Métodos Matemáticos da Física 2014/15

Exame 2ª época 06-07-2015

1. Considere a equação de Schrödinger no domínio, $x \in [0, \ell]$, com as condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad u(t,0) = 0\ , \qquad u(t,\ell) = 0\ .$$

a) Encontre soluções da equação pelo método de separação de variáveis.
b) Escreva a expressão da solução geral $u(t,x)$.

2. As funções próprias de um operador hermítico satisfazem a equação diferencial:

$$(x - x^2)\, y''(x) + (1 - 2x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0\ , \qquad x \in [0,1]\ .$$

Em particular, são soluções as funções: $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - 2x$, $y_2(x) = 1 - 6x + 6x^2$.
a) Determine os valores próprios associados a estas funções.
b) Diga justificando se estas funções $y_n(x)$ são ortogonais entre si.
c) Calcule os produtos internos $\langle y_0|y_0\rangle$, $\langle y_0|y_1\rangle$, $\langle y_1|y_1\rangle$, adoptando a função peso $\rho(x) = 1$.
d) A função $u(x)$ é um polinómio de grau 2 cujos produtos internos com as funções $y_n(x)$ valem: $\langle y_0|u\rangle = 1/3$, $\langle y_1|u\rangle = -1/3$, $\langle y_2|u\rangle = 1/3$. Determine a função $u(x)$. [Considere $u(x)$ como combinação linear de $y_n(x)$, sabendo que $\langle y_2|y_2\rangle = 1/5$].

3. Sejam as funções $g(x) = e^{-a\,x}\,\Theta(x)$, $f(x) = e^{i\,p\,x}$, onde $a > 0$, p, são constantes reais.
a) Defina e determine a convolução das duas funções $g(x)$, $f(x)$.
b) Calcule as transformadas de Fourier das funções $g(x)$, $f(x)$, $(g * f)(x)$.
c) Mostre que os seus resultados satisfazem a relação esperada entre as três transformadas de Fourier.

4. O laplaciano é dado em coordenadas esféricas por:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} A\ , \qquad A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ .$$

a) Considere uma função própria do laplaciano, $\Delta u = -k^2\, u$, dada por $u(\vec{r}) = f(r)/r$. Obtenha a equação diferencial a que satisfaz a função $f(r)$ e encontre a solução geral.
b) Determine a função própria $u = u(r)$ que satisfaz $u(0) = 1$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\,\delta(x)\ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$