Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III

(DF - 2018/19)

Capítulo 0 - Revisões

1. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) $y(x) = 2e^x + xe^{-x}$ é solução da equação $y'' + 2y' + y = 0$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

   (b) $v(x) \equiv 1$ é solução da equação $v'' + 2v' + v = x$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

   (c) $u(x) = \log x$ é solução da equação $xu'' + u' = 0$ num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

2. (a) Sendo $a \in \mathbb{R}$, verifique que as funções $x(t) = ce^{at}$ ($c \in \mathbb{R}$) são soluções em $\mathbb{R}$ da equação $x'(t) = ax(t)$.
   (b) Justifique que a equação $x'(t) = ax(t)$ é equivalente a $\big(x(t)e^{-at}\big)' = 0$; use este facto para justificar que não há mais soluções em $\mathbb{R}$ da equação $x'(t) = ax(t)$ para além das da forma em (a).

3. Um corpo descreve um movimento rectilíneo com posição $s(t)$ em cada instante $t \geq 0$. Sabendo que $v(t)e^{s(t)} = 1 - \cos t$, onde $v(t)$ é a velocidade, e que no instante $t = 0$ o corpo ocupa a posição $s(0) = 0$, determine a sua posição no instante $t = \pi$.

4. Para as seguintes matrizes, determine os valores próprios (reais ou complexos) e um vector próprio associado a cada um deles:

   (a) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Calcule os seguintes integrais, onde $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sin(n\pi x)\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx$; (d) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx$.

6. Escreva os seguintes números complexos na forma (dita <u>*algébrica*</u>) $a + ib$, com $a, b \in \mathbb{R}$:
   a) $\dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{2-i}$; b) izw^{-1}, onde $z = 5 - 5i, w = -3 + 4i$.

7. Recorde a <u>*forma trigonométrica*</u> de números complexos $r\operatorname{cis}\theta = r\cos\theta + ir\sin\theta$, também chamada de **forma polar** e denotada por

   $$re^{i\theta} := r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

   a) Considerando números complexos z, w dados na forma polar por $z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\zeta}$, mostre que $zw = r\rho\, e^{i(\theta+\zeta)}$.
   b) Represente geometricamente e escreva na forma polar os números complexos seguintes: $-1 + i$; 3; -3; $-3i$; $(1 + i)^{100}$.

8. Represente geometricamente: a) as raízes cúbicas de -1; b) as raízes quadradas de $4i$.

9. Usando os desenvolvimentos em série de Mac-Laurin de $\sin y$ e $\cos y$, mostre que $\cos y + i \sin y = \sum_{n\geq 0} \frac{(iy)^n}{n!}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ – o que justifica a notação $e^{iy} := \cos y + i \sin y$.

10. *Exponencial Complexa*: A função **exponencial complexa**, denotada por e^z ou $\exp z$, é definida por

$$e^z = e^x e^{iy} \quad \text{para} \quad z = x + iy \ (x, y \in \mathbb{R}).$$

a) Escreva na forma $x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$ os complexos: e^{3+i}, e^{2i}.
b) Mostre que $e^{z+w} = e^z e^w$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.
c) Mostre que qualquer $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$ se escreve na forma $w = e^z$, para algum $z = a + ib \in \mathbb{C}$; determine ainda a, b. (Sugestão: escreva w na forma polar.)
d) Escreva na forma polar os números complexos: (i) $i^7(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$; (ii) $(2+2i)(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$.
e) Sendo $z \in \mathbb{C}$ fixado e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a função definida por $\gamma(t) = e^{zt}$ (com a identificação geométrica $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$), mostre que

$$\gamma'(t) = ze^{zt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

11. Diga se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
a) $z = \bar{z}$ se e só se z é real.
b) $wz = 0$ se e só se $w = 0$ ou $z = 0$, $\forall w, z \in \mathbb{C}$.
c) $Re(wz) = 0$ se e só se $Re\, w = 0$ ou $Re\, z = 0$, $\forall w, z \in \mathbb{C}$.

Algumas soluções:

1. F, F, V.
3. $\log(1 + \pi)$.
4.(a) val. pp $-6, -3$; (b) val. pp $1 \pm 2i$.
5.(a) 0 se n par, $2/(n\pi)$ se n ímpar; (b) 0 se n par, $-2/(n\pi)^2$ se n ímpar; (c) 0; (d) $(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}$.
6.a) $\frac{2}{5} - i\frac{4}{5}$; b) $\frac{1}{5} - i\frac{7}{5}$.
11. V, V, F.