Métodos Matemáticos da Física 2017/18

Exame 1 19-06-2018

1.a) Determine o espectro de valores próprios e funções próprias $y(x)$ do operador d^2/dx^2 no domínio $x \in [0, \ell]$, que satisfazem as condições fronteira: $y'(0) = 0$, $y'(\ell) = 0$.
b) Diga, justificando, se os valores próprios encontrados são ou não degenerados.
c) Diga, justificando, se as funções próprias $y_n(x)$ são ortogonais entre si e determine os produtos internos $\langle y_n | y_n \rangle$.

2. A função $u(t, x)$ obedece à equação de Schrödinger e às condições fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0\ .$$

a) Encontre soluções $u(t, x)$ satisfazendo estas condições fronteira.
b) Obtenha a expressão da solução geral $u(t, x)$ sujeita às condições fronteira indicadas.

3. Considere a equação diferencial

$$(x - x^2)\, y''(x) + (1 - 2\,x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, 1]\ .$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x. Obtenha a relação de recorrência entre os seus coeficientes.
b) Determine as funções próprias, $y_1(x)$, $y_2(x)$, dadas por polinómios de grau 1 e 2, respectivamente, e os seus valores próprios. Assuma que $y_1(0) = y_2(0) = 1$.
c) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema e calcule o produto interno $\langle y_1 | y_2 \rangle$.

4. Seja a função definida em $\mathbb{R}$, $f(x) = \Theta(x) - \Theta(x - \ell)$, com $\ell > 0$.
a) Represente graficamente a função $f(x)$.
b) Determine a derivada $f'(x)$.
c) Calcule as transformadas de Fourier das funções $f(x)$, $f'(x)$, $g(x) = e^{i\,a\,x}\, f(x)$.
d) Calcule a transformada de Fourier da função $h(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\, \delta(x)\ , \qquad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$