Métodos Matemáticos da Física 2014/15

Teste 3 05-06-2015

1.a) Calcule a transformada de Fourier da função $f(x) = \Theta(x)\, e^{-(\alpha+i\,\beta)x}$, onde β, $\alpha > 0$ são constantes reais.
b) Seja $F(x)$ uma função arbitrária e $\tilde{F}(k)$ a sua transformada de Fourier. Determine a transformada **inversa** de Fourier da função $\tilde{g}(k) = F(k)$ em termos da(s) função(ões) $\tilde{F}(x)$, $F(x)$.

2. Considere a equação diferencial definida no domínio $x \in \mathbb{R}$, $y \in [0, +\infty[$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ,$$

a) Escreva $u(x, y)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(k, y)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(k, y)$ e a correspondente solução geral $u(x, y)$.
c) Restringa a solução geral encontrada a funções $u(x, y)$ de valor absoluto limitado superiormente no domínio anteriormente definido.

3. Considere a equação diferencial não homogénea

$$y'(x) + a\, y(x) = -f(x), \qquad y(0) = 0 \ , \qquad x \in [0, \ell] \ .$$

a) Escreva a equação diferencial e a condição fronteira a que deve satisfazer a respectiva função de Green $G(x, z)$.
b) Determine a função de Green $G(x, z)$ admitindo que é da forma:

$$G(x, z) = y_1(x; z)\, \Theta(z - x) + y_2(x; z)\, \Theta(x - z) \ .$$

c) Utilize a função de Green encontrada para calcular a solução da equação

$$y'(x) + a\, y(x) = -e^{c\,x}, \qquad y(0) = 0 \ , \qquad x \in [0, \ell] \ .$$

Verifique explicitamente que é de facto solução desta equação.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\, \delta(x) \ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$