1.4 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

1.4.1 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Exemplo: Tomemos como espaço de resultados Ω as famílias com 2 filhos. Ω tem um nº finito de elementos que podemos enumerar facilmente

$\Omega = \{MM, MR, RM, RR\}$ $\quad R - rapaz, \quad M - rapariga$

Pensemos na característica, nº de rapazes das famílias com 2 filhos. Podemos tratar esta característica como uma função que a cada elemento de Ω atribui um valor numérico. Assim, X(MM) =0, X(MR)=X(RM)=1 e X(RR)=2 e passamos a trabalhar num subconjunto de |R que é a imagem de Ω através de X.

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

À função $X: \Omega \to \{0,1,2\} \subseteq |R$ chamamos *variável aleatória* e designamos abreviadamente por *v.a.*. Precisamos agora de saber calcular probabilidades quando trabalhamos com esta função. Por exemplo,

Qual a probabilidade da família ter "pelo menos um rapaz"ou seja $P(X \geq 1)$*?* Antes de mais temos de começar por atribuir probabilidades em Ω e só depois podemos responder a esta pergunta.

Sabemos que P (Rapaz) =P (Rapariga) =0.5, então os 4 casos possíveis de Ω têm igual probabilidade que é 1/4 para cada um, isto é, P (MM) =P (MR) =P (RM) =P (RR) =. 25. Agora podemos calcular as seguintes probabilidades:

P(X=0) =P {MM} =0.25; P(X=1) =P {MR, RM} =0.5; P(X=2) =P {RR} =0.25

Esquematicamente

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{cases} \qquad (1)$$

E já podemos responder à pergunta feita anteriormente

P (X≥1) =P {X=1 ou X=2} =P (X=1) +P (X=2) =P ({MR, RM})+P({RR})=0.75=

=1- P(X<1)=1-P(X=0).

Note-se que P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1.

Definição 1: Uma v.a. X que tome valores num conjunto finito ou infinito numerável A= $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ com $p_i = P(X = x_i),\ i = 1,\ldots,n,\ldots$ é uma variável aleatória *discreta* e a colecção $\{p_i\}_{i\in|N}$ com $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{+\infty} p_i = 1$ é a <u>função massa de probabilidade</u> (f.m.p.) da v.a. X.

Valor Médio e Variância

Relativamente ao exemplo anterior poderemos também perguntar: Qual o NÚMERO MÉDIO DE RAPAZES que uma família de dois filhos tem?

A v.a. X-nº de rapazes numa família de 2 filhos, tem a seguinte f.m.p.

$$X\begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{cases}$$

Por analogia com a média de uma amostra aleatória, calculemos a quantidade

$$E(X) = 0 \times 0.25 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.25 = 1$$

trata-se agora de uma média ponderada, onde cada valor da v.a. X tem um coeficiente de ponderação igual à sua probabilidade de ocorrência.

Nem sempre o valor médio é um valor assumido pela v.a. como acontece neste caso.

O valor médio é uma *medida de localização*. No caso da distribuição ser simétrica (se o valor médio existir) ele coincide com o ponto de simetria da distribuição. É precisamente este o caso, **1** é o centro desta v.a..

De uma maneira geral, o valor médio de uma v.a. discreta define-se da seguinte maneira.

Definição 2: Seja X uma v.a. *discreta* que toma valores no conjunto A= $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ com $p_i = P(X = x_i),\ i = 1,\ldots,n,\ldots$. À quantidade

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i \qquad (2)$$

chama-se *valor médio*, desde que $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i < \infty$ e designa-se pela letra grega μ.

Outra quantidade importante é a variância que, quando existe, é uma medida de dispersão em relação ao valor médio.

Definição 3: Seja X uma v.a. *discreta* que toma valores no conjunto A= $\{x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ com $p_i = P(X = x_i),\ i = 1,\ldots,n,\ldots$. Define-se *variância* de X

$$Var(X) = E(X-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}(x_i-\mu)^2 p_i \tag{3}$$

e designa-se pelas letra grega σ^2 .

Atendendo às propriedades de linearidade da função valor médio tem-se:

$$\sigma^2 = Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 p_i - \mu^2 \tag{4}$$

Exemplo: Considerando ainda a v.a. X-nº de rapazes das famílias com 2 filhos tem-se

$\sigma^2 = E\left(X^2\right) - \mu^2 = 0^2 \times 0.25 + 1^2 \times 0.5 + 2^2 \times 0.25 - 1^2 = 0.5$

Podemos ainda calcular a raiz quadrada positiva da variância, isto é, o *desvio-padrão* e que se designa por σ. Neste caso, $\sigma \approx 0.71$.

Função de distribuição

Uma função de grande importância para caracterizar a distribuição de *qualquer* v.a. é a função de distribuição:

Definição 4: Seja X uma variável aleatória, à função $F(x) = P(X \leq x)$ para $x \in \Re$, chama-se *função de distribuição* da v.a. X.

Embora a função de distribuição esteja definida para qualquer v.a. (discreta ou não), iremos agora restringir-nos ao caso discreto.

Exemplo: Voltando ao exemplo anterior podemos determinar a função de distribuição da v.a. X-nº de rapazes numa família com 2 filhos, cuja f.m.p. é dada por (1).

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.25 & 0 \leq x < 1 \\ 0.75 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases} \tag{5}$$

A função anterior não é contínua, apresenta saltos nos pontos 0, 1 e 2 e o valor dos saltos é respectivamente igual a

$F(0)-F(0^-)=0.25$, $F(1)-F(1^-)=0.5$, $F(2)-F(2^-)=0.25$, isto é, a partir da f.d. obtivemos a f.m.p. da v.a. X. As probabilidades de cada valor assumido pela variável são iguais aos valores dos saltos da f.d. nesses pontos.
As funções de distribuição das v.a.'s discretas apresentam este comportamento.

Conhecida a f.d. da v.a.X podemos calcular probabilidades do tipo:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a), \quad \forall a,b \in \Re \tag{6}$$

Exemplo: Considerando a v.a. X definida em (1) tem-se: $P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - 0.25 = 0.75$
A função de distribuição tem as seguintes propriedades que se deduzem a partir da definição.

Propriedades da f.d.

1. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$
$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$

2. *$F(x)$ é uma função <u>não</u> decrescente, isto é, se x_1 e x_2 são quaisquer dois valores tais que $x_1 < x_2$ então $F(x_1) \leq F(x_2)$*

1.4.2 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

A noção de variável aleatória discreta não serve para descrever muitos dos fenómenos que encontramos na vida real. Basta pensar na quantidade de precipitação diária num determinado lugar, o tempo de vida de uma bateria, a altura de uma pessoa, etc.Teoricamente, usando instrumentos de precisão "perfeitos" estas quantidades podem tomar qualquer valor num intervalo de |R. Às variáveis aleatórias que podem tomar qualquer valor de um intervalo chamam-se *contínuas*.
A caracterização das v.a.'s contínuas é mais complexa do que a das variáveis discretas, podemos perceber que neste caso não é possível atribuir a cada valor da variável uma probabilidade positiva, pois seria violado o axioma A2), pelo qual a soma de todas as probabilidades terá de ser igual a 1.

A definição de variável aleatória contínua é dada através da sua f.d.:

Definição 1: Seja X uma v.a. com função de distribuição $F(x)$. X é *contínua* sse a sua f.d. $F(x)$ é contínua $\forall x \in \Re$.

Assim, para uma v.a. contínua tem-se: $P(X = x) = 0$ para todo o $x \in \Re$ (1)

Este facto não nos deve surpreender, pois se X representa a altura em cm de uma pessoa, qual será a probabilidade de uma pessoa medir *exactamente* 164 cm? Certamente nunca observaremos uma pessoa que meça exactamente 164 cm pois os nossos instrumentos de medida não são perfeitos, mas observaremos pessoas que medem entre 163.6 cm e 164.4 cm. Mas certamente o que tem mais interesse é calcular a probabilidade da altura de uma pessoa estar entre 160 e 170 cm, ou ser superior a 170 cm, etc.

De uma maneira geral, para este tipo de variáveis o que queremos é calcular probabilidades do tipo: $P(a < X \leq b)$, a, b $\in \Re$. E em vez de função massa de probabilidade falaremos de uma outra função *f* tal que, para cada intervalo de amplitude infinitesimal h (h≈0) se tenha $P(x < X \leq x + h) \approx h\, f(x)$.

Mas,

$$P(x < X \leq x + h) = F(x + h) - F(x) \quad e \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) \qquad (2)$$

Assim, a função de que falamos é a derivada da função de distribuição e chama-se *função densidade de probabilidade*, f.d.p..

Tem-se então,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,, \quad \forall x \in \Re \qquad (3)$$

De (2) e (3) decorrem imediatamente as

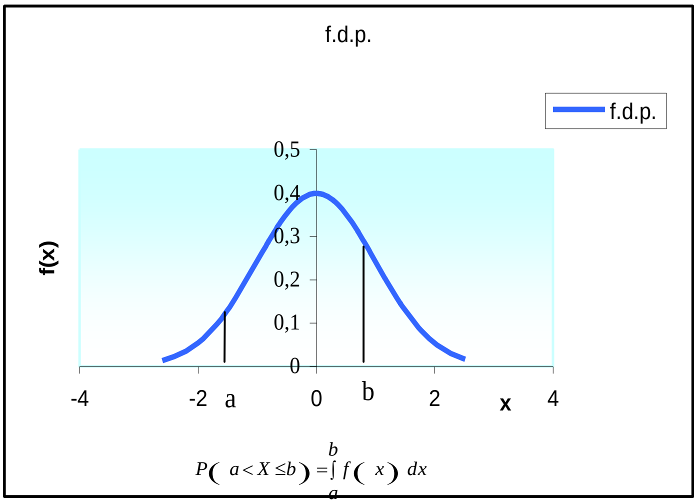
Propriedades:

1 *)* $f(x) \geq 0, \forall x \in \Re$

2 *)* $P(X \in \Re) = P(X \in]-\infty, +\infty[) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (4)

Assim, para uma v.a contínua com f.d.p. *f*, temos

$$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx\,, \quad \forall a, b \in \Re \qquad (5)$$



Definição 2: O valor médio e a variância de v.a.'s contínuas é igual respectivamente a

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx \quad \text{e} \quad Var(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)dx \tag{6}$$

onde $\mu = E(X)$.

Exercício: Uma componente electrónica tem um tempo de vida (em horas) Y que é uma v.a. com f.d.p. dada por

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{100} e^{-y/100}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases} \tag{7}$$

Três destas peças operam independentemente umas das outras numa secção de um equipamento. O equipamento falha se pelo menos duas destas peças falham. Qual a probabilidade de que o equipamento esteja em funcionamento pelo menos 200 horas sem falhar?

RESPOSTA: p=P (o equipamento não falhar) =P (nenhuma ou uma peça falham) (i)

P (uma peça falhar até 200h de funcionamento) =

$$= P(Y < 200) = \int_0^{200} \frac{1}{100} e^{-y/100}\, dy = -e^{-y/100}\Big|_0^{200} = 1 - e^{-2}$$

Donde substituindo em (i) vem: $p = \left(e^{-2}\right)^3 + 3\left(e^{-2}\right)^2 \left(1 - e^{-2}\right)$

O modelo de probabilidade com f.d.p. definida em (7) chama-se exponencial e está intimamente relacionado com tempos de vida de peças, pessoas, etc.

Podemos ainda calcular o tempo médio de vida destas peças e a sua variância, assim

$$E(Y)=\int_0^{+\infty}\frac{y}{100}e^{-y/100}dy=100$$

$$E(Y^2)=\int_0^{+\infty}\frac{y^2}{100}e^{-y/100}dy=2\times 100^2 \;\; donde \;\; Var(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)=100^2$$

e portanto, $\sigma(Y)=100.$

Da definição de valor médio e variância, <u>tanto para o caso discreto como contínuo</u>, decorrem facilmente as seguintes propriedades:

PROPRIEDADES DO VALOR MÉDIO E VARIÂNCIA

P1) Para toda a v.a. X tem-se: $E(X)\in\Re$ *e* $Var(X)\geq 0$. (8)

P2) Para quaisquer números reais *a* e *b* tem-se:

$$E(aX+b)=aE(X)+b\,,\quad Var(aX+b)=a^2\,Var(X) \;\text{ e }\; \sigma(aX)=|a|\;\sigma(X) \qquad (9)$$

Fórmula de König: $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)$

Demonstração na aula.