(B)

TESTE DE MATEMÁTICA DISCRETA/FINITA - 27/4/2017

Duração: 50 minutos

NOME COMPLETO ......Solução...... NÚMERO..........

I *(8 valores)*

1) Diga, JUSTIFICANDO (e apresentando os cáculos que fizer), se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

a) $4310 \equiv 120(mod\ 37)$

b) $4310^{36} \equiv 1(mod\ 37)$

c) Há exactamente 120 números menores do que 440 e relativamente primos com 440.

d) Se $a \equiv 3(mod\ 5)$ e $b \equiv 5(mod\ 7)$ então $a + b \equiv 8(mod\ 12)$.

a) FALSA porque $37 \nmid 4310-120=4190$

$(4190 = 37 \times 113 + 9)$

$$\begin{array}{r|l} 4190 & 37 \\ 49 & 113 \\ 120 & \\ 09 & \end{array}$$

b) VERDADEIRA porque 37 é um nº primo e $4310 \not\equiv 0 \ (mod\ 37)$ portanto, pelo Pequeno Teorema de Fermat $4310^{36} \equiv 1 \ (mod\ 37)$

$$\begin{array}{r|l} 4310 & 37 \\ 61 & 116 \\ 240 & \\ 18 & \end{array}$$

c) FALSA

$$\begin{array}{r|l} 440 & 2 \\ 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \end{array}$$

O número de nºs menores do que 440 e relativament primos com 440 é $\phi(440)$. Ora

$\phi(440) = \phi(2^3 \times 5 \times 11) = 2^3 \times \cancel{5} \times \cancel{11} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{\cancel{5}} \times \frac{10}{\cancel{11}} = 160 \neq 120$

d) FALSA Considere-se por exemplo $a=3$ $b=12 \equiv 5 (mod\ 7)$

$a+b = 15 \not\equiv 8 \ (mod\ 12)$

NOME ....Solução.... NÚMERO................

II *(8 valores)*

2) Determine todas as soluções da equação $\overline{7}x = \overline{21}$ em $\mathbf{Z_{42}}$

3) Mostre que existe um único número natural N menor do que 100 que dividido por 9 dá resto 7 e por 13 dá resto 3.

2) $\overline{7}x = \overline{21}$ em $\mathbb{Z}_{42}$

resolução 1: $7x = 21 + 42y \Leftrightarrow x = 3 + 6y$ com $42 = 6 \times 7$ as soluções são $x = 3 + 6y$ com $y = 0, 1, 2, \ldots, 6$ i.e.

$x \in \{\overline{3}, \overline{9}, \overline{15}, \overline{21}, \overline{27}, \overline{33}, \overline{39}\}$

resolução 2: $7x - 42y = 21 \Leftrightarrow x - 6y = 3$ (B)

solução particular: $(x_0, y_0) = (3, 0)$

solução da eq. homogenea: $x - 6y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = t(6, 1)$

sol. geral de (B): $(x, y) = (3, 0) + (6t, t) = (3 + 6t, t)$

sol. de (*) $\overline{x = 3 + 6t}$ $t = 0, 1, 2, \ldots, 6$ como na solução 1.

3) ① $N = 9x + 7$ ② $N = 13y + 3$

Estudamos as soluções inteiras de $9x + 7 = 13y + 3 \Leftrightarrow \boxed{9x - 13y = -4}$ *

Sol. particular de (*) $(x_0, y_0) = (1, 1)$

Sol. geral da eq. homogenea $9x - 13y = 0$: $(x, y) = t(13, 9)$ $t \in \mathbb{Z}$

Sol. geral de (*) $: (x, y) = (1, 1) + t(13, 9) = (1 + 13t, 1 + 9t)$ esta é a forma geral das soluções inteiras de (*).

Substituindo em ① x por $1 + 13t$ (ou em ② y por $1 + 9t$) temos

$N = 9(1 + 13t) + 7 = 16 + 117t$ $t \in \mathbb{Z}$. A única solução positiva menor do que 100 é pois $\boxed{N = 16}$

NOME Solução ....NÚMERO..................

III (4 valores)

4) Considere a função Φ de Euler. E sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Mostre:

a) Se $mdc(m, n) = 1$ a função Φ satisfaz a igualdade seguinte:

$$\Phi(m \times n) = \Phi(m) \times \Phi(n)$$

b) Diga, justificando, qual das desigualdades (1) ou (2) é válida para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(1)\ \Phi(m \times n) \geq \Phi(m) \times \Phi(n) \quad ou \quad (2)\ \Phi(m \times n) \leq \Phi(m) \times \Phi(n)$$

Consideremos a decomposição em factores primos de m e de n

a) Se $mdc(m,n)=1$ m e n não têm factores primos em comum

$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_j^{\alpha_j}$ $\quad n = q_1^{\beta_1} \cdots q_k^{\beta_k}$ $\quad q's \neq p's$ e

$\phi(m) = m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$ $\quad \phi(n) = n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)$

$mn = p_1^{\alpha_1}\cdots p_j^{\alpha_j} q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k}$ e

$$\phi(mn) = mn\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_k}\right) \underset{\text{comutatividade da } \times}{=} \phi(m)\phi(n)$$

b) No caso de m e n terem factores primos em comum $r_1, r_2 \cdots r_e$ temos

$m = r_1^{\gamma_1}\cdots r_e^{\gamma_e} p_1^{\alpha_1}\cdots p_j^{\alpha_j}$ $\quad n = r_1^{\gamma'_1}\cdots r_e^{\gamma'_e} q_1^{\beta_1}\cdots q_k^{\beta_k}$ com $\gamma_i, \gamma'_i \geq 1$

sendo

$\phi(m) = m\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_e}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_j}\right)$,

$\phi(n) = n\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_e}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)$ e

$$\phi(mn) = mn\left(1-\frac{1}{r_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r_e}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)$$

$$\geq mn\left(1-\frac{1}{r_1}\right)^2\cdots\left(1-\frac{1}{r_e}\right)^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_j}\right)\left(1-\frac{1}{q_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{q_k}\right)$$

porque $\left(1-\frac{1}{r_i}\right) < 1$

$$= \phi(m) \times \phi(n)$$

de a) e desta ultima desigualdade concluímos que é a desigualdade (1) $\phi(mn) \geq \phi(m)\phi(n)$ que é valida $\forall m, n \in \mathbb{N}$.