Três teoremas clássicos

Definição de vector

Aula 7 - 15/03/2019

Sumário

- Teorema de Désargues (continuação)
- Teorema de Pappus
- Teorema de Menelau
- Teorema de Ceva
- Definição de vector como aplicação
- Vector definido por meio de pontos

Teorema de Désargues - continuação

Teorema. Sejam A, B, C, A', B', C' seis pontos. Se $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ forem paralelogramos, então $[ACC'A']$ também é um paralelogramo.

Dem. Caso 2. Os pontos A, B, C, A', B', C' são colineares. Consideremos uma régua na recta que os contém, onde

$$A \mapsto a;\ \ B \mapsto b; C \mapsto c;\ \ A' \mapsto a';\ \ B' \mapsto b';\ \ C' \mapsto c'.$$

Como $a + b' = b + a'$ e $b + c' = c + b'$, tem-se $a + c' = c + a'$. Logo $[ACC'A']$ é paralelogramo.

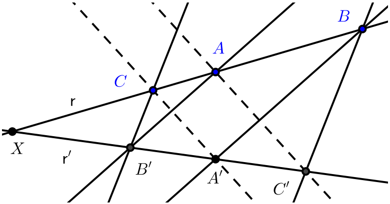
Caso 3. Os pontos A, C, A', C' são colineares, mas não pertencem à recta BB'.

Seja A'' o único ponto da recta AC tal que $ACC'A''$ é um paralelogramo. Por hipótese, $BCC'B'$ é paralelogramo e A, B, B', A'' são não colineares, logo $ABB'A''$ é um paralelogramo. Mas sabemos que também $ABB'A'$ é um paralelogramo, logo $A' = A''$ e $[ACC'A']$ é um paralelogramo.

Teorema de Pappus $\sim$ 300 DC

Teorema. Sejam r e r' duas rectas concorrentes. Sejam A, B, C três pontos de r e A', B', C' três pontos de r'. Se a recta AB' é paralela à recta BA' e a recta BC' é paralela à recta CB', então as rectas AC' e CA' são paralelas.

Dem. Exercício.



Sugestão. Considerar $X = r \cap r'$ e utilizar o axioma da semelhança e o seu recíproco.

Teorema de Menelau $\sim$ 100 DC

Este teorema é uma condição necessária para que três pontos sejam colineares.

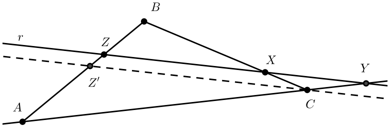
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares e seja r uma recta que intersecta a recta BC em X, a recta AC em Y e a recta AB em Z. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2, \; CY : YA = \beta_1 : \beta_2, \; AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Então

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0.$$

Dem. Exercício.



Sugestão. Dado que a recta não pode intersectar os três lados do triângulo, supor, por exemplo, que $Y \notin [AC]$, considerar a recta paralela a r que passa por C e utilizar as propriedades das razões.

Teorema de Ceva - versão restrita (sec. XVII)

Este teorema é uma condição necessária para que três rectas sejam concorrentes.

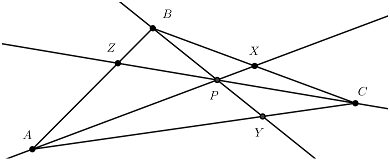
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares e sejam $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2, \ CY : YA = \beta_1 : \beta_2, \ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Mostre que, se as rectas $AX \cap BY \cap CZ = \{P\}$, então

$$\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 = 0.$$

Dem. Exercício.



Sugestão. Aplicar o teorema de Menelau ao triângulo $[ABX]$ e ao triângulo $[ACX]$.

Definição de vector

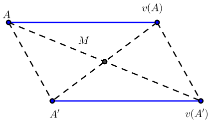
A noção de vector é fundamental para se poder utilizar as ferramentas da álgebra no estudo da geometria.

Consideremos um conjunto $\mathcal{E}$ a que chamamos *espaço de pontos*, onde está definida uma geometria que satisfaz todos os axiomas de incidência e de medida. Iremos pensar num vector como uma bijecção de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{E}$ que fornece uma "regra de movimento".

Definição. Um vector v é uma aplicação bijectiva,

$$\begin{aligned} v: \quad \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ A &\mapsto v(A) \end{aligned}$$

satisfazendo a seguinte propriedade:
dados pontos A, A', o ponto médio do segmento de recta $[A\, v(A')]$ é igual ao ponto médio do segmento de recta $[A'\, v(A)]$.



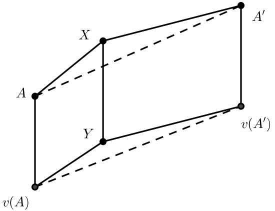
Se v for tal que $v(A) = A$, para qualquer A, então v diz-se vector nulo e denota-se por $\vec{0}$.

Vector definido por dois pontos

Por definição, se v é um vector e A, A' são pontos, então $[AA'v(A')v(A)]$ é um paralelogramo.

Proposição. Sejam X, Y pontos de $\mathcal{E}$. Existe um único vector v tal que $Y = v(X)$.

Dem. Seja $A \in \mathcal{E}$. Podemos definir $v(A)$ como o único ponto do espaço tal que $[AXYv(A)]$ é um paralelogramo. Para mostrar que a aplicação v está bem definida, consideremos um ponto A' e verifiquemos que $[AA'v(A')v(A)]$ é um paralelogramo. Por hipótese, $[v(A)AXY]$ e $[XYv(A')A']$ são paralelogramos, logo, pelo teorema de Désargues, temos que $[AA'v(A')v(A)]$ ainda é um paralelogramo.



Notação. Denotamos por $\overrightarrow{XY}$ o único vector que transforma X em Y.
Se $X = Y$, então $\overrightarrow{XY} = \vec{0}$.