Teoremas de Ceva, Pappus e Désargues

Aula 10 - 27/03/2019

Sumário

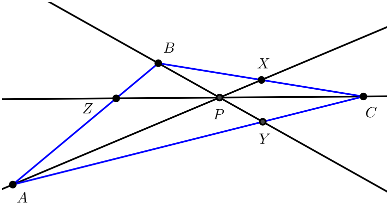
Teorema de Ceva

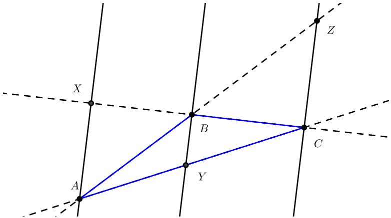
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares num espaço afim $\mathcal{S}$ e sejam $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2, \;\; CY : YA = \beta_1 : \beta_2, \;\; AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Então as condições seguintes são equivalentes

- As rectas AX, BY, CZ são concorrentes ou são paralelas
- $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2$.





Demonstração do teorema de Ceva (I)

Tomemos o ponto C para origem de $\mathcal{S}$. Sejam

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA},\ \vec{b} = \overrightarrow{CB},\ \vec{x} = \overrightarrow{CX},\ \vec{y} = \overrightarrow{CY}.$$

Então, como $BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2$ e $CY : YA = \beta_1 : \beta_2$ temos que

$$CX : CB = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 \ \text{ e } \ CY : CA = \beta_1 : \beta_1 + \beta_2.$$

Portanto

$$\vec{x} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\vec{b} \ \text{ e } \ \vec{y} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\vec{a}.$$

As rectas AX e BY são concorrentes num ponto P se e só se existirem $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{p} = \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{a} = \mu\vec{y} + (1-\mu)\vec{b},$$

sendo $AP : PX = 1 : 1-\lambda$ e $BP : PY = 1 : 1-\mu$. Assim, temos

$$(1-\lambda)\vec{a} + \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{b} = \frac{\mu\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}.$$

Como A, B, C são não colineares, temos que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, logo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\mu & = & 1 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\lambda & + & \mu & = & 1 \end{array}\right.$$

Demonstração do teorema de Ceva (II)

Este sistema tem uma única solução se e só se

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)} \neq 0.$$

Pela regra de Cramer obtemos

$$\lambda = \frac{\beta_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{\alpha_1(\beta_1+\beta_2)}{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2}.$$

Portanto

$$\vec{p} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Como tomámos o ponto C para origem, temos que qualquer ponto na recta CP tem como vector posição um múltiplo escalar de $\vec{p}$. Por outro lado, qualquer ponto na recta AB tem como vector posição uma combinação afim de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Logo a recta CP intersecta a recta AB num ponto Z tal que

$$\vec{z} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Como $\alpha_1\beta_1\,\overrightarrow{AZ} = \alpha_2\beta_2\,\overrightarrow{ZB}$, temos que $\alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_1 = AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2$ logo

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Demonstração do teorema de Ceva (III)

Temos que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$

se e só se as rectas AX e BY são paralelas e têm ambas vector director

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{b} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{a} = -\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\vec{a} - \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1}\vec{b}.$$

A segunda identidade obtém-se multiplicando e dividindo a expressão por $\alpha_1\beta_1/(\alpha_1+\alpha_2)$ e usando a igualdade $\alpha_1\beta_1 = -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2$.

Com um raciocínio análogo ao caso anterior, concluímos que a única recta que passa por C e é paralela a $\overrightarrow{AX}$ intersecta a recta AB no ponto Z tal que

$$\vec{z} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Temos assim que $AZ : ZB = \alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_1 = \gamma_1 : \gamma_2$, logo

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Nota. A partir da expressão de $\vec{p}$ e $\vec{z}$ como combinação afim de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos concluir que num triângulo $[ABC]$ com $BX : XA = \alpha_1 : \alpha_2$, $CY : YA = \beta_1 : \beta_2$ e $AX \cap BY = P$, então a recta CP intersecta a recta AB num ponto Z tal que

$$CP : PZ = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_2.$$

Teorema da divisão harmónica (Pappus)

Sejam A, B dois pontos. Dizemos que os pontos $X, Y \in AB$ dividem harmonicamente os pontos A e B se as razões $AX : XB$ e $AY : YB$ só diferem no sinal, ou seja, se

$$AX : XB = \alpha : \beta \text{ e } AY : YB = -\alpha : \beta.$$

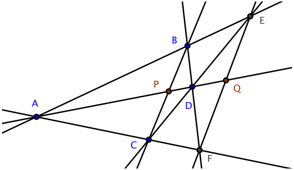
O conjunto $\{A, B, X, Y\}$ diz-se conjunto harmónico e dada uma régua na recta AB, tem-se que

$$(a - x)(y - b) = (x - b)(y - a).$$

Teorema. (Pappus) Sejam A, B, C, D quatro pontos complanares. Suponhamos que $AB \cap CD = E$ e que $BD \cap AC = F$. Sejam P e Q, tais que $AD \cap BC = P$ e $AD \cap EF = Q$. Então, os pontos P e Q dividem A e D harmonicamente.

Nota. Este teorema é notável porque define uma noção de medida em termos de relações de incidência entre pontos e rectas. Dados três dos pontos A, P, D, Q, podemos construir o quarto ponto de modo a ter um conjunto harmónico apenas com uma régua, sem ser necessário medir distâncias.

Demonstração do teorema da divisão harmónica



Sejam $AB : BE = 1 : \lambda$ e $AC : CF = 1 : \mu$. Então, como $AD \cap EF = Q$ e $CE \cap BF = D$, pela nota à demonstração do teorema de Ceva aplicada ao triângulo $[AEF]$, temos que

$$AD : DQ = \lambda + \mu : \lambda\mu, \quad \text{logo} \quad AQ : QD = \lambda + \mu + \lambda\mu : -\lambda\mu.$$

Aplicando a mesma nota ao triângulo $[ABC]$, temos

$$AE : EB = \lambda + 1 : -\lambda \quad \text{e} \quad AF : FC = \mu + 1 : -\mu.$$

Logo, observando que $P \in BC$, obtemos

$$AD : DP = -(1+\lambda)\mu - (1+\mu)\lambda : \lambda\mu = -\lambda - \mu - 2\lambda\mu : \lambda\mu.$$

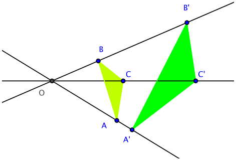
Logo

$$AP : PD = \lambda + \mu + \lambda\mu : \lambda\mu.$$

Portanto P e Q dividem harmonicamente A e D.

Triângulos em perspectiva

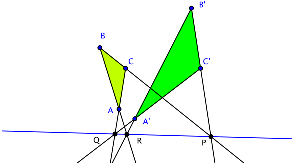
Sejam $[A, B, C]$ e $[A'B'C']$ triângulos, não necessariamente complanares. Dizemos que $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ estão em perspectiva segundo o ponto O se as rectas AA', BB', CC' são concorrentes em O.



Suponhamos que

$$BC \cap B'C' = P, \; AC \cap A'C' = Q, \quad AB \cap A'B' = R.$$

Dizemos que $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ estão em perspectiva segundo a recta r se os pontos P, Q, R pertencem a r.



Teorema de Désargues

O teorema de Désargues estabelece que se dois triângulos estão em perspectiva segundo um ponto então também estão em perspectiva segundo uma recta. O recíproco deste teorema também é verdadeiro.

Teorema. (Désargues) Se dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ estão em perspectiva segundo um ponto e os lados correspondentes se intersectam, então os três pontos de intersecção dos lados correspondentes são colineares.

Dem. Seja $O = AA' \cap BB' \cap CC'$ e sejam

$$BC \cap B'C' = P,\ AC \cap A'C' = Q,\ \ AB \cap A'B' = R.$$

Consideremos o ponto O como origem e denotemos

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{a'} = \overrightarrow{OA'},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{b'} = \overrightarrow{OB'},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC},\ \vec{c'} = \overrightarrow{OC'}$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP},\ \vec{Q} = \overrightarrow{OQ},\ \vec{r} = \overrightarrow{OR}.$$

Demonstração do teorema de Désargues (continuação)

Como OAA', OBB' e OCC' são colineares, temos

$$\vec{a'} = \lambda\vec{a},\ \vec{b'} = \mu\vec{b},\ \vec{c'} = \nu\vec{c}.$$

Como $R \in AB \cap A'B'$, existem e são únicos $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{r} = \xi\vec{a} + (1-\xi)\vec{b} = \eta\vec{a'} + (1-\eta)\vec{b'} = \xi\lambda\vec{a} + (1-\xi)\mu\vec{b}.$$

Como $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, temos que $-\xi + \mu\eta = \mu - 1$ e $\xi - \lambda\eta = 0$, o que implica

$$\xi = -\frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}.$$

Logo

$$\vec{r} = \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda-\mu}\vec{b} - \frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}\vec{a}.$$

Analogamente se provava que

$$\vec{p} = \frac{\nu(\mu-1)}{\mu-\nu}\vec{c} - \frac{\mu(\nu-1)}{\mu-\nu}\vec{b} \ \text{ e } \ \vec{q} = \frac{\lambda(\nu-1)}{\nu-\lambda}\vec{a} - \frac{\nu(\lambda-1)}{\nu-\lambda}\vec{c}.$$

Assim, como

$$(\lambda-\mu)(\nu-1)\vec{r} + (\mu-\nu)(\lambda-1)\vec{p} + (\nu-\lambda)(\mu-1)\vec{q} = \vec{0}$$

e

$$(\lambda-\mu)(\nu-1) + (\mu-\nu)(\lambda-1) + (\nu-\lambda)(\mu-1) = 0$$

podemos concluir que os pontos P, Q, R são colineares.