números naturais têm exactamente 6 algarismos?

    (c) quantos números naturais, múltiplos de 5, têm exactamente 6 algarismos?

    (d) Quantos números naturais de 6 algarismos têm dois algarismos consecutivos iguais?

15. Quanto números naturais menores do que 10.000 têm exactamente um 3 e um 4.

16. De quantas maneiras diferentes se podem sentar 10 pessoas à volta de uma mesa redonda?

    i) Considerando que duas distribuições das pessoas à volta da mesa são iguais se cada pessoa tem as mesmas pessoas à esquerada e à direita.

    ii) Considerando que duas distribuições das pessoas à volta da mesa são iguais se cada pessoa tem as mesmas duas pessoas como vizinhos.

17. O menu do dia de um restaurante apresenta 4 entradas, 6 pratos, 3 sobremesas. Quantos menus completos diferentes se podem compor?

18. Num bilhete de totobola aposta-se 1, X, *ou* 2 por cada um dos 13 jogos. De quantas maneiras diferentes se pode preencher uma coluna?

19. Atira-se uma moeda (não viciada) ao ar 20 vezes.

    (a) Quantas sequências diferentes cara-coroa podem obter-se?

    (b) Qual a probabilidade de sair uma sequência com o mesmo número de caras e de coroas?

    (c) Qual das seguintes apostas (A) ou (B) faria para ganhar? (justifique matemáticamente)

    (A) "Vão sair exactamente 10 caras e 10 coroas"

    (B) "Vai sair um número diferente de caras e do que de coroas".

20. Quantos anagramas têm as palavras PULGA, MATEMATICA e PRESENTE?

21. Quantos anagramas da palavra MATEMATICA têm as 5 vogais seguidas?

22. Considere o conjunto $[10] = \{1, \ldots, 10\}$.

    (a) Quantos subconjuntos de [10] com quatro elementos têm o elemento 6 e não têm o 8?

    (b) Quantas 4-sequencias com elementos de [10] em que um dos símbolos é o 6 e em que o 8 não aparece, se podem fazer?

23. Prove a igualdade $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$ de duas maneiras:

    i) usando a interpretação combinatória dos números do lado direito e esquerdo da igualdade.

    ii) usando as expressões algébricas.

24. Prove a igualdade:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-2}{k} + 2\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}.$$

25. Sabendo que exactamente um quarto dos subconjuntos com 3 elementos do conjunto $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ contem o 5. Determine n.

26. Determine todos os inteiros positivos que satisfazem a igualdade:

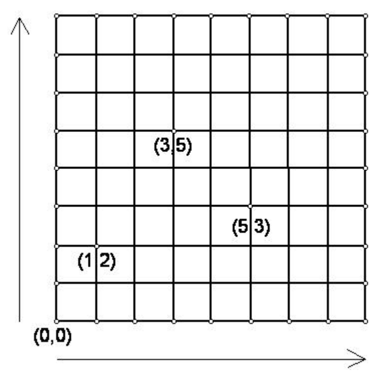
$$\binom{a}{b}\binom{b}{c} = 2\binom{a}{c}$$

27. Mostre que há tantas n- sequências de 0's e 1's com um número par de 1's como com um número ímpar de 1's. Quantas há de cada tipo?

28. No reticulado da figura pode-se andar horizontalmente da esquerda para a direita e verticalmente de baixo para cima.

    (a) Quantos caminhos diferentes existem terminando no ponto $(3, 5)$ e começando: (i) no ponto $(0, 0)$; (ii) no ponto $(1, 2)$; (iii) no ponto $(5, 3)$.

    (b) Em geral quanto caminhos existem começando no ponto (p, q) e acabando no ponto (m, n)? ($(p, q), (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)



29. De quantas maneiras diferentes se podem distribuir 10 bolas iguais por:

    (a) Quatro caixas diferentes (ou numeradas).

    (b) Quatro caixas diferentes, mas de modo a que nenhuma caixa fique vazia.

    (c) Quatro caixas diferentes, de modo a que pelo uma das caixas fique com 8 das bolas.

30. Quantas soluções inteiras tem a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ verificando:

(a) $x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$

(b) $0 \leq x_i \leq 7, \ i = 1, 2, 3, 4$

(c) $x_1 = x_2 \ e \ x_i \geq 0, \ i = 1, 2, 3, 4$

31. As torres no xadrez movem-se como indicado na figura e atacam qualquer peça que esteja nas linhas onde se move.

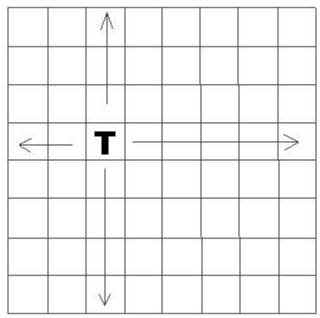


Figure 1: movimento de uma torre

(a) Determine o número $T :=$ número máximo de torres que podem ser colocadas no tabuleiro sem que haja duas a atacar-se mutuamente?

(b) De quantas maneiras diferentes se podem colocar, sem que duas se ataquem mutuamente, T torres iguais no tabuleiro de xadrez ?

(c) E T torres diferentes?

3. Propriedades dos números binomiais. Igualdades e desigualdades.

32. Encontre o valor k para o qual $k \begin{pmatrix} 99 \\ k \end{pmatrix}$ tem o valor máximo.

33. Mostre que $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} = 0$.

34. Determine os coeficientes dos termos x^2y^8, y^5z^5, $x^2y^3z^5$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^{10}$?

35. Prove as seguintes igualdades:

    (a)
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

    (b)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

    (c)
$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

    (Sugestão: para b) pense que $(x+y)^{2n} = (x+y)^n(x+y)^n$ e para c) algo parecido...)

36. Prove as igualdades:

    (a)
$$1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + \cdots + n2^{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

    (b)
$$1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

    (c)
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

37. Diga, justificando, se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas:

    (a) $2^n > \binom{n}{3}$, $n \geq 3$

    (b) $\frac{2^n}{n^2}$ torna-se arbitráriamente grande quando n cresce (i.e. $lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2} = +\infty$

    (c) $2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}$

4. Inclusão - Exclusão. Problemas variados

38. Numa classe há 40 alunos. Há 18 que gostam de jogar xadrez, 23 gostam de andar de bicicleta, e vários gostam de andar de patins. O número dos que gostam de jogar xadrez e andar de biciclete é 9. Há 7 que gostam de xadrez e de andar de patins e 12 que gostam de andar de biciclete e de patins. Há 4 alunos que gostam de todas as actividades e todos os alunos gostam de alguma das actividades. Quantos alunos gostam de andar de patins?

39. Considere os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

    (a) Quantas aplicações diferentes podemos definir da A para B?

    (b) Quantas aplicações de A para B são injectivas?

    (c) Quantas aplicações diferentes podemos definir de B para A?

    (d) Quantas aplicações de B para A são sobrejectivas?

40. O dono de uma loja de luvas despediu um dos empregados e mandou-o arrumar n pares de luvas, todos diferentes, cada um em sua caixa (as caixas são todas iguais). Muito mal disposto, o empregado resolveu por em cada caixa uma luva da mão esquerda e outra da mão direita, de modo a nenhuma caixa ficar com um par de luvas iguais.

    De quantas maneiras pode fazê-lo?

    (a) Nos casos $n = 2, 3, 4$

    (b) Para um n qualquer.

41. Num saco estão 16 bolas numeradas e tiramos (sem reposição) 6 bolas para um outro saco. De quantas maneiras diferentes se pode encher o segundo saco sabendo que no primeiro saco:

    (a) As 16 bolas estão numeradas de 1 a 16.

    (b) Há 10 bolas numeradas de 1 a 10 e 6 bolas com o número 11.

    (c) Há 10 bolas numeradas de 1 a 10, 3 bolas com o número 11 e 3 bolas com o número 12.

42. De quantas maneiras diferentes podemos distribuir 3 gatos, um siamês, uma persa e o outro tigre e 9 livros todos iguais por 4 crianças:

    (a) sem restrições.

    (b) de modo a que cada criança fique com um gato.

    (c) de modo a que cada criança receba 3 presentes.

43. De quantas maneiras podemos colorir n objectos diferentes com 3 cores? E se quisermos que haja pelo menos um objecto de cada cor?

44. Uma empresa de pintura recebeu a seguinte encomenda urgente de um dos seus melhores clientes, um decorador que gosta de charadas:

    " Entreguem sem falta amanhã os 150 painéis de madeira, que já aí estão. Os painéis devem ser pintados dos dois lados: uns monocolores (os dois lados da mesma cor) e outros bicolores (cada lado de sua cor), de acordo com as seguintes instruções;

    - as cores a utlizar são o Azul, o Branco e o Cinzento indicados no catálogo.

    - cada cor deve ser usada em igual número de painéis.

    - para cada cor o número de painéis monocolor dessa cor deve ser $\frac{1}{3}$ do número de painéis bicolor onde essa cor aparece."

    O pintor que vai executar a tarefa está aflito sem saber como começar. Dada a urgência, ajude-o respondendo às duas perguntas seguintes:

    1) Quantos painéis monocolor devem ser pintados com cada cor e quantos bicolores devem ser pintados com cada par de cores?

    2) Sabendo que para pintar cada lado de um destes painéis é necessário um litro de tinta. Quantos litros de tinta de cada cor são necessários para pintar os painéis da forma pretendida?

Tabela das 12 entradas e relações de recorrência

45. Sejam: $T(n, k) = n^0$ *de maneiras diferentes de distribuir n-bolas numeradas por k-caixas numeradas de modo a que nenhuma caixa fique vazia*

    $S(n, k) = n^0$ *de maneiras diferentes de distribuir n-bolas numeradas por k-caixas iguais de modo a que nenhuma caixa fique vazia*

(a) Que relação existe entre os números $T(n,k)$ e $S(n,k)$?

(b) Usando o principio de inclusão-exclusão obtenha uma expressões algébricas para $T(n,k)$ e $S(n,k)$ em função de n e k ($k \leq n$).

46. Considere:

$T(n,k) = n^0$ *de maneiras diferentes de distribuir n-bolas numeradas por k-caixas numeradas de modo a que nenhuma caixa fique vazia*

$S(n,k) = n^0$ *de maneiras diferentes de distribuir n-bolas numeradas por k-caixas iguais de modo a que nenhuma caixa fique vazia* - (n^os de Stirling de 2^a espécie.)

(a) Mostre que os números $T(n,k)$ e $S(n,k)$ satifazem as seguintes relações de recorrência, para $1 \leq k \leq n$:

$$T(n,k) = k(T(n-1,k-1) + T(n-1,k)), \quad T(n,1) = 1$$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k.S(n-1,k)), \quad S(n,1) = 1$$

(b) Utilize a alínea anterior para construir tabelas para $T(n,k)$ e $S(n,k)$ para $1 \leq k \leq n \leq 6$.

(c) Determine o termo geral de $S(n,k)$ e $T(n.k)$ (e verifique se os resultados obtidos na alínea anterior estão certos).

47. (Partições de um inteiro em k- partes)

$P(n,k) = n^0$ *de maneiras diferentes de distribuir n-bolas iguais por k-caixas iguais, de modo a que nenhuma caixa fique vazia*

(a) Mostre que para $1 \leq k \leq n$ se verifica:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)), \quad P(n,1) = 1$$

(b) Determine expressão geral para $P(n,2)$, $n \geq 2$.

(c) Construa a tabela de $P(n,k)$ para $1 \leq k \leq n \leq 6$.

(d) Determine $P(n)$, o número total de partições do inteiro n, para $n \leq 6$.

5. Mais sobre Relações de Recorrência

48. Defina por relações de recorrência os seguintes números:
    (a) Número de maneiras diferentes de alinhar n livros diferentes numa prateleira.
    (b) Número de subconjuntos de um conjunto com n elementos.
    (c) Número de n- sequências ternárias (usando apenas 0,1 e 2).
    (d) Número de sequências ternárias que não têm dois zeros consecutivos.

49. **Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r**
    (a) Seja r um número real. Considere a sucessão $A_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ definida por:
    $$A_n = A_{n-1} + nr, \quad A_0 = 0$$
    Escreva os quatro primeiros termos da sucessão.
    (b) Determine o termo geral da sucessão A_n.
    (c) Determine o valor da soma de todos os números naturais de 1 a 1000.

50. **Soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r**
    (a) Seja r um número real. Considere a sucessão $G_n, n \in \mathbb{N}_0$ definida por:
    $$G_n = G_{n-1} + r^n, \quad G_0 = 0$$
    Escreva os quatro primeiros termos da sucessão.
    (b) Determine o termo geral da sucessão G_n.
    (c) É verdadeira ou falsa a igualdade seguinte: $\sum_{k=0}^{100} 5^k = 5^{103} - 1$.

51. Na margem de um rio estão n casais que pretendem atravessar para a outra margem. O único meio de transporte é um barco a remos que só leva dois passageiros de cada vez. Quer os maridos, quer as mulheres,

são muito ciumentos de modo que não podem ficar nem a sós, nem em nenhuma margem do rio, um homem e uma mulher que não sejam um casal. Qualquer casal pode estar com mulheres ou maridos sem o respectivo par oficial.

Como organizar as viagens e qual o número mínimo de viagens necessárias para que todas as pessoas passem para a outra margem?

52. Quantas regiões determinam n rectas no plano, sabendo que não há três rectas concorrentes no mesmo ponto e ainda que:

    (a) As n rectas são concorrentes duas a duas.

    (b) k das rectas são paralelas duas as duas e as restantes $n-k$ são concorrentes 2 a 2 e com cada uma das k rectas paralelas.

53. Na figura seguinte está representado um grafo G: n- pontos (os vértices do grafo), numerados $0, 1, \ldots, n$, e arcos/arestas que representam ligações entre vértices do grafo. Os arcos estão todos dirigidos da esquerda para a direita.

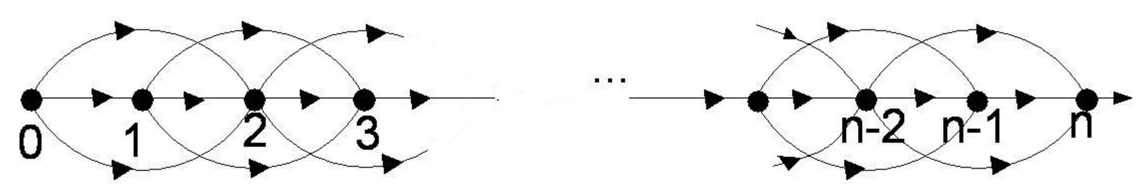


Figure 2:

Represente por $c_n :=$ *n^o de caminhos diferentes que começam no ponto* 0 *e acabam no ponto* n (percorrendo sempre arestas nos sentido permitido).

    (a) Deduza uma relação de recorrência para c_n.

    (b) Determine os quatro primeiros termos e o termo geral de c_n.

    (c) Designe por $c_(p, n) :=$*n^o de caminhos diferentes que começam no ponto* p *e acabam no ponto* n.

        i. Determine $c(0, 3)$, $c(2, 5)$ e $c(6, 2)$.

ii. Determine o termo geral de $c(p,n)$.

54. Verifique se a sucessão $u_n = 2^n + 3,\ n \in \mathbb{N}_0$ satisfaz a relação de recorrência $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 1\ (n \geq 2)$.

55. Determine os 5 primeiros termos e o termo geral das sucessões $u_n,\ n \in \mathbb{N}_0$definidas pela relação de recorrência :

$$(a) \quad u_n = 4u_{n-1} \ \ u_0 = \frac{7}{16}.$$

$$(a') \quad u_n = 4u_{n-1} + n^2 \quad u_0 = 1.$$

$$(b) \quad u_n = 4u_{n-2},\ u_0 = 1, u_1 = 3.$$

$$(c) \quad u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2},\ u_0 = 3,\ u_1 = 5.$$

$$(c') \quad u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2} + n - 2,\ u_0 = 3,\ u_1 = 5.$$

$$((d) \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2},\ n \geq 2, \quad u_0 = \frac{3}{2}\ e\ u_1 = 4.$$

$$(d') \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 2n,\ n \geq 2, \quad u_0 = \frac{11}{2}\ e\ u_1 = \frac{19}{2}.$$

$$(e) \quad u_n = 8u_{n-2} - 16u_{n-4},\ u_0 = u_2 = 0,\ u_1 = 24,\ u_3 = 160.$$

$$(f) \quad u_n = -5u_{n-1} + 2u_{n-2} + 4u_{n-3},\ u_0 = 0u_1 = 1u_2 = 1.$$

56. **(Exame 2017)** Dados $m, n \in \mathbb{N}$, uma aplicação $f : [m] \longrightarrow [n]$ é *crescente* se verifica a condição seguinte:

$$(C) \quad Se \ \ i, j \in [m]\ e\ i < j\ então\ f(i) \leq f(j).$$

1) Dê exemplo de uma aplicação *crescente* $f : [3] \longrightarrow [5]$ satisfazendo a condição $f(2) = 4$.

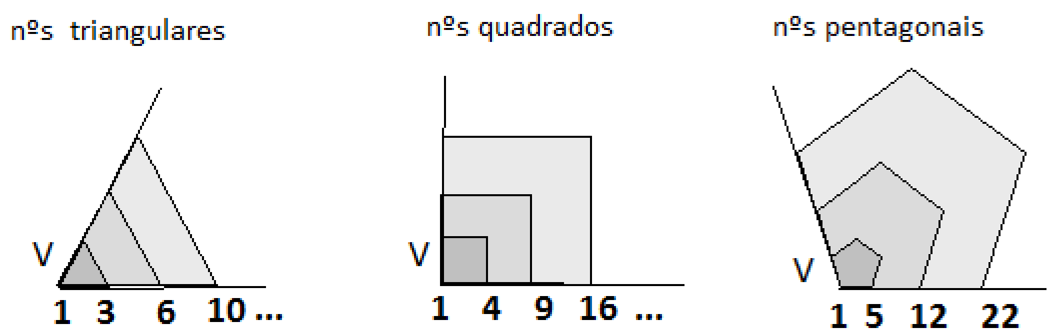
2) Dê exemplo de uma aplicação *crescente* $g : [5] \longrightarrow [3]$ satisfazendo a condição $f(1) = 2$.

3) Considere $c(m, n) := n^o$ de aplicações *crescentes* de $[m] \longrightarrow [n]$.

a) Determine $c(2, 2)$, $c(2, 3)$, $c(3, 2)$.

b) Obtenha o termo geral de $c(m, n)$.

57. (Exame 2018) **Números poligonais**



Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ considere uma sucessão de polígonos regulares $P_k(n)$, com k-lados de comprimento $n \in \mathbb{N}_0$, tendo todos o mesmo vértice V em comum e os dois lados que contêm esse vértice sobre as mesmas semiretas com origem V (ver figura).

A sucessão de números $k - gonais$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$ é a sucessão de números $a_k(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ que conta o número de bolas sobre o polígono $P_k(n)$ e é definida da seguinte maneira:

$a_k(0) = 1$, e para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $a_k(n)$ é obtido somando a $a_k(n-1)$ o número de bolas que é necessário acrescentar sobre os lados do polígono $P_k(n)$ de modo a que todos os seus lados fiquem com $n + 1$ bolas (ver figura).

Na figura estão representados os primeiros quatro termos das sucessões: $a_3(n)$, dos números triangulares, $a_4(n)$ dos números quadrados, e $a_5(n)$ dos números pentagonais.

a) Determine os números $a_3(5)$, $a_4(5)$ e $a_5(5)$.

b) Defina por uma relação de recorrência e pelo termo geral os números triangulares : $a_3(n),\ n \in \mathbb{N}_0$.

c) Para qualquer $k \in N,\ k \geq 3$ defina por uma relação de recorrência e pelo termo geral os números k- gonais: $a_k(n),\ n \in \mathbb{N}_0$.

d) Diga, justificando, se qualquer que seja $k \in \mathbb{N},\ k \geq 3$, $a_k(n)$ é ou não assintóticamente equivalente a n^2.

Se não fez c) responda a d')

d') Diga justificando se $3\sqrt{n} - 4log^2(n)$ é ou não assintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$.

6. Aproximações e comportamentos assintóticos

58. Qual dos números é maior 300! ou 100^{300}?

59. Seja $P(n)$ a probabilidade de em $2n$ lançamentos de uma moeda não viciada ar sairem igual número de caras e de coroas. Mostre que $P(n) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

60. Neste exercício deduz-se a Fórmula de Wallis para $\pi/2$ que é parte integrante da demonstração do teorema de Stirling.

    Considere o integral $I_n := \int_0^{\pi/2} sen^n(x)dx$.

    (a) Prove que I_n satisfaz a seguinte relação de recorrência: $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. (Use integração por partes considerando $sen^n x = (1 - cos^2 x).sen^{n-2} x)$

    (b) Deduza a partir de a) que o termo geral da sucessão I_n é definido por:
    $$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad e \quad I_{2n} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2}$$

    (c) Como para $x \in [0, \pi/2]$ se verificam as desigualdades: $0 \leq sin^{2n+1}(x) \leq sin^{2n}(x) \leq sin^{2n-1}(x)$ vem que $I_{2n+1} \leq\ I_{2n}\ \leq\ I_{2n-1}$.

Destas desigualdades sai, por enquadramento, a seguinte aproximação de $\pi/2$:

$$(Formula\ de\ Wallis) \qquad \lim_n \frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} = \frac{\pi}{2}.$$

61. Sejam $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas aplicações. Prove que $g = o(f)$ implica $g = O(f)$.

62. Sejam $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Mostre que se f e f são assintóticamente iguais então são assintóticamente equivalentes.

63. Quais das seguintes funções de variável natural são: $O(1), O(n^2), O(n), O(ln(n))$ e $o(1), o(n^2)$:

    $f(n) = a, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $g(n) = n\ ln(n)$, $h(n) = log_2(e^n)$, $p(n) = n^3$,

    $q(n) = ln(ln(n))$, $r(n) = an^2 + bn + c,\ a, b, c \in \mathbb{N}$.

    c) Sejam $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ e $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Mostre que se f e f são assintóticamente iguais então são assintóticamente equivalentes.

64. Mostre que:

    a) $\forall a, b > 1,\ a, b \in \mathbb{R},\ log_a(n) \approx log_b(n)$

    b) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \approx log(n)$.

    Sugestão. Estimar $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ entre somas de Riemann de áreas definidas por funções em escada convenientes na partição de $[1, n]$ em intervalos unitários.

65. Considere o seguinte problema:

    a) " Sabe-se que no meio de n moedas ($n \geq 2$) todas iguais existe uma moeda falsa. A moeda falsa é mais leve do que as outras. Pretende identificar-se a moeda falsa o mais rápidamente possível, fazendo pesagens até a encontrar." Mostre que pode resolver a questão com um número de pesagens da ordem de $log(n) = log_2(n)$.

    Sugestão: comece por supor que $n = 2^k$.

    b) Se souber que a moeda falsa tem apenas um peso diferente das restantes (mais leve ou mais pesada) ainda pode garantir que pode encontrar a moeda falsa com um número de pesagens da ordem de $log(n)$?