Métodos Matemáticos da Física 2011/12

Teste 3 30-05-2012

1. As funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$ são funções próprias dos operadores $\partial/\partial\phi$ e A tal que:

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,, \qquad A\,Y_l^m = -l(l+1)\,Y_l^m\,.$$

a) Diga quais são os valores possíveis dos números l, m, e quais os valores próprios de $\partial/\partial\phi$ e de $\partial^2/\partial\phi^2$ associados a $Y_l^m(\theta,\phi)$.
b) Escreva as funções $u = (x^2-y^2)/r^2$, $v = x\,y/r^2$, em coordenadas esféricas, e verifique que elas são funções próprias de A e $\partial^2/\partial\phi^2$, aplicando estes operadores a $u(\theta,\phi)$, $v(\theta,\phi)$.
c) Obtenha as combinações lineares de u e v que são funções próprias de A e $\partial/\partial\phi$.

2.a) Calcule a derivada da função $f(x) = \Theta(x)\,e^{-a\,x}$. Calcule ainda $f'(x) + a\,f(x)$.
b) Calcule a transformada de Fourier de $f(x)$.
c) Aplique a identidade de Parseval à função $f(x)$ e sua transformada de Fourier $\tilde{f}(k)$ para determinar o integral $\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+c^2)^{-1}\,dx$.

3. Considere a equação de Schrödinger:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad x\in\mathbb{R}\,.$$

a) Escreva $u(t,x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t,k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t,k)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(t,k)$ e a solução geral da equação de Schrödinger, $u(t,x)$.
c) Obtenha a solução $u(t,x)$ tendo como condição inicial $u(0,x) = \delta(x)$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\,, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,(x-x')}dk = 2\pi\,\delta(x'-x)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k)^*\,\tilde{g}(k)\,dk$$