Métodos Matemáticos da Física 2019/20

Série 1

1. Considere que uma dada função $f(x)$ se pode escrever como

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{i\,k_n x} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x \ , \quad k_n = k\,n \, .$$

a) Obtenha os coeficientes a_n, b_n, em termos dos coeficientes c_m, e as relações recíprocas.
b) Determine o período da função $f(x)$ admitindo que $a_1\, b_1 \neq 0$.
c) Estabeleça as condições necessárias e suficientes satisfeitas pelos coeficientes a_n, b_n, c_n, para que a função $f(x)$ seja real.

2. Determine a solução da equação de difusão, $u(t,x)$, no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, satisfazendo as seguintes condições:
a) solução estática com $u(0,0) = u_1$, $u(0,\ell) = u_2$.
b) $u(0,x) = u_0 + u_0'\, x + a \sin(n\pi x/\ell)$.
c) $u(0,x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x$, com $k_n = k\,n$.

3. Determine a solução da equação de difusão, $u(t,x)$, no domínio $x > 0$, sujeita à condição fronteira $u(t,0) = u_0 + a \sin(\omega t)$.

4. Obtenha a solução geral da equação de Schrödinger de partícula livre, $u(t,x)$:
a) no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, sujeita às condições $u(t,0) = 0 = u(t,\ell)$.
b) satisfazendo a condição de periodicidade, $u(t,x) = u(t, x+L)$, $x \in R$.

5. Obtenha a solução geral da equação de onda, $u(t,x)$:
a) no intervalo $0 \leq x \leq \ell$, sujeita às condições $u(t,0) = 0 = u(t,\ell)$.
b) satisfazendo a condição de periodicidade, $u(t,x) = u(t, x+L)$, $x \in R$.

6. Obtenha a solução geral da equação de Laplace, $u(x,y)$, no domínio $-\ell \leq x \leq \ell$, $y \geq 0$, satisfazendo as condições: $u(-\ell, y) = u(\ell, y)$, $u'(-\ell, y) = u'(\ell, y)$, $\lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0$.

7.a) Reescreva a equação de onda em termos das variáveis independentes $x_1 = x - c\,t$, $x_2 = x + c\,t$.
b) Prove que a solução geral da equação é dada por: $u = f(x - c\,t) + g(x + c\,t)$.
c) Verifique que a função $u(x,y) = f(x + i\,y) + g(x - i\,y)$ é solução da equação de Laplace quaisquer que sejam as funções f, g.