Uma Resolução do Teste de AM3/CDI3 de 11/11/2017

1. a) A ; b) B ; c) B ; d) C

2. a) Por exemplo, considere-se $\alpha = 7$.

A família de curvas é dada por $x^7 y^3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Com $f(x,y) = x^7 y^3$, o gradiente $\nabla f(x,y)$ é perpendicular às curvas de nível de f, em cada ponto. Assim, a trajectória ortogonal pedida deverá, em cada ponto, seguir a direcção de $\nabla f(x,y)$.

Tem-se $\nabla f(x,y) = (7x^6 y^3, 3y^2 x^7)$.

Admitindo que a trajectória pedida se pode escrever na forma $y = y(x)$, e que $x, y \neq 0$, o declive y' será então dado pela equação

$$y' = \frac{3y^2 x^7}{7x^6 y^3} = \frac{3x}{7y}.$$

Trata-se de uma equação de variáveis separáveis, que se resolve facilmente: com $x, y \neq 0$ como acima, vem

$$y y' = \frac{3}{7} x \iff y^2 = \frac{3}{7}(x^2 + c), \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\iff y = \pm\sqrt{\frac{3}{7}(x^2 + c)}$$

A trajectória deverá passar pelo ponto $(x_0, y_0) = (1, 3)$, pelo que $y_0 = 3 = y_0(1) > 0$ e $9 = \frac{3}{7}(1 + c) \iff 21 = 1 + c \iff c = 20$. A trajectória pedida é

$$y(x) = \sqrt{\frac{3}{7}(x^2 + 20)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.(b) A equação característica da eq. ~~dada é~~ $y'' + 2y' + 2y = 0$ é $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda = -1 \pm \sqrt{1-2} \iff \lambda = -1 \pm i$.

Como $e^{(-1+i)t} = e^{-t}\cos t + i e^{-t}\sin t$ é uma solução complexa, as partes real e imaginária desta f. constituem uma base da EDO dada (são soluções l.i.). Assim, ~~uma base d~~ a solução geral de $y'' + 2y' + 2y = 0$ é

$$y = c_1 e^{-t}\cos t + c_2 e^{-t}\sin t \quad , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Determine-se agora c_1, c_2 com as condições iniciais $y(0)=0$, $y'(0)=-2$. Vem $y(0) = c_1 = 0$, logo $y = c_2 e^{-t}\sin t$.

Derivando, $y' = c_2(-e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)$, pelo que

$$y'(0) = c_2(0+1) = c_2 = -2.$$

$\therefore$ A solução do PVI dado é

$$y(t) = -2 e^{-t}\sin t \quad , \; t \in \mathbb{R}.$$

3. $$x' = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ -1/2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} x.$$

- Define-se $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ -1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$ e comece-se por calcular os valores pp de A:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1/2-\lambda & 2 \\ -1/2 & -3/2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \tfrac{1}{2})(\lambda + \tfrac{3}{2}) + 1 = \lambda^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\lambda - \tfrac{3}{4} + 1$$

$$= \lambda^2 + \lambda + \tfrac{1}{4} = 0 \iff (\lambda + \tfrac{1}{2})^2 = 0.$$

Então $\lambda = -\frac{1}{2}$ é um valor pp duplo.

- Cálculo de um vector pp associado a $\lambda = -1/2$:

$(A + \frac{1}{2}I)v = 0$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right] \iff \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 0 \\ — \end{cases} \iff \begin{cases} v_1 = -2v_2 \\ — \end{cases}$

Escolhe-se e.g. $v = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Solução: $X_1(t) = e^{-1/2\, t}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

- Cálculo de um vector pp generalizado, i.e., de $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ tal $(A + \frac{1}{2}I)u = v$: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ -1/2 & -1 & 1 \end{array}\right] \iff \begin{cases} u_1 + 2u_2 = -2 \\ — \end{cases}$

Escolhendo, e.g., $u_2=0$, vem $u=\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}$.

Solução: $X_2(t)=e^{-t/2}(u+tv)=e^{-t/2}\left(\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\right)=e^{-t/2}\begin{bmatrix}-2(1+t)\\t\end{bmatrix}$

Obtém-se então uma matriz fundamental de soluções (m.f.s.) dada por

$$X(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t/2} & -2e^{-t/2}(1+t)\\ e^{-t/2} & te^{-t/2}\end{bmatrix}.$$

A solução geral é $x(t)=X(t)c$, com $c=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$.

4. Escolha-se por exemplo $\boxed{K=9}$. O polinómio de Fourier de ordem 3 é

$$P_3(x)=\frac{9}{2}+\frac{18}{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{1}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)\right).$$

Note-se que $L=2$.

O erro quadrático de P_3 relativo a g em $[-2,2]$ é dado por

$$E=\|g-P_3\|=\left(\|g\|^2-\|P_3\|^2\right)^{1/2}$$

Tem-se $\|g\|^2=\int_{-2}^{2}g^2(x)\,dx \underset{g\text{ par}}{=} 2\int_0^2 g^2(x)\,dx=2\int_0^1 9^2\,dx=2\times 9^2$.

Em P_3: $a_0=9$, $a_1=\frac{18}{\pi}$, $a_3=-\frac{6}{\pi}$ $(a_2=0,\ b_i=0)$.

Logo, $\|P_3\|^2=2\left(\frac{a_0^2}{2}+a_1^2+a_3^2\right)=$

$$=2\left(\frac{9^2}{2}+\frac{6^2}{\pi^2}(3^2+1)\right)=9^2+\frac{2\cdot 6^2\cdot 10}{\pi^2}$$

$$=9^2+\frac{720}{\pi^2}$$

Assim, o erro pedido é

$$E=\left(2\times 9^2-9^2-\frac{720}{\pi^2}\right)^{1/2}=\left(81-\frac{720}{\pi^2}\right)^{1/2}=3\left(9-\frac{80}{\pi^2}\right)^{1/2}.$$

(b) Para o problema dado,

$L=2$, $f\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$ (série apenas de senos)

Pelas fórmulas de Euler,

$$b_m = \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right).$$

Com $\frac{m}{2}=5 \Leftrightarrow m=10$, obtém-se

$$b_{10} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(5\pi x)\,dx \Rightarrow \int_{-2}^{2} f(x)\sin(5\pi x)\,dx = \frac{2}{10^3}.$$

Por outro lado, f é de classe C^1 e 4-periódica. Pelo T. Fourier, f coincide com a sua série de Fourier, i.e., $f(x) = \sum_{m\geq 1} \frac{1}{n^3}\sin\left(\frac{m\pi}{2}x\right)$, pelo que se conclui que f é ímpar. Isto implica que

$$\int_0^2 f(x)\sin(5\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin(5\pi x)\,dx = 10^{-3}.$$

5. Considere-se uma m.f.s. $X(t)$ de soluções do sistema homogéneo associado $x'(t) = A(t)x(t)$. Pelo MVC de Lagrange, procuram-se soluções de (1) da forma

$$x(t) = X(t)\,C(t) \qquad (2)$$

onde $C(t)$ é um vector coluna $n\times 1$ de funções $c_i(t)$ de classe C^1 que satisfazem

$$X(t)\,C'(t) = h(t) \qquad (3)$$

Para $x(t)$ dado por (2), e porque as colunas da matriz $n\times n$ $X(t)$ são soluções de $x'(t) = A(t)x(t)$, vem que

$$x'(t) = \underbrace{X'(t)\,C(t)}_{=A(t)X(t)} + \underbrace{X(t)\,C'(t)}_{=h(t),\ \text{por } (3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'(t) = A(t)\underbrace{X(t)\,C(t)}_{=x(t)} + h(t) = x'(t) = A(t)x(t) + h(t),$$

pelo que $x(t)$ é solução de (1). Note-se que a eq. (3) permite determinar $C(t)$ (a menos de soma de constantes), uma vez que $X(t)$ é invertível (m.f.s.). Vem então $C'(t) = X^{-1}(t)\,h(t)$ e, primitivando, obtém-se $C(t)$.