Uma correção do Exame de CDI III – 29 de janeiro de 2019

versão A

1 (a) $y' + \frac{2y}{t} = \frac{1}{2+5t^3}$, $t>0$

Equação linear de 1ª ordem

$a(t) = \frac{2}{t} \rightsquigarrow A(t) = 2\log t = \log t^2$

Multiplicando a equação pelo fator integrante $e^{\log t^2} = t^2$ $(t>0)$,

vem:

$$(t^2 y)' = \frac{t^2}{2+5t^3} \Leftrightarrow t^2 y = \frac{1}{15}\log(2+5t^3) + c$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{15t^2}\log(2+5t^3) + \frac{c}{t^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$(t>0)$

(b) $y'' - \frac{3}{2}y' - y = 3e^t + 2$ (EDO linear de 2ª ordem)

Como $\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+4}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow \lambda = 2 \ \vee \ \lambda = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ A solução geral da equação homogénea é

$$y_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Procure-se uma solução particular da forma

$$y_p(t) = a e^t + b.$$

Substituindo na equação, vem

$$a e^t - \frac{3}{2} a e^t - a e^t - b = 3e^t + 2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Assim,

$$\begin{cases} a\left(1 - \frac{3}{2} - 1\right) = 3 \\ -b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow y_p(t) = -e^t - 2$$

$\therefore$ A solução geral da EDO é

$$y(t) = -e^t - 2 + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t/2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(c) $\begin{cases} y' \sin 2t + y^2 \cos 2t = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4} \end{cases}$

Para $\sin 2t \neq 0 \Leftrightarrow 2t \neq k\pi \Leftrightarrow t \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$,

a equação equivale a $y' = -y^2 \frac{\cos 2t}{\sin 2t}$

Pelo T.E.U., a solução do PVI nunca se anula, e portanto:

$$-y' y^{-2} = \frac{\cos 2t}{\sin 2t} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{\log|\sin 2t|}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow y(t) = \frac{2}{\log|\sin 2t| + 2C}$$

Como $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{4}$, tem-se $\frac{2}{0+2C} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow C = -4$

$\therefore$ A solução do PVI é

$$y(t) = \frac{2}{\log(\sin 2t) - 8}, \quad \text{com } t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

(d)

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & 3e^{2t} \\ -2e^t & e^{2t} \end{bmatrix}$$ é uma matriz fundamental de soluções, uma vez que $\det X(0) = 7 \neq 0$.

Assim, a solução geral de $x' = Ax$ é dada por

$$x(t) = X(t)C, \quad \text{com } C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Escolhemos agora C tal que

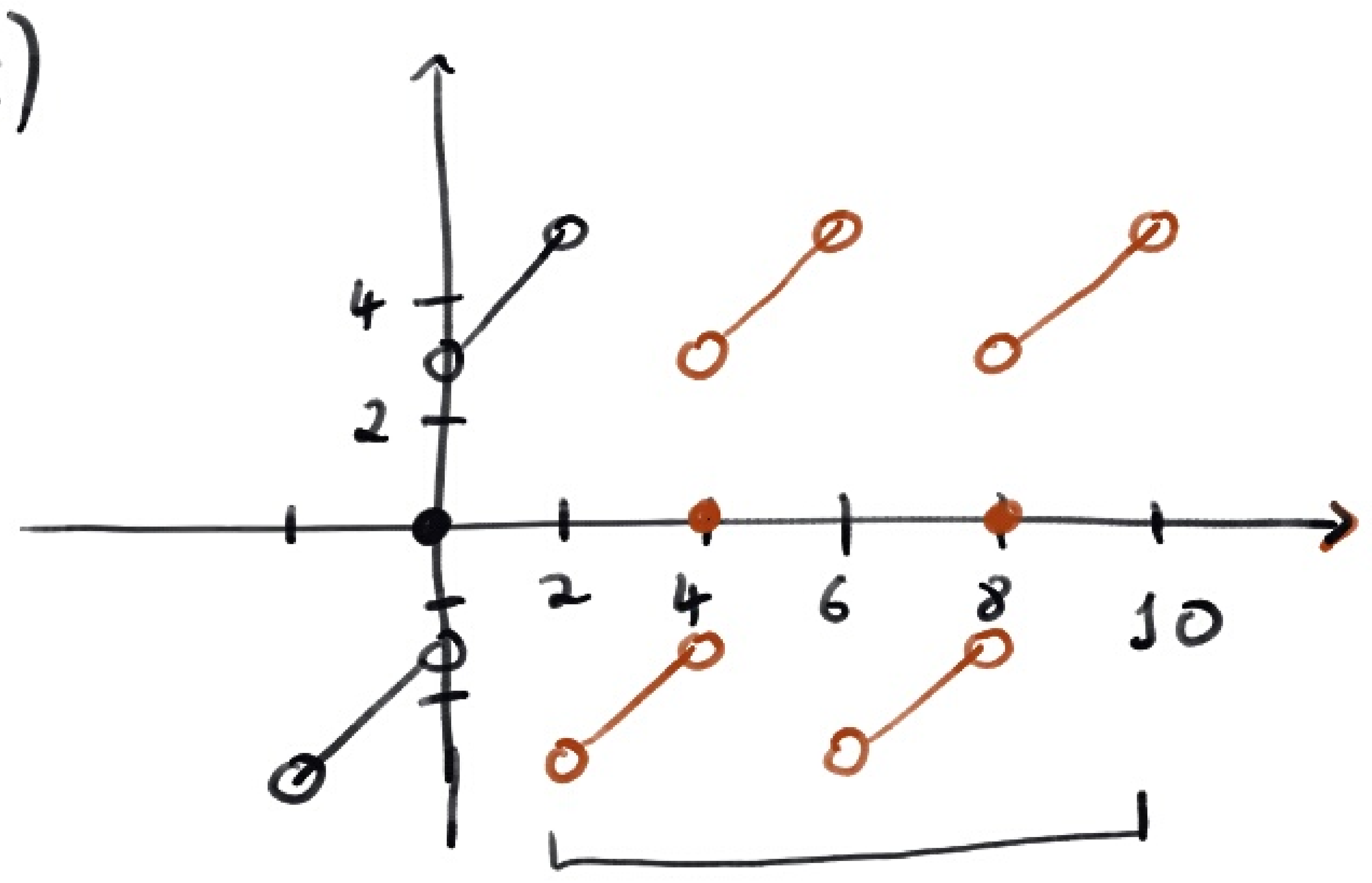
$$X(0)C = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{4}{7} \\ c_2 = -\frac{1}{7} \end{cases}$$

$\therefore$ A solução é dada por

$$x(t) = X(t)\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{7}e^t - \frac{3}{7}e^{2t} \\ \frac{8}{7}e^t - \frac{1}{7}e^{2t} \end{bmatrix}$$

2. (a) B (b) C (c) B

3. (a) (i)



(ii) $$b_5 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)dx = \int_0^2 (x+3)\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)dx =$$

$$= -\left[\frac{2(x+3)}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{5\pi}\cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{16}{5\pi} + \left[\frac{4}{25\pi^2}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right)\right]_0^2 = \frac{16}{5\pi}$$

(b) Se existisse tal g, então pela identidade de Parseval

$$\|g\|^2 = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{m\geq 1} a_m^2 + b_m^2\right) = 2\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m},$$

e portanto a série $\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m}$ seria convergente, o que é um absurdo.

4. (a) Substituindo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ na equação $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, vem

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \overset{(\text{para } X,Y\neq 0)}{\iff} \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

para todo o $x\in[0,a]$, $y\in[0,b]$. Assim, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda \iff \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ Y'' + \lambda Y = 0 \end{cases}$$

(b) $X'' - \frac{m^2\pi^2}{b^2}X = 0$ tem equação característica

$$r^2 - \frac{m^2\pi^2}{b^2} = 0 \iff r = \pm\frac{m\pi}{b}$$

$$\therefore X(x) = c_1 e^{\frac{m\pi}{b}x} + c_2 e^{-\frac{m\pi}{b}x}$$

Como $X(0) = 0 \iff c_2 = -c_1$, as soluções são da forma

$$X(x) = c\left(e^{\frac{m\pi x}{b}} - e^{-\frac{m\pi x}{b}}\right) = D\sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$$

$D\in\mathbb{R}$.

c) As funções da forma

$$(1)\ u(x,y) = A\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\sinh\left(\frac{m\pi x}{b}\right),\ A\in\mathbb{R}$$

são soluções do problema pedido. Com efeito, $\sin\left(\frac{m\pi 0}{b}\right) = 0 = \sin\left(\frac{m\pi b}{b}\right)$ e $\sinh(0) = 0$, pelo que as funções dadas por (1) satisfazem as condições de fronteira.

5a) $\Delta u = 2 - 2a = 0 \iff \boxed{a=1}$

Assim, $u(x,y) = x^2 + 10y - y^2$ é parte real de uma função holomorfa $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 10 - 2y = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 2y - 10 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2x \end{cases}$$

Da primeira equação,

$$v(x,y) = 2xy - 10x + \varphi(y).$$

Da segunda,

$$2x = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + \varphi'(y) \iff \varphi'(y) = 0 \iff \varphi(y) = C, C \in \mathbb{R}$$

$$\therefore\ v(x,y) = 2xy - 10x + C \quad e$$

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + 10y - y^2 + i(2xy - 10x + C), \quad C \in \mathbb{R}$$

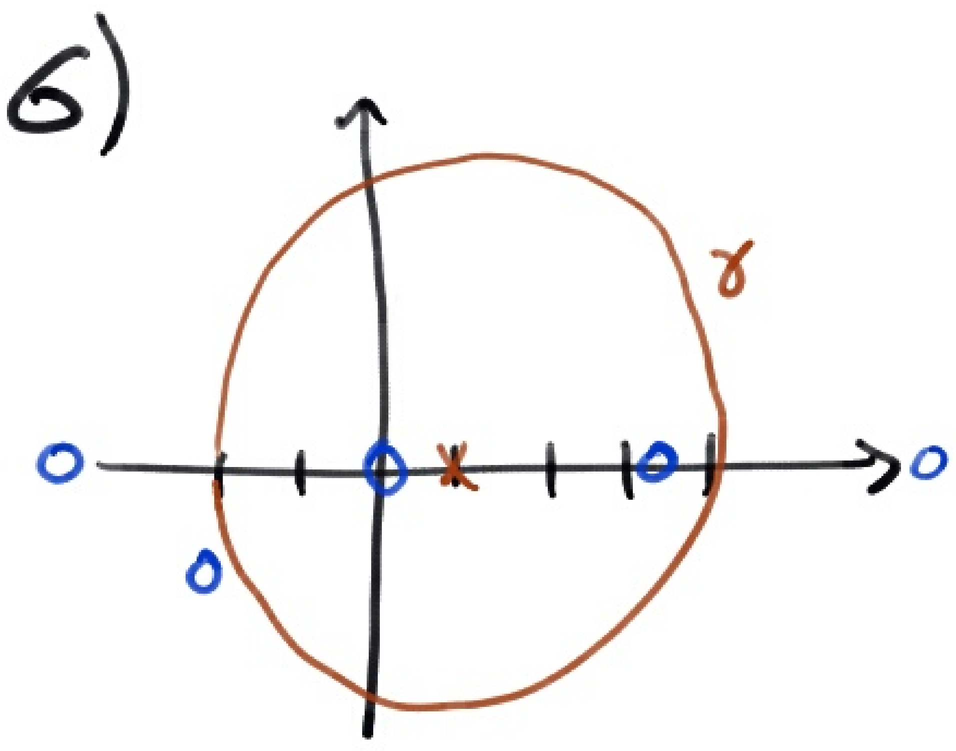
(b) $$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z+2i)^4} = \frac{e^{i(z+2i-2i)}}{(z+2i)^4} = \frac{e^2 e^{i(z+2i)}}{(z+2i)^4} = \frac{e^2}{(z+2i)^4} \sum_{m \geq 0} \frac{i^m (z+2i)^m}{m!}$$

$$= \sum_{m \geq 0} \frac{e^2 i^m (z+2i)^{m-4}}{m!} \quad \text{para} \quad |z+2i| > 0.$$

Assim, $r = +\infty$ e, fazendo acima $m-4 = -1 \iff m = 3$, obtém-se

$$\text{Res}(g, -2i) = a_{-1} = \frac{e^2 i^3}{3!} = -\frac{i e^2}{6}$$

6)



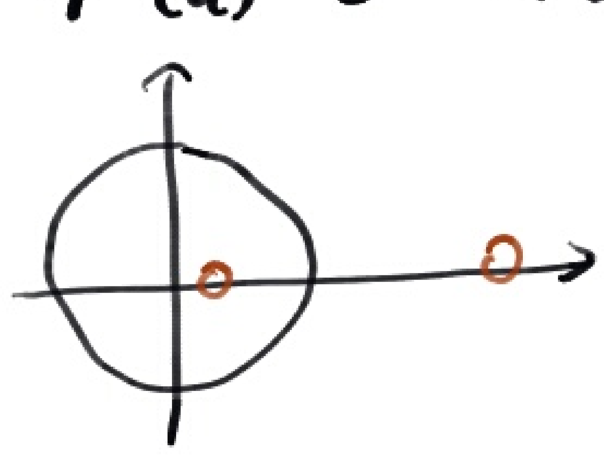
A função integranda é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-2-i, k\pi\ (k \in \mathbb{Z})\}$. As únicas singularidades no interior de γ são 0 e π. O integral é dado por

$$\int_{|z-1|=3} \frac{2iz-5}{z+2+i}\,dz + \int_{|z-1|=3} \frac{e^{3iz/2}-3}{\sin z} \underset{\substack{\text{teor. Cauchy} \\ +\ \text{teor. Cauchy} \\ \text{p/ mult. conexos}}}{=} \int_{C_\varepsilon(0)} \frac{e^{3iz/2}-3}{\sin z}\,dz + \int_{C_\varepsilon(\pi)} \frac{e^{3iz/2}-3}{\sin z}\,dz$$

$$\underset{\text{T. Resíduos}}{=} 2\pi i \left(\lim_{z \to 0} \frac{z}{\sin z}\left(e^{3iz/2}-3\right) + \lim_{z \to \pi} \frac{z-\pi}{\sin z}\left(e^{3iz/2}-3\right) \right)$$

$$= 2\pi i \left(1 - 3 - \left(e^{3i\pi/2} - 3\right)\right) = 2\pi i\left(-2 + (i+3)\right) = -2\pi + 2\pi i$$

7 (a) $$z^2 - 4z + 1 = 0 \iff z = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$



Apenas a singularidade $2-\sqrt{3}$ se encontra no interior da curva.

$$I = \int_{|z|=1} \frac{\frac{1}{(z-2-2\sqrt{3})}}{z-2+2\sqrt{3}} \underset{\text{F.I.C.}}{=}$$

$$= 2\pi i \frac{1}{\cancel{2} - \sqrt{3} - \cancel{2} - \sqrt{3}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi\sqrt{3} i}{3}$$

(b) Para $z = x + iy$, tem-se

$$z^2 - 4z + 1 = 2z\,(\operatorname{Re} z - 2) \Leftrightarrow (x+iy)^2 - 4(x+iy) + 1 = 2(x+iy)(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + \cancel{2xyi} - \cancel{4x} - \cancel{4yi} + 1 = 2x^2 - \cancel{4x} + \cancel{2xyi} - \cancel{4yi}$$

$$\Leftrightarrow -x^2 - y^2 + 1 = 0$$

(c) Por definição, usando a parametrização $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$-\frac{\pi\sqrt{3}i}{3} = I = \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2 - 4z + 1}\,dz \underset{\text{alínea (b)}}{=} \int_{|z|=1} \frac{1}{2z(\operatorname{Re} z - 2)}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{i\cancel{e^{it}}}{2\cancel{e^{it}}(\operatorname{Re} e^{it} - 2)}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} \frac{1}{2(\cos t - 2)}\,dt \implies J = -\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

8. (a) C (b) A (c) C

9. (a) Pelo Teorema de Cauchy para multiplamente conexos seguido da fórmula integral de Cauchy:

$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = \int_{C_\varepsilon(a)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz + \int_{C_\varepsilon(b)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$$

$$= 2\pi i \frac{f(a)}{a-b} + 2\pi i \frac{f(b)}{b-a} = \frac{2\pi i}{a-b}\left(f(a) - f(b)\right)$$

(b) Pela fórmula M-L e pela alínea (a),

$$\left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\,|\partial B_R(0)|\,\max_{|z|=R} \frac{|f(z)|}{|(z-a)(z-b)|}$$

$$\le \frac{\cancel{2\pi} R}{\cancel{2\pi}}\, M\, \frac{1}{\min_{|z|=R} |z-a||z-b|} \le \frac{R \cdot M}{\frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}} = \frac{4M}{R}$$