

# Axioma das paralelas

Aula 3 - 27/02/2019

# Sumário

- ▶ Algumas definições
- ▶ O axioma das paralelas
- ▶ Modelos para geometrias não euclidianas

# Axioma das paralelas

O **axioma das paralelas** é um axioma de incidência no plano, que simplifica os fundamentos da geometria.

Este axioma é independente dos outros axiomas de incidência.

**Definição.** Duas rectas  $r$  e  $s$  dizem-se **complanares** se estiverem contidas no mesmo plano.

**Definição.** Duas rectas  $r$  e  $s$  dizem-se **paralelas** se forem **complanares e disjuntas**.

**Axioma das paralelas (versão de Playfair).** Seja  $r$  uma recta e  $P$  um ponto não incidente em  $r$ . Então, no plano determinado por  $r$  e por  $P$ , **existe uma única recta  $s$  paralela a  $r$  que passa por  $P$ .**

Uma geometria em que não é válido o axioma das paralelas diz-se **geometria não euclidiana**.

**Nota.** Para saber mais sobre geometrias não euclidianas consultar o livro de H. Coxeter, "Non-Euclidean Geometry", Cambridge University Press, 1998.

# Geometrias não euclidianas - geometria esférica

**Esfera de Riemann.** Seja  $\mathcal{S}$  uma superfície esférica do espaço. Consideremos uma geometria em  $\mathcal{S}$  interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ▶ ponto - qualquer elemento do conjunto  $\mathcal{S}$ ;
- ▶ recta - qualquer círculo máximo de  $\mathcal{S}$ ;
- ▶ plano - a esfera  $\mathcal{S}$ ;
- ▶ incidir em - pertencer a.



Neste modelo, é válido o **axioma elíptico**.

**E.1 (Axioma elíptico).** Seja  $r$  uma recta e  $P$  um ponto não incidente em  $r$ . Então **não existem rectas paralelas a  $r$  que contenham  $P$** .

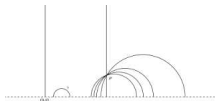
**Nota.** Para uma exposição interativa sobre geometria esférica consultar

<https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/>

# Geometrias não euclidianas - geometria hiperbólica

**Plano de Poincaré.** Seja  $\mathcal{P}$  um **semiplano aberto** definido por uma **recta**  $r$ . Consideremos uma geometria em  $\mathcal{P}$  interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ▶ ponto - qualquer elemento do conjunto  $\mathcal{P}$ ;
- ▶ recta - qualquer semirecta de  $\mathcal{P}$  perpendicular a  $r$  com origem em  $r$  ou qualquer semicircunferência de  $\mathcal{P}$  com centro em  $r$ ;
- ▶ plano - o semiplano  $\mathcal{P}$ ;
- ▶ incidir em - pertencer a.



Neste modelo é válido o **axioma hiperbólico**.

**H.1** (*Axioma hiperbólico*). Seja  $r$  uma recta e  $P$  um ponto não incidente em  $r$ . Então existem pelo menos duas rectas que incidem em  $P$  e são paralelas a  $r$ .

**Nota.** Para um pequeno resumo sobre geometrias não euclidianas consultar

[https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/postulado\\_paralelas.htm](https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.htm)