Métodos Matemáticos da Física — 2018/19

Teste 3 — 03-06-2019

1. Seja a função definida em $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos\frac{\pi\, x}{2}\ \left(\Theta(x+1) - \Theta(x-1)\right) = \begin{cases} \cos\frac{\pi\, x}{2}\,, & -1 \leq x \leq +1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases} .$$

a) Calcule a derivada de $f(x)$ e represente graficamente as funções $f(x)$ e $f'(x)$. Identifique os pontos de descontinuidade que encontrar nestas funções.
b) Obtenha a expressão da segunda derivada $f''(x)$, incluindo eventuais termos com a função delta de Dirac.
c) Determine as transformadas de Fourier de $f(x)$ e $f'(x)$. Simplifique os resultados o mais possível.
d) Estabeleça a relação entre as transformadas de Fourier de qualquer função e da sua derivada. Verifique se os seus resultados da alínea c) satisfazem essa relação.

2. A equação de Schrödinger,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,,$$

admite como solução geral uma expressão do tipo,

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{-i\,\omega(k)\,t}\, e^{i\,k\,x}\, dk\ .$$

a) Aplique esta expressão de $u(t,x)$ na equação de Schrödinger e deduza a expressão da frequência $\omega(k)$ em função de k que permite satisfazer aquela equação diferencial.
b) Determine a função $u(t,x)$, e a função de onda inicial $u(0,x)$, no caso em que $c(k) = \delta'(k - k_0)$, onde $k_0 \in \mathbb{R}$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ ,\qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk\ ,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\,\delta(x)\ ,\qquad 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$