Métodos Matemáticos da Física 2019/20

Série 3

1.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d/dx no intervalo $[-\pi, \pi]$ sujeitas à condição fronteira $y(\pi) = y(-\pi)$.
b) Verifique a ortogonalidade das funções próprias e calcule a sua norma.

2. Obtenha as séries de Fourier complexas no intervalo $[-\pi, \pi]$ das funções:
a) $f(x) = x^2,\ |x|,\ \cosh x,\ \cos x,\ \cos x/2.$
b) $f(x) = x,\ \sinh x,\ \sin x,\ \sin x/2.$

3. Considere a expansão em séries de Fourier complexas das funções $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ no intervalo $[-\pi, \pi]$. Verifique a validade do teorema de Parseval no cálculo dos integrais $\int \cos^2 x\, dx$, $\int \sin x\, \cos x\, dx$.

4.a) Obtenha as séries de Fourier complexas das funções $\Theta(x)$, $\mathrm{sgn}(x)$ no intervalo $[-\ell, \ell]$.
b) Obtenha as séries de Fourier em senos e cosenos daquelas funções no mesmo intervalo.

5.a) Determine os valores próprios λ_n e funções próprias $y_n(x)$ do operador d/dx no intervalo $[-\ell, \ell]$ sujeito à condição fronteira $y(\ell) = -y(-\ell)$.
b) Verifique a ortogonalidade das funções próprias $y_n(x)$ e calcule a sua norma.
c) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão de uma função $u(x)$ em série de funções $y_n(x)$: $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$.

6. Verifique se o operador d^2/dx^2 é hermítico no intervalo $[a, b]$ sujeito às seguintes condições fronteira:
a) $u(b) = -u(a),\ u'(b) = -u'(a)$; **b)** $u(b) = u(a),\ u'(b) = -u'(a)$;
c) $u(b) = -u(a),\ u'(b) = u'(a)$; **d)** $u'(a) = 0,\ u(b) = 0$.

7.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d^2/dx^2 no intervalo $[-\pi, \pi]$ sujeito às condições fronteira $y(\pi) = y(-\pi),\ y'(\pi) = y'(-\pi)$.
b) Encontre um conjunto de funções próprias ortogonais entre si e calcule a sua norma.

8.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d^2/dx^2 no intervalo $[0, \ell]$ sujeito às condições fronteira, $y(0) = 0,\ y(\ell) = 0$.
b) Calcule os produtos internos de duas funções próprias quaisquer.
c) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão de uma função $u(x)$ em série de funções $y_n(x)$: $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$.

9.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d^2/dx^2 no intervalo $[0, \ell]$ sujeito às condições fronteira, $y'(0) = 0,\ y(\ell) = 0$.
b) Calcule os produtos internos de duas funções próprias quaisquer.
c) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão de uma função $u(x)$ em série de funções $y_n(x)$: $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$.

10.a) Determine os valores próprios e funções próprias do operador d^2/dx^2 no intervalo $[0, \ell]$ sujeito às condições fronteira, $y'(0) = 0,\ y'(\ell) = 0$.
b) Calcule os produtos internos de duas funções próprias quaisquer.
c) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão de uma função $u(x)$ em série de funções $y_n(x)$: $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$.

1.a) $y_n(x) = e^{i\,n\,x}, \quad \lambda_n = i\,n, \quad n \in \mathbb{Z}.$ **b)** $\langle y_n | y_n \rangle = 2\pi.$

2.a)
$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\neq 0} (-1)^n \, \frac{2}{n^2} \, e^{i\,nx} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, \frac{4}{n^2} \, \cos nx$$

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{n^2} \, e^{i\,nx} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \, \cos(2k+1)x$$

$$\cosh x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \, e^{i\,nx} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} \, \cos nx \right)$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \left(e^{i\,x} + e^{-i\,x} \right)$$

$$\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2 - 1/4} \, e^{i\,nx} = \frac{1}{\pi} \left(2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}}{n^2-1/4} \, \cos nx \right)$$

2.b)
$$x = \sum_{n\neq 0} (-1)^n \, \frac{i}{n} \, e^{i\,nx} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \, \frac{2}{n} \, \sin nx$$

$$\sinh x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{i\,n}{n^2+1} \, e^{i\,nx} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \, \frac{2\,n}{n^2+1} \, \sin nx$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} \left(e^{i\,x} - e^{-i\,x} \right)$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{i\,n}{n^2-1/4} \, e^{i\,nx} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \, \frac{2\,n}{n^2-1/4} \, \sin nx$$

3.
$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 x \, dx = \pi = 2\pi \sum_n |c_n|^2 \, , \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin x \, \cos x \, dx = 0 = 2\pi \sum_n c'_n \, c_n^*$$

4.
$$\Theta(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{2i\,n} \, e^{i\,n\pi\,x/\ell} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \, \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{\ell} x \right]$$

$$\mathrm{sgn}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n\neq 0} \frac{1-(-1)^n}{i\,n} \, e^{i\,n\pi\,x/\ell} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \, \sin \left[(2k+1) \frac{\pi}{\ell} x \right]$$

5.a) $y_n(x) = e^{i\,(n+1/2)\pi\,x/\ell}, \quad \lambda_n = i \left(n + \dfrac{1}{2} \right) \dfrac{\pi}{\ell}, \quad n \in \mathbb{Z}.$ **b)** $\langle y_n | y_n \rangle = 2\ell.$

c) $c_n = \dfrac{\langle y_n | \, u \, \rangle}{\langle y_n | y_n \rangle} = \dfrac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} e^{-i\,(n+1/2)\pi\,x/\ell} \, u(x) \, dx \ .$

6.a) Sim. **b)** Não. **c)** Não. **d)** Sim.

7.a) $y_n(x) = e^{i\,n\,x}, \quad \lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{Z}.$ **b)** $\langle y_n | y_n \rangle = 2\pi.$

8.a) $y_n(x) = \sin(n\,\pi\,x/\ell), \quad \lambda_n = -n^2\pi^2/\ell^2, \quad n \in \mathbb{N}.$ **b)** $\langle y_n | y_m \rangle = \frac{1}{2} \ell \, \delta_{nm}.$
c) $c_n = \dfrac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x) \, \sin(n\,\pi\,x/\ell) \, dx \ .$

9.a) $y_n(x) = \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \, x/\ell \right], \quad \lambda_n = - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \pi^2/\ell^2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

b) $\langle y_n | y_m \rangle = \frac{1}{2} \ell \, \delta_{nm}.$ **c)** $c_n = \dfrac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x) \, \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \, x/\ell \right] \, dx \ .$

10.a) $y_n(x) = \cos(n\,\pi\,x/\ell), \quad \lambda_n = -n^2\pi^2/\ell^2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$ **b)** $\langle y_n | y_m \rangle = \frac{1}{2} \ell \, \delta_{nm}.$
c) $c_n = \dfrac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u(x) \, \cos(n\,\pi\,x/\ell) \, dx \ .$