Métodos Matemáticos da Física — 2010/11

Teste 2 — 07-05-2011

1.a) Coloque na forma de Sturm-Liouville a equação diferencial

$$(1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\ , \qquad x \in [-1,+1]\ .$$

b) Escreva a expressão do produto interno de funções adequado a este problema.

2.a) Admita que a solução $y(x)$ da equação

$$(1-x^2)\,y''(x) - x\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\ , \qquad x \in [-1,+1]\ ,$$

se pode escrever como uma série de potências inteiras de x: $y = \sum_n a_n\,x^n$. Determine a relação de recorrência entre os coeficientes a_n e obtenha a expressão de $y(x)$ em termos de (a_0, a_1) até à ordem x^5.
b) Estabeleça o espectro de valores próprios λ_n associados a funções próprias $y_n(x)$ dadas por polinómios de grau bem definido.
c) Determine as funções próprias $y_n(x)$ associadas aos quatro valores próprios mais pequenos, sujeitas à condição $y_n(1) = 1$.

3. As funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$ são funções próprias do operador $\partial/\partial\phi$ e do operador

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ ; \qquad A\,Y_l^m = -l(l+1)\,Y_l^m\ .$$

a) Escreva a expressão do produto interno aplicável às funções $u(\theta,\phi)$ e diga qual é a condição de normalização a que obedecem $Y_l^m(\theta,\phi)$.
b) Aplique os operadores A, $\partial/\partial\phi$, às funções $u = (x+i\,y)^2/r^2$, $v = (x+i\,y)\,z/r^2$, e verifique que $u(\theta,\phi)$, $v(\theta,\phi)$, são funções próprias de A e de $\partial/\partial\phi$.
c) Determine as relações entre as funções $u(\theta,\phi)$, $v(\theta,\phi)$, e as funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$, a menos de constantes multiplicativas.