Métodos Matemáticos da Física — 2010/11

Teste 3 — 28-05-2011

1. Considere a equação diferencial não homogénea

$$i\, y'(x) + a\, y(x) = -f(x), \qquad y(\ell) = -y(-\ell)\ , \qquad x \in [-\ell, +\ell]\ .$$

a) Deduza a equação diferencial e a condição fronteira a que deve satisfazer a função de Green $G(x,z)$ para que $y(x) = \int G(x,z)\, f(z)\, dz$ seja solução da equação acima.
b) Admitindo que

$$G(x,z) = c\ \Theta(x-z)\, e^{i\,a(x-z)} + c_1(z)\, e^{i\,a\,x}\ ,$$

determine a constante c e a função $c_1(z)$.

2.a) Estabeleça a relação entre a transformada de Fourier da função $g(x) = f(x)\, x^n$ e a derivada de ordem n da transformada de Fourier $\tilde{f}(k)$ da função $f(x)$.
b) Calcule as transformadas de Fourier das funções:

$$f_1(x) = \Theta(x)\, e^{-a\,x}\ , \qquad f_2(x) = \Theta(x)\, e^{-a\,x}\, x^3\ .$$

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

Escreva $u(t,x)$ em termos da transformada de Fourier $\tilde{u}(t,k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t,k)$. Determine $\tilde{u}(t,k)$ e $u(t,x)$ para qualquer instante t dada a condição inicial $u(0,x) = f(x)$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk\ ,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,(x-x')} dk = 2\pi\, \delta(x'-x)$