Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Exame de Época Especial 18-07-2013

1. Considere a expansão em série de Fourier das funções $u(x)$ definidas no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$:

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, y_n(x) \,, \qquad y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell} \,.$$

a) Defina o produto interno de funções adequado ao problema e calcule o produto interno de duas funções arbitrárias $\langle y_n | y_m \rangle$.
b) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n de uma função $u(x)$.
c) Determine a série de Fourier da função $u(x) = e^x$.
d) Diga, justificando, quais os valores dessa série nos pontos $x = -\ell, \;\; x = \ell$.

2.a) Coloque na forma de Sturm-Liouville a equação diferencial

$$y''(x) - \frac{3x}{1-x^2}\, y'(x) + \frac{\lambda}{1-x^2}\, y(x) = 0 \,, \qquad x \in [-1, +1] \,.$$

b) Defina, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado a este problema.
c) Dadas as funções $u(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\;v(x) = \Theta(x)$, $\;w(x) = \delta(x)$, calcule os produtos internos $\langle u|v \rangle$, $\langle u|w \rangle$.

3. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\, y''(x) - x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \,, \qquad x \in [-1, +1] \,.$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências: $y(x) = \sum_n a_n\, x^n$. Obtenha a relação de recorrência entre os coeficientes a_n e a consequente expressão de $y(x)$ em termos das constantes a_0, a_1.
b) Determine as funções próprias $y_n(x)$ dadas por polinómios de graus $n = 2$ e $n = 4$ e os respetivos valores próprios.

4. A função $u(t, x)$ obedece à equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \,.$$

a) Escreva $u(t, x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t, k)$.
b) Determine a solução geral para as funções $\tilde{u}(t, k)$ e $u(t, x)$.
c) Obtenha a expressão de $u(t, x)$ sujeita à condição inicial:
$\tilde{u}(0, k) = \delta(k + a) + \delta(k - a)$.
Verifique que a expressão encontrada para $u(t, x)$ obedece à equação diferencial.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \,, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x) \,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$