(C)

TESTE DE MATEMÁTICA DISCRETA/FINITA - 10/4/2019

Duração: 1 hora 30 minutos

NOME COMPLETO ....Solução........NÚMERO..............

I (*9 valores*)

Nas perguntas 1 a 4 assinale com uma cruz as respostas corretas.

Nas perguntas 5 e 6 escreva a resposta final na linha de resposta.

Neste grupo respostas erradas descontam.

1) Sejam A e B dois conjuntos. Sabendo que $|A| = 9$ e $|B| = 11$ podemos concluir que:

☒ a) Existem aplicações injectivas de A para B.

☐ b) Qualquer aplicação de A para B é injectiva.

☐ c) Há exatamente 55 aplicações injetivas de A para B.

☐ d) $|A \setminus B| = |B \setminus A|$

☒ e) Se $|A \setminus B| = 4$ então $|A \cup B| = 15$.

2) Considere o número natural $N = 112233445566$.

a) Quantos números naturais com os mesmos 12 algarismos de N têm os algarismos iguais consecutivos ?

☒ (i) $6!$ ☐ (ii) 2^6 ☐ (iii) $\binom{12}{6}$.

b) Quantos números naturais têm os mesmos 12 algarismos de N ?

☐ (i) $12!$ ☒ (ii) $\frac{12!}{2^6}$ ☒ (iii) $\binom{12}{2}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}$

3) Quantas permutações da sequência 123456 começam por 1 OU acabam em 6 ?

☐ (i) $6! - 4!$ ☒ (ii) $2 \times 5! - 4!$ ☐ (iii) $2 \times 5!$.

4) Sendo f a função $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definida por $f(n) = n^o de\ algarismos\ de\ n\ na\ base$ 12, assinale a(s) resposta(s) verdadeiras:

☒ (i) $f(12^7) = 8$ ☐ (ii) $f = o(ln\ n)$ ☒ (iii) $f = O(ln\ n)$.

5) Escreva o número racional $N = 0,2(34)$ na forma de fração.

Resp. $\frac{232}{990} = \frac{116}{495}$

6) Considere os números a e b definidos pela sua decomposição em factores primos:

$$a = 2^3 \times 3^2 \times 7^2 \times 11^3 \times 13, \quad b = 2^2 \times 3 \times 7^5 \times 11 \times 17.$$

a) $mdc(a, b) =$ $2^2 \times 3 \times 7^2 \times 11$

b) $mmc(a, b) =$ $2^3 \times 3^2 \times 7^5 \times 11^3 \times 13 \times 17$

c) $|Div^+(a) \cap Div^+(b)| =$ $3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$

NOME Solução NÚMERO

II (*6 valores*)

Responda às perguntas nesta folha de exame, *apresente todos os cálculos.*

1) Determine o termo geral da sucessão u_n definida pela relação de recorrência:

$$u_n = 6u_{n-1} - 9u_{n-2};\ n \geq 2\ \ u_0 = 2;\ u_1 = 5$$

2 - a) Seja $d := mdc(31291, 312)$. Determine d.

b) Determine $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que $d = m \times 31291 + n \times 312$.

c) Da seguinte lista de números: 11, 34, 39, 45 diga, justificando, quais se escrevem como combinação linear inteira de 31291 e 312 e escreva-os nessa forma.

1) equação característica : $t^2 - 6t + 9 = 0 \iff (t-3)^2 = 0$

forma geral de $u_n = \alpha 3^n + \beta n 3^n$

determinar α e β de modo a u_n satisfazer as condições iniciais:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \to \alpha = 2 \\ u_1 = 5 \to 3\alpha + 3\beta = 5 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$$ portanto

$$\boxed{R:\quad u_n = 2 \times 3^n - n 3^{n-1}}$$

2) a)

$$(*)\begin{cases} 31291 = 312 \times 100 + 91 \\ 312 = 91 \times 3 + 39 \\ 91 = 39 \times 2 + 13 \\ 39 = 3 \times 13 + 0 \end{cases}$$

$mdc(31291, 312) = mdc(312, 91) = mdc(91, 39) = mdc(39, 13) = 13$

Resp. $\boxed{mdc(31291, 312) = 13}$

b) de (*) : $13 = 91 - 39 \times 2 = 91 - (312 - 91 \times 3) \times 2 =$

$= -2 \times 312 + 7 \times 91 = -2 \times 312 + 7 \times (31291 - 312 \times 100)$

$= 7 \times 31291 - 702 \times 312$

R: via algoritmo de Euclides obtivemos $m = 7$, $n = -702$

c) Pelo Teorema de Euclides só os múltiplos de mdc(31291, 312) = 13 são combinação linear inteira dos nº dados. ~~Como~~ Da lista de números dada apenas 39 é múltiplo de 13 e temos de b)

$$\boxed{(3 \times 13) = 39 = \underbrace{3 \times 7}_{21} \times 31291 - \underbrace{3 \times 702}_{2106} \times 312}$$

NOME .... Solução .... NÚMERO................

III *(5 valores)*

Considere o reticulado orientado $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ da figura. As retas horizontais orientadas da esquerda para a direita, as retas verticais de baixo para cima.

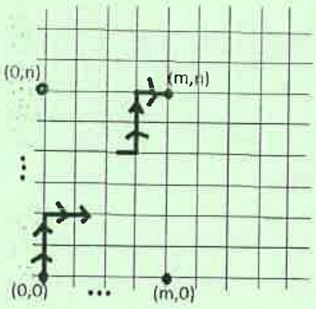


Fig.A

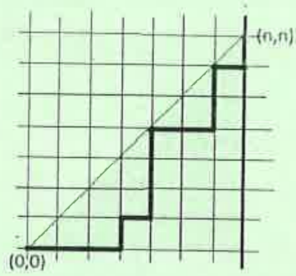


Fig. B

1) Seja $u(m,n) :=$ *n^o de caminhos orientados de* $(0,0)$ *a* (m,n), $(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. Indique, justicando, o termo geral de $u(m,n)$ (Fig.A) .

2) Defina $b_n :=$ *n^o* de *caminhos orientados de* $(0,0)$ *a* (n,n) *que contêm pelo menos um ponto da forma* $(j, j+1)$.

Prove, estabelecendo uma bijeção, que $b_n =$ *n^o caminhos orientados de* $(0,0)$ *a* $(n-1, n+1)$.

Sugestão. Considere os caminhos em questão divididos em duas partes: a primeira até atingirem o primeiro ponto da forma $(j, j+1)$, a segunda, desse ponto até ao último.

3) Determine $C_n :=$ *n^o* de *caminhos orientados de* $(0,0)$ *a* (n,n) *que não sobem acima da reta que contem os pontos* $(0,0)$ *e* (n,n) (Fig.B).

(Pode usar 2) mesmo não o tendo resolvido.)

1) A partir de qualquer ponto $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ podemos dar um "passo" horizontal $(i,j) \xrightarrow{H} (i+1, j)$ ou um "passo" vertical $(i,j) \xrightarrow{V} (i, j+1)$.

A correspondência que a cada caminho de $(0,0)$ a (m,n) faz corresponder a sequência dos seus $(m+n)$-passos horizontais e verticais estabelece claramente uma bijeção entre o conjunto dos caminhos de $(0,0)$ a (m,n) e o conjunto dos anagramas da palavra $\underbrace{H \dots H}_{m}\underbrace{V \dots V}_{n}$ pelo que

$$u(m,n) = \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

2) Sejam $\mathcal{A}_n = \{$caminhos (orientados) de $(0,0)$ a (n,n) que contêm pelo menos um ponto $(j,j+1)\}$

$\mathcal{B}_n = \{$caminhos (orientados) de $(0,0)$ a $(n-1,n+1)\}$.

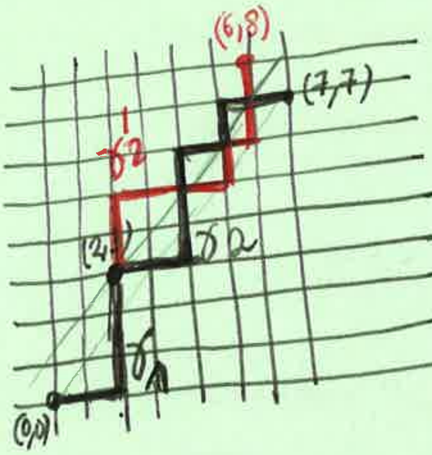
Dado um caminho $\gamma \in \mathcal{A}_n$ seja $(i,i+1)$ o primeiro ponto da forma $(j,j+1)$ contido em γ. Claramente $0 \leq i \leq n-1$ e podemos escrever

$$\gamma = \underbrace{\gamma_1}_{\gamma \text{ entre } (0,0) \text{ e } (i,i+1)} \cup \underbrace{\gamma_2}_{\gamma \text{ de } (i,i+1) \text{ até } (n,n)}.$$

Definamos a aplicação $f: \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{B}_n$ por:

$$f(\gamma = \underbrace{\gamma_1}_{\substack{i - H\text{'s} \\ (i+1) - V\text{'s}}} \cup \underbrace{\gamma_2}_{\substack{(n-i) - H\text{'s} \\ (n-i-1) - V\text{'s}}}) = \underbrace{\gamma_1}_{\substack{i - H\text{'s} \\ (i+1) - V\text{'s}}} \cup \underbrace{\gamma_2'}_{\substack{(n-i-1) - V\text{'s} \\ (n-i) - H\text{'s}}} \qquad \gamma_2 \xrightarrow{\text{troca H's por V's, V's por H's}} \gamma_2'$$

$\gamma' := \gamma_1 \cup \gamma_2'$ é claramente um caminho de $(0,0)$ a $(n-1,n+1)$ cujo primeiro ponto da forma $(j,j+1)$ é $(i,i+1)$, o mesmo de γ.



Na Figura está representado a preto um caminho $\gamma \in \mathcal{A}_7$. $f(\gamma)$ é o caminho de $(0,0)$ a $(6,8)$ que coincide com o caminho γ até $(2,3)$ e a partir daí é o caminho encarnado.

A aplicação f é claramente injectiva e também sobrejectiva. Repare que dado $\gamma' \in \mathcal{B}_n$ sendo $(i,i+1)$ o primeiro ponto de γ' da forma $(j,j+1)$ temos

$$\gamma' = \underbrace{\gamma_1'}_{\gamma' \text{ de } (0,0) \text{ a } (i,i+1)} \cup \underbrace{\gamma_2'}_{\gamma' \text{ de } (i,i+1) \text{ a } (n-1,n+1)}$$

e então $f^{-1}(\gamma_1' \cup \gamma_2') = \gamma_1' \cup \gamma_2 \in \mathcal{A}_n$. $\quad \gamma_2' \xrightarrow{\text{troca H's por V's, V's por H's}} \gamma_2$

Sendo f uma bijecção temos por 1) $\boxed{b_n = \binom{n-1+n+1}{n-1} = \binom{2n}{n-1}}$

3) $\boxed{C_n = u(n,n) - b_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}}$

Os nºˢ C_n são conhecidos como NÚMEROS DE CATALAN e aparecem em problemas de contagem aparentemente muito diferentes.