Exame de Análise Matemática III/Cálculo Diferencial e Integral III

4 Janeiro 2018 - duração: Parte I: 1h30m; Parte II (2^o Teste): 1h30m; Total: 3h

Indique a sua versão do exame/teste na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.
Recorde que, por convenção, as circunferências são percorridas uma vez no sentido directo.

Versão A

Parte I

1. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) O seguinte conjunto é uma base de soluções da EDO $y''' - 2y'' + y' = 0$:
   A: $\{te^t - 1, e^t, t\}$. B: $\{te^t, t, 1\}$. C: $\{te^t, e^t + 1, 1\}$.

   (b) A mudança de variável $u = e^{-y}$ transforma a EDO $y' = a(t)e^y + c(t)$ na equação linear de 1ª ordem seguinte:
   A: $u' + c(t)u = -a(t)$. B: $u' + a(t)u = -c(t)$. C: $u' = a(t)u + c(t)$.

   (c) Todas as soluções $x(t)$ não nulas do sistema de EDOs $x' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$:
   A: são limitadas em $\mathbb{R}$. B: satisfazem $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0$. C: satisfazem $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = +\infty$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

2. (a) Determine a solução do PVI $y' + \dfrac{2y}{t} = (2+t^3)^2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, indicando o intervalo de definição.

   (b) Resolva o PVI $\dfrac{x^2 y'}{\sqrt{1+y}} = 4, y(1) = 0$, indicando o intervalo de definição.

   (c) Resolva a EDO $y'' + 2y' = \dfrac{2e^{-4t}}{1+e^{-4t}}$.

3. Para uma função 2-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 \le x < 0 \\ \sin(\pi x) & \text{se } 0 \le x < 1 \end{cases}$, é sabido que a sua série de Fourier é dada por $f(x) \sim \dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{2}\sin(\pi x) - \dfrac{2}{\pi}\sum_{n\ge1} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2n\pi x)$.

   (a) Esboce o gráfico de f para $x \in [-3, 3]$ e escreva o polinómio de Fourier de f de ordem 4.

   (b) Determine a soma da série $\sum_{n\ge1} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}$.

   (c) Sendo $S(x)$ ($x \in \mathbb{R}$) a soma da série de Fourier de f', diga qual a sua soma para $x = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função par de classe C^1. Prove que a solução $y(t)$ do PVI $y' = f(y)$, $y(0) = 0$ é uma função ímpar.

Parte II (2^o Teste)

5. Determine a solução $u = u(t, x)$ da equação das ondas a uma dimensão $u_{tt} = 4u_{xx}$, $(t, x \in \mathbb{R})$ com posição inicial $u(0, x) = x^2$ e velocidade inicial $u_t(0, x) = \cos x$ e indique o valor de $u(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

6. (a) Seja $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x^2 + y^2 < 2, 0 \le y \le x\}$. Represente geometricamente D e a imagem de D pela aplicação $z \mapsto -i \log z$ (ramo principal do logaritmo).

   (b) Para a função $u(x, y) = e^{ax}\cos(3y)$, encontre $a > 0$ tal que u tenha uma harmónica conjugada em $\mathbb{R}^2$ e determine-a.

7. Calcule os integrais (esboce as curvas e apresente os resultados na forma $a + ib$):

   (a) $\displaystyle\int_\gamma e^{\pi \bar{z}}\, dz$, onde γ é o segmento de recta com origem em 0 e extremidade em $3 - 3i$;

   (b) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{2(z-i)}}{\sin(iz)}\, dz$; (c) $\displaystyle\int_{|z+1|=2} \frac{z+6}{(z+2)z^2}\, dz$.

8. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Sendo $\log(2i + z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-1)^n$ (para o ramo principal do logaritmo), o raio r da maior bola $B_r(1)$ onde este desenvolvimento é válido é: A: $r = \sqrt{5}$. B: $r = 2$. C: $r = 1$.

   (b) Sendo a função $e^{\pi z}$ dada pela série de Taylor $e^{\pi z} = \sum_{n\geq 0} a_n(z-i)^n$ ($z \in \mathbb{C}$), o coeficiente a_2 é: A: $-\pi$. B: $-\pi^2/2$. C: π^2.

   (c) O conjunto de todos os pontos $z = x + iy$ onde a função $f(x+iy) = 2xy - x^2 + i(y^2 - x^2)$ é diferenciável é: A: $\{0\}$. B: $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$. C: $\{0, i\}$.

   (d) Sendo $g(z) = z^2\Big(\sin\big(\frac{3i}{z}\big) - 1\Big)$, o resíduo $\operatorname{Res}(g, 0)$ é: A: $3i$. B: $\dfrac{9i}{2}$. C: $-\dfrac{3i}{2}$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

9. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$, f uma função holomorfa em $B_R^*(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ e γ_1, γ_2 circunferências de centro em z_0 com raios r_1, r_2 respectivamente, onde $0 < r_1 < r_2 < R$. Para z tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$, mostre que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw + f(z).$$

FIM

Cotações: Parte I. 1,8+4,5+2,5+1,2=10. Parte II. 1+2+3,6+2,4+1=10.

Algumas fórmulas úteis

Série de Fourier de $f \in SC([-L, L])$: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Identidade de Parseval: para $f \in SC([-L, L])$: $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\Big)$.

Fórmula de D'Alembert: $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Fórmulas Integrais de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, com $z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

Fórmula dos Resíduos: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Res}(f, z_i)$, com $z_i \in \operatorname{int}\gamma, i = 1, \ldots, p$

Algumas séries de Taylor: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$