Teorema

Sejam $\mathcal{F}_1 = A + F_1$ *e* $\mathcal{F}_2 = B + F_2$ *subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$*.*
Então

$$\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \rangle = A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle + F_1 + F_2.$$

Teorema

Sejam $\mathcal{F}_1 = A + F_1$ *e* $\mathcal{F}_2 = B + F_2$ *subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$*.*
São equivalentes as afirmações:

(a) $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$

(b) $\dim \langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \rangle = \dim (F_1 + F_2)$

(c) $B - A = \overrightarrow{AB} \in F_1 + F_2$

subespaços afins paralelos

Definição

Sejam $\mathcal{F} = P + F$ *e* $\mathcal{G} = Q + G$ *subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$*. Diz-se que* $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são paralelos*, e escreve-se* $\mathcal{F} // \mathcal{G}$*, se* $F \subseteq G$ *ou* $G \subseteq F$*.*

Proposição

Se $\mathcal{F} = P + F$ *e* $\mathcal{G} = Q + G$ *são subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$ *paralelos, tem-se*

$$\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset \quad \text{ou} \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G} \quad \text{ou} \quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}.$$

Incidência

Em $\mathbb{R}^2$, o subespaço afim definido por dois pontos distintos é uma reta.

Proposição

Sejam $r = P + \langle \overrightarrow{u} \rangle$ e $s = Q + \langle \overrightarrow{v} \rangle$ duas retas não paralelas de $\mathbb{R}^2$. Então r e s intersetam-se num ponto.

Observação

Neste resultado é essencial a condição $\dim \mathbb{R}^2 = 2$.
Em $\mathbb{R}^3$, a interseção de retas não paralelas pode ser vazia (ver um exemplo anterior).

Definição

Em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, diz-se que

(a) *duas retas são* concorrentes *se não são paralelas e a sua interseção é não vazia;*

(b) *duas retas são* complanares *se existe um plano que contém ambas.*

Teorema

Em $\mathbb{R}^3$,

(a) *a interseção de dois planos não paralelos é uma reta;*

(b) *duas retas concorrentes definem um plano;*

(c) *a interseção de duas retas não paralelas e complanares é um ponto;*

(d) *duas retas paralelas e distintas definem um plano;*

(e) *uma reta e um ponto não pertencente à reta definem um plano;*

(f) *a interseção de um plano com uma reta não paralela ao plano é um ponto.*

Equações paramétricas

Definição

Seja $\mathcal{F} = P + F$ um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $m \leq n$. Diz-se que uma função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1, \ldots, t_m) &\mapsto (f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m)) \end{aligned}$$

é uma representação paramétrica *de $\mathcal{F}$ se*

$$\mathcal{F} = \{(f_1(t_1, \ldots, t_m), \ldots, f_n(t_1, \ldots, t_m)) : (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m\}.$$

Exemplo

Seja a reta de $\mathbb{R}^3$, $r = (2, 1, -3) + \langle (1, 1, 1) \rangle$.

$(x, y, z) \in r$ *sse* $\exists t \in \mathbb{R}$ *tal que* $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$

Portanto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (2 + t, 1 + t, -3 + t) \end{aligned}$$

é uma representação paramétrica de r.

Exemplo

Seja o plano de $\mathbb{R}^3$, $\pi = (0,2,-1) + \langle (1,1,0),(0,1,1)\rangle$.

$$(x,y,z) \in \pi \ \ \text{sse} \ \ \exists \alpha,\beta \in \mathbb{R} \ \ \text{tal que} \ \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 2+\alpha+\beta \\ z = -1+\beta \end{array} \right.$$

Portanto

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\alpha,\beta) &\mapsto (\alpha, 2+\alpha+\beta, -1+\beta) \end{aligned}$$

é uma representação paramétrica de π.

Teorema

Seja $\mathcal{F} = P + F$ *um subespaço afim de* $\mathbb{R}^n$ *de dimensão* $m \leq n$.
Existe uma representação paramétrica

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t_1,\ldots,t_m) &\mapsto (f_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,f_n(t_1,\ldots,t_m)) \end{aligned}$$

de $\mathcal{F}$ *tal que cada aplicação* $f_j, j = 1,\ldots,n$

$$\begin{aligned} f_j : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t_1,\ldots,t_m) &\mapsto f_j(t_1,\ldots,t_m) \end{aligned}$$

é da forma

$$f_j(t_1,\ldots,t_m) = \beta_j + \alpha_{j1}t_1 + \cdots + \alpha_{jm}t_m$$

para alguns $\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jm},\beta_j \in \mathbb{R}$