Métodos Matemáticos da Física 2010/11

Exame 2ª época 29-06-2011

1.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d/dx,

$$y'(x) = -\lambda\, y(x) \ ,$$

definidas no intervalo $[-\ell, \ell]$, e satisfazendo as condições fronteira $y(\ell) = y(-\ell)$.
b) Defina, justificando, o produto interno adequado a estas funções, e calcule o produto interno de duas funções próprias arbitrárias $y_n(x)$, $y_m(x)$.
c) Seja $f(x)$ uma função que satisfaz a condição $f(\ell) = f(-\ell)$. Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da sua expansão como combinação linear das funções próprias $y_n(x)$: $f(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$.
d) Obtenha a expressão da função delta de Dirac, $f(x) = \delta(x-z)$, como combinação linear de $y_n(x)$: $\delta(x-z) = \sum_n c_n(z)\, y_n(x)$.

2. Considere a equação diferencial

$$y''(x) - \tan(x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2] \ .$$

a) Coloque a equação sob a forma de Sturm-Liouville.
b) Defina, justificando, o produto interno adequado a este problema.
c) Calcule o produto interno das funções $u(x) = 1$ e $v(x) = \sin x$.

3. O laplaciano é dado em coordenadas esféricas por:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} A \ , \qquad A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ .$$

O laplaciano tem funções próprias, $\Delta u = -k^2\, u$, que se podem encontrar pelo método de separação de variáveis: $u = R(r)\, Y(\theta, \phi)$, tal que $A\, Y = -\lambda\, Y$.
Obtenha o valor de λ e a equação diferencial ordinária a que obedece a função radial $R(r)$ nos seguintes casos:
a) $u = R(r)$.
b) $u = R(r)\, \cos\theta$.

4. Considere a equação de Laplace a duas dimensões

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ .$$

a) Escreva $u(x, y)$ em termos da transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$ e deduza a equação diferencial a que $\tilde{u}(k, y)$ obedece.
b) Obtenha a solução geral para $\tilde{u}(k, y)$ e a expressão resultante de $u(x, y)$.
c) Explicite as condições necessárias para que essa expressão satisfaça a condição, $\lim_{y\to+\infty} u(x, y) = 0$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ ,\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \ ,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,(x-x')} dk = 2\pi\, \delta(x'-x)$