Axiomática de incidência

Aula 2 - 22/02/2019

Sumário

Elementos de Euclides

O livro "Elementos" de Euclides

está disponível na biblioteca digital do Instituto Clay de Matemática

https://www.claymath.org/library/historical/euclid/

Um versão com animações pode ser consultada em

https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html

Conceitos primitivos

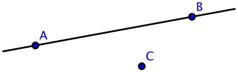
- Pontos - $A, B, C, \ldots$
- Rectas - $a, b, c, \ldots$
- Planos - $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- Incidência - pertencer a, conter, passar por (um ponto *incide com* ou *pertence a* uma recta ou a um plano)
- Ordem - estar entre
- Congruência - ser geometricamente igual

Axiomas de incidência de Hilbert (plano)

I.1 Dados dois pontos A e B, existe uma recta que os contém.

I.2 Dados dois pontos distintos A e B não existe mais do que uma recta que os contém.

I.3 Uma recta contém pelo menos dois pontos distintos. Existem três pontos que não pertencem à mesma recta.



Observações. Os axiomas I.1 e I.2 podem ser reduzidos a um único axioma: Dados dois pontos A e B, existe uma única recta que os contém. Denotamos por AB a única recta que contém os pontos A e B.
A seguinte proposição é uma consequência imediata dos axiomas I.1 e I.2..
Proposição. Duas rectas intersectam-se, no máximo, num ponto.

Axiomas de incidência de Hilbert (espaço)

I.4 Dados três pontos A, B, C que não estão na mesma recta, existe um plano α que os contém. Cada plano contém pelo menos um ponto.

I.5 Dados três pontos que não estão na mesma recta (não colineares), não existe mais do que um plano que os contém.

I.6 Se dois pontos A, B de uma recta r incidem com um plano α, então todos os pontos da recta r incidem com o plano α. (Dizemos que a recta está contida no plano α)

I.7 Se um ponto A incide com dois planos α e β, então existe um outro ponto B pelo menos, que incide com os planos α e β.

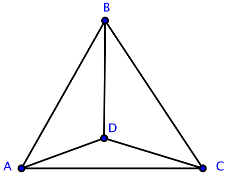
I.8 Existem pelo menos quatro pontos que não incidem com o mesmo plano.

Observações. Os axiomas I.4 e I.5 podem ser reduzidos a um único axioma: Dados três pontos A, B, C que não estão na mesma recta, existe um único plano que os contém.

Exemplo 2. Modelo do tetraedro

Seja $\mathcal{T} = \{A, B, C, D\}$ um conjunto com 4 elementos.
Consideremos uma geometria em $\mathcal{T}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{T}$;
- recta - qualquer subconjunto de $\mathcal{T}$ com precisamente dois elementos;
- plano - qualquer subconjunto de $\mathcal{T}$ com precisamente três elementos;
- incidir - pertencer a.

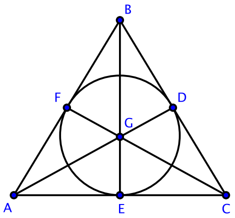


Exercício. Mostrar que esta geometria satisfaz todos os axiomas de incidência de Hilbert.

Exemplo 2. Geometria de 7 pontos e 7 rectas

Seja $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ um conjunto com 7 elementos. Consideremos uma geometria plana em $\mathcal{P}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{P}$;
- rectas - $\{A, E, C\}$, $\{A, F, B\}$, $\{A, G, D\}$, $\{B, D, C\}$, $\{B, G, E\}$, $\{F, G, C\}$, $\{E, F, D\}$
- incidir - pertencer a.



Exercício. Investigar se esta geometria satisfaz os axiomas de incidência de Hilbert para o plano.