Geometria / Geometria I - 2018/2019
Resumo das aulas teóricas

Aula 1

Programa

- Geometria sintética - Breve revisão de conceitos de geometria euclidiana plana e espacial; sistemas axiomáticos; construções geométricas e generalidades sobre polígonos e poliedros.
- Transformações geométricas no plano e no espaço - afinidades; semelhanças; isometrias; grupos de simetria.
- Tópicos de geometria discreta e aplicações - triangulações; pavimentações; diagramas de Voronoi.

Avaliação para o ano lectivo 2018/2019

- Obrigatório: Exame final escrito com cotação de 20 valores.
- Facultativo: 1 teste intercalar com cotação de 6 valores.
- Classificação final

  Se a soma da nota do teste com a nota do exame for igual ou superior a 12 valores, a classificação final será o **máximo** entre **a nota do exame escrito** e **a soma da nota do primeiro teste com 70% da nota do exame escrito**.

  Se a soma da nota do primeiro teste com a nota do exame for inferior a 12 valores, a classificação final será a nota do exame escrito.
- Prova complementar (oral ou escrita) para classificações finais entre 8,5 e 9,4 valores ou superiores a 17 valores.
- Nos testes e nos exames será permitido o uso de um formulário pessoal escrito à mão que não pode ser fotocópia.

Bibliografia principal

- J. Roe, Elementary Geometry, 1993.
- M. Isaacs, Geometry for College Students, 2001
- T. Sibley, Thinking Geometrically - A Survey of Geometries, 2015.

- D. Hilbert, Fundamentos da Geometria, Gradiva, 2003.

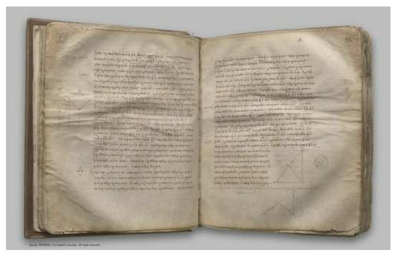
  Outros elementos de estudo

- Slides das aulas, resumos de matéria, folhas de exercícios e outros materiais disponibilizados no moodle.

Aula 2

Elementos de Euclides

O livro "Elementos" de Euclides



está disponível na biblioteca digital do Instituto Clay de Matemática

https://www.claymath.org/library/historical/euclid/

Um versão com animações pode ser consultada em

https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html

Conceitos primitivos

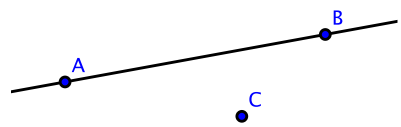
- Pontos - $A, B, C, \ldots$
- Rectas - $a, b, c, \ldots$
- Planos - $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$
- Incidência - pertencer a, conter, passar por (um ponto *incide com* ou *pertence a* uma recta ou a um plano)
- Ordem - estar entre
- Congruência - ser geometricamente igual

Axiomas de incidência de Hilbert (plano)

I.1 Dados dois pontos A e B, existe uma recta que os contém.

I.2 Dados dois pontos distintos A e B não existe mais do que uma recta que os contém.

I.3 Uma recta contém pelo menos dois pontos distintos. Existem três pontos que não pertencem à mesma recta.



Observações. Os axiomas I.1 e I.2 podem ser reduzidos a um único axioma: Dados dois pontos A e B, existe uma única recta que os contém.

Denotamos por AB a única recta que contém os pontos A e B.

A seguinte proposição é uma consequência imediata dos axiomas I.1 e I.2..

Proposição. Duas rectas intersectam-se, no máximo, num ponto.

Axiomas de incidência de Hilbert (espaço)

I.4 Dados três pontos A, B, C que não estão na mesma recta, existe um plano α que os contém. Cada plano contém pelo menos um ponto.

I.5 Dados três pontos que não estão na mesma recta (não colineares), não existe mais do que um plano que os contém.

I.6 Se dois pontos A, B de uma recta r incidem com um plano α, então todos os pontos da recta r incidem com o plano α. (Dizemos que a recta está contida no plano α)

I.7 Se um ponto A incide com dois planos α e β, então existe um outro ponto B pelo menos, que incide com os planos α e β.

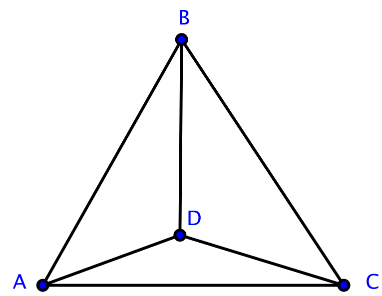
I.8 Existem pelo menos quatro pontos que não incidem com o mesmo plano.

Observações. Os axiomas I.4 e I.5 podem ser reduzidos a um único axioma: Dados três pontos A, B, C que não estão na mesma recta, existe um único plano que os contém.

Exemplo 1. Modelo do tetraedro

Seja $\mathcal{T} = \{A, B, C, D\}$ um conjunto com 4 elementos. Consideremos uma geometria em $\mathcal{T}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{T}$;
- recta - qualquer subconjunto de $\mathcal{T}$ com precisamente dois elementos;
- plano - qualquer subconjunto de $\mathcal{T}$ com precisamente três elementos;
- incidir - pertencer a.

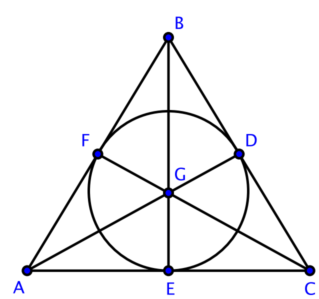


Exercício. Mostrar que esta geometria satisfaz todos os axiomas de incidência de Hilbert.

Exemplo 2. Geometria de 7 pontos e 7 rectas

Seja $\mathcal{P} = \{A, B, C, D, E, F, G\}$ um conjunto com 7 elementos. Consideremos uma geometria plana em $\mathcal{P}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{P}$;
- rectas - $\{A, E, C\}$, $\{A, F, B\}$, $\{A, G, D\}$, $\{B, D, C\}$, $\{B, G, E\}$, $\{F, G, C\}$, $\{E, F, D\}$;
- incidir - pertencer a.



Exercício. Investigar se esta geometria satisfaz os axiomas de incidência de Hilbert para o plano.

Aula 3

Axioma das paralelas

O axioma das paralelas é um axioma de incidência no plano, que simplifica os fundamentos da geometria.

Este axioma é independente dos outros axiomas de incidência.

Definição. Duas rectas r e s dizem-se complanares se estiverem contidas no mesmo plano.

Definição. Duas rectas r e s dizem-se paralelas se forem complanares e disjuntas.

Axioma das paralelas (versão de Playfair). Seja r uma recta e P um ponto não incidente em r. Então, no plano determinado por r e por P, existe uma única recta s paralela a r que passa por P.

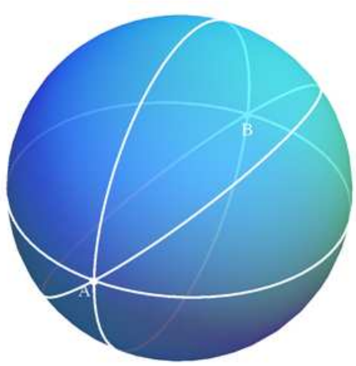
Uma geometria em que não é válido o axioma das paralelas diz-se geometria não euclidiana.

Nota. Para saber mais sobre geometrias não euclidianas consultar o livro de H. Coxeter, "Non-Euclidean Geometry", Cambridge University Press, 1998.

Geometrias não euclidianas - geometria esférica

Esfera de Riemann. Seja $\mathcal{S}$ uma superfície esférica do espaço. Consideremos uma geometria em $\mathcal{S}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{S}$;
- recta - qualquer círculo máximo de $\mathcal{S}$;
- plano - a esfera $\mathcal{S}$;
- incidir em - pertencer a.



Neste modelo, é válido o axioma elíptico.

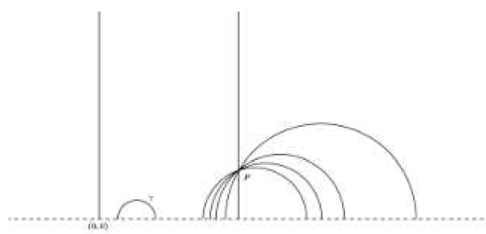
E.1 (*Axioma elíptico*). Seja r uma recta e P um ponto não incidente em r. Então não existem rectas paralelas a r que contenham P.

Nota. Para uma exposição interativa sobre geometria esférica consultar
https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/

Geometrias não euclidianas - geometria hiperbólica

Plano de Poincaré. Seja $\mathcal{P}$ um semiplano aberto definido por uma recta r. Consideremos uma geometria em $\mathcal{P}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

- ponto - qualquer elemento do conjunto $\mathcal{P}$;
- recta - qualquer semirecta de $\mathcal{P}$ perpendicular a r com origem em r ou qualquer semicircunferência de $\mathcal{P}$ com centro em r;
- plano - o semiplano $\mathcal{P}$;
- incidir em - pertencer a.



Neste modelo é válido o axioma hiperbólico.

H.1 (*Axioma hiperbólico*). Seja r uma recta e P um ponto não incidente em r. Então existem pelo menos duas rectas que incidem em P e são paralelas a r.

Nota. Para um pequeno resumo sobre geometrias não euclideanas consultar
https://www.atractor.pt/va/mat/GeomEsf/postulado_paralelas.htm

Aula 4

Axiomas de incidência - resumo

R.1 *Axioma da recta.* Por dois pontos passa uma única recta.

R.2 *Axioma do plano.* Por três pontos não colineares passa um único plano.

R.3 *Axioma da dimensão.* Uma recta contém pelo menos dois pontos. Um plano contém pelo menos duas rectas. Existem pelo menos dois planos.

R.4 *Axioma da intersecção recta-plano.* Se dois pontos de uma recta pertencem a um plano, então a recta que os contém está contida no plano.

R.5 *Axioma da intersecção plano-plano.* A intersecção de dois planos não disjuntos é uma recta.

R.6 *Axioma das paralelas.* Dada uma recta r e um ponto P que não lhe pertence, existe uma única recta paralela a r que contém P.

Transitividade do paralelismo - rectas complanares

Daqui em diante consideraremos sempre uma geometria em que todos os axiomas de incidência são válidos. Por uma questão de simplicidade usaremos os axiomas R.1, R.2, R.3, R.4, R.5, R.6.

Uma das consequências do axioma das paralelas é a propriedade transitiva da relação de paralelismo. Vejamos em primeiro lugar o caso de três rectas complanares.

Teorema. Sejam r, s, t três rectas complanares. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.

Dem. Suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que r e t não são paralelas. Como, por hipótese, r e t são rectas complanares e distintas, a sua intersecção é um ponto P. Assim temos que r e t são ambas rectas paralelas a s passando por P, o que contradiz o axioma das paralelas.

Uma propriedade que não depende do axioma das paralelas

Lema. Sejam α, β, γ três planos, tais que cada um deles intersecta os outros dois. Então ou as três rectas de intersecção são concorrentes ou são paralelas duas a duas.

Dem. Sejam $r = \beta \cap \gamma, s = \alpha \cap \gamma, t = \alpha \cap \beta$.

As rectas r e s são complanares (visto que estão ambas contidas no plano γ), logo ou são concorrentes num ponto P ou são disjuntas.

Se $r \cap s = \{P\}$, então $P \in \beta$ (porque $P \in r$) e $P \in \alpha$ (porque $P \in s$). Portanto P pertence a $\alpha \cap \beta$, ou seja $P \in t$, portanto as três rectas são concorrentes em P.

Se as rectas r e s são disjuntas, têm de ser disjuntas de t, porque caso contrário teríamos que as três rectas se intersectariam num ponto. Assim, s e t e são disjuntas e complanares, logo são paralelas. Analogamente se prova que r e t são paralelas.

Transitividade do paralelismo - rectas não complanares

Vejamos agora que a relação de paralelismo é transitiva em geral.

Teorema. (propriedade transitiva do paralelismo - caso geral) Sejam r, s, t três rectas. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.

Dem. O caso de três rectas complanares já foi demonstrado. Consideremos o caso em que as três rectas são não complanares. Por definição de rectas paralelas, temos que r e s são complanares. Seja P um ponto da recta t que não pertence ao plano que contém as rectas r e s. Seja π_1 o único plano que contém o ponto P e a recta r e seja π_2 o único plano que contém o ponto P e a recta s. Seja q a intersecção dos planos π_1 e π_2.

Assim, temos que r e s são paralelas e, por construção, a recta q é complanar com r e é complanar com s. Pelo lema anterior, podemos concluir que q é disjunta de r e é disjunta de s. Como $P \in q$ e q é paralela a s, pelo axioma das paralelas, a recta q tem de coincidir com a recta t. Assim, concluímos que r é paralela a t.

Axiomas de medida

Vamos em seguida definir axiomas que nos permitirão construir um modelo para a geometria afim em $\mathbb{R}^n$, partindo do conhecimento que temos dos números reais.

Assumindo que existe uma correspondência bijectiva entre os pontos de uma recta e os números reais, define-se um novo conceito primitivo a que chamamos *régua*.

Definição. Seja r uma recta. Uma régua na recta r é uma bijecção entre a recta e o conjunto dos números reais.

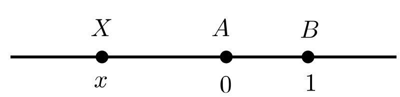
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & r & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \varphi(X) \end{array}$$

Denotaremos por x o número real $\varphi(X)$ e designamo-lo por coordenada de X associada à régua φ.

Axioma da régua

R.7 *Axioma da régua.* Dados dois pontos A e B, existe uma régua na recta por eles definida tal que $A \mapsto 0$ e $B \mapsto 1$.

Definição. Dados dois pontos A e B, uma régua na recta AB que satisfaz $A \mapsto 0$ e $B \mapsto 1$ diz-se régua com base nos pontos A e B ou régua de base A, B.



Régua de base A, B

Coloca-se agora o problema de comparar várias réguas na mesma recta. Vamos necessitar de um axioma que nos dê informação sobre como é que se relacionam as coordenadas de cada ponto da recta relativamente a duas réguas diferentes.

Axioma da comparação das réguas

Recordando que o objectivo dos axiomas de medida é a construção da geometria afim, vão interessar-nos mudanças de coordenadas que conservem essa estrutura na recta.

Definição. Uma função bijectiva de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tal que

$$x \mapsto l\,x + m, \quad \text{com } l, m \in \mathbb{R},\ l \neq 0$$

diz-se transformação afim de $\mathbb{R}$.

R.8 *Axioma da comparação das réguas.* Duas réguas na mesma recta estão relacionadas por meio de uma transformação afim.

Este axioma interpreta-se do seguinte modo:

Sejam dadas duas réguas na mesma recta. Se x e x' forem as coordenadas do mesmo ponto X relativamente a cada uma das duas réguas, então existem $l, m \in \mathbb{R},\ l \neq 0$, tais que

$$x' = l\,x + m.$$

Razão associada a dois pares de pontos

A noção de régua e os axiomas R.7 e R.8 permitem comparar distâncias entre dois pares de pontos, através da noção abstracta de "razão", mesmo sem estar definida uma unidade de medida.

Definição. Uma razão $x : y$ é um par de números, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $x, y \in \mathbb{R},\ (x, y) \neq (0, 0)$;
- $x : y = x' : y'$ se e só se $xy' = yx'$.

Nota. Uma razão comporta-se como uma fracção, mas com a particularidade de que tanto o denominador como o numerador poderem ser nulos.

Definição. Sejam A, B, C, D pontos de uma recta r, não todos iguais. Definimos razão $AB : CD$ como

$$AB : CD := (a - b) : (c - d)$$

onde a, b, c, d são, respectivamente, as coordenadas dos pontos A, B, C, D em relação a uma régua na recta r.

Exercício. Mostrar que a noção de razão associada a dois pares de pontos está bem definida, isto é, não depende da régua considerada.

Aula 5

Pontos colineares e razões

Dados dois pontos A e C, é possível identificar qualquer ponto B da recta AC através da razão $AB : BC$.

Proposição. Sejam A e C dois pontos. Então para qualquer razão $x : y \neq 1 : -1$ existe um único ponto B na recta AC tal que $AB : BC = x : y$ e não existe nenhum ponto B na recta AC satisfazendo $AB : BC = 1 : -1$.

Dem. Consideremos uma régua em que $A \mapsto 0$ e $C \mapsto 1$ e seja $B \mapsto \lambda$ um ponto distinto de A e de C. Então, por definição de razão, temos

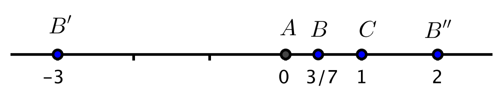
$$AB : BC = -\lambda : (\lambda - 1) = \lambda : (1 - \lambda).$$

Assim, se $x : y = \lambda : 1-\lambda$ obtemos $\lambda = x/(x+y)$ e portanto $x+y \neq 0$, ou seja, $x : y \neq 1 : -1$.

Exemplo. Sejam $A \mapsto 0, C \mapsto 1$. Sejam B, B', B'' tais que

$$AB : BC = 3 : 4,\ AB' : B'C = -3 : 4,\ AB'' : B''C = 2 : -1.$$

Temos que $B \mapsto 3/7$, $B' \mapsto -3$, $B'' \mapsto 2$.



Segmento de recta e ponto médio

Já vimos que se

$$A \mapsto 0,\ C \mapsto 1 \ \text{ e } \ AB : BC = x : y,$$

então

$$B \mapsto \frac{x}{x+y}.$$

Portanto, quando x e y são não negativos, a coordenada de B nesta régua é um número entre 0 e 1.

Definição. Sejam A e C dois pontos. O segmento de recta $[AC]$ é definido como o conjunto de todos os pontos B tais que

$$AB : BC = x : y,\ \text{com } x, y \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dizemos que B está entre A e C se $B \in [AC]$.

Definição. Sejam A e C dois pontos. O ponto médio do segmento de recta $[AC]$ é o único ponto B tal que

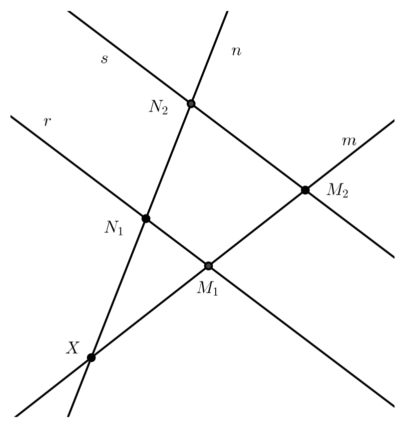
$$AB : BC = 1 : 1.$$

Nota. Se $A = C$, convenciona-se que o segmento de recta $[AC]$ coincide com o ponto A e também com o seu ponto médio.

O axioma da semelhança

Os axiomas R.7 e R.8 permitem utilizar as razões para comparar distâncias entre pontos colineares. O próximo axioma vai permitir comparar distâncias entre pontos de rectas distintas.

R.9 *Axioma da semelhança.* Sejam r e s duas rectas paralelas e m e n duas rectas concorrentes num ponto X. Se $M_1 = r \cap m,\ M_2 = s \cap m,\ N_1 = r \cap n,\ N_2 = s \cap n$ então $XM_1 : XM_2 = XN_1 : XN_2$.



Proposição.(*Recíproco do axioma de semelhança*) Sejam m e n rectas concorrentes num ponto X. Sejam $M_1, M_2 \in m \setminus \{X\}$, $N_1, N_2 \in n \setminus \{X\}$ pontos satisfazendo

$$XM_1 : XM_2 = XN_1 : XN_2.$$

Então as rectas M_1N_1 e M_2N_2 são paralelas.

Teorema de Tales ($\sim$ 600 A.C.)

Uma recta diz-se transversal a um sistema de rectas complanares e paralelas, se não for paralela a nenhuma delas. O teorema de Tales estabelece que um sistema de três rectas paralelas intersecta qualquer recta transversal com razões iguais.

Teorema. (Tales) Sejam r, s, t três rectas complanares tais que r é paralela a s. Sejam m e n duas rectas complanares com r, s, t, mas não paralelas a nenhuma das rectas r, s, t.

Suponhamos que

$$m \cap r = M_1,\ m \cap s = M_2,\ m \cap t = M_3$$

e que

$$n \cap r = N_1,\ n \cap s = N_2,\ n \cap t = N_3.$$

Tem-se que

a recta t é paralela às rectas r e s

se e só se

$$M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3.$$

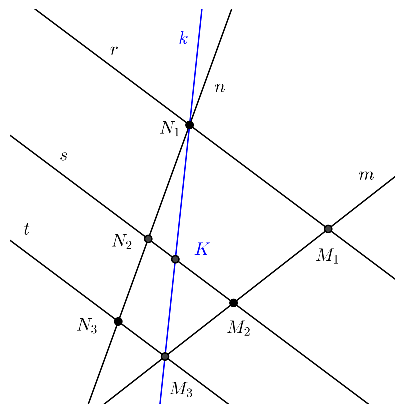
Nota. Tales de Mileto é o matemático grego mais antigo de que há conhecimento. Sabe-se que era mercador e viajante, que utilizou a matemática nas suas viagens para calcular distâncias entre navios. Observou ainda fenómenos eléctricos e magnéticos, tendo estudado as propriedades do âmbar e da magnetite.

Demostração do teorema de Tales

Observemos que se A, B, C são três pontos colineares, com $AB : AC = x : y$, então $AB : BC = x : y - x$. Assim, se $A', B'C'$ forem também três pontos colineares, temos

$$AB : AC = A'B' : A'C' \Leftrightarrow AB : BC = A'B' : B'C'.$$

Dem. Seja k a recta N_1M_3. A recta k não é paralela a r porque a intersecta em N_1, logo também não é paralela a s, pela propriedade transitiva do paralelismo. Por construção, temos $r \cap K = N_1$ e $t \cap k = M_3$. Seja $K = s \cap k$.



($\Rightarrow$) Suponhamos que as rectas r, s, t são paralelas. Aplicando o axioma da semelhança e a definição de razão, obtemos

$$M_1M_2 : M_1M_3 = N_1K : N_1M_3 = N_1N_2 : N_1N_3.$$

Utilizando as propriedades das razões, obtemos

$$M_1M_2 : M_2M_3 = N_1K : KM_3 = N_1N_2 : N_2N_3.$$

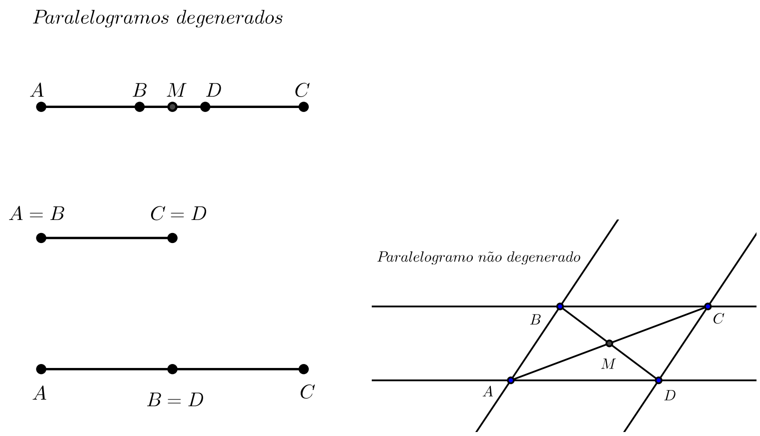
($\Leftarrow$) Como r e s são paralelas, $M_3 \notin r \cup s$ e $M_3 = m \cap k$, pelo axioma da semelhança e pela hipótese, temos que

$$N_1K : N_1M_3 = M_1M_2 : M_1M_3 = N_1N_2 : N_1N_3.$$

Utilizando o recíproco do axioma de semelhança, obtemos que a recta KN_2 é paralela à recta M_3N_3. Como $s = KN_2$ e $t = M_3N_3$, temos que s é paralela a t e, pela propriedade transitiva do paralelismo, obtemos que t é paralela a r e a s.

Definição de paralelogramo

Sejam A, B, C, D quatro pontos não todos iguais. Dizemos que $[ABCD]$ é um paralelogramo se o ponto médio do segmento de recta $[AC]$ é igual ao ponto médio do segmento de recta $[BD]$. Os pontos $A,\ B,\ C,\ D$ são designados vértices do paralelogramo. Os segmentos de recta $[AC]$ e $[BD]$ são designados diagonais do paralelogramo e o seu ponto de intersecção é chamado centro do paralelogramo. Se os quatro vértices forem colineares, dizemos que o paralelogramo é degenerado. Se os quatro vértices forem não colineares, então as rectas $AB,\ BC,\ CD,\ DA$ são distintas e são os lados do paralelogramo.



Nota. Permutações cíclicas ou inversões completas da ordem dos quatro pontos $A,\ B,\ C,\ D$ dão origem ao mesmo paralelogramo. Por exemplo $[ABCD] = [BCDA] = [DCBA] = \ldots$ Outras permutações como $[ACBD]$ podem não ser paralelogramos.

Aula 6

Propriedades dos paralelogramos

As proposição seguinte é fundamental para estabelecer a definição de vector a partir dos axiomas de medida e incidência.

Proposição. Sejam A, B, C, D três pontos. Então existe um único ponto D tal que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Tem-se ainda que o ponto D pertence ao único plano que contém os pontos A, B, C.

Dem. Exercício.

Num paralelogramo de vértices não colineares, podemos afirmar que lados opostos são paralelos.

Proposição. Sejam A, B, C, D quatro pontos não colineares. Então $[ABCD]$ é um paralelogramo se e só se a recta AB é paralela à recta CD e a recta AD é paralela à recta BC.

Dem. Exercício.

Nota. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo degenerado de vértices distintos e centro M.

Se $A \mapsto a$; $B \mapsto b$; $C \mapsto c$; $D \mapsto d$; $M \mapsto m$, em relação a uma régua na recta que contém os pontos A, B, C, D, M, então $a + c = b + d$. De facto, tem-se

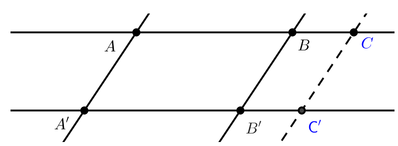
$$AM : MC = 1 : 1 = BM : MD \Leftrightarrow a + c = b + d.$$

Teorema do alongamento do paralelogramo

Se "alongarmos" uniformemente um paralelogramo numa dada direcção, obtemos um novo paralelogramo.

Teorema. Seja $[ABB'A']$ um paralelogramo com vértices distintos. Sejam C um ponto da recta AB e C' um ponto da recta $A'B'$ tais que $AB : AC = A'B' : A'C'$. Então $[ACC'A']$ é um paralelogramo.

Dem. Caso 1. Os pontos A, B, B', A' são não colineares. Pela proposição anterior, temos que a recta $AC(= AB)$ é paralela à recta $A'C'(= A'B')$. Por hipótese, temos $AB : AC = A'B' : A'C'$. Então $AB : BC = A'B' : B'C'$ e, pelo teorema de Tales, conclui-se que a recta CC' é paralela à recta AA'.



Suponhamos agora que os pontos A, B, C, A', B', C' são colineares. Consideremos uma régua na recta que os contém onde

$$A \mapsto a;\ B \mapsto b;\ C' \mapsto c';\ A' \mapsto a';\ B' \mapsto b';\ C \mapsto c.$$

Como $ABB'A'$ é paralelogramo, temos que $a + b' = b + a'$, ou seja

$$b - a = b' - a'.$$

Por outro lado, como por hipótese, $AB : AC = A'B' : A'C'$, temos

$$(b - a)(c' - a') = (c - a)(b' - a').$$

Como os pontos A, B, A', B' são distintos, podemos dividir ambos os membros por $(b - a)$, obtendo

$$c - a = c' - a',$$

o que equivale a afirmar que $[ACC'A']$ é paralelogramo.

Teorema de Désargues - versão restrita (sec. XVII)

Este teorema é fundamental para definir soma de vectores a partir dos axiomas de medida e de incidência.

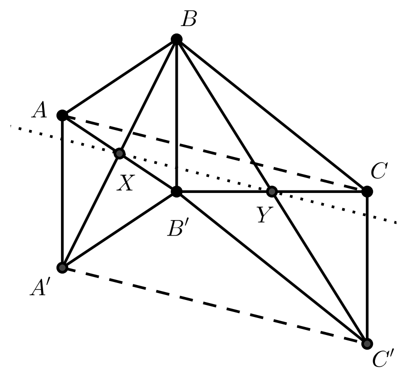
Teorema. Sejam A, B, C, A', B', C' seis pontos. Se $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ forem paralelogramos, então $[ACC'A']$ também é um paralelogramo.

Dem. Caso 1. Os pontos A, C, C', A' são não colineares.

Como $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ são paralelogramos, pela transitividade do paralelismo, as rectas AA' e CC' são paralelas. Sejam X e Y os centros de $[ABB'A']$ e $[BCC'B']$ respectivamente. Tem-se que

$$AX : XB' = 1 : 1 = CY : YB' \quad \text{e} \quad A'X : XB = 1 : 1 = C'Y : YB.$$

Pelo recíproco do axioma da semelhança, conclui-se que a recta XY é paralela às rectas AC e $A'C'$. Pela transitividade do paralelismo, conclui-se que as rectas AC e $A'C'$ são paralelas.



Caso 2. Os pontos A, B, C, A', B', C' são colineares. Consideremos uma régua na recta que os contém, onde

$$A \mapsto a;\ B \mapsto b; C \mapsto c;\ A' \mapsto a';\ B' \mapsto b';\ C' \mapsto c'.$$

Como $a + b' = b + a'$ e $b + c' = c + b'$, tem-se $a + c' = c + a'$. Logo $[ACC'A']$ é paralelogramo.

Caso 3. Os pontos A, C, A', C' são colineares, mas não pertencem à recta BB'.

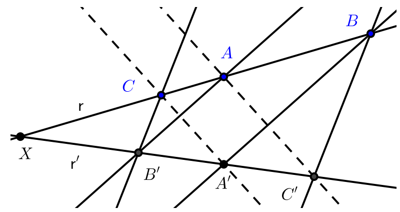
Seja A'' o único ponto da recta AC tal que $ACC'A''$ é um paralelogramo. Por hipótese, $BCC'B'$ é paralelogramo e A, B, B', A'' são não colineares, logo $ABB'A''$ é um paralelogramo. Mas sabemos que também $ABB'A'$ é um paralelogramo, logo $A' = A''$ e $[ACC'A']$ é um paralelogramo.

Aula 7

Teorema de Pappus ($\sim$ 300 DC)

Teorema. Sejam r e r' duas rectas concorrentes. Sejam A, B, C três pontos de r e A', B', C' três pontos de r'. Se a recta AB' é paralela à recta BA' e a recta BC' é paralela à recta CB', então as rectas AC' e CA' são paralelas.

Dem. Exercício.



Sugestão. Considerar $X = r \cap r'$ e utilizar o axioma da semelhança e o seu recíproco.

Teorema de Menelau ($\sim$ 100 DC)

Este teorema é uma condição necessária para que três pontos sejam colineares.

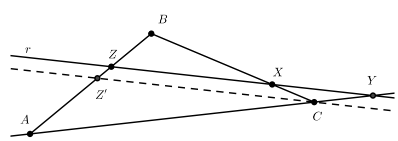
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares e seja r uma recta que intersecta a recta BC em X, a recta AC em Y e a recta AB em Z. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2,\ CY : YA = \beta_1 : \beta_2,\ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Então

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0.$$

Dem. Exercício.



Sugestão. Considerar a recta paralela a r que passa por C e utilizar as propriedades das razões.

Teorema de Ceva - versão restrita (sec. XVII)

Este teorema é uma condição necessária para que três rectas sejam concorrentes.

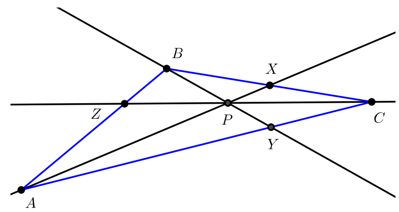
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares e sejam $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2,\ CY : YA = \beta_1 : \beta_2,\ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Se $AX \cap BY \cap CZ = \{P\}$, então

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0.$$

Dem. Exercício.



Sugestão. Aplicar o teorema de Menelau ao triângulo $[ABX]$ e ao triângulo $[ACX]$.

Definição de vector

A noção de vector é fundamental para se poder utilizar as ferramentas da álgebra no estudo da geometria.

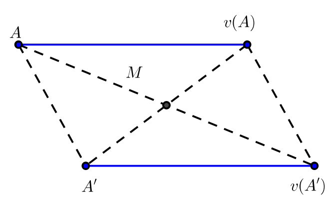
Consideremos um conjunto $\mathcal{E}$ a que chamamos *espaço de pontos*, onde está definida uma geometria que satisfaz todos os axiomas de incidência e de medida. Iremos pensar num vector como uma bijecção de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{E}$ que fornece uma "regra de movimento".

Definição. Um vector v é uma aplicação bijectiva,

$$\begin{aligned} v: \quad & \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ & A \mapsto v(A) \end{aligned}$$

satisfazendo a seguinte propriedade:

dados pontos A, A', o ponto médio do segmento de recta $[A\, v(A')]$ é igual ao ponto médio do segmento de recta $[A'\, v(A)]$.



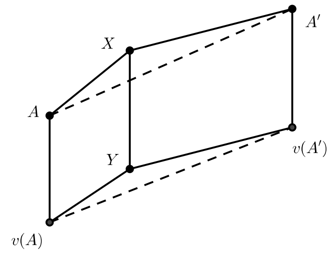
Se v for tal que $v(A) = A$, para qualquer A, então v diz-se vector nulo e denota-se por $\vec{0}$.

Vector definido por dois pontos

Por definição, se v é um vector e A, A' são pontos, então $[AA'v(A')v(A)]$ é um paralelogramo.

Proposição. Sejam X, Y pontos de $\mathcal{E}$. Existe um único vector v tal que $Y = v(X)$.

Dem. Seja $A \in \mathcal{E}$. Podemos definir $v(A)$ como o único ponto do espaço tal que $[AXY v(A)]$ é um paralelogramo. Para mostrar que a aplicação v está bem definida, consideremos um ponto A' e verifiquemos que $[AA'v(A')v(A)]$ é um paralelogramo. Por hipótese, $[v(A)AXY]$ e $[XY v(A')A']$ são paralelogramos, logo, pelo teorema de Désargues, temos que $[AA'v(A')v(A)]$ ainda é um paralelogramo.



Notação. Denotamos por $\overrightarrow{XY}$ o único vector que transforma X em Y. Se $X = Y$, então $\overrightarrow{XY} = \vec{0}$.

Aula 8

Composição de vectores

Neste contexto de geometria axiomática, a soma de vectores vai ser definida como composição de aplicações. Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de pontos. Denotamos por $\vec{\mathcal{E}}$ o conjunto dos vectores de $\mathcal{E}$.

Proposição. Sejam $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$ e seja $w = u \circ v$, ou seja, $w(A) = u(v(A)),\ A \in \mathcal{E}$. Então
1) w é um vector de $\mathcal{E}$;
2) $[Au(A)w(A)v(A)]$ é um paralelogramo, para qualquer $A \in \mathcal{E}$.

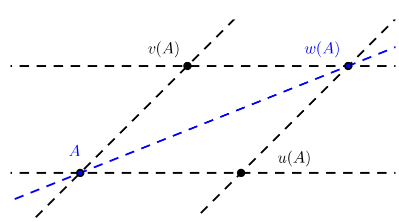
Dem. 1) Sejam $A, A' \in \mathcal{E}$. Como v e u são vectores, temos que $[A\,A'\,v(A')\,v(A)]$ e $[v(A)\,w(A)\,w(A')v(A')]$ são paralelogramos. Logo, pelo teorema de Désargues, $[A\,A'\,w(A')w(A)]$ é um paralelogramo, ou seja, w é um vector.

2) Seja $A' = v(A)$. Então $u(A') = w(A)$. Como u é vector, tem-se que $[A\,u(A)\,u(A')\,A']$ é um paralelogramo, ou seja, $[A\,u(A)\,w(A)\,v(A)]$ é um paralelogramo.

Soma de vectores

Definição. Dados vectores v e u, o vector $w = v \circ u$ é designado soma de u e v e é denotado $w = u + v$.

O facto de $[A\,u(A)\,w(A)\,v(A)]$ ser um paralelogramo corresponde à *regra do paralelogramo* para somar vectores.



Proposição. São válidas as seguintes propriedades:

(i) Para quaisquer vectores u, v, w, tem-se $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(ii) Para quaisquer u, v vectores, tem-se $u + v = v + u$.

(iii) Para qualquer vector u, tem-se $u + \vec{0} = u$.

(iv) Para qualquer vector v, existe um único vector $-v$ tal que $v + (-v) = \vec{0}$.

Dem. Exercício.

Produto de um vector por um escalar

Proposição. Dado um número real λ e um vector $v = \overrightarrow{XY}$, a aplicação $\lambda v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $(\lambda v)(X) = Z$ com $Z \in XY$ satisfazendo

$$XY : XZ = 1 : \lambda$$

é um vector.

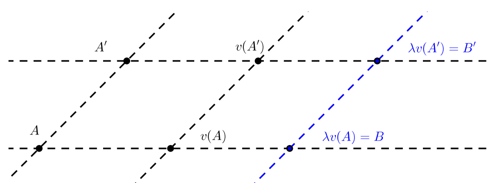
Dem. Sejam $A, A' \in \mathcal{E}$. Então, como v é um vector, temos que $[A\,A'\,v(A')\,v(A)]$ é um paralelogramo.

Sejam $(\lambda v)(A) = B$ e $(\lambda v)(A') = B'$.

Como $B \in A\,v(A)$ e $B' \in A'\,v(A')$ são tais que

$$A\,v(A) : A\,B = 1 : \lambda = A'\,v(A') : A'\,B',$$

concluímos que $[AA'B'B]$ é um paralelogramo, pelo teorema do alongamento.



Propriedades do produto de um vector por um escalar

Proposição. Seja u, v vectores e λ, μ números reais. São válidas as seguintes propriedades:

(i) $(\lambda\,\mu)\,v = \lambda\,(\mu\,v)$.

(ii) $(\lambda + \mu)\,v = \lambda\,v + \mu\,v$.

(iii) $\lambda\,(u + v) = \lambda\,u + \lambda\,v$.

(iv) $1\,v = v$.

Dem. (i), (ii), (iv) Exercício.

(iii) Seja $w = u + v$ e seja $A \in \mathcal{E}$. Sejam $B = \lambda u(A)$, $C = \lambda w(A), D = \lambda v(A)$. Temos de provar que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Suponhamos que os quatro pontos A, B, C, D são não colineares. Temos que as rectas CD e $v(A)w(A)$ são paralelas, porque $Av(A) : AD = Aw(A) : AC$. Por outro lado, temos que AB e e $v(A)w(A)$ são paralelas visto que $[Av(A)w(A)u(A)]$ é um paralelogramo. Portanto AB é paralela a CD. Analogamente se provava que AD é paralela a BC. No caso em que os pontos A, B, C, D são colineares, utiliza-se uma régua na recta que os contém para provar que o ponto médio de $[AC]$ é igual ao ponto médio de $[BD]$.

Teorema. O conjunto $\vec{\mathcal{E}}$ é um espaço vectorial real.

Equação vectorial da recta e do plano

Proposição. Sejam O e A dois pontos e seja r a recta que os contém. Então, para qualquer ponto $P \in r$, existe um único número real p tal que

$$\overrightarrow{OP} = p\,\overrightarrow{OA}.$$

Tem-se ainda que a aplicação $P \mapsto p$ é uma régua em r, com base nos pontos O e A.

Dem. Exercício.

Proposição. Sejam O, A, B pontos não colineares. Seja α o único plano que os contém. Então, um ponto $P \in \alpha$ se e só se existem e são únicos números reais a, b tais que

$$\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}.$$

Dem. Exercício.

Definição de espaço afim

A partir de um conjunto de pontos $\mathcal{E}$ que satisfaz os nove axiomas de incidência e medida, é possível definir o espaço vectorial $\vec{\mathcal{E}}$. Estes dois conjuntos estão relacionados da seguinte forma: o conjunto $\vec{\mathcal{E}}$ é composto por bijecções de $\mathcal{E}$ com as propriedades seguintes:

(i) Dados $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$, tem-se $(u+v)(X) = u(v(X)), \forall X \in \mathcal{E}$.

(ii) Dados $X, Y \in \mathcal{E}$, existe um único $v \in \vec{\mathcal{E}}$ tal que $v(X) = Y$.

Definição. Um espaço afim é um conjunto $\mathcal{S}$ ao qual está associado um espaço vectorial $\mathcal{V}$ de bijecções de $\mathcal{S}$ que satisfazem as propriedades (i) e (ii). Normalmente denotamos $\mathcal{V}$ por $\vec{\mathcal{S}}$ e designamo-lo por *espaço dos vectores de* $\mathcal{S}$ ou *espaço vectorial associado a* $\mathcal{S}$.

Já vimos que um conjunto onde sejam válidos os nove axiomas de incidência e medida tem uma estrutura de espaço afim.

Iremos mostrar em seguida que, num qualquer espaço afim, é possível definir os conceitos primitivos ponto, recta e plano de modo que sejam válidos os nove axiomas de incidência e medida.

Pontos, rectas, planos num espaço afim

Definição. Seja S um espaço afim, com espaço vectorial real associado $\vec{\mathcal{S}}$. Seja U um subespaço vectorial de $\vec{\mathcal{S}}$ e seja $X \in \mathcal{S}$. O subconjunto de S dado por

$$U(X) = \{u(X) : u \in U\}$$

é chamado *subespaço afim de* $\mathcal{S}$ *que passa por* X *e paralelo a* U. A dimensão de $U(X)$ é a dimensão do subespaço vectorial U.

Definimos uma geometria em $\mathcal{S}$ considerando os seguintes conceitos primitivos:

- Pontos - os elementos de $\mathcal{S}$
- Rectas - os subespaços afins de $\mathcal{S}$ de dimensão 1
- Planos - os subespaços afins de $\mathcal{S}$ de dimensão 2
- incidir em - pertencer a

Axiomas de incidência e medida num espaço afim

Uma régua numa recta $U(X)$ é uma bijecção

$$\begin{array}{rcl} U(X) & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & p \end{array}$$

tal que se $P \in U(X)$, então $\overrightarrow{XP} = p\,\mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é um vector não nulo de U.

Duas rectas $U_1(X_1)$ e $U_2(X_2)$ de $\mathcal{S}$ são paralelas se $U_1 = U_2$.

Um vector $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{S}}$ é paralelo a uma recta $r = U(X)$ se $\mathbf{v} \in U$.

Proposição. Duas rectas num espaço afim são paralelas se e só se são complanares e disjuntas.

Dem. Exercício.

Teorema. Num espaço afim de dimensão 3 são válidos os axiomas de incidência e de medida R.1,. . ., R.9.

Vector posição e teorema da razão

Para utilizar todas as ferramentas de álgebra linear em geometria, necessitamos de relacionar a nocão de razão com a noção de coordenadas num espaço vectorial. Como à partida todos os pontos de um espaço afim são equivalentes, podemos escolher qualquer um deles para "origem". Normalmente denotamos o ponto origem de um espaço afim por O.

Definição. Seja $\mathcal{S}$ um espaço afim e seja $O \in \mathcal{S}$ um ponto pré-fixado. Dado um ponto $P \in \mathcal{S}$, designamos o vector $\overrightarrow{OP}$ por vector posição do ponto P em relação à origem O.

Se A e B forem dois pontos e $X \in AB$, então os vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ são linearmente dependentes. Logo, existem números reais α, β tais que

$$\alpha\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{XB}.$$

Definimos no espaço afim a razão $AX : XB$ como $AX : XB = \beta : \alpha$.

Observemos que $\alpha + \beta \neq 0$. De facto, se $\alpha = -\beta$, teríamos

$$\overrightarrow{XB} = -\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{XA},$$

contra o facto de $A \neq B$.

Teorema.(*Teorema da razão*) Suponhamos que O é a origem de $\mathcal{S}$ e sejam A, B pontos tais que $\overrightarrow{OA} = u$ e $\overrightarrow{OB} = v$. Então o ponto X da recta AB tal que $AX : XB = \beta : \alpha$ tem vector posição

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\alpha u + \beta v}{\alpha + \beta}.$$

Aula 9

Nota. Se A, B, X forem pontos tais que

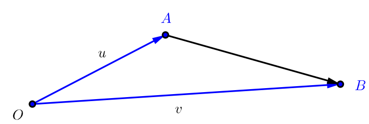
$$\overrightarrow{OX} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB},$$

então $\alpha\,\overrightarrow{AX} = \beta\,\overrightarrow{XB}$ e portanto os pontos A, B, X são colineares.

Demostração do teorema da razão

Observemos que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = v - u.$$



Como $AX : XB = \beta : \alpha$, temos que

$$AX : AB = \beta : \alpha + \beta = \frac{\beta}{\alpha+\beta} : 1$$

e portanto

$$\overrightarrow{AX} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{AB} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}(v-u).$$

Assim

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AX} = u + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(v-u) = \frac{\alpha u + \beta v}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}u + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v.$$

Combinações afins

Definição. Uma expressão $\lambda u + \mu v$, com $\lambda + \mu = 1$ diz-se combinação afim de u e v.

O teorema da razão equivale a afirmar que o vector posição de qualquer ponto na recta AB é combinação afim dos vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, ou seja,

$$P \in AB \text{ se e só existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}.$$

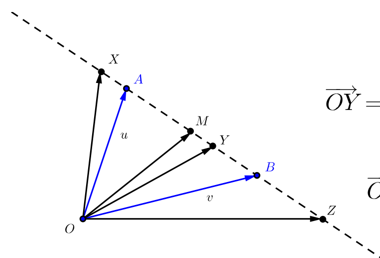
Nota. Por vezes, com abuso de linguagem, escrevemos $P = \lambda A + (1-\lambda)B$.

Exemplo. Sejam A e B dois pontos e sejam $X, Y, Z, M \in AB$ tais que

$$AX : XB = -1 : 6,\ AY : YB = 1 : 2,\ AM : MB = 1 : 1,\ AZ : ZB = 3 : -1.$$

$$\overrightarrow{OX} = \frac{6}{5}u - \frac{1}{5}v \qquad \overrightarrow{OY} = \frac{2}{3}u + \frac{1}{3}v$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \qquad \overrightarrow{OZ} = -\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v$$



Se $A \mapsto 0$ e $B \mapsto 1$, então $X \mapsto -1/5$; $Y \mapsto 2/3$; $Z \mapsto 3/2$, $M \mapsto 1/2$.

Pontos colineares num espaço afim

Corolário 1. Sejam A, B, C três pontos de um espaço afim com vectores posição u, v, w, respectivamente. Então A, B, C são colineares se e só se existem números reais α, β, γ não todos nulos tais que

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ e } \alpha u + \beta v + \gamma w = \vec{0}.$$

Dem. Supondo que $A \neq B$ e $C \in AB$, com $AC : CB = \beta : \alpha$, pelo teorema da razão, temos que

$$w = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}u + \frac{\beta}{\alpha+\beta}v.$$

Portanto $\alpha u + \beta v - (\alpha+\beta)w = \vec{0}$. Tomando $\gamma = -(\alpha+\beta)$, obtemos $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Este argumento pode ser revertido, tendo em conta a nota ao teorema da razão.

Pontos complanares num espaço afim

Proposição. Sejam A, B, C, D pontos de um espaço afim com vectores posição u, v, w, z, respectivamente. Então A, B, C, D são complanares se e só se existem números reais $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ não todos nulos tais que

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \text{ e } \alpha u + \beta v + \gamma w + \delta z = \vec{0}.$$

Dem. Como os planos são os subespaços afins de dimensão 2, temos que os pontos A, B, C, D são complanares se e só se os vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ forem linearmente dependentes, ou seja, se existirem escalares β, γ, δ não todos nulos tais que

$$\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} + \delta\overrightarrow{AD} = \vec{0}.$$

Temos assim que $\beta(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + \gamma(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + \delta(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) = \vec{0}$. Portanto

$$-(\beta + \gamma + \delta)\overrightarrow{OA} + \beta\,\overrightarrow{OB} + \gamma\,\overrightarrow{OC} + \delta\,\overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Tomando $\alpha = -(\beta + \gamma + \delta)$, obtemos $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$.

Aula 10

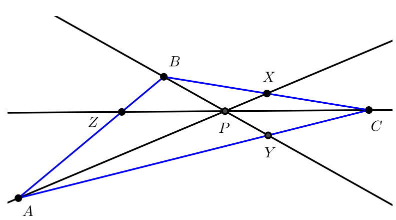
Teorema de Ceva

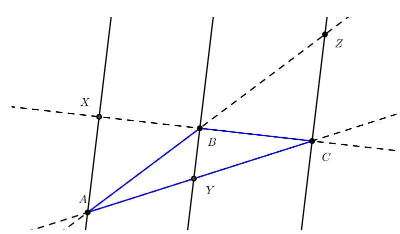
Teorema. Sejam A, B, C três pontos não colineares num espaço afim $\mathcal{S}$ e sejam $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2,\ CY : YA = \beta_1 : \beta_2,\ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Então as condições seguintes são equivalentes

- As rectas $AX,\ BY,\ CZ$ são concorrentes ou são paralelas
- $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2$.





Demonstração do teorema de Ceva

Tomemos o ponto C para origem de $\mathcal{S}$. Sejam

$$\vec{a} = \overrightarrow{CA},\ \vec{b} = \overrightarrow{CB},\ \vec{x} = \overrightarrow{CX},\ \vec{y} = \overrightarrow{CY}.$$

Então, como $BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2$ e $CY : YA = \beta_1 : \beta_2$ temos que

$$CX : CB = \alpha_2 : \alpha_1 + \alpha_2 \ \text{ e } \ CY : CA = \beta_1 : \beta_1 + \beta_2.$$

Portanto

$$\vec{x} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\vec{b} \ \text{ e } \ \vec{y} = \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2}\vec{a}.$$

As rectas AX e BY são concorrentes num ponto P se e só se existirem $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{p} = \lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{a} = \mu\vec{y} + (1-\mu)\vec{b},$$

sendo $AP : PX = 1 : 1-\lambda$ e $BP : PY = 1 : 1-\mu$. Assim, temos

$$(1-\lambda)\vec{a} + \frac{\lambda\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{b} = \frac{\mu\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\vec{a} + (1-\mu)\vec{b}.$$

Como A, B, C são não colineares, temos que os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, logo

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \lambda & + & \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}\mu & = & 1 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\lambda & + & \mu & = & 1 \end{array} \right.$$

Este sistema tem uma única solução se e só se

$$\left| \begin{array}{cc} 1 & \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2} \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} & 1 \end{array} \right| = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2}{(\alpha_1+\alpha_2)(\beta_1+\beta_2)} \neq 0.$$

Pela regra de Cramer obtemos

$$\lambda = \frac{\beta_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2} \ \text{ e } \ \mu = \frac{\alpha_1(\beta_1+\beta_2)}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2}.$$

Portanto

$$\vec{p} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Como tomámos o ponto C para origem, temos que qualquer ponto na recta CP tem como vector posição um múltiplo escalar de $\vec{p}$. Por outro lado, qualquer ponto na recta AB tem como vector posição uma combinação afim de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Logo a recta CP intersecta a recta AB num ponto Z tal que

$$\vec{z} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Como $\alpha_1\beta_1\,\overrightarrow{AZ} = \alpha_2\beta_2\,\overrightarrow{ZB}$, temos que $\alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_1 = AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2$ logo

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Temos que

$$\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_2 = 0,$$

se e só se as rectas AX e BY são paralelas e têm ambas vector director

$$\overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{b} - \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}\vec{a} = -\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1}\vec{a} - \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1}\vec{b}.$$

A segunda identidade obtém-se multiplicando e dividindo a expressão por $\alpha_1\beta_1/(\alpha_1+\alpha_2)$ e usando a igualdade $\alpha_1\beta_1 = -\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_2$.

Com um raciocínio análogo ao caso anterior, concluímos que a única recta que passa por C e é paralela a $\overrightarrow{AX}$ intersecta a recta AB no ponto Z tal que

$$\vec{z} = \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}\vec{a} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}\vec{b}.$$

Temos assim que $AZ : ZB = \alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_1 = \gamma_1 : \gamma_2$, logo

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2.$$

Nota. A partir da expressão de $\vec{p}$ e $\vec{z}$ como combinação afim de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos concluir que num triângulo $[ABC]$ com $BX : XA = \alpha_1 : \alpha_2$, $CY : YA = \beta_1 : \beta_2$ e $AX \cap BY = P$, a recta CP intersecta a recta AB num ponto Z tal que

$$CP : PZ = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 : \alpha_1\beta_2.$$

Teorema da divisão harmónica (Pappus)

Sejam A, B dois pontos. Dizemos que os pontos $X, Y \in AB$ dividem harmonicamente os pontos A e B se as razões $AX : XB$ e $AY : YB$ só diferem no sinal, ou seja, se

$$AX : XB = \alpha : \beta \text{ e } AY : YB = -\alpha : \beta.$$

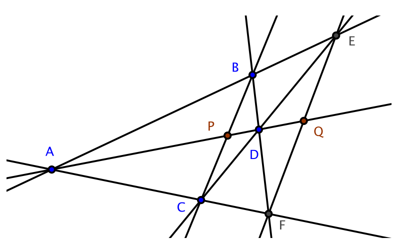
O conjunto $\{A, B, X, Y\}$ diz-se conjunto harmónico e dada uma régua na recta AB, tem-se que

$$(a - x)(y - b) = (x - b)(y - a).$$

Teorema. (*Pappus*) Sejam A, B, C, D quatro pontos complanares. Suponhamos que $AB \cap CD = E$ e que $BD \cap AC = F$. Sejam P e Q, tais que $AD \cap BC = P$ e $AD \cap EF = Q$. Então, os pontos P e Q dividem A e D harmonicamente.

Nota. Este teorema é notável porque define uma noção de medida em termos de relações de incidência entre pontos e rectas. Dados três dos pontos A, P, D, Q, podemos construir o quarto ponto de modo a ter um conjunto harmónico apenas com uma régua, sem ser necessário medir distâncias.

Demonstração do teorema da divisão harmónica



Sejam $AB : BE = 1 : \lambda$ e $AC : CF = 1 : \mu$. Então, como $AD \cap EF = Q$ e $CE \cap BF = D$, pela nota à demonstração do teorema de Ceva aplicada ao triângulo $[AEF]$, temos que

$$AD : DQ = \lambda + \mu : \lambda\mu, \quad \text{logo} \quad AQ : QD = \lambda + \mu + \lambda\mu : -\lambda\mu.$$

Aplicando a mesma nota ao triângulo $[ABC]$, temos

$$AE : EB = \lambda + 1 : -\lambda \ \text{ e } \ AF : FC = \mu + 1 : -\mu.$$

Logo, observando que $P \in BC$, obtemos

$$AD : DP = -(1+\lambda)\mu - (1+\mu)\lambda : \lambda\mu = -\lambda - \mu - 2\lambda\mu : \lambda\mu.$$

Logo

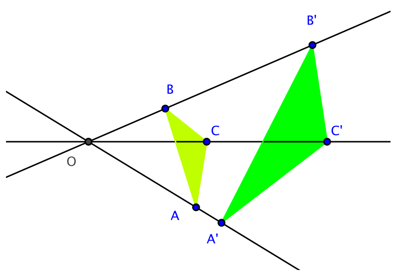
$$AP : PD = \lambda + \mu + \lambda\mu : \lambda\mu.$$

Portanto P e Q dividem harmonicamente A e D.

Triângulos em perspectiva

Sejam $[A, B, C]$ e $[A'B'C']$ triângulos, não necessariamente complanares.

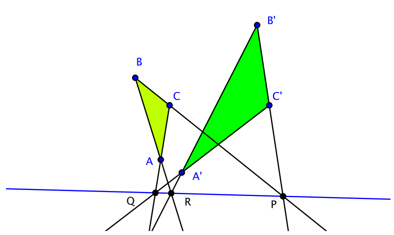
Dizemos que $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ estão em perspectiva segundo o ponto O se as rectas AA', BB', CC' são concorrentes em O.



Suponhamos que

$$BC \cap B'C' = P, \ AC \cap A'C' = Q, \quad AB \cap A'B' = R.$$

Dizemos que $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ estão em perspectiva segundo a recta r se os pontos P, Q, R pertencem a r.



Teorema de Désargues

O teorema de Désargues estabelece que se dois triângulos estão em perspectiva segundo um ponto então também estão em perspectiva segundo uma recta. O recíproco deste teorema também é verdadeiro.

Teorema. (*Désargues*) Se dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ estão em perspectiva segundo um ponto e os lados correspondentes se intersectam, então os três pontos de intersecção dos lados correspondentes são colineares.

Dem. Seja $O = AA' \cap BB' \cap CC'$ e sejam

$$BC \cap B'C' = P,\ AC \cap A'C' = Q,\quad AB \cap A'B' = R.$$

Consideremos o ponto O como origem e denotemos

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA},\ \vec{a'} = \overrightarrow{OA'},\ \vec{b} = \overrightarrow{OB},\ \vec{b'} = \overrightarrow{OB'},\ \vec{c} = \overrightarrow{OC},\ \vec{c'} = \overrightarrow{OC'}$$

$$\vec{p} = \overrightarrow{OP},\ \vec{Q} = \overrightarrow{OQ},\ \vec{r} = \overrightarrow{OR}.$$

Como OAA', OBB' e OCC' são colineares, temos

$$\vec{a'} = \lambda\vec{a},\ \vec{b'} = \mu\vec{b},\ \vec{c'} = \nu\vec{c}.$$

Como $R \in AB \cap A'B'$, existem e são únicos $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{r} = \xi\vec{a} + (1-\xi)\vec{b} = \eta\vec{a'} + (1-\eta)\vec{b'} = \xi\lambda\vec{a} + (1-\xi)\mu\vec{b}.$$

Como $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes, temos que $-\xi + \mu\eta = \mu - 1$ e $\xi - \lambda\eta = 0$, o que implica

$$\xi = -\frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}.$$

Logo

$$\vec{r} = \frac{\mu(\lambda-1)}{\lambda-\mu}\vec{b} - \frac{\lambda(\mu-1)}{\lambda-\mu}\vec{a}.$$

Analogamente se provava que

$$\vec{p} = \frac{\nu(\mu-1)}{\mu-\nu}\vec{c} - \frac{\mu(\nu-1)}{\mu-\nu}\vec{b} \ \text{ e } \ \vec{q} = \frac{\lambda(\nu-1)}{\nu-\lambda}\vec{a} - \frac{\nu(\lambda-1)}{\nu-\lambda}\vec{c}.$$

Assim, como

$$(\lambda-\mu)(\nu-1)\vec{r} + (\mu-\nu)(\lambda-1)\vec{p} + (\nu-\lambda)(\mu-1)\vec{q} = \vec{0}$$

e

$$(\lambda-\mu)(\nu-1) + (\mu-\nu)(\lambda-1) + (\nu-\lambda)(\mu-1) = 0$$

podemos concluir que os pontos P, Q, R são colineares.

Aula 11

Comprimento de um segmento de recta

Na geometria afim não é possível comparar comprimentos em rectas que não sejam paralelas. Necessitamos então de um novo conceito primitivo, que será o comprimento de um segmento de recta ou distância entre dois pontos. Denotamos a distância entre dois pontos A e B por $\overline{AB}$.

Fixada uma unidade de comprimento e uma recta r, vamos assumir que existe uma régua em r tal que a distância entre os pontos com coordenada 0 e 1 é igual à unidade de comprimento pré-fixada. Desta forma, para que haja compatibilidade com a noção de razão na geometria afim, a distância entre dois pontos A e B da recta r, terá de ser igual a $|a-b|$, onde $A \mapsto a$ e $B \mapsto b$.

R.10 *Axioma da compatibilidade da régua.* Para cada recta r, existe pelo menos uma régua em r com a seguinte propriedade: para quaisquer pontos $A, B \in r$, tem-se $\overline{AB} = |a-b|$, onde a e b são as coordenadas de A e de B respectivamente.

Uma régua em r que satisfaz $\overline{AB} = |a-b|$ diz-se régua standard.

Razões e distâncias

A partir do axioma da compatibilidade da régua, podemos deduzir que $\overline{AB} = \overline{BA}$ e que $\overline{AB} = 0$ se e só se $A = B$.

Vamos agora relacionar a noção de razão entre pontos colineares com a noção de distância.

Proposição. Sejam A, B, C três pontos colineares. Tem-se que

$$AB : BC = \overline{AB} : \overline{BC} \quad \text{se} \quad \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Caso contrário, $AB : BC = -\overline{AB} : \overline{BC}$.

Dem. Consideremos uma régua standard na recta AB e sejam a, b, c as coordenadas dos pontos A, B, C respectivamente. Podemos assumir, sem perda de generalidade que $a \leq c$. Temos que a condição $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ corresponde a $|b-a| + |c-b| = |c-a|$, que é verdadeira se e só se $a \leq b \leq c$, ou seja, se $b-a$ e $c-b$ são positivos. Assim

$$AB : BC = (b-a) : (c-b) = |b-a| : |c-b| = \overline{AB} : \overline{BC}.$$

Se $\overline{AB} + \overline{BC} \neq \overline{AC}$, então $b-a$ e $c-b$ têm sinais opostos. Portanto

$$AB : BC = (b-a) : (c-b) = -|b-a| : |c-b| = -\overline{AB} : \overline{BC}.$$

Nota. Esta proposição é importante porque distingue o caso em que $B \in [AC]$ do caso em que $B \notin [AC]$.

Axioma de congruência e triângulos congruentes

O próximo axioma vai permitir comparar distâncias entre pontos que não estão em rectas paralelas.

Definição. Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dizem-se congruentes se lados correspondentes têm comprimentos iguais, ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \ \overline{AC} = \overline{A'C'}, \ \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

R.10 *Axioma da congruência.* Sejam $[ABC]$ e $[A'B'C']$ triângulos congruentes. Seja $D \in AC$ e seja $D' \in A'C'$.

$$\text{Se } AD : DC = A'D' : D'C', \text{ então } \overline{BD} = \overline{B'D'}.$$

Nota. Este axioma afirma que se as distâncias $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ estão determinadas, então a distância de B a qualquer ponto D na recta AC também está determinada.

Comprimento de um vector - $|v|$

Faz sentido definir comprimento de um vector v como a distância entre os seus extremos, ou seja, se $v(X) = Y$, então $|v| = \overline{XY}$.

Para mostrar que podemos definir o comprimento de v desta forma, necessitamos de uma proposição sobre comprimentos de lados opostos de um paralelogramo.

Proposição. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo. Então

$$\overline{AB} = \overline{CD} \ \text{ e } \ \overline{AD} = \overline{BC}.$$

Dem. Exercício.

Nota. Temos que se A, A' são pontos e v é um vector, então $[AA'v(A')v(A)]$ é um paralelogramo, logo, pela proposição anterior, temos que

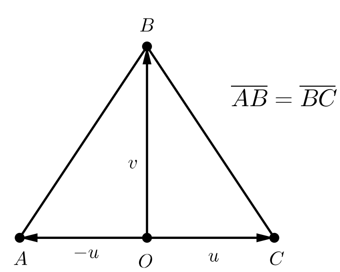
$$\overline{Av(A)} = \overline{A'v(A')}.$$

Definição. O comprimento de v, que denotamos $|v|$, é a distância entre X e $v(X)$, para qualquer ponto X. Um vector de comprimento 1 é designado *vector unitário*.

Nota. É fácil verificar que, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então $|\lambda v| = |\lambda||v|$. Em particular $|-v| = |v|$.

Vectores ortogonais e rectas perpendiculares

Definição. Sejam u e v vectores. Dizemos que u e v são ortogonais se $|v + u| = |v - u|$.



Observemos que o vector $\vec{0}$ é ortogonal a qualquer vector.

Proposição. Sejam u e v vectores ortogonais. Então, para quaisquer números reais λ e μ, os vectores λu e μv são ortogonais.

Dem. Exercício.

Definição. Dizemos que duas rectas r e s são perpendiculares se forem concorrentes e se qualquer vector paralelo a r é ortogonal a qualquer vector paralelo a s.

Nota. Recorde-se que um vector v é paralelo a uma recta r se $v(X) \in r$, qualquer que seja $X \in r$.

Ortogonalidade da média

Lema. Sejam u_1, u_2, v vectores do espaço, não necessariamente complanares, tais que u_1, u_2 são ambos ortogonais a v. Então o vector $w = \dfrac{1}{2}(u_1 + u_2)$ também é ortogonal a v.

Dem. Seja O a origem e sejam X, Y, A, B, C pontos tais que

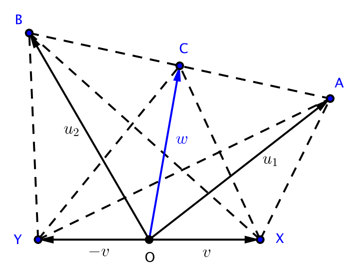
$$v = \overrightarrow{OX},\ -v = \overrightarrow{OY},\ u_1 = \overrightarrow{OA},\ u_2 = \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC} = w = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

Pelo teorema da razão, os pontos A, B, C são colineares e C satisfaz $AC : CB = 1 : 1$. Como u_1 e v são ortogonais e u_2 e v são ortogonais, temos que

$$\overline{XA} = |u_1 - v| = |u_1 + v| = \overline{YA} \ \text{ e } \ \overline{XB} = |u_2 - v| = |u_2 + v| = \overline{YB}.$$

Assim, concluimos que $\triangle(XAB)$ e $\triangle(YAB)$ são congruentes.

Pelo axioma da congruência, temos $|w - v| = \overline{XC} = \overline{YC} = |w + v|$, ou seja, v é ortogonal $\overrightarrow{OC} = w$.



Subespaço dos vectores ortogonais a um dado vector

Proposição. Seja v um vector de $\mathcal{S}$. Então o conjunto de todos os vectores ortogonais a v é um subespaço vectorial de $\vec{\mathcal{S}}$.

Dem. Seja v um vector e seja $v^{\perp}$ o conjunto de todos os vectores ortogonais a v.

Temos que $\vec{0} \in v^{\perp}$.

Por outro lado, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $u_1, u_2 \in v^{\perp}$, temos que

$$2\lambda_1 u_1,\ 2\lambda_2 u_2 \in v^{\perp}.$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\frac{1}{2}(2\lambda_1 u_1 + 2\lambda_2 u_2) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in v^\perp.$$

Aula12

Circunferência

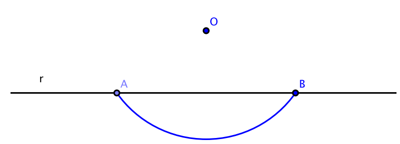
A forma mais intuitiva de comparar comprimentos em rectas não paralelas é através da noção de circunferência.

Esta noção também permite a construção de rectas perpendiculares.

O último axioma de congruência relaciona rectas e circunferências

Definição. Seja P um ponto num plano $\mathcal{P}$ e $r > 0$. A circunferência com centro em P e raio r é o conjunto de todos os pontos $Q \in \mathcal{P}$ tais que $\overline{PQ} = r$.

R.12 *Axioma da intersecção recta-circunferência.* Seja O um ponto e r uma recta. Então existe uma circunferência com centro em O que intersecta a recta r em exactamente dois pontos.



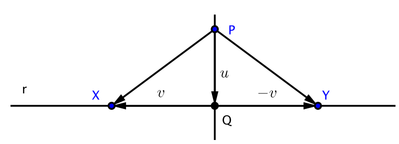
Tirar uma perpendicular

Lema. Seja r uma recta e P um ponto que não pertence a r. Sejam $X,\ Y \in r$ tais que $\overline{PX} = \overline{PY}$ e seja Q o ponto médio de $[XY]$. Então a recta PQ é perpendicular à recta r.

Dem. Sejam $\overrightarrow{PQ} = u,\ \overrightarrow{QX} = v,\ \overrightarrow{QY} = -v$. Então

$$\overrightarrow{PX} = u + v \ \text{ e } \ \overrightarrow{PY} = u - v.$$

Como $\overline{PX} = \overline{PY}$, temos que $|u+v| = |u-v|$, logo u e v são ortogonais. Como u é paralelo à recta PQ e v é paralelo à recta r, temos que r e PQ são perpendiculares.



Proposição. Seja r uma recta e P um ponto. Então existe um único ponto $Q \in r$ tal que a recta PQ é perpendicular a r.

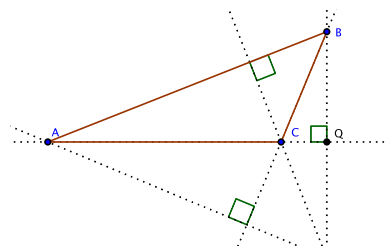
Dem Exercício.

Definição. O único ponto Q de r tal que PQ é perpendicular a r designa-se pé da perpendicular por P sobre r.

Corolário. Duas rectas complanares perpendiculares à mesma recta são paralelas.

Altura de um triângulo

Definição. Sejam A, B, C pontos não colineares. Dado um vértice de $\triangle(ABC)$, a altura por esse vértice é a única recta que o contém e que é perpendicular ao lado oposto ao vértice considerado.



Proposição. Sejam $[ABC]$ e $[A'B'C']$ triângulos congruentes. Sejam BQ e $B'Q'$ as alturas pelos vértices B e B', com $Q \in AC$ e $Q' \in A'C'$. Então $AQ : QC = A'Q' : Q'C'$ e $\overline{BQ} = \overline{B'Q'}$.

Dem. Exercício.

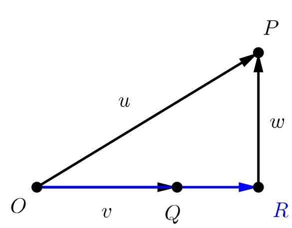
Projecção ortogonal de um vector

A projecção ortogonal de um vector sobre uma recta é uma noção fundamental para definir geometricamente o produto interno de vectores.

Proposição. Sejam u e v vectores, $v \neq \vec{0}$. Então existe um único número real λ tal que $u = \lambda v + w$ com w ortogonal a v.

Dem. Seja O a origem e sejam P e Q pontos tais que $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$. Seja R o pé da perpendicular por P sobre a recta OQ. Então $\overrightarrow{OR} = \lambda v$, $OQ : OR = 1 : \lambda$. Como R é único, o escalar λ também é único. Temos que o vector $\overrightarrow{RP} = u - \overrightarrow{OR} = w$ é ortogonal a v.

Definição. Dados vectores u e v, com $v \neq \vec{0}$, o único vector λv tal que $u = \lambda v + w$, com w ortogonal a v é designado projecção ortogonal de u na direcção de v. O vector w é a componente de u na direcção perpendicular a v.



Produto interno de vectores

Definição. Sejam u e v vectores. O produto interno de u por v é um número real, denotado por $u \cdot v$, que é definido por

$$u \cdot v = \begin{cases} \lambda\,|v|^2 & se \quad v \neq \vec{0} \\ 0 & se \quad v = \vec{0} \end{cases}$$

sendo λv a projecção ortogonal de u na direcção de v.

Propriedades do produto interno
Para quaisquer vectores u, v, w e para quaisquer escalares λ, μ, tem-se:

- $u \cdot u \geq 0$, com igualdade se e só se $u = \vec{0}$ (definido positivo).
- $u \cdot v = v \cdot u$ (simétrico).
- $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda u \cdot w + \mu v \cdot w$ (linear).

Nota. Devido à simetria, tem-se também que

$$u \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda u \cdot v + \mu u \cdot w,$$

portanto o produto interno é bilinear.

Demonstração da simetria do produto interno

Sejam u e v vectores linearmente independentes. Seja O a origem e A, B, C tais que

$$\overrightarrow{OA} = u,\ \overrightarrow{OB} = v,\ \overrightarrow{OC} = \lambda v,\ \text{com } \lambda = \frac{|u|}{|v|}.$$

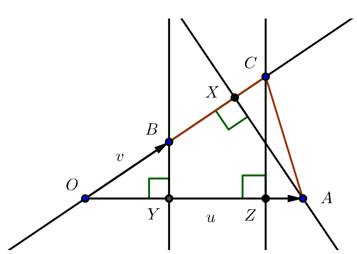
Temos assim que $\overline{OC} = \overline{OA}$.

Seja X o pé da perpendicular por A sobre a recta OB e sejam Y e Z os pés das perpendiculares por B e C respectivamente sobre a recta OA. Como, por construção,

$$\overline{OC} = \overline{OA} = |u|,$$

os triângulos $[OAC]$ e $[OCA]$ são congruentes, logo pela proposição das alturas,

$$OZ : ZA = OX : XC.$$



Demonstração da simetria do produto interno

As rectas CZ e BY são paralelas, porque são ambas perpendiculares à reta OA. Pelo axioma da semelhança, temos que

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|.$$

Por definição de produto interno, temos

$$\overrightarrow{OX} = \frac{u \cdot v}{|v|^2}\overrightarrow{OB} \;\text{ e }\; \overrightarrow{OY} = \frac{v \cdot u}{|u|^2}\overrightarrow{OA},$$

logo

$$OX : OB = u \cdot v : |v|^2 \;\text{ e }\; OY : OA = v \cdot u : |u|^2.$$

Como

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|,$$

temos

$$OX : OC = u \cdot v : |u|\,|v| \;\text{ e }\; OZ : OA = v \cdot u : |u|\,|v|.$$

Como

$$OZ : OA = OX : OC$$

segue que $u \cdot v = v \cdot u$.

Aula 13

Espaço euclidiano

Um espaço euclidiano é um espaço afim $\mathcal{S}$ ao qual associamos uma operação de produto interno no conjunto dos seus vectores.

Uma aplicação que associa a um par de vectores u, v de $\vec{\mathcal{S}}$ um número real $u \cdot v$ e que é definida positiva, simétrica e bilinear diz-se produto interno em $\vec{\mathcal{S}}$.

A partir do momento em que temos um produto interno, podemos definir comprimento de um vector e podemos definir distância entre dois pontos.

Definição. Seja $\mathcal{S}$ um espaço euclidiano. Para $v \in \vec{\mathcal{S}}$, definimos comprimento do vector v como $|v| = \sqrt{v \cdot v}$. Para $A,\ B \in \mathcal{S}$, definimos distância entre A e B como $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$.

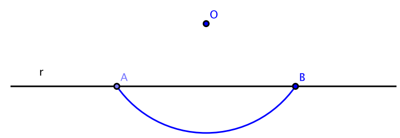
Nota. Esta definição de distância é compatível com a definição de comprimento de um vector dada em função da distância entre pontos.

A partir da linearidade do produto interno, obtemos a propriedade $|\lambda v| = |\lambda|\,|v|$. Temos ainda que, se v é não nulo, então $u = \dfrac{1}{|v|}v$ é um vector unitário.

Teorema. Seja $\mathcal{S}$ um espaço euclidiano, onde o conceito primitivo distância é definido por $d(A, B) = |\overrightarrow{AB}|$. Então $\mathcal{S}$ satisfaz os axiomas de congruência R.10, R.11 e R.12.

Definição. Seja P um ponto num plano $\mathcal{P}$ e $r > 0$. A circunferência com centro em P e raio r é o conjunto de todos os pontos $Q \in \mathcal{P}$ tais que $\overline{PQ} = r$.

R.12 *Axioma da intersecção recta-circunferência.* Seja O um ponto e r uma recta. Então existe uma circunferência com centro em O que intersecta a recta r em exactamente dois pontos.



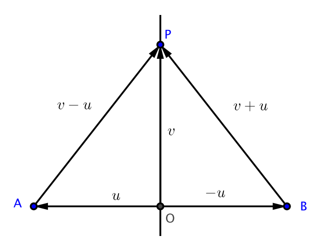
Vectores ortogonais, rectas perpendiculares e mediatriz

Definição. Os vectores u e v são ortogonais se $u \cdot v = 0$.

Nota. Observemos que esta definição é compatível com a definição geométrica de ortogonalidade. Como $|u-v|^2 = |u|^2 - 2u \cdot v + |v|^2$ e $|u+v|^2 = |u|^2 + 2u \cdot v + |v|^2$, temos $|u+v|^2 - |u-v|^2 = 4u \cdot v$, logo $u \cdot v = 0$ se e só se $|u-v| = u+v|$.

Dizemos que duas rectas de um espaço afim são perpendiculares se vectores paralelos a cada uma delas forem ortogonais.

Exemplo. Definimos mediatriz m de um segmento de recta $[AB]$ como a única recta que passa pelo ponto médio O de $[AB]$ que é perpendicular à recta AB. Tem-se que $P \in m$ se e só se $\overline{AP} = \overline{BP}$. De facto, se O for a origem de $\mathcal{S}$, $\overrightarrow{OA} = u$ e $\overrightarrow{OP} = v$, então $\overrightarrow{OB} = -u$ e $\overline{AP} = v - u$, $\overline{BP} = v + u$. Portanto $P \in m$ se e só se $|v-u| = |v+u|$.



Versão vectorial de dois teoremas clássicos sobre triângulos rectângulos

Dizemos que um triângulo $[ABC]$ é rectângulo em B se os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ forem ortogonais.

Teorema. (Pitágoras) Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em B. Então

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2.$$

Dem. Segue directamente da definição de comprimento, observando que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Teorema. (Triângulo inscrito numa semicircunferência) Sejam A, B, C pontos não colineares e seja O o ponto médio de $[AC]$. Se $\overline{OA} = \overline{OB}$, então o triângulo ABC é rectângulo em B.

Dem. Seja $\overrightarrow{OB} = u, \overrightarrow{OC} = v$. Então $\overrightarrow{OA} = -v$. Portanto $\overrightarrow{AB} = u + v$ e $\overrightarrow{BC} = v - u$. Tem-se

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (v+u)(v-u) = |v|^2 - |u|^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OB}^2 = 0.$$

Funções trigonométricas

Vamos definir ângulo a partir da função cosseno, logo temos de assumir que conhecemos a função cosseno à partida. Podemos usar a expansão em série de potências para definir seno e cosseno.

$$\sin(\theta) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{e} \quad \cos(\theta) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!}$$

Com esta definição, obtemos as identidades seguintes:

- $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

Também podemos definir π a partir do cosseno. Seja p o menor número real positivo que satisfaz $\cos p = 0$. Não é difícil verificar que $\cos x > 0$, para $x \in [0, 1]$ e que $\cos 2 < 0$. Logo $p \in]1, 2[$. O número π é definido como $\pi = 2p$.

A partir da definição de π, podem ainda provar-se as seguintes igualdades:

- $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin \theta$
- $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$
- $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$

Ângulo entre vectores

Proposição. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Sejam u e v vectores. Então $-|u|\,|v| \leq u \cdot v \leq |u|\,|v|$, com igualdade se e só se os vectores u e v forem linearmente dependentes.

Dem. Se u ou v for nulo, a desigualdade é óbvia. Suponhamos que u e v são ambos não nulos. Seja $\lambda = \dfrac{u \cdot v}{|v|^2}$. Então

$$0 \leq |u - \lambda v|^2 = |u|^2 - 2\lambda\, u \cdot v + \lambda^2 |v|^2 = |u|^2 - \frac{(u \cdot v)^2}{|v|^2}.$$

Portanto $(u \cdot v)^2 \leq |u|^2\,|v|^2$. Tem-se $0 = |u - \lambda v|^2$ se e só se $u = \lambda v$, ou seja, se e só se u e v são linearmente dependentes.

Proposição. (Desigualdade triangular). Sejam u e v vectores. Então $|u+v| \leq |u| + |v|$, com igualdade se um dos vectores for um múltiplo escalar do outro, com um escalar positivo.

Dem. Exercício.

Definição. Sejam u e v vectores não nulos. O ângulo entre u e v é o único número $\theta \in [0, \pi]$ tal que $\cos\theta = \dfrac{u \cdot v}{|u|\,|v|}$, ou seja,

$$\theta = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{|u|\,|v|}\right).$$

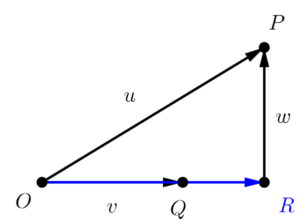
Projecção ortogonal de um vector

A projecção ortogonal de um vector sobre uma recta é uma noção fundamental para definir geometricamente o produto interno de vectores.

Proposição. Sejam u e v vectores, $v \neq \vec{0}$. Então existe um único número real λ tal que $u = \lambda v + w$ com w ortogonal a v.

Dem. Seja O a origem e sejam P e Q pontos tais que $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$. Seja R o pé da perpendicular por P sobre a recta OQ. Então $\overrightarrow{OR} = \lambda v$, $OQ : OR = 1 : \lambda$. Como R é único, o escalar λ também é único. Temos que o vector $\overrightarrow{RP} = u - \overrightarrow{OR} = w$ é ortogonal a v.

Definição. Dados vectores u e v, com $v \neq \vec{0}$, o único vector λv tal que $u = \lambda v + w$, com w ortogonal a v é designado projecção ortogonal de u na direcção de v. O vector w é a componente de u na direcção perpendicular a v.



Produto interno de vectores

Definição. Sejam u e v vectores. O produto interno de u por v é um número real, denotado por $u \cdot v$, que é definido por

$$u \cdot v = \begin{cases} \lambda\,|v|^2 & se \quad v \neq \vec{0} \\ 0 & se \quad v = \vec{0} \end{cases}$$

sendo λv a projecção ortogonal de u na direcção de v.

Propriedades do produto interno

Para quaisquer vectores u e v e para quaisquer escalares λ, μ, tem-se:

- $u \cdot u \geq 0$, com igualdade se e só se $u = \vec{0}$ (definido positivo).
- $u \cdot v = v \cdot u$ (simétrico).

- $(\lambda u + \mu v) \cdot w = \lambda u \cdot w + \mu v \cdot w$ (linear).

Demonstração da simetria do produto interno

Sejam u e v vectores linearmente independentes. Seja O a origem e A, B, C tais que

$$\overrightarrow{OA} = u,\ \overrightarrow{OB} = v,\ \overrightarrow{OC} = \lambda v,\ \text{com } \lambda = \frac{|u|}{|v|}.$$

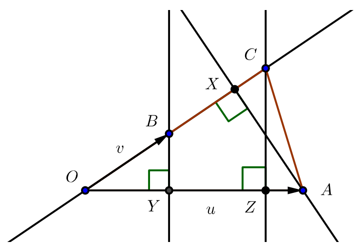
Temos assim que $\overline{OC} = \overline{OA}$.

Seja X o pé da perpendicular por A sobre a recta OB e sejam Y e Z os pés das perpendiculares por B e C respectivamente sobre a recta OA. Como, por construção,

$$\overline{OC} = \overline{OA} = |u|,$$

os triângulos $[OAC]$ e $[OCA]$ são congruentes, logo pela proposição das alturas,

$$OZ : ZA = OX : XC.$$



As rectas CZ e BY são paralelas, porque são ambas perpendiculares à reta OA. Pelo axioma da semelhança, temos que

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|.$$

Por definição de produto interno, temos

$$\overrightarrow{OX} = \frac{u \cdot v}{|v|^2}\overrightarrow{OB} \text{ e } \overrightarrow{OY} = \frac{v \cdot u}{|u|^2}\overrightarrow{OA},$$

logo

$$OX : OB = u \cdot v : |v|^2 \text{ e } OY : OA = v \cdot u : |u|^2.$$

Como

$$OZ : OY = OC : OB = |u| : |v|,$$

temos

$$OX : OC = u \cdot v : |u|\,|v| \text{ e } OZ : OA = v \cdot u : |u|\,|v|.$$

Como

$$OZ : OA = OX : OC$$

segue que $u \cdot v = v \cdot u$.

Aula 14

Introdução

Dados três pontos A, B, C, denotamos ângulo $\widehat{ABC}$ como o ângulo entre os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$. A partir da definição de ângulo entre vectores, obtemos que dois vectores u e v são ortogonais se e só o ângulo entre u e v for $\dfrac{\pi}{2}$. Temos ainda que o ângulo entre u e v é igual ao ângulo entre λu e μv, para quaisquer números reais λ e μ com o mesmo sinal.

Recordemos que dados três pontos A, B, C, o ponto B está entre A e C se $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}|$. Esta noção pode ser generalizada para vectores e ângulos.

Definição. Sejam O, A, B, C quatro pontos complanares. Dizemos que o vector $\overrightarrow{OB}$ está entre os vectores $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$ se existirem escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tais que

$$\overrightarrow{OB} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OC}.$$

A partir desta noção será possível mostrar que se w está entre u e v, então o ângulo entre u e v é a soma do ângulo entre u e w com o ângulo entre w e v.

Soma de ângulos

Proposição. (Lei da soma de ângulos) Sejam O, A, B, C quatro pontos complanares, tais que o vector $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$. Então

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

Dem. (resumida) Consideremos os vectores unitários

$$u = \frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}, \quad v = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|}, \quad w = \frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}$$

e sejam $\theta = \widehat{AOC}$, $\varphi = \widehat{AOB}$, $\psi = \widehat{BOC}$.

Como $\overrightarrow{OB}$ está entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$, temos que existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ tais que $w = \lambda u + \mu v$. Temos que

$$\cos\theta = u \cdot v, \quad \cos\varphi = u \cdot w = \lambda + \mu\cos\theta, \quad \cos\psi = w \cdot v = \lambda\cos\theta + \mu.$$

Como $\lambda u + \mu v$ é um vector unitário, obtemos

$$\sin\varphi = \mu\sin\theta \quad \text{e} \quad \sin\psi = \lambda\sin\theta.$$

Portanto

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\theta \quad \text{e} \quad \sin(\varphi + \psi) = \sin\theta.$$

Assim, temos que $\theta = \varphi + \psi$, porque $\theta, \varphi, \psi \in [0, \pi]$.

$\hat{\text{A}}$ngulos suplementares

Sejam O, A, B, C quatro pontos complanares tais que B não pertence à recta AC e $\overrightarrow{OA} = -\nu\overrightarrow{OC},\ \nu \in \mathbb{R}^+$.

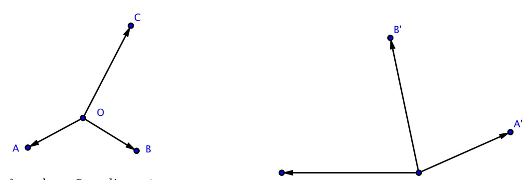
Neste caso, o vector $\overrightarrow{OB}$ não está entre $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OC}$. No entanto, por definição de ângulo entre vectores, temos

$$\cos\widehat{AOB} = -\cos\widehat{BOC}, \quad \text{ou seja,} \quad \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = \pi = \widehat{AOC}.$$

Dizemos então que os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$ são *suplementares.*

Definição. Sejam O, A, B, C quatro pontos complanares. Os ângulos $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOC}$ dizem-se adjacentes se

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$



ângulos não adjacentes *ângulos adjacentes*

Teorema do ângulo externo

Teorema. (Soma dos ângulos internos de um triângulo) A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a π radianos.

Dem. Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam D e E pontos tais que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$.

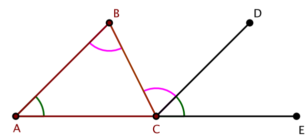
Então, como $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$, temos $\widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ e como $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, temos $\widehat{CAB} = \widehat{ECD}$.

Por outro lado, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CE}$, logo

$$\widehat{BCE} = \widehat{BCD} + \widehat{ECD} = \widehat{ABC} + \widehat{CAB}.$$

Como $\widehat{ECB}$ e $\widehat{BCA}$ são ângulos suplementares, temos

$$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \widehat{ECB} + \widehat{BCA} = \pi.$$

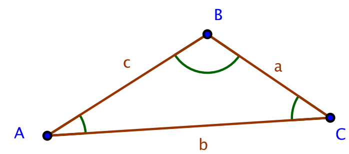


Corolário. (Teorema do ângulo externo) Num triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes.

Lei dos cossenos

Seja $[ABC]$ um triângulo. Denotamos por a, b, c os comprimentos dos lados opostos a cada vértice e, se não houver ambiguidade, representamos cada um dos ângulos internos de $\triangle(ABC)$ pelo vértice que lhe corresponde, ou seja,

$$A = \widehat{CAB},\ B = \widehat{CBA},\ C = \widehat{ACB}.$$



- Lei dos cossenos (para o ângulo A): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

  Dem. Observe-se que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, logo se $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$, tem-se $a^2 = |\overrightarrow{CB}|^2 = |u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2u \cdot v = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

A partir da lei dos cossenos para os ângulos A, B e C, obtemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Nota. Se o ângulo A for $\pi/2$, então $\cos A = 0$, tendo-se $b^2 + c^2 = a^2$ e também $\cos B = c/a$ e $\cos C = b/a$.

Lei dos senos

Seja $s = \dfrac{a + b + c}{2}$ o semiperímetro de $\triangle(ABC)$.

- Lei dos senos: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

  Dem. Pela lei dos cossenos, temos

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2}}{2bc} = \frac{\sqrt{\left(2bc - (a^2 - b^2 - c^2)\right)\left(2bc + a^2 - b^2 - c^2\right)}}{2bc}$$

$$= \frac{\sqrt{(a + b + c)(c + b - a)(a + c - b)(a + b - c)}}{2bc} = \frac{2\sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}}{bc}.$$

Analogamente, se obtinham as igualdades

$$\sin B = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ac} \quad \text{e} \quad \sin C = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ab}.$$

Temos assim que

$$\frac{abc}{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Critérios de congruência de triângulos

Denotamos congruência pelo símbolo "$\equiv$". Por definição,

$$\triangle(ABC) \equiv \triangle(A'B'C') \text{ se } \overline{AB} = \overline{A'B'},\ \overline{AC} = \overline{A'C'},\ \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

A partir da lei dos senos e da lei dos cossenos, podemos estabelecer mais dois critérios de congruência para triângulos.

- $\triangle(ABC) \equiv \triangle(A'B'C')$ se e só se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'},\quad \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'}.$$

  Este critério é consequência da lei dos senos e designa-se ALA - *ângulo-lado-ângulo*.

- $\triangle(ABC) \equiv \triangle(A'B'C')$ se e só se

$$\overline{AB} = \overline{A'B'},\quad \overline{AC} = \overline{A'C'},\quad \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}.$$

  Este critério é consequência da lei dos cossenos e designa-se LAL - *lado-ângulo-lado*.

Nota. LLA não é um critério de congruência, visto que, se o ângulo que é igual não for formado pelos dois lados congruentes, não se pode aplicar a lei dos cossenos e o seno não determina univocamente um ângulo do intervalo $[0, \pi]$.

Critérios de semelhança de triângulos

Definição. Os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dizem-se semelhantes se

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'},\quad \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'},\quad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$

Denotamos semelhança pelo símbolo "$\simeq$".

A partir da lei dos senos e da lei dos cossenos, podemos estabelecer mais dois critérios de semelhança para triângulos.

- $\triangle(ABC) \simeq \triangle(A'B'C')$ se e só se
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.$$
Este critério é consequência da lei dos senos.

- $\triangle(ABC) \simeq \triangle(A'B'C')$ se e só se
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \ \text{ e } \ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}.$$
Este critério é consequência da lei dos cossenos.

Aula 15

Vector bissector

Definição. Sejam u e v vectores não nulos. Um vector não nulo w diz-se um vector bissector de u e v se o ângulo entre u e w for igual ao ângulo entre w e v.

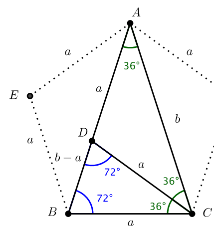
Proposição. Sejam u, v vectores linearmente independentes. Então
$$w = \frac{u}{|u|} + \frac{v}{|v|}$$
é um vector bissector de u e v.

Dem. Temos que
$$\left(\frac{u}{|u|} + \frac{v}{|v|}\right) \cdot \left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right) = 0.$$
Temos assim que
$$w \cdot \frac{u}{|u|} - w \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{w \cdot u}{|u|} - \frac{w \cdot v}{|v|} = 0.$$
Dividindo esta igualdade por $|w|$, obtemos
$$\frac{w \cdot u}{|w|\,|u|} = \frac{w \cdot v}{|w|\,|v|}.$$
Portanto o ângulo entre u e w é igual ao ângulo entre w e v.

Nota. Se o ângulo entre u e v for igual a π, um vector bissector terá de ser perpendicular a u e a v. Se o ângulo entre u e v for igual a 0, qualquer múltiplo de u ou de v por um escalar positivo é um vector bissector de u e v.

A diagonal de um pentágono e o número de ouro

Dado um pentágono regular de lado a e diagonal b, seja $[ABC]$ um triângulo formado um dos seus lados e duas das suas diagonais, com ângulos $A = \pi/5, B = C = 2\pi/5$. Seja CD a bissectriz do ângulo C. Como $\widehat{DCB} = \pi/5$ e $\widehat{CBD} = 2\pi/5$, então $\widehat{BDC} = 2\pi/5$ e portanto $\triangle(ABC) \simeq \triangle(CBD)$. Como têm dois ângulos iguais, os triângulos $[ABC], [CBD]$ e $[ACD]$ são isósceles, logo $b = \overline{AB} = \overline{AC}$ e $a = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$. Portanto $\overline{BD} = b - a$. Assim, como a razão entre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é igual à razão entre $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$, podemos concluir $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b-a}$. Temos então que $(b/a)^2 = 1 + b/a$.



Fazendo $a = 1$, obtemos $b^2 = b + 1$, ou seja, $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, o número de ouro. Pela lei dos cossenos, conclui-se que $\cos(\pi/5) = \phi/2$.

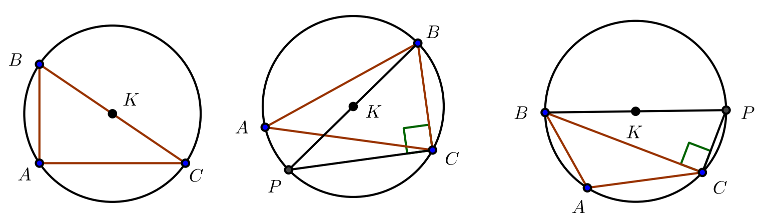
Nota. Utilizando a lei dos senos e a lei dos cossenos pode demonstrar-se que, num triângulo, a ângulos iguais se opõem lados iguais e viceversa.

A lei dos senos e a circunferência circunscrita

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo e seja r o raio da circunferência circunscrita a $\triangle(ABC)$. Então

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r.$$

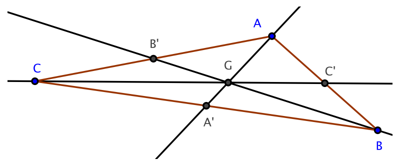
Dem. Seja K o centro da circunferência circunscrita. Temos que $\triangle(ABC)$ está inscrito numa semicircunferência se e só se for rectângulo. Suponhamos, sem perda de generalidade que A é o ângulo recto. Então $\sin A = 1$ e $a = 2r$. Se $\triangle(ABC)$ não for rectângulo, então K não pertence a nenhum dos lados do triângulo. Seja P a intersecção da recta BK com a circunferência. Então $\triangle(BPC)$ é rectângulo e $\sin P = a/2r$. Se K é interior ao triângulo, os ângulos A e P estão inscritos no mesmo arco, logo são iguais. Portanto $\sin A = \sin P = a/2r$. Se K não é interior ao triângulo, suponhamos, sem perda de generalidade, que K está no semiplano oposto ao vértice A relativamente à recta BC. Então A e P estão inscritos em arcos complementares, logo $A + P = \pi$, portanto $\sin A = \sin P = a/2r$.



Baricentro de um triângulo

Sejam A, B, C três pontos não colineares. O baricentro ou centro de massa do triângulo $[ABC]$ é o ponto de intersecção das suas medianas, ou seja, o ponto de intersecção das rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.

Denotamos o baricentro por G.



Teorema. Seja O a origem e sejam G o baricentro de $\triangle(ABC)$ e A', B', C' os pontos médios dos lados opostos aos vértices A, B, C, respectivamente. Têm-se as seguintes igualdades:

- $AG : GA' = BG : GB' = CG : GC' = 2 : 1$.
- $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$.

Dem. Exercício.

Alturas de um triângulo

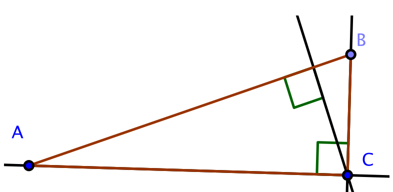
Sejam A, B, C três pontos não colineares do plano. As alturas de um triângulo são as rectas que contêm cada vértice do triângulo e são perpendiculares ao lado oposto ao mesmo.

Se $\triangle(ABC)$ é rectângulo, então, por definição, as três alturas contêm o vértice que corresponde ao ângulo recto, logo são concorrentes.

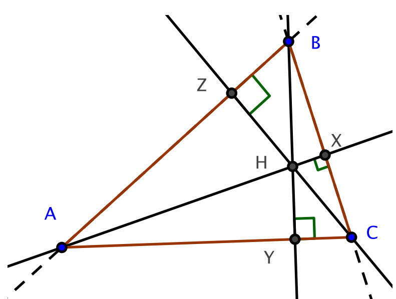
Lema. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo. Sejam X, Y, Z os pés das perpendiculares por cada um dos vértices de $\triangle(ABC)$ sobre o lado oposto. Então

$$BX : XC = \tan C : \tan B; \;\; CY : YA = \tan A : \tan C; \;\; AZ : ZB = \tan B : \tan A.$$

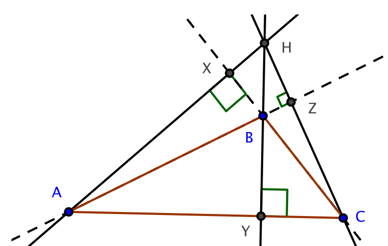
Dem. Exercício.



triângulo rectângulo



triângulo acutângulo



triângulo obtusângulo

Pelo teorema de Ceva, concluimos que as três alturas de um triângulo não rectângulo também são concorrentes.

Ortocentro de um triângulo não rectângulo

O ponto de concorrência das três alturas de $\triangle(ABC)$ é designado por ortocentro e é denotado por H.

Teorema. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo e seja H o seu ortocentro. Se O for a origem, então

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB} + \tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Dem. Pelo lema anterior e pela nota ao teorema de Ceva, temos

$$CH : HZ = \tan A\,\tan C + \tan B\,\tan C : \tan^2 C = \tan A + \tan B : \tan C.$$

Pelo teorema da razão,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan C\,\overrightarrow{OC} + (\tan A + \tan B)\,\overrightarrow{OZ}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Pelo lema anterior e pelo teorema da razão, temos ainda

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB}}{\tan A + \tan B}.$$

Concluimos assim que

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB} + \tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Circuncentro de um triângulo - teorema de Euler

Proposição. Sejam A, B, C três pontos não colineares. O centro da circunferência circunscrita a $\triangle(ABC)$ incide nas três mediatrizes dos lados de $\triangle(ABC)$.

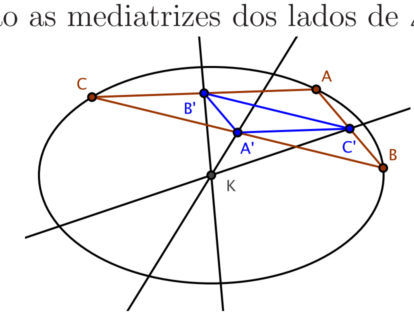
Dem. Exercício.

Este ponto é designado circuncentro de $\triangle(ABC)$ e é denotado K.

Definição. Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam A' o ponto médio de $[BC]$, B' o ponto médio de $[AC]$ e C' o ponto médio de $[AB]$. O triângulo $[A'B'C']$ diz-se triângulo medial de $\triangle(ABC)$.

Teorema. (Teorema de Euler) Sejam A, B, C três pontos não colineares. O circuncentro do triângulo $[ABC]$ coincide com o ortocentro do triângulo medial $[A'B'C']$

Dem. As alturas de $\triangle(A'B'C')$ são as rectas perpendiculares a cada lado, que incidem no vértice oposto, portanto são as mediatrizes dos lados de $\triangle(ABC)$.



Vector posição do circuncentro de um triângulo

Pelo teorema de Euler, sabemos que o circuncentro de $\triangle(A,B,C)$ é o ortocentro do triângulo medial de $\triangle(A,B,C)$. Assim, temos que se $\triangle(ABC)$ é rectângulo, o seu circuncentro K é o ponto médio da hipotenusa.

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo e seja K o seu circuncentro. Se O for a origem, então

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(\tan B + \tan C)\overrightarrow{OA} + (\tan A + \tan C)\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B)\overrightarrow{OC}}{2(\tan A + \tan B + \tan C)}.$$

Dem. Seja $\triangle(A'B'C')$ o triângulo medial de $\triangle(ABC)$. Pelo teorema de Euler, temos

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\tan A'\,\overrightarrow{OA'} + \tan B'\,\overrightarrow{OB'} + \tan C'\,\overrightarrow{OC'}}{\tan A' + \tan B' + \tan C'}.$$

Como $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, temos que $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$,logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OK} &= \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA'} + \tan B\,\overrightarrow{OB'} + \tan C\,\overrightarrow{OC'}}{\tan A + \tan B + \tan C} \\ &= \frac{(\tan B + \tan C)\overrightarrow{OA} + (\tan A + \tan C)\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B)\overrightarrow{OC}}{2(\tan A + \tan B + \tan C)}.\end{aligned}$$

Recta de Euler

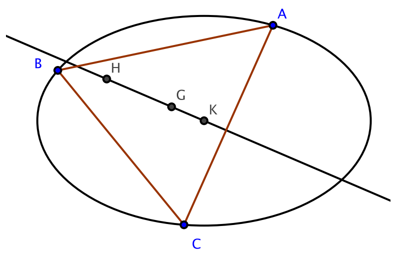
Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero. Então o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem.

Dem. Num triângulo equilátero, todos os ângulos internos são iguais a $\pi/3$, portanto $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK}$, ou seja os pontos G, H, K coincidem.

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo não equilátero.
Então G, H, K são pontos colineares e tem-se $KG : GH = 1 : 2$.

Dem. Tem-se que G, H, K são pontos colineares se e só se os vectores $\overrightarrow{KG}$, $\overrightarrow{GH}$ forem linearmente dependentes, ou seja se $\overrightarrow{KG} = \lambda\overrightarrow{GH}$, $\lambda \neq 0$. Fazendo alguns cálculos, prova-se que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{KG}$, o que é equivalente a $KG : GH = 1 : 2$.

Definição. A recta de Euler é a recta que contém o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo não equilátero.



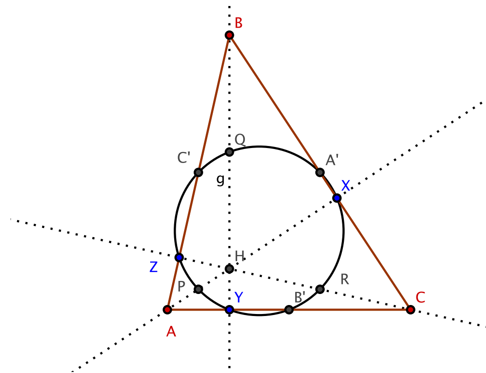
1 Aula 16

A circunferência de Euler

Seja $[ABC]$ um triângulo com ortocentro H. Sejam X, Y, Z os pés das perpendiculares de cada vértice $\triangle(ABC)$ sobre o lado opostos, A', B', C' os pontos médios dos lados de $\triangle(ABC)$ e P, Q, R os pontos médios dos segmentos de recta $[AH], [BH], [CH]$.

Definição. A circunferência circunscrita de $\triangle(XYZ)$ chama-se circunferência de Euler de $\triangle(ABC)$.

Teorema. (Circunferência dos nove pontos) A circunferência de Euler contém os pontos A', B', C' e os pontos P, Q, R.



Isometrias num espaço euclidiano

Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano.

Definição. Uma aplicação bijectiva $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ que satisfaz a condição $\overline{T(A)T(B)} = \overline{AB}$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{E}$ diz-se isometria de $\mathcal{E}$.

Denotamos o conjunto das isometrias de $\mathcal{E}$ por $\mathcal{I}(\mathcal{E})$.

A aplicação identidade é obviamente uma isometria de $\mathcal{E}$, logo $\mathcal{I}(\mathcal{E})$ é um conjunto não vazio.

Segue directamente da definição de isometria que a aplicação inversa de uma isometria ainda é uma isometria e que composição de isometrias é uma isometria.

Proposição. Sejam T e S isometrias de $\mathcal{E}$. Então

- $T \circ S$ é uma isometria de $\mathcal{E}$.
- T^{-1} é uma isometria de $\mathcal{E}$.

Dem. Sejam $A, B \in \mathcal{E}$. Então

$$\overline{(T \circ S)(A)\,(T \circ S)(B)} = \overline{T(S(A))\,T(S(B))} = \overline{S(A)S(B)} = \overline{AB}.$$

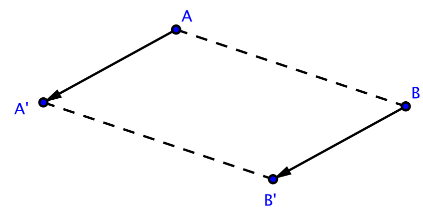
$$\overline{T^{-1}(A)T^{-1}(B)} = \overline{T(T^{-1}(A))\,T(T^{-1}(B))} = \overline{AB}.$$

Translação

Seja $v \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$. Definimos translação por v como a aplicação $T_v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $T_v(A) = v(A)$.

A aplicação T_v é uma isometria de $\mathcal{E}$, visto que se $A, B \in \mathcal{E}$, então $[A\,B\,v(B)\,v(A)]$ é um paralelogramo, portanto

$$\overline{AB} = \overline{T_v(A)T_v(B)}, \quad \forall A, B \in \mathcal{E}.$$



Simetria central

Seja A um ponto de $\mathcal{E}$.

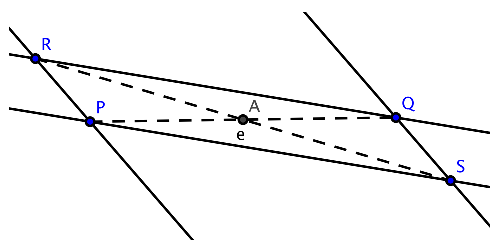
Definimos simetria central com centro em A como a aplicação $\sigma_A : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $\sigma_A(P) = Q$ se e só se A é o ponto médio do segmento de recta $[PQ]$.

A aplicação σ_A é uma isometria de $\mathcal{E}$, visto que se $P, R \in \mathcal{E}$, e $Q = \sigma_A(P), S = \sigma_A(R)$, então A é o ponto médio de $[PQ]$ e também é o ponto médio de $[RS]$, logo

$$[P\,R\,Q\,S] = [P\,R\,\sigma_A(P)\,\sigma_A(R)]$$

é um paralelogramo, portanto

$$\overline{PR} = \overline{\sigma_A(P)\,\sigma_A(R)}, \quad \forall P, Q \in \mathcal{E}.$$



A aplicação $\vec{T}$

Lema. Seja T uma isometria e sejam A, B, C, D pontos tais que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Então $\overrightarrow{T(A)\,T(B)} = \overrightarrow{T(C)\,T(D)}$.

Dem. Se $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, então $[ABDC]$ é um paralelogramo. Seja X o centro de $[ABDC]$. Então X é o ponto médio de $[AD]$ e também é o ponto médio de $[BC]$. Como T é uma isometria, temos que $T(X)$ é o ponto médio de $[T(A)T(D)]$ e também é o ponto médio de $[T(B)T(C)]$, logo $[T(A)T(B)T(D)T(C)]$ é um paralelogramo. Portanto

$$\overrightarrow{T(A)\,T(B)} = \overrightarrow{T(C)\,T(D)}.$$

Uma isometria induz uma bijecção no espaço vectorial $\vec{\mathcal{E}}$.

Definição. Dada uma isometria $T:\mathcal{E}\to\mathcal{E}$, definimos $\vec{T}:\vec{\mathcal{E}}\to\vec{\mathcal{E}}$ tal que $\vec{T}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{T(A)\,T(B)}$.

Nota. A aplicação $\vec{T}$ está bem definida, porque, para qualquer $v\in\vec{\mathcal{E}}$, existem $A,B\in\mathcal{E}$ tais que $v=\overrightarrow{AB}$ e, pelo lema anterior, se $v=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, então $\overrightarrow{T(A)\,T(B)}=\overrightarrow{T(C)\,T(D)}$.

Propriedades da aplicação $\vec{T}$

Como T é uma isometria, a aplicação $\vec{T}$ conserva o comprimento dos vectores, ou seja, $|T(u)|=|u|$.

Lema Sejam $u,v\in\vec{\mathcal{E}}$. Então

$$\vec{T}(u\pm v)=\vec{T}(u)\pm\vec{T}(v).$$

Dem. Sejam $u=\overrightarrow{AB}, v=\overrightarrow{AC}$ Temos que

$$\vec{T}(u)-\vec{T}(v)=\vec{T}(\overrightarrow{AB})-\vec{T}(\overrightarrow{AC})$$

$$=\overrightarrow{T(A)T(B)}-\overrightarrow{T(A)T(C)}=\overrightarrow{T(C)T(B)}=\vec{T}(\overrightarrow{CB})=\vec{T}(u-v)$$

Seja $w=u+v=\overrightarrow{AD}$. Então $[ABDC]$ é um paralelogramo, logo o ponto médio de $[AD]$ é o ponto médio de $[BC]$. Portanto, como T conserva as distâncias, o ponto médio de $[T(A)T(D)]$ é igual ao ponto médio de $[T(B)T(C)]$, ou seja $[T(A)T(B)T(D)T(C)]$ é um paralelogramo e

$$\vec{T}(w)=\vec{T}(\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{T(A)T(D)}=\overrightarrow{T(A)T(B)}+\overrightarrow{T(A)T(C)}$$

$$=\vec{T}(\overrightarrow{AB})+\vec{T}(\overrightarrow{AC})=\vec{T}(u)+\vec{T}(v).$$

A aplicação $\vec{T}$ é linear e conserva o produto interno

Proposição. Seja T uma isometria. A aplicação $\vec{T}$ é linear e satisfaz

$$\vec{T}(u)\cdot\vec{T}(v)=u\cdot v.$$

Dem. Pelo lema anterior, temos que

$$|\vec{T}(u)|=|u| \;\text{ e }\; |\vec{T}(u)-\vec{T}(v)|=|u-v|.$$

Como

$$u\cdot v=\frac{1}{2}\left(|u|^2+|v|^2-|u-v|^2\right),$$

conclui-se $\vec{T}(u)\cdot\vec{T}(v)=u\cdot v$. Para provar que $\vec{T}$ é uma aplicação linear, temos de provar que

$$\vec{T}(\lambda u+\mu v)=\lambda\vec{T}(u)+\mu\vec{T}(v).$$

Seja $w = \vec{T}(\lambda u + \mu v) - \lambda \vec{T}(u) - \mu \vec{T}(v)$ e seja $z = \vec{T}^{-1}(w)$. Pela linearidade do produto interno, temos

$$\begin{aligned} w \cdot w = w \cdot \vec{T}(z) &= \vec{T}(\lambda u + \mu v) \cdot T(z) - \lambda \vec{T}(u) \cdot \vec{T}(z) - \mu \vec{T}(v) \cdot \vec{T}(z) \\ &= (\lambda u + \mu v) \cdot z - \lambda u \cdot z - \mu v \cdot z = 0. \end{aligned}$$

Portanto $w = \vec{0}$. Então $[ABDC]$ é um paralelogramo, logo o ponto médio de $[AD]$ é o ponto médio de $[BC]$. Portanto, como T conserva as distâncias, o ponto médio de $[T(A)T(D)]$ é igual ao ponto médio de $[T(B)T(C)]$, ou seja $[T(A)T(B)T(D)T(C)]$ é um paralelogramo e

$$\begin{aligned} \vec{T}(w) = \vec{T}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{T(A)T(D)} &= \overrightarrow{T(A)T(B)} + \overrightarrow{T(A)T(C)} \\ &= \vec{T}(\overrightarrow{AB}) + \vec{T}(\overrightarrow{AC}) = \vec{T}(u) + \vec{T}(v). \end{aligned}$$

Aula 17

Isometrias e congruência de triângulos

Teorema. Sejam $[ABC]$, $[A'B'C']$ triângulos congruentes num plano euclidiano $\mathcal{P}$. Então existe uma única isometria $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ tal que $T(A) = A',\ T(B) = B',\ T(C) = C'$.

Dem. Existência. Exercício.

Unicidade. Sejam T, S isometrias tais que $T(A) = S(A) = A',\ T(B) = S(B) = B',\ T(C) = S(C) = C'$. Então temos

$$(S^{-1} \circ T)(A) = A,\ (S^{-1} \circ T)(B) = B,\ (S^{-1} \circ T)(C) = C.$$

Sejam $u = \overrightarrow{BA}$ e $v = \overrightarrow{BC}$. Tem-se que

$$\overrightarrow{S^{-1} \circ T}(u) = u \quad \text{e} \quad \overrightarrow{S^{-1} \circ T}(v) = v.$$

Como A, B, C são não colineares, os vectores u e v são linearmente independentes, logo, pelo teorema da extensão linear, $\overrightarrow{S^{-1} \circ T} = id_{\vec{\mathcal{P}}}$, ou seja, $S^{-1} \circ T = id_{\mathcal{P}}$, portanto $S = T$.

Coordenadas cartesianas num espaço euclidiano

Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano com origem O e seja $e_1, \ldots, e_n$ uma base ortonormada de $\vec{\mathcal{E}}$. Dados $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$ existem e são únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ e $v = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$. Como a base $e_1, \ldots, e_n$ é ortonormada, temos que

$$u \cdot v = \alpha_1 \beta_1 + \ldots + \alpha_n \beta_n.$$

Designamos o sistema $(O;\ e_1, \ldots, e_n)$ por referencial cartesiano no espaço euclidiano $\mathcal{E}$.

Se $\overrightarrow{OX} = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ e $\overrightarrow{OY} = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n$, temos

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX} = (y_1 - x_1) e_1 + \ldots + (y_n - x_n) e_n$$

e obtemos a expressão da distância euclidiana entre dois pontos

$$\overline{XY} = |\overrightarrow{XY}| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$$

em termos das coordenadas de $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ na base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Matriz de uma isometria

Fixado um referencial cartesiano $(O;\ e_1, \ldots, e_n)$ em $\mathcal{E}$, se não houver ambiguidade, podemos identificar cada ponto X de $\mathcal{E}$ com o n-uplo das coordenadas do vector $\overrightarrow{OX}$ na base ortonormada $(e_1, \ldots, e_n)$ ou com a respectiva matriz coluna, escrevendo $X = (x_1, \ldots, x_n) = [x_1\ \ldots\ x_n]^T$. Neste sentido, escrevemos $\overrightarrow{XY} = Y - X$ ou $\lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB} = \lambda\, A + (1-\lambda)B$.

Seja T uma isometria de $\mathcal{E}$. Designamos por matriz da isometria T a matriz da aplicação linear $\vec{T}$ na base $(e_1, \ldots, e_n)$.

O resultado seguinte foi demonstrado em Álgebra Linear. Recordemos que uma matriz quadrada U é ortogonal se e só se $U^T = U^{-1}$.

Teorema. Seja V um espaço vectorial euclidiano e seja $(e_1, \ldots, e_n)$ uma base ortonormada de V. São equivalentes:

1. $f : V \to V$ é linear e satisfaz $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v,\ \forall u, v \in V$.
2. A matriz de f na base $(e_1, \ldots e_n)$ é ortogonal.

Corolário. A matriz de uma isometria é ortogonal.

Expressão analítica de uma isometria

Se U for a matriz da aplicação linear $\vec{T}$, temos $\vec{T}(\overrightarrow{OX}) = U\, X$. Em seguida, identificamos cada ponto X de $\mathcal{E}$ com a matriz $[x_1\ \ldots\ x_n]^T$.

Proposição. Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano com um referencial cartesiano $(O;\ e_1, \ldots, e_n)$ e seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma isometria, com $C = T(O)$ e matriz U. Então, para cada $X \in \mathcal{E}$, tem-se $T(X) = U\, X + C$.

Dem. Seja $X' = T(X)$. Por definição de aplicação linear associada a T, temos

$$\vec{T}(\overrightarrow{OX}) = \overrightarrow{T(O)T(X)} = \overrightarrow{CX'} = \overrightarrow{OX'} - \overrightarrow{OC}.$$

Como U é a matriz de $\vec{T}$, temos que a coluna das coordenadas de $\vec{T}(\overrightarrow{OX})$ é dada por $U\, X$ portanto $U\, X = X' - C$, ou seja, $T(X) = U\, X + C$.

Nota. Seja $T : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma aplicação bijectiva tal que os vectores de coordenadas de X e $X' = T(X)$ satisfazem $X' = UX + C$, com U matriz ortogonal. Atendendo a que U é uma matriz ortogonal, temos

$$\overline{X'Y'} = |\overrightarrow{X'Y'}| = |Y' - X'| = |UY - UX| = |U(Y - X)| = |Y - X| = \overline{XY},$$

portanto T é uma isometria.

Corolário. Se $T(O) = O$, então a aplicação T é linear. De facto, tem-se $T = \vec{T}$ e $T(X) = U\, X$.

Aplicações afins

Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano com um referencial cartesiano $(O;\ e_1, \ldots, e_n)$.

Uma função $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $g(X) = A\,X + B$, onde A é uma matriz quadrada, $X = [x_1\ \ldots\ x_n]^T$ e $B = [b_1\ \ldots\ b_n]^T$ diz-se função afim. A função g é linear se e só se $B = g(O) = O$.

A matriz A determina uma série de propriedades da função g, nomeadamente, g é invertível se e só se A é invertível, g é uma isometria se e só se A é uma matriz ortogonal.

Em geral. as funções afins não são lineares, mas preservam as combinações afins de pontos.

Proposição. Seja $g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ uma função afim. Então, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se

$$g(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y).$$

Dem. Seja A a matriz de g e $B = g(O)$. Temos que

$$g(\lambda X + (1-\lambda)Y) = A(\lambda X + (1-\lambda)Y) + B = \lambda AX + (1-\lambda)AY + B$$

$$= \lambda AX + (1-\lambda)AY + B + \lambda B - \lambda B = \lambda(AX+B) + (1-\lambda)(AY+B) = \lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y).$$

Isometrias próprias e impróprias

A matriz de uma isometria é ortogonal, portanto o seu determinante só pode ser 1 ou -1.

Definição. Uma isometria diz-se própria ou directa se o determinante da sua matriz for igual a 1 e diz-se imprópria ou inversa se o determinante da sua matriz for igual a -1.

Exemplos.

- Seja T_v a translação pelo vector v e seja $X' = v(X)$. Assim, se $v(O) = C$, temos $v = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{XX'}$. Portanto, em termos de coordenadas, obtemos $X' = X + C$, o que significa que a matriz de T_v é a matriz identidade. Concluimos assim que as translações são isometrias próprias.

- Seja σ_A a simetria central de centro em A e seja $X' = \sigma_A(X)$. Como A é o ponto médio de $[XX']$, em termos de coordenadas, temos que $\sigma_A(O) = 2A$ e $X' = 2A - X$, logo a matriz de σ_A é $-I$. Concluimos assim que as simetrias centrais são isometrias próprias se e só se a dimensão de $\mathcal{E}$ for par.

Caracterização das isometrias lineares do plano euclidiano através da sua matriz

Teorema. Seja $\mathcal{P}$ um plano euclidiano e seja U a matriz de uma isometria de $\mathcal{P}$. Então

- $\det U = 1$ se e só se existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

(matriz da rotação de ângulo θ no sentido directo)

- $\det U = -1$ se e só se existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tal que

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(matriz da reflexão numa recta de ângulo $\dfrac{\theta}{2}$ com o semieixo positivo das abcissas)

Demonstração

Seja $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Como as colunas de U são vectores de norma 1, tem-se

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1,$$

logo existem $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$ tais que

$$a = \cos\varphi,\ \ c = \sin\varphi,\ \ b = \sin\psi,\ \ d = \cos\psi.$$

Por outro lado, as colunas de U são ortogonais, logo $ab + cd = 0$, ou seja

$$\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi = \sin(\varphi + \psi) = 0.$$

Assim temos que

$$\varphi + \psi = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Se k for par, temos $\cos\psi = \cos\varphi,\ \sin\psi = -\sin\varphi$.

Se k for ímpar, temos $\cos\psi = -\cos\varphi,\ \sin\psi = \sin\varphi$.

Como $\det U = ad - bc$, temos que $\det U = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi = \cos(\varphi+\psi) = \cos(k\pi)$. Logo $\det U = 1$ se e só se k é par e $\det U = -1$ se e só se k é ímpar.

Aula 18

Grupos de transformações de um espaço euclidiano

Fixando um referencial cartesiano num espaço euclidiano $\mathcal{E}$, podemos representar cada bijecção de $\mathcal{E}$ por uma bijecção de $\mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto formado por todas as bijecções de $\mathbb{R}^n$, munido da operação composição de aplicações.

Recordemos os seguintes factos:

- A composição de bijecções é uma bijecção.
- A composição de aplicações é uma operação associativa.
- O elemento neutro da operação composição é a aplicação identidade, que é uma bijecção.
- Em relação à composição, cada bijecção tem uma única inversa, que também é uma bijecção.

Dizemos então que o conjunto das bijecções de $\mathbb{R}^n$, munido da operação composição de aplicações, é um grupo.

Um subgrupo de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ é um subconjunto não vazio de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ fechado para a operação composição, que contém a aplicação identidade e que contém o inverso de cada seu elemento.

Um subgrupo de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ diz-se um grupo de transformações de $\mathbb{R}^n$.

O grupo das colineações ou das transformações afins

Recordemos que uma aplicação afim é uma aplicação g tal que, para $X = [x_1 \dots x_n]^T$, se tem $g(X) = AX + B$ onde A é uma matriz de ordem n e B é uma matriz coluna.

As aplicações afins invertíveis designam-se colineações ou transformações afins e correspondem às aplicações afins cuja matriz é invertível.

O conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ formado pelas colineações de $\mathbb{R}^n$ é um grupo de transformações de $\mathbb{R}^n$.

Temos que $id_{\mathbb{R}^n} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ e, como $g^{-1}(X) = A^{-1}X + \underbrace{(-A^{-1}B)}_{matriz\ coluna}$, temos que $g^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Temos ainda que se $f(X) = CX + D$, então $f \circ g(X) = f(AX + B) = C(AX + B) + D = (CA)X + \underbrace{CB + D}_{matriz\ coluna}$, logo $f \circ g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que a matriz da aplicação composta $f \circ g$ é o produto das matrizes de f e de g, pela mesma ordem.

Exemplos subgrupos de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

Os subgrupos de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ podem ser identificados a partir de propriedades das matrizes.

- Grupo dos isomorfismos lineares

  Este grupo é formado pelas aplicações do tipo $g(X) = AX$, com A matriz invertível.

- Grupo das isometrias lineares

  Este grupo é formado pelas aplicações do tipo $g(X) = UX$, com U matriz ortogonal.

- Grupo das isometrias

  Este grupo é formado pelas aplicações do tipo $g(X) = UX + B$, com U matriz ortogonal.

- Grupo das isometrias próprias

  Este grupo é formado pelas aplicações do tipo $g(X) = UX + B$, com U matriz ortogonal de determinante 1.

- Grupo das translações

  Este grupo é formado pelas aplicações do tipo $g(X) = X + B$ (a matriz é a identidade).

A composição de colineações com determinante igual a 1 é uma colineação com determinante igual a 1, a identidade é uma colineação com determinante igual a 1 e a inversa de uma colineação com determinante igual a 1 é uma colineação com determinante igual a 1.

(com abuso de linguagem podemos chamar determinante de uma colineação ao determinante da aplicação linear associada à mesma.)

Expressão analítica de uma rotação num plano euclidiano

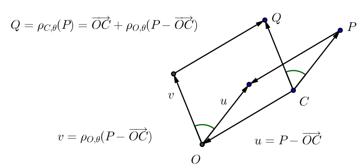
Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Denotamos por $\rho_{C,\theta}$ a rotação de centro $C = (c_1, c_2)$ e ângulo θ, no sentido directo.

Teorema. Seja $\theta \in [0, 2\pi[$. Então

$$\rho_{C,\theta} = T_{\overrightarrow{OC}} \circ \rho_{O,\theta} \circ T_{\overrightarrow{CO}}.$$

Dem. Seja $P \in \mathcal{P}$. Observemos que $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CP}$. Logo,

$$T_{\overrightarrow{OC}} \circ \rho_{O,\theta} \circ T_{\overrightarrow{CO}}(P) = T_{\overrightarrow{OC}} \circ \rho_{O,\theta}(P - \overrightarrow{OC}) = \rho_{O,\theta}(\overrightarrow{CP}) + \overrightarrow{OC} = \rho_{C,\theta}(P).$$



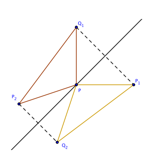
A expressão analítica da isometria $\rho_{C,\theta}$ é

$$\rho_{C,\theta}(x, y) = (c_1 + (x - c_1)\cos\theta - (y - c_2)\sin\theta, c_2 + (x - c_1)\sin\theta + (y - c_2)\cos\theta).$$

Expressão analítica da reflexão numa recta (caso n=2)

Seja $\mathcal{E}$ um plano euclidiano seja r uma recta de $\mathcal{E}$. A reflexão na recta r é a aplicação σ_r definida por

$$\sigma_r(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in r \\ Q & \text{se } P \notin r \text{ e } r \text{ é a mediatriz do segmento de recta } [PQ]. \end{cases}$$



Se a recta r tiver equação geral $ax + by + c = 0$, então

$$\sigma_r(x, y) = (x, y) - 2\frac{(ax + by + c)}{a^2 + b^2}(a, b).$$

A aplicação linear associada à reflexão σ_r é a reflexão pela recta r_0, a única recta paralela a r que passa na origem, ou seja,

$$\sigma_{r_0}(x, y) = (x, y) - 2\frac{(ax + by)}{a^2 + b^2}(a, b).$$

Expressão analítica da reflexão num hiperplano (caso geral)

Seja $\mathcal{E}$ espaço euclidiano de dimensão n e seja $\mathcal{H}$ um hiperplano de $\mathcal{E}$. A reflexão no hiperplano $\mathcal{H}$ é a aplicação $\sigma_{\mathcal{H}}$ definida por

$$\sigma_{\mathcal{H}}(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in \mathcal{H} \\ Q & \text{se } P \notin \mathcal{H} \text{ e } \mathcal{H} \text{ é o hiperplano mediador do segmento de recta } [PQ]. \end{cases}$$

Se $\mathcal{H}$ tiver equação geral $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b = 0$, a expressão analítica de $\sigma_{\mathcal{H}}$ é

$$\sigma_{\mathcal{H}}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n) - \frac{2(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b)}{a_1^2 + \ldots + a_n^2}(a_1, \ldots, a_n).$$

A aplicação linear associada a $\sigma_{\mathcal{H}}$ é a reflexão por $\mathcal{H}_0$, o hiperplano paralelo a $\mathcal{H}$ que passa na origem. Tem-se que

$$\sigma_{\mathcal{H}_0}(v) = v, \ \forall v \in \mathcal{H}_0 \ \text{ e } \ \sigma_{\mathcal{H}_0}(u) = -u, \ \forall u \in \mathcal{H}_0^{\perp}.$$

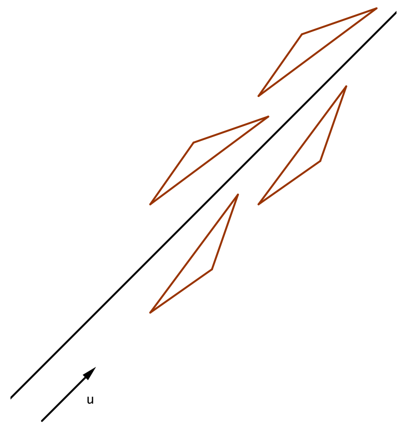
Assim, concluimos que os valores próprios de $\sigma_{\mathcal{H}_0}$ são 1 e -1, cuja multiplicidade geométrica é respectivamente $n-1$ e 1. Portanto, a matriz da aplicação linear $\sigma_{\mathcal{H}_0}$ é semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reflexões deslizantes no plano euclidiano

Definição. Seja u um vector não nulo e seja r uma recta paralela ao vector u. A isometria $T_u \circ \sigma_r$ chama-se reflexão deslizante.

Exemplo. Seja $f = T_{(1,1)} \circ \sigma_r$, com r a recta de equação $x = y$. Temos $f(x, y) = (y + 1, x + 1)$.



Teorema. Seja $f = T_u \circ \sigma_r$, onde r é uma recta e u é um vector não nulo paralelo a r. Então f é uma isometria imprópria que não tem pontos fixos.

Dem. Exercício.

Podemos assim concluir que as reflexões deslizantes são isometrias impróprias que não têm pontos fixos.

Aula 19

Grupo das simetrias de um conjunto não vazio

Seja $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{E}$ um conjunto não vazio. Dizemos que $\mathcal{X}$ tem simetria relativa ao hiperplano H ou que H é um hiperplano de simetria de $\mathcal{X}$ se $\sigma_H(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Dizemos que $\mathcal{X}$ tem simetria central relativa ao ponto P ou que P é um centro de simetria de $\mathcal{X}$ se $\sigma_P(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Em geral, dizemos que uma isometria f é uma simetria de $\mathcal{X}$ se

$$f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}.$$

Denotamos $Sym(\mathcal{X})$ o conjunto das simetrias de $\mathcal{X}$.

Teorema. Seja $\mathcal{X}$ um conjunto não vazio. O conjunto $Sym(\mathcal{X})$ é um grupo.

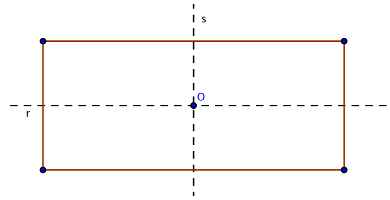
Dem. Tem-se que

- $id(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.
- Se $f, g \in Sym(\mathcal{X})$, então $f \circ g$ é isometria e $f \circ g(\mathcal{X}) = f(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.
- Se $f \in Sym(\mathcal{X})$, então $f^{-1}(\mathcal{X}) = f^{-1}(f(\mathcal{X})) = id(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Nota. Dizemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^2$ tem simetria axial relativa à recta r ou que r é um eixo de simetria de $\mathcal{X}$ se $\sigma_r(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$. Dizemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^3$ tem simetria relativa ao plano π ou que π é um plano de simetria de $\mathcal{X}$ se $\sigma_\pi(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

Exemplos de grupos de simetrias

Exemplo 1. Seja $\mathcal{X}$ um rectângulo que não é um quadrado. Então o seu grupo de simetrias é $\mathcal{V}_4 = \{id,\ \sigma_r,\ \sigma_t,\ \sigma_O\}$, onde r e t são as mediatrizes dos lados do rectângulo e $O = r \cap t$.



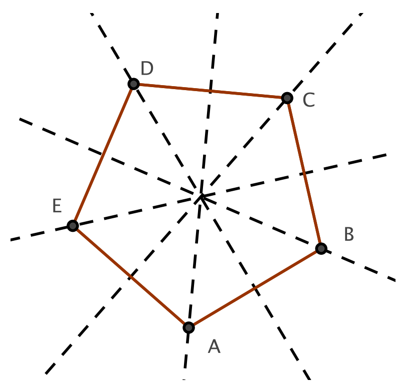
A tabela do grupo $\mathcal{V}_4$ é a seguinte:

$\circ$	id	σ_O	σ_r	σ_t
id	id	σ_O	σ_r	σ_t
σ_O	σ_O	id	σ_t	σ_r
σ_r	σ_r	σ_t	id	σ_O
σ_t	σ_t	σ_r	σ_O	id

Por observação da tabela, podemos concluir que o grupo $\mathcal{V}_4$ é comutativo.

Exemplo 2. O grupo das simetrias de um polígono regular com n vértices chama-se grupo diedral e é denotado por D_n. Este grupo tem $2n$ elementos: n reflexões e n rotações (incluindo a identidade).

Por exemplo, o grupo D_5 tem 10 elementos: 5 reflexões e 5 rotações. Este grupo não é comutativo.



Isometrias do plano a partir de dois pontos e do sinal

Definição. Seja f uma isometria com matriz U. O sinal de f é o determinante da matriz U. Denotamos o sinal de f por $s(f)$.

Proposição. Sejam f e g isometrias. Então $s(f \circ g) = s(f)\,s(g)$ e $s(f^{-1}) = s(f)$.

Teorema. Sejam A, B distintos e f, g isometrias de $\mathbb{R}^2$. Então

$$f = g \quad \text{se e só se} \quad f(A) = g(A),\ f(B) = g(B) \quad \text{e} \quad s(f) = s(g).$$

Dem. $(\Leftarrow)$ Seja $h = g^{-1} \circ f$. Então h é uma isometria própria, porque $s(h) = s(g^{-1})s(f) = s(g)s(f) = 1$. Por construção, $h(A) = A,\ h(B) = B$ logo, para qualquer $P \in AB$, tem-se $h(P) = P$.

Consideremos $C \notin AB$ e suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que $h(C) \neq C$. Como h é isometria, tem-se

$$\overline{PC} = \overline{h(P)\,h(C)} = \overline{P\,h(C)}, \quad \forall P \in AB.$$

Assim, a recta AB é a mediatriz do segmento $[C\,h(C)]$ e portanto, sendo σ_{AB} a reflexão pela recta AB, tem-se $h(C) = \sigma_{AB}(C)$. Por outro lado, $\sigma_{AB}(A) = A$, $\sigma_{AB}(B) = B$, logo $h = \sigma_{AB}$, visto que coincidem em três pontos não colineares. Obtivemos assim uma contradição, porque, por hipótese, h é uma isometria própria e as reflexões são isometrias impróprias.

Corolário. Uma isometria própria de $\mathbb{R}^2$ com dois pontos fixos é a identidade.

Isometrias impróprias - classificação

Lema. O conjunto dos pontos fixos de uma transformação afim de $\mathbb{R}^n$ ou é vazio ou é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$.

Dem. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos fixos de uma aplicação afim é a solução de um sistema de equações lineares. Seja $g(X) = AX + B$. O conjunto dos pontos fixos de g é dado pelos pontos X tais que $g(X) = X$. Temos que

$$g(X) = X \Leftrightarrow AX + B = X \Leftrightarrow AX - X = -B \Leftrightarrow (A - I)X = -B.$$

Se o sistema $(A - I)X = -B$ for impossível, o conjunto dos pontos fixos é vazio. Caso contrário, é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$.

Teorema. (Classificação das isometrias impróprias de $\mathbb{R}^2$) Seja g uma isometria imprópria de $\mathbb{R}^2$ e seja $2u = g^2(O)$. Então

1. $g^2 = T_{2u}$.

2. $T_{-u} \circ g$ fixa os pontos de uma recta paralela ao vector u.

Dem. 1. Seja A a matriz de g e seja $g(O) = B$. Então

$$g \circ g(X) = g(AX + B) = A(AX + B) + B = A^2X + AB + B = A^2X + g^2(O).$$

Como g é imprópria, temos que $A^2 = I_2$, logo $g^2(X) = X + g^2(O) = X + 2u$.

2. Seja $\mathcal{G} = \{\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}g(X) : \ X \in \mathbb{R}^2\}$. Como g conserva as combinações afins, temos

$$(T_{-u} \circ g)\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}g(X)\right) = T_{-u}\left(\frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}g^2(X)\right) = \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}g^2(X) - u$$

$$= \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}(X + 2u) - u = \frac{1}{2}g(X) + \frac{1}{2}X + u - u = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}g(X),$$

temos que $(T_{-u} \circ g)(P) = P$, $\forall P \in \mathcal{G}$. Como g é uma isometria imprópria, temos que $g \neq id_{\mathbb{R}^2}$, logo $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$. Temos também que $\mathcal{G}$ não é um conjunto singular, porque se $\{Q\} = \mathcal{G}$, então

$g(X) = 2Q - X, \forall X \in \mathbb{R}^2$ e g seria uma simetria central, que é uma isometria própria. Para mostrar que o conjunto $\mathcal{G}$ é uma recta, consideremos $S, T \in \mathcal{G},\ S \neq T$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos que

$$\lambda S + (1-\lambda)T = \lambda\left(\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}g(X)\right) + (1-\lambda)\left(\frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}g(Y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\lambda X + (1-\lambda)Y) + \frac{1}{2}(\lambda g(X) + (1-\lambda)g(Y)) = \frac{1}{2}(\lambda X + (1-\lambda)Y) + \frac{1}{2}g(\lambda X + (1-\lambda)Y).$$

Provámos que qualquer combinação afim de dois pontos de $\mathcal{G}$ pertence a $\mathcal{G}$, portanto $\mathcal{G}$ é uma recta. Assim, como $T_{-u} \circ g$ não pode fixar $\mathbb{R}^2$, temos que a recta $\mathcal{G}$ é o conjunto dos pontos fixos de $T_{-u} \circ g$. Mostremos que o vector u é paralelo a $\mathcal{G}$. Sejam $R = \frac{1}{2}O + \frac{1}{2}g(O)$ e $Q = \frac{1}{2}g(O) + \frac{1}{2}g^2(O)$. Então $R, Q \in \mathcal{G}$ e

$$\overrightarrow{RQ} = Q - R = \frac{1}{2}g(O) + \frac{1}{2}g^2(O) - \frac{1}{2}(O) - \frac{1}{2}g(O) = \frac{1}{2}g^2(O) = u.$$

Caracterização das isometrias de $\mathbb{R}^2$ - sinal e pontos fixos

Corolário. Seja g uma isometria imprópria de $\mathbb{R}^2$. Então $g = T_u \circ \sigma_r$, com $2u = g^2(O)$ e r é uma recta paralela ao vector u.

Dem. Pelo teorema anterior, o conjunto dos pontos fixos de $T_{-u} \circ g$ é uma recta r paralela a u. Portanto, as isometrias $T_{-u} \circ g$ e σ_r coincidem em dois pontos e têm o mesmo sinal. Logo $T_{-u} \circ g = \sigma_r$, ou seja $g = T_u \circ \sigma_r$.

Proposição. Sejam r uma recta e u um vector não nulo paralelo a r. Então, a isometria $T_u \circ \sigma_r$ não tem pontos fixos.

Dem. Exercício.

Teorema. Seja f isometria de $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathcal{F}$ o conjunto dos pontos fixos de f. Então

1. $\mathcal{F} = \mathbb{R}^2$ se e só se $f = id_{\mathbb{R}^2}$;
2. $\mathcal{F} = r$, com r recta, se e só se $f = \sigma_r$;
3. $\mathcal{F} = \{C\}$ se e só se $f = \rho_{C,\theta}$, com $\theta \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\mathcal{F} = \emptyset$ e $s(f) = 1$ se e só se $f = T_u,\ u \neq 0$;
5. $\mathcal{F} = \emptyset$ e $s(f) = -1$ se e só se $f = T_u \circ \sigma_r$, $u \neq 0,\ u \parallel r$.

Dem. Exercício.

Corolário. Uma isometria imprópria de $\mathbb{R}^2$ com um ponto fixo é uma reflexão.

O teorema anterior permite afirmar que qualquer isometria imprópria é composição de uma translação com uma reflexão.

Corolário. Seja f uma isometria imprópria. Então $f = T_u \circ S_l$, onde $u = \frac{1}{2}(f \circ f)(0,0)$ e l é uma recta paralela ao vector u.

Dem. Pelo teorema anterior, sabemos que o conjunto dos pontos fixos de $T_{-u}\circ f$ é uma recta l paralela a u. Mostremos que $T_{-u}\circ f = S_l$. Sejam $A, B \in l$ tais que $A \neq B$. Temos que $T_{-u}\circ f(A) = A = S_l(A)$, $T_{-u}\circ f(B) = B = S_l(B)$. Logo as aplicações $T_{-u}\circ g$ e $_l$ coincidem em dois pontos. Como são ambas isometrias impróprias, podemos concluir $T_{-u}\circ f = S_l$, ou seja $f = T_u \circ S_l$.

Composição de duas reflexões sobre rectas paralelas

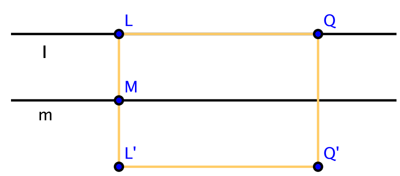
Teorema. Sejam l e m duas rectas paralelas e seja t uma recta perpendicular a l e a m, com $L = t\cap l$ e $M = t\cap m$. Então $\sigma_m \circ \sigma_l = T_{2\overrightarrow{LM}}$.

Dem. Sejam l, m duas rectas paralelas. Sejam $L \in l, M \in m$ tais que a recta LM é perpendicular a l e a m.

Seja $Q \neq L$ um ponto da recta l e sejam $L' = \sigma_m(L), Q' = \sigma_m(Q)$. Então $[LQQ'L']$ é um rectângulo e M é o ponto médio de $[LL']$. Temos então que $\overrightarrow{LL'} = \overrightarrow{QQ'} = 2\overrightarrow{LM}$ e são válidas as seguintes igualdades:

- $\sigma_m \circ \sigma_l(Q) = \sigma_m(Q) = Q' = T_{\overrightarrow{QQ'}}(Q) = T_{2\overrightarrow{LM}}(Q)$.
- $\sigma_m \circ \sigma_l(L) = \sigma_m(L) = L' = T_{\overrightarrow{LL'}}(L) = T_{2\overrightarrow{LM}}(L)$.

As isometrias $\sigma_m\circ\sigma_l$ e $T_{2\overrightarrow{LM}}$ têm o mesmo sinal e coincidem em dois pontos, logo podemos



concluir que $\sigma_m\circ\sigma_l = T_{2\overrightarrow{LM}}$.

Aula 20

Composição de duas reflexões em rectas concorrentes

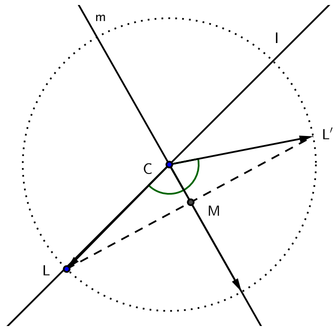
Teorema. Sejam l, m rectas concorrentes num ponto C tais que $\angle(l, m) = \theta \in [0, \pi/2]$. Então $\sigma_m \circ \sigma_l$ é uma rotação em torno de C de ângulo 2θ, no mesmo sentido que o ângulo θ .

Dem. Seja $L \neq C$ um ponto da recta l e seja $L' = \sigma_m(L)$. Seja M o ponto médio do segmento $[LL']$. Temos que

$$\sigma_m \circ \sigma_l(C) = \sigma_m(C) = C; \quad \sigma_m \circ \sigma_l(L) = \sigma_m(L) = L'.$$

Como σ_m é uma isometria, tem-se $\overline{CL} = \overline{CL'}$, logo L, L' pertencem a uma circunferência de centro C. Verifica-se ainda que o ângulo entre $\overrightarrow{CL}$ e $\overrightarrow{CL'}$ é o dobro do ângulo entre as rectas

l e m, porque $\overrightarrow{CM}$ é um vector bissector de $\overrightarrow{CL}$ e $\overrightarrow{CL'}$ ou seja, o ângulo de rotação é igual a 2θ.



Corolário. A simetria central com centro em O é composição de duas reflexões por rectas perpendiculares concorrentes em O.

Uma isometria de $\mathbb{R}^2$ é produto de, no máximo, 3 reflexões

Sejam $P, Q, R \in \mathbb{R}^2$ pontos não colineares e $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ tais que

$$d(P,Q) = d(A,B), \ d(P,R) = d(A,C), \ d(Q,R) = d(B,C).$$

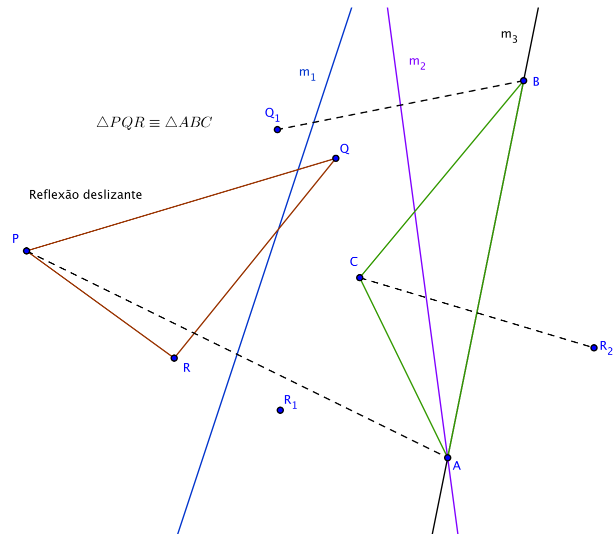
Seja f a única isometria de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(P) = A, \ f(Q) = B, \ f(R) = C$.

Algoritmo.

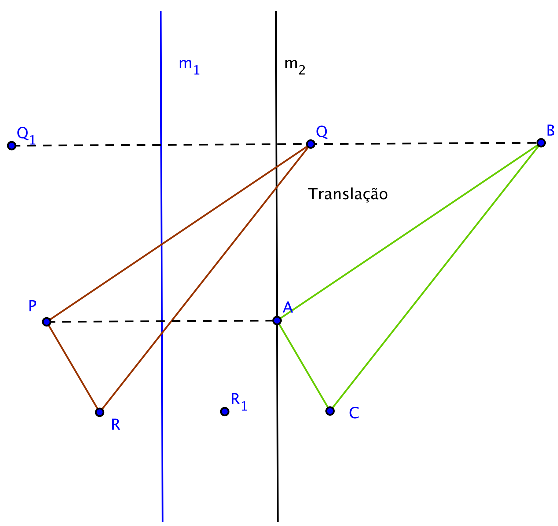
1. (a) Se $P = A$, seja $f_1 = id_{\mathbb{R}^2}$.
   (b) Se $P \neq A$, seja m_1 a mediatriz do segmento de recta $[PA]$ e seja $f_1 = \sigma_{m_1}$. Assim $f_1(P) = A$.
2. Sejam $Q_1 = f_1(Q), \ R_1 = f_1(R)$.
   (a) Se $Q_1 = B$, seja $f_2 = id_{\mathbb{R}^2}$.
   (b) Se $Q_1 \neq B$, seja m_2 a mediatriz do segmento de recta $[Q_1B]$ e seja $f_2 = \sigma_{m_2}$. Temos $f_2(Q_1) = B$ e $f_2(A) = A$.
   Nota. $A \in m_2$, porque $\overline{AB} = \overline{PQ} = \overline{f_1(P)f_1(Q)} = \overline{AQ_1}$. Assim $f_2(A) = A$.
3. Seja $R_2 = f_2(R_1)$.
   (a) Se $R_2 = C$, seja $f_3 = id_{\mathbb{R}^2}$.
   (b) Se $R_2 \neq C$, seja m_3 a mediatriz do segmento de recta $[R_2C]$ e seja $f_3 = \sigma_{m_3}$. Temos $f_3(R_2) = C, \ f_3(A) = A$ e $f_3(B) = B$.
   Nota 1. $A \in m_3$, porque $\overline{AC} = \overline{PR} = \overline{AR_1} = \overline{AR_2}$. Assim $f_3(A) = A$.
   Nota 2. $B \in m_3$, porque $\overline{BC} = \overline{QR} = \overline{Q_1R_1} = \overline{BR_2}$. Assim $f_3(B) = B$.

Obtemos portanto $f_3 \circ f_2 \circ f_1(P) = A, \ f_3 \circ f_2 \circ f_1(Q) = B, \ f_3 \circ f_2 \circ f_1(R) = C$.

Exemplo de aplicação do algoritmo (3 reflexões)



Exemplo de aplicação do algoritmo (2 reflexões)



Homotetias de um espaço euclidiano

Sejam $C \in \mathcal{E}$ e r um número real não nulo. Definimos homotetia de centro C e razão r como a aplicação $h_{C,r}: \ \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que

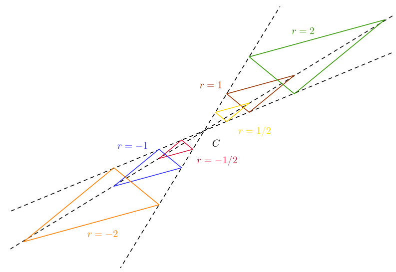
$$h_{C,r}(P) = Q \ \text{ se e só se } \ \overrightarrow{CQ} = r\overrightarrow{CP}.$$

Tem-se assim que

$$h_{C,r}(P) = C + r\overrightarrow{CP} = (1-r)C + r\,P.$$

Exemplos.

- $h_{C,1} = id_{\mathbb{R}^2}$, qualquer que seja o ponto $C \in \mathcal{E}$.
- $h_{C,-1} = \sigma_C$, qualquer que seja o ponto $C \in \mathcal{E}$.



Propriedades das homotetias

Teorema. Dado $C \in \mathcal{E}$, o conjunto $\mathcal{H}_C$ das homotetias de centro C é um grupo de transformações de $\mathcal{E}$.

Dem. Sejam r, s números reais não nulos.

- $id_{\mathcal{E}} \in \mathcal{H}_C$.
- $h_{C,r}^{-1} = h_{C,1/r} \in \mathcal{H}_C$.
- $h_{C,r} \circ h_{C,s} = h_{C,r\times s} \in \mathcal{H}_C$.

As seguintes propriedades são de fácil demonstração

Proposição. Seja $C \in \mathcal{E}$ e $r \neq 0$. Seja $h = h_{C,r}$ a homotetia de centro C e razão r. Então:

1. Dada uma recta t de $\mathcal{E}^n$, $h(t) = t$ se e só se $C \in t$.
2. Dada uma recta t de $\mathcal{E}$, com $C \notin t$, tem-se $h(t) \parallel t$.
3. A aplicação linear associada a h é $\vec{h} = r\, id_{\mathcal{E}}$.
4. A matriz de h é rI_n.

Dem.

1. Seja t uma recta e sejam $A, B \in t,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Temos que
$$h((1-\lambda)A + \lambda B) = (1-r)C + r\big((1-\lambda)A + \lambda B\big) = \underbrace{(1-r)C + rA}_{D} + \lambda(r\overrightarrow{AB}).$$
Tem-se que $D \in t$ se e só se $C \in t$, logo $h(t) = t$ se e só se $C \in t$.
2. Exercício.
3. Tem-se que $h(O) = (1-r)C + rO$, logo, para $P \in \mathbb{R}^n$, tem-se
4. Consequência imediata da anterior.

Semelhanças de um espaço euclidiano

Definição. Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Uma aplicação $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ diz-se semelhança de razão r se

$$\overline{f(A)f(B)} = r\,\overline{AB}, \quad \text{para quaisquer } A, B \in \mathcal{E}.$$

As isometrias são semelhanças de razão $r = 1$ e as homotetias de razão r são semelhanças de razão $|r|$.

Os seguintes resultados são consequências imediatas da definição de semelhança e das propriedades das isometrias.

Proposição. Seja $r \in \mathbb{R}^+$. Uma aplicação f é uma semelhança de razão r se e só se a aplicação $\frac{1}{r}f$ é uma isometria.

Teorema. Seja $r \in \mathbb{R}^+$ e seja $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Então f é uma semelhança de razão r se e só se f é uma função afim, cuja matriz M satisfaz a propriedade $M^T M = r^2 I$.

Conjunto dos pontos fixos de uma semelhança

Teorema. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma semelhança de razão $r \neq 1$. Então f tem um único ponto fixo.

Dem. Suponhamos que f tem dois pontos fixos $A \neq B$. Então

$$\overline{AB} = \overline{f(A)\,f(B)} = r\,\overline{AB}, \text{ com } r \neq 1. \text{ Contradição.}$$

Suponhamos que f não tem pontos fixos. Então a equação $f(X) = X$ é impossível, ou seja,

$$\vec{f}(X) + f(O) = X$$

é impossível.

Portanto, não existe $P \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$P - \vec{f}(P) = Id_{\mathbb{R}^n}(P) - \vec{f}(P) = (Id_{\mathbb{R}^n} - \vec{f})(P) = f(0, \ldots, 0).$$

Assim, a aplicação linear $id_{\mathbb{R}^n} - \vec{f}$ não é sobrejectiva e portanto também não é injectiva. Então, existem dois pontos $A \neq B$ tais que $A - \vec{f}(A) = B - \vec{f}(B)$, o que implica

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \vec{f}(B) - \vec{f}(A) = \vec{f}(B - A) = \overrightarrow{f(A)f(B)},$$

ou seja,

$$\overline{AB} = \overline{f(A), f(B)} = r\,\overline{AB}, \text{ com } r \neq 1. \text{ Contradição.}$$

Exemplo. A aplicação $f(x, y) = (2x + 5, 2y - 1)$ é uma semelhança de razão 2. O seu ponto fixo é $P = (-5, 1)$.

Triângulos semelhantes e semelhanças

Definição. Dizemos que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes se e só se

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}.$$

Proposição. Sejam $\triangle(ABC)$ e $\triangle(A'B'C')$ triângulos de $\mathbb{R}^2$. Então existe uma única semelhança $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de razão r satisfazendo

$$f(A) = A',\ f(B) = B',\ f(C) = C',$$

se e só se

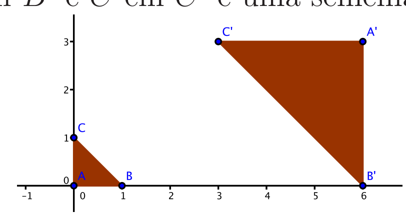
$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = r.$$

Dem. Exercício.

Exemplo. Sejam $A = (0,0),\ B = (1,0),\ C = (0,1),\ A' = (6,3),\ B' = (6,0), C' = (3,3)$. Tem-se que

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = 3,$$

logo os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são semelhantes e a única aplicação afim de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que transforma A em A', B em B' e C em C' é uma semelhança de razão 3.



Semelhança $\leftrightarrow$ homotetia seguida de isometria

Teorema. Sejam $r \in \mathbb{R}^+,\ P \in \mathbb{R}^2$ e $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão r. Então $f = g \circ h$, onde g é uma isometria e h é uma homotetia de centro em P.

Dem. Sejam $Q, R \in \mathbb{R}^2$ tais que P, Q, R são pontos não colineares e sejam $P' = f(P),\ Q' = f(Q), R' = f(R)$. Então

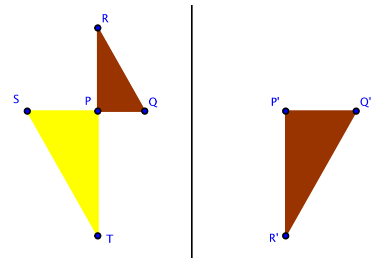
$$\frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{P'R'}}{\overline{PR}} = \frac{\overline{Q'R'}}{\overline{QR}} = r.$$

Seja h uma homotetia de centro em P tal que $h(Q) = S$, com $d(P,S) = d(P',Q')$. Sendo $T = h(R)$, tem-se que o triângulo $[PST]$ é congruente com o triângulo $[P'Q'R']$. De facto,

$$\overline{P'Q'} = \overline{PS};\ \overline{PT} = \overline{P'R'} \text{ e } \angle\left(\vec{PS}, \vec{PT}\right) = \angle\left(\vec{P'Q'}, \vec{P'R'}\right).$$

Seja g a única isometria de $\mathbb{R}^2$ tal que $g(P) = P',\ g(S) = Q',\ g(T) = R'$. Tem-se que

$$g \circ h(P) = g(P) = P',\ g \circ h(Q) = g(S) = Q' \text{ e } g \circ h(R) = g(T) = R'.$$



Decomposição canónica de uma semelhança no plano

Definição. Seja $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e f uma semelhança do plano de razão r.

Seja C o único ponto fixo de f. A decomposição canónica de f é

$$f = g \circ h$$

onde h é uma homotetia de centro C e razão r e g é uma isometria.

Exemplo. Seja $f(x, y) = (-3x+4, -3y-2)$. Esta aplicação é uma semelhança de razão 3. É fácil verificar que

$$f = T_{(4,-2)} \circ h_{(0,0),-3}.$$

Esta não é a decomposição canónica de f, porque o ponto fixo de f é $C = \left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$. Assim, para determinar a decomposição canónica de f, consideramos $f = T_{(4,-2)} \circ h_{(0,0),-3} = g \circ h_{(1,-\frac{1}{2}),3}$, logo

$$g = T_{(4,-2)} \circ h_{(0,0),-3} \circ \left(h_{(1,-\frac{1}{2}),3}\right)^{-1} = T_{(4,-2)} \circ h_{(0,0),-3} \circ h_{(1,-\frac{1}{2}),\frac{1}{3}}.$$

Efectuando os cálculos, obtemos $g(x, y) = (2-x, -1-y)$, ou seja, g é a simetria central de centro C.

A decomposição canónica de f é

$$f = \sigma_C \circ h_{C,3}.$$

Classificação das semelhanças do plano

Proposição. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma semelhança de razão $r \neq 1$ com decomposição canónica $f = g \circ h$. Então g é uma rotação ou uma reflexão.

Dem. Seja C o ponto fixo de f. Então

$$C = f(C) = g \circ h(C) = g(h(C)) = g(C).$$

Portanto C é um ponto fixo de g, logo g é uma rotação de centro C ou uma reflexão por uma recta que contém C.

Teorema. Seja $r \in \mathbb{R}^+$ e f uma semelhança do plano de razão r. Então f é de um dos seguintes tipos:

- Se $r = 1 \to$ Isometria.
- Se $r \neq 1$,
  - Homotetia.
  - Composição de uma homotetia com centro no ponto fixo de f seguida de uma rotação pelo ponto fixo de f.
  - Composição de uma homotetia com centro no ponto fixo de f seguida de uma reflexão por uma recta que contém o ponto fixo de f.

Isometrias num espaço euclidiano de dimensão 3 como produto de quatro reflexões

Com um algoritmo análogo ao que se provou para o plano, demonstra-se que toda a isometria de $\mathbb{R}^3$ é composição de, no máximo, quatro reflexões. Iremos descrever as isometrias de $\mathbb{R}^3$ a partir desta decomposição.

Seja Π um plano de $\mathbb{R}^3$ e seja σ_π a reflexão no plano π, definida por

$$\sigma_\Pi(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \in \Pi \\ Q & \text{se } P \notin \Pi \text{ e } \Pi \text{ é o plano mediador do segmento } [PQ]. \end{cases}$$

A reflexão σ_Π fixa os pontos do plano Π e as rectas perpendiculares a Π.

Teorema. Seja Π um plano. Então

- $\sigma_\Pi^2 = \mathbb{1}$
- $\sigma_\Pi(P) = P$, para qualquer $P \in \pi$.
- $\sigma_\Pi(t) = t$, para qualquer recta t perpendicular a Π.

Translações

Sejam Π e Δ planos paralelos. A composição

$$\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$$

é uma translação por um vector perpendicular a Π e a Δ.

Teorema. Sejam Π e Δ planos paralelos distintos e seja t uma recta perpendicular a Π e a Δ. Sejam $A = t \cap \Delta$, $B = t \cap \Pi$ e $v = 2\overrightarrow{AB}$. Então $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta = T_v$.

A translação $\sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ não tem pontos fixos, fixa as rectas e os planos perpendiculares a Π e Δ.

Teorema. Sejam Π e Δ planos paralelos. Então

- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(P) \neq P$, para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}^3$.

- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(t) = t$, para qualquer recta t perpendicular a Π e Δ.
- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(\Gamma) = \Gamma$, para qualquer plano Γ perpendicular a Π e Δ.

Rotações em torno de um eixo

Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t. A composição

$$\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$$

é uma rotação em torno do eixo t.

A rotação $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$ fixa os pontos da recta $t = \Pi \cap \Delta$ e fixa os planos perpendiculares a t.

Teorema. Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t. Então

- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(P) = P$, para qualquer ponto $P \in t$.
- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(\Gamma) = \Gamma$, para qualquer plano Γ perpendicular a t.

Nota. Se os planos Π e Δ forem perpendiculares, então $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$ é uma involução e designa-se meia-volta em torno do eixo t.

Transformações helicoidais

Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t e sejam Γ e Ω planos paralelos e perpendiculares a t. A composição

$$\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Omega \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$$

chama-se transformação helicoidal em torno do eixo t.

A transformação helicoidal $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Omega \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi$ não tem pontos fixos e fixa a recta $t = \Pi \cap \Delta$.

Teorema. Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t e sejam Γ e Ω planos paralelos e perpendiculares a t. Então

- $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Omega \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi(P) \neq P$, para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}^3$.
- $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Omega \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Pi(t) = t$.

Nota. Uma transformação helicoidal em torno de t é composição de uma translação por um vector u paralelo a t com uma rotação em torno da recta t.

Reflexões deslizantes

Sejam Π e Δ planos paralelos e Γ um plano perpendicular a Π e a Δ. A composição

$$\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma$$

chama-se reflexão deslizante por Γ.

A reflexão deslizante $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma$ é composição de uma reflexão pelo plano Γ com uma translação por um vector paralelo a Γ.

Esta isometria não tem pontos fixos, fixa o plano Γ e fixa as rectas do plano Γ que são perpendiculares a Π e a Δ.

Teorema. Sejam Π e Δ planos paralelos e Γ um plano perpendicular a Π e a Δ. Então

- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma(P) \neq P$, para qualquer ponto $P \in \mathbb{R}^3$.
- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma(t) = t$, para qualquer recta $t \subset \Gamma$, com t perpendicular a Π e a Δ.
- $\sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta \circ \sigma_\Gamma(\Gamma) = \Gamma$.

Rotações reflectidas

Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t e Γ um plano perpendicular a Π e a Δ. A composição

$$\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$$

chama-se rotação reflectida por P, onde $P = \Gamma \cap \Pi \cap \Delta$.

A rotação reflectida $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta$ fixa o ponto $P = \Gamma \cap \Pi \cap \Delta$, fixa a recta $t = \Pi \cap \Delta$ e o plano Γ.

Teorema. Sejam Π e Δ planos concorrentes numa recta t e seja Γ um plano perpendicular a Π e a Δ. Então

- $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(P) = P$ se e só se $P = \Gamma \cap \Pi \cap \Delta$.
- $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(t) = t$.
- $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta(\Gamma) = \Gamma$.

Nota. Se os planos Π, Δ e Γ forem perpendiculares dois a dois, então $\sigma_\Gamma \circ \sigma_\Pi \circ \sigma_\Delta = \sigma_M$, a simetria central em torno do ponto $M = \Gamma \cap \Pi \cap \Delta$.

Aula 21

Regiões poligonais de um plano euclidiano

Uma recta de equação geral $ax + by + c = 0$ separa o plano em dois semiplanos abertos: $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, onde

$$\mathcal{H}_1 = \{(x, y) : \; ax + by + c > 0\}$$

e

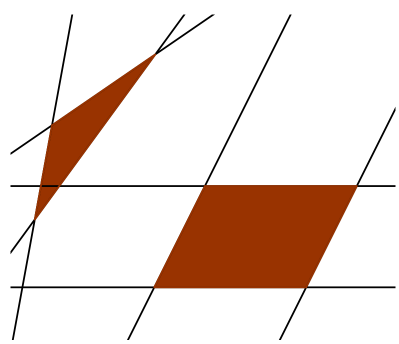
$$\mathcal{H}_2 = \{(x, y) : \; ax + by + c < 0\}.$$

Um semiplano fechado é a união de um semiplano aberto com a recta que o define.

Uma região poligonal é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que se obtém através de um número finito de operações de união e intersecção de semiplanos abertos ou fechados. Obviamente a união ou a intersecção de duas regiões poligonais é uma região poligonal e a diferença entre duas regiões poligonais é uma região poligonal.

Exemplos de regiões poligonais de um plano euclidiano

- Recta $\to$ intersecção de dois semiplanos fechados
- Interior de um triângulo $\to$ intersecção de três semiplanos abertos, definidos por três rectas concorrentes duas a duas
- Interior de um paralelogramo não degenerado $\to$ intersecção de quatro semiplanos definidos por dois pares de rectas paralelas duas a duas.
- Interior de um rectângulo $\to$ interior de um paralelogramo com lados perpendiculares dois a dois, ou seja, é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que é a imagem do conjunto $\mathcal{R} = \{(x, y) : 0 < x < a, \; 0 < y < b\}$ por alguma isometria.



Conjuntos limitados num plano euclidiano

Seja $\mathcal{S}$ um subconjunto não vazio de um plano euclidiano. O diâmetro de $\mathcal{S}$ é o supremo das distâncias entre quaisquer dois pontos de $\mathcal{S}$, ou seja

$$\text{diâmetro}\,(\mathcal{S}) = \sup\left\{\overline{PQ} : \; P, Q \in \mathcal{S}\right\}.$$

Se o diâmetro de $\mathcal{S}$ for um número real, então $\mathcal{S}$ diz-se limitado.

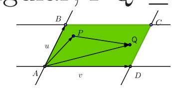
Proposição. O interior de um paralelogramo não degenerado é um conjunto limitado.

Dem. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo. Consideremos os vectores $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AD}$. O vector posição um ponto X no interior de $[ABCD]$ é dado por $w = \overrightarrow{AX} = \lambda u + \mu v,\ \lambda,\ \mu \in]0,1[$. Visto que $u \cdot v \leq |u||v|$, temos

$$\overline{AX}^2 = |w|^2 = |\lambda u + \mu v|^2 = \lambda^2|u|^2 + 2\lambda\,\mu\, u\cdot v + \mu^2|v|^2 \leq \lambda^2|u|^2 + 2\lambda\,\mu\,|u||v| + \mu^2|v|^2 = (|u|+|v|)^2,$$

ou seja $\overline{AX} \leq \overline{AB} + \overline{AD}$.

Sejam P, Q pontos no interior de $[ABCD]$. Pela desigualdade triangular, $\overline{PQ} \leq \overline{AP} + \overline{AQ}$,



logo $\overline{PQ} \leq 2\left(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AD}|\right)$.

Corolário. O interior de um triângulo é um conjunto limitado.

Área de uma região poligonal plana limitada

Para medir a quantidade de superfície existente numa região poligonal plana limitada $\mathcal{K}$ de um espaço euclidiano, definimos o conceito primitivo área como um número real não negativo, denotado área$(\mathcal{K})$, satisfazendo os três axiomas que se seguem.

R.13 (Axioma da conservação da área) Seja $\mathcal{K}$ uma região poligonal plana limitada e seja T uma isometria. Então

$$\text{área}(\mathcal{K}) = \text{área}(T(\mathcal{K})).$$

R.14 (Axioma da adição das áreas) Sejam $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ regiões poligonais planas limitadas tais que $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2 = \emptyset$. Então

$$\text{área}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = \text{área}(\mathcal{K}_1) + \text{área}(\mathcal{K}_2).$$

R.14 (Axioma da normalização da área) A área de um rectângulo de dimensões a e b é igual a ab.

Nota. A monotonia da área segue directamente do axioma R.14, observando que se $\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_2$, então área$(\mathcal{K}_2) =$ área$(\mathcal{K}_1) +$ área$((\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1) \geq$ área$(\mathcal{K}_1)$.

Propriedades da área

Proposição. Sejam $\mathcal{K}_1,\ \mathcal{K}_2$ regiões planas limitadas. Então

$$\text{área}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = \text{área}(\mathcal{K}_1) + \text{área}(\mathcal{K}_2) - \text{área}(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2).$$

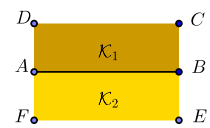
Dem. Observemos que $\mathcal{K}_1 \cap (\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1) = \emptyset = (\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) \cap (\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1)$.
Assim, pelo axioma R.14, temos

$$\text{área}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) = \text{área}(\mathcal{K}_1) + \text{área}\left(\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1\right) \ \text{ e } \ \text{área}(\mathcal{K}_2) = \text{área}(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) + \text{área}\left(\mathcal{K}_2 \setminus \mathcal{K}_1\right).$$

Lema. Um segmento de recta tem área nula.

Dem. Seja $[AB]$ um segmento de recta e sejam C, D, E, F quatro pontos tais que $[ABCD]$ e $[ABEF]$ são rectângulos, satisfazendo $\overline{CD} = \overline{AB} = \overline{EF} = a$ e $\overline{AD} = \overline{AF} = \overline{BC} = \overline{BE} = b$. Então $[DCEF]$ é um rectângulo e $\overline{DF} = \overline{CE} = 2b$. Denotemos por $\mathcal{K}$ o interior de $[DCEF]$, $\mathcal{K}_1$ o interior de $[ABCD]$ e $\mathcal{K}_2$ o interior de $[ABEF]$. Temos $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ e $[AB] = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$. Portanto

$$2ab = \text{área}(\mathcal{K}) = \text{área}(\mathcal{K}_1) + \text{área}(\mathcal{K}_2) - \text{área}([AB]) = ab + ab - \text{área}([AB])$$



o que implica área$([AB]) = 0$.

Área de um triângulo

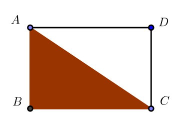
Visto que os segmentos de recta têm área nula, a área de uma região poligonal limitada coincide com a área do seu interior.

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo rectângulo em B. Então

$$\text{área}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB}\,\overline{BC}.$$

Dem. Seja D o único ponto tal que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Então $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ e $[ABCD]$ é um rectângulo e $\triangle ABC \cap \triangle ADC = [AC]$. Por outro lado, existe uma isometria T tal que $T(\triangle ABC) = \triangle ADC$. Temos assim

$$\overline{AB}\,\overline{BC} = \text{área}([ABCD]) = \text{área}(\triangle ABC) + \text{área}(\triangle ADC) - \text{área}([AC] = 2\,\text{área}(\triangle ABC).$$



Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo. Seja X o pé da perpendicular por B sobre a recta AC. Então

$$\text{área}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{BX}.$$

Dem. Exercício.

Aula 22

Seno do ângulo entre dois vectores num plano euclidiano

Proposição. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vectores não nulos. Seja $\theta \in [0, \pi]$ o ângulo entre u e v. Então

$$\sin\theta = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{|u|\,|v|} = \frac{\left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|}{|u|\,|v|}.$$

Dem. Como

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u|\,|v|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{|u|\,|v|},$$

temos

$$\sin^2\theta = 1 - \left(\frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2|}{|u|\,|v|}\right)^2$$

$$= \frac{(u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2)^2}{|u|^2 |v|^2} = \left(\frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{|u|\,|v|}\right)^2.$$

Como $\theta \in [0, \pi]$, temos $\sin\theta \geq 0$, logo

$$\sin\theta = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{|u|\,|v|}.$$

Área de um paralelogramo e de um triângulo em termos de coordenadas

Corolário. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo não degenerado. Sejam $u = \overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$ e $v = \overrightarrow{AD} = (v_1, v_2)$. Então

$$\text{área}[ABCD] = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$

e

$$\text{área}[ABD] = \text{área}[BCD] = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|.$$

Dem. Seja X o pé da perpendicular por D sobre a recta $[AB]$ e $\theta = \widehat{XAD}$. Então

$$\text{área}[ABCD] = \overline{AB}\,\overline{DX} = \overline{AB}\,\overline{AD}\sin\theta = |u|\,|v|\sin\theta = |u|\,|v|\frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{|u|\,|v|}.$$

Portanto,

$$\text{área}[ABCD] = \left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|$$

e

$$\text{área}[ABD] = \text{área}[BCD] = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}\right|.$$

Coordenadas afins do conjunto complementar da união de três rectas não paralelas duas a duas

Proposição. Sejam A, B, C pontos não colineares. Seja P um ponto do plano definido por A, B, C que não está em nenhuma das rectas AB, AC ou BC. Então, se $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC}$, com $\alpha + \beta + \gamma = 1$, tem-se

$$|\alpha| = \frac{\text{área}(\triangle PBC)}{\text{área}(\triangle ABC)}, \ |\beta| = \frac{\text{área}(\triangle PAC)}{\text{área}(\triangle ABC)}, \ |\gamma| = \frac{\text{área}(\triangle PAB)}{\text{área}(\triangle ABC)}.$$

Dem. Vamos provar que área$(\triangle PBC) = |\alpha|$ área$(\triangle ABC)$. Sendo $\overrightarrow{BP} = P - B$ e $\overrightarrow{BC} = C - B$, tem-se

$$\text{área}(\triangle PBC) = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} p_1 - b_1 & c_1 - b_1 \\ p_2 - b_2 & c_2 - b_2 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} \alpha\, a_1 + (\beta-1)b_1 + \gamma\, c_1 & c_1 - b_1 \\ \alpha\, a_2 + (\beta-1)b_2 + \gamma\, c_2 & c_2 - b_2 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} \alpha\,(a_1 - b_1) + \gamma(c_1 - b_1) & c_1 - b_1 \\ \alpha\,(a_2 - b_2) + \gamma(c_2 - b_2) & c_2 - b_2 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} \alpha\,(a_1 - b_1) & c_1 - b_1 \\ \alpha\,(a_2 - b_2) & c_2 - b_2 \end{bmatrix}\right|$$

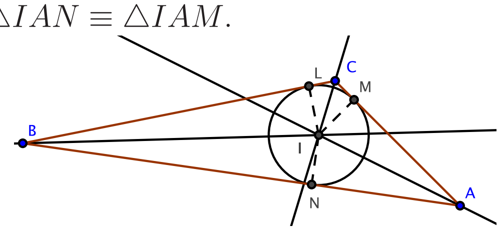
$$= \frac{1}{2}\left|\alpha \det\begin{bmatrix} (a_1 - b_1) & c_1 - b_1 \\ (a_2 - b_2) & c_2 - b_2 \end{bmatrix}\right| = |\alpha|\, \text{área}(\triangle ABC).$$

Analogamente se provava que $|\beta| = \dfrac{\text{área}(\triangle PAC)}{\text{área}(\triangle ABC)}$ e $|\gamma| = \dfrac{\text{área}(\triangle PAB)}{\text{área}(\triangle ABC)}$.

Incentro de um triângulo - definição

Proposição. Sejam A, B, C três pontos não colineares do plano. As bissectrizes dos ângulos internos de $\triangle ABC$ são concorrentes num ponto I, que é equidistante dos três lados de $\triangle(ABC)$.

Dem. Seja I o ponto de intersecção das bissectrizes de B e de C. Sejam L, M, N os pés das perpendiculares por I sobre as rectas BC, AC, AB. Temos que $\triangle LBI \equiv \triangle NBI$ e $\triangle MCI \equiv \triangle LCI$, logo $\overline{IL} = \overline{IN}$ e $\overline{IM} = \overline{IL}$. Assim, $\overline{IN} = \overline{IM}$, portanto I pertence à bissectriz de A, visto que $\triangle IAN \equiv \triangle IAM$.



Definição. O incentro do triângulo $[ABC]$ é o ponto de intersecção das suas bissectrizes.

Nota. O incentro pertence à recta de Euler de $\triangle ABC$ se e só se $\triangle ABC$ for isósceles e não equilátero.

Propriedades do incentro de um triângulo

Seja I o incentro de $\triangle ABC$ e sejam L, M, N os pés das perpendiculares por I sobre as rectas $BC,\ AC,\ AB$.

1. O incentro é o centro da circunferência inscrita em $\triangle ABC$.

   Dem. Como $\overline{IL} = \overline{IM} = \overline{IN}$ e as rectas $IL,\ IM,\ IN$ são perpendiculares aos lados BC, AC, AB respectivamente, tem-se que I é o centro de uma circunferência tangente aos três lados de $\triangle ABC$.

2. O raio da circunferência inscrita em $\triangle ABC$ é dado por

$$\rho = \frac{2\,\text{área}(\triangle ABC)}{a+b+c}.$$

   Dem. Seja $\rho = \overline{IL} = \overline{IM} = \overline{IN}$. Tem-se que

$$\text{área}(\triangle ABC) = \text{área}(\triangle AIB)+\text{área}(\triangle AIC)+\text{área}(\triangle BIC) = \frac{\overline{AB}\times\rho}{2}+\frac{\overline{AC}\times\rho}{2}+\frac{\overline{BC}\times\rho}{2} = \frac{\rho(a+b+c)}{2}.$$

3. $\overrightarrow{OI} = \dfrac{a}{a+b+c}\,\overrightarrow{OA} + \dfrac{b}{a+b+c}\,\overrightarrow{OB} + \dfrac{c}{a+b+c}\,\overrightarrow{OC}.$

   Dem. Tem-se que

$$\frac{\text{área}(\triangle BIC)}{\text{área}(\triangle ABC)} = \frac{\frac{a\rho}{2}}{\frac{\rho(a+b+c)}{2}} = \frac{a}{a+b+c}.$$

Colineações e áreas de regiões poligonais limitadas

O determinante da matriz de uma colineação (aplicação afim bijectiva) é sempre diferente de zero e o seu valor absoluto é igual à razão entre a área de um polígono transformado e a sua área inicial. Como qualquer polígono é união de triângulos, é suficiente demonstrar este resultado para triângulos.

Proposição. Seja f uma colineação do plano com matriz M. Para quaisquer pontos não colineares A, B, C, temos

$$\frac{\text{área}(\triangle\, f(A)\, f(B)\, f(C))}{\text{área}(\triangle\, A\, B\, C)} = |\det M|.$$

Dem. Como $\overrightarrow{f(A)f(B)} = \vec{f}(\overrightarrow{AB})$ e que $\overrightarrow{f(A)f(C)} = \vec{f}(\overrightarrow{AC})$, temos $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = M\ \overrightarrow{AB}$ e $\vec{f}(\overrightarrow{AC}) = M\ \overrightarrow{AC}$. Logo,

$$\text{área}(\triangle\, f(A)\, f(B)\, f(C)) = \frac{1}{2}\left|\det\left[\ \overrightarrow{f(A)f(B)}\ \ \middle|\ \ \overrightarrow{f(A)f(C)}\ \right]\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\det\left[\ \vec{f}(\overrightarrow{AB})\ \ \middle|\ \ \vec{f}(\overrightarrow{AC})\ \right]\right| = \frac{1}{2}\left|\det\ \left(M\left[\ \overrightarrow{AB}\ \ \middle|\ \ \overrightarrow{AC}\ \right]\right)\right|$$

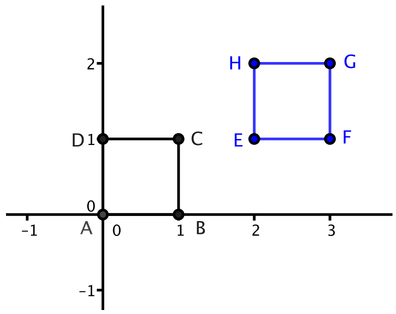
$$= |\det M| \, \frac{1}{2} \left| \det \left[\ \overrightarrow{AB} \quad | \quad \overrightarrow{AC} \ \right] \right| = |\det M| \text{ área}(\triangle\, A\, B\, C).$$

Corolário Seja f uma colineação do plano com matriz M. Então a área da imagem de uma região poligonal plana por acção de f é igual ao produto da área original pelo valor absoluto do determinante da matriz M.

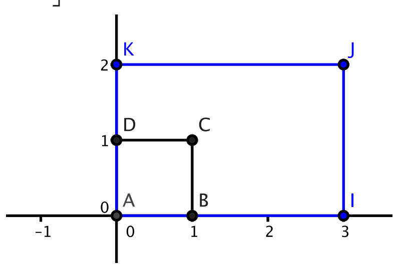
Exemplos

Sejam $A = (0,0), B = (1,0), C = (1,1), D = (0,1)$ e consideremos o quadrado $[A\,B\,C\,D]$ de área 1. Vejamos como é que este quadrado se transforma por acção das seguintes colineações.

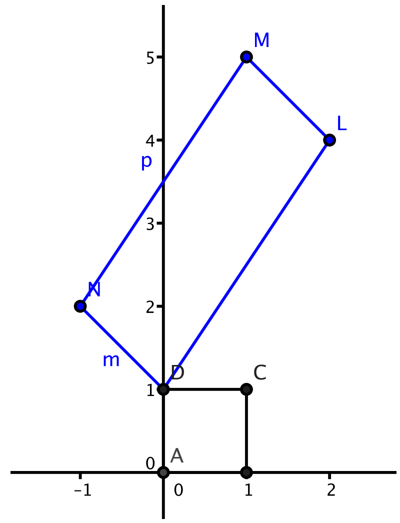
1. $f(x,y) = (x+2, y+1) \to \text{área}([f(A)\, f(B)\, f(C)\, f(D)]) = 1.$



2. $f(x,y) = (3x, 2y) \to M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \to \text{área}([f(A)\, f(B)\, f(C)\, f(D)]) = 6.$



3. $f(x,y) = (2x - y, 3x + y + 1) \to M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \to \text{área}([f(A)\, f(B)\, f(C)\, f(D)]) = 5.$

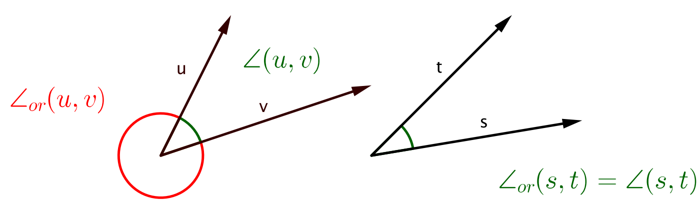


Ângulos orientados no plano

A noção de ângulo orientado entre dois vectores não nulos u e v de $\mathbb{R}^2$ permite distinguir o ângulo côncavo entre u e v do ângulo convexo entre u e v.

Definição. Sejam $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ vectores não nulos. Definimos ângulo orientado de u para v, denotando $\angle_{or}(u, v)$, como o número real pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$, tal que

$$\sin(\angle_{or}(u,v)) = \frac{\det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}}{\|u\| \ \|v\|} \quad \text{e} \quad \cos(\angle_{or}(u,v)) = \frac{u \cdot v}{|u| \ |v|}.$$



Nota. Se $\sin(\angle_{or}(u,v)) \geq 0$, então

$$\angle_{or}(u,v) = \angle(u,v) = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \ \|v\|}\right).$$

Se $\sin(\angle_{or}(u,v)) < 0$, então

$$\angle_{or}(u,v) = 2\pi - \angle(u,v) = 2\pi - \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \ \|v\|}\right).$$

Bases directas e bases inversas

O conceito de ângulo orientado generaliza-se ao espaço $\mathbb{R}^n$ através da noção de determinante. Assim, podemos distinguir duas classes de bases em $\mathbb{R}^n$ quanto à sua orientação.

Definição. Seja $\big(e_1, \ldots, e_n\big)$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se

- directa se a matriz da mudança de base de $(e_1, \ldots, e_n)$ para $\mathcal{B}$ tiver determinante positivo.
- inversa se a matriz da mudança de base de $(e_1, \ldots, e_n)$ para $\mathcal{B}$ tiver determinante negativo.

Para compreender a ligação entre o conceito de ângulo orientado em $\mathbb{R}^2$ e o conceito de base directa ou inversa, observemos que se $\mathcal{B} = (u, v)$ for uma base de $\mathbb{R}^2$, então a matriz de mudança de base de (e_1, e_2) para $\mathcal{B}$ é dada por

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, em $\mathbb{R}^2$, temos

- $\det A > 0$ se e só se $\sin(\angle_{or}(u, v)) > 0$.
- $\det A < 0$ se e só se $\sin(\angle_{or}(u, v)) < 0$.

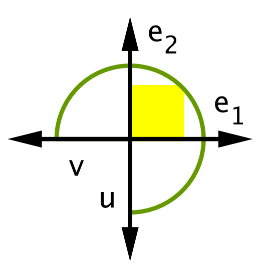
Podemos então concluir que

- a base (u, v) é directa se e só se $\angle_{or}(u, v) = \angle(u, v)$.
- a base (u, v) é inversa se e só se $\angle_{or}(u, v) = 2\pi - \angle(u, v)$.

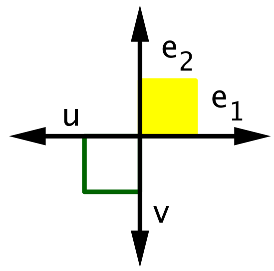
Exemplos.

- Consideremos a base $\mathcal{B} = \big(u, v\big)$, com $u = (0, -1)$ e $v = (-1, 0)$. A matriz de mudança de base da base canónica para a base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e tem determinante igual a -1, logo a base $\mathcal{B}$ é inversa.

  Note-se que o ângulo orientado de u para v é $3\pi/2$ e o ângulo entre u e v é $\pi/2$.



- Consideremos a base $\mathcal{B}' = \big(u, v\big)$, com $u = (-1, 0)$ e $v = (0, -1)$. A matriz de mudança de base da base canónica para a base $\mathcal{B}'$ é $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e tem determinante igual a 1, logo a base $\mathcal{B}$ é directa. Note-se que o ângulo orientado de u para v é $\pi/2$, tal como o ângulo entre u e v.



Aula 23

Mudanças de referencial cartesiano

As mudanças de referencial cartesiano são fundamentais para estudar as propriedades das curvas e superfícies, visto que permitem escolher o sistema de eixos e o ponto origem de modo a poder classificá-las de forma mais eficiente. Estas mudanças de referencial conservam todas as propriedades métricas.

Seja $\mathcal{E}$ um espaço euclidiano e seja $(O; e_1, \ldots e_n)$ um referencial cartesiano de $\mathcal{E}$. Seja $P \in \mathcal{E}$ e sejam $(x_1, \ldots, x_n)$ as coordenadas do vector $\overrightarrow{OP}$. Seja $(O'; e'_1, \ldots, e'_n)$ um referencial cartesiano, onde as coordenadas do vector $\overrightarrow{O'P}$ são $(x'_1, \ldots x'_n)$ e as coordenadas do vector $\overrightarrow{OO'}$ são $(b_1, \ldots, b_n)$. Veremos que estes dois sistemas de coordenadas estão relacionados através de uma isometria.

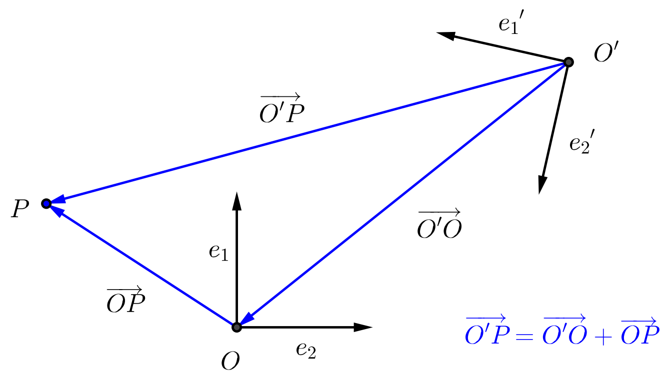
Proposição. Sejam

$$X = [x_1 \ \ldots \ x_n]^T, \ X' = [x'_1 \ \ldots \ x'_n]^T, \ B = [b_1 \ \ldots \ b_n]^T.$$

Então existe uma matriz ortogonal U tal que

$$X = UX' + B.$$

Mudanças de referencial cartesiano



Mudanças de referencial cartesiano (demonstração)

Recordemos que

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}.$$

Seja U a matriz cujas colunas são as coordenadas dos vectores da base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ na base $(e_1, \ldots, e_n)$. Então a matriz U é ortogonal e temos

$$\underbrace{U[x'_1 \ \ldots \ x'_n]^T}_{\overrightarrow{O'P}} = \underbrace{[x_1 \ \ldots \ x_n]^T}_{\overrightarrow{OP}} - \underbrace{[b_1 \ \ldots \ b_n]^T}_{\overrightarrow{OO'}}.$$

Temos assim que

$$X = UX' + B,$$

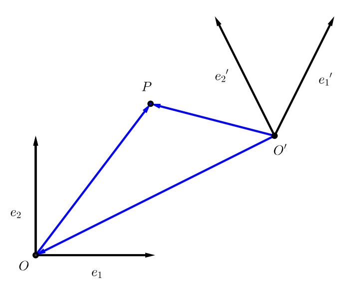
onde U é uma matriz ortogonal e B é um vector. Portanto, como $U^{-1} = U^T$, temos

$$X' = U^T(X - B) = U^T X - U^T B.$$

Mudanças de referencial afim

As transformações do plano que correspondem às mudanças de referencial cartesiano são as isometrias. Por vezes é necessário fazer mudanças de referencial que utilizem uma matriz A invertível, não necessariamente ortogonal. Assim, no caso geral, as transformações do plano que correspondem às mudanças de referencial são as tranformações afins.

$$X = AX' + B \ \text{ e } \ X' = A^{-1}(X - B).$$



Nota. No caso geral, o paralelismo entre rectas é sempre conservado.

Conservação do paralelismo→mudança de referencial afim

Proposição. Seja f uma colineação (função afim bijectiva). Então f transforma rectas estritamente paralelas em rectas estritamente paralelas.

Dem. Seja f uma colineação e sejam r e s rectas estritamente paralelas. Suponhamos que

$$r = \left\{A + \lambda\overrightarrow{AB} : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \text{ e } s = \left\{C + \mu\overrightarrow{CD} : \mu \in \mathbb{R}\right\}, \text{ com } B \notin s \text{ e } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

Como f é aplicação afim, temos

$$f(r) = \left\{f(A) + \lambda\,\overrightarrow{f(A)f(B)} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

e

$$f(s) = \left\{f(C) + \mu\,\overrightarrow{f(C)f(D)} : \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

Visto que f é bijectiva, temos $f(A) \neq f(B)$ e $f(C) \neq f(D)$, logo $f(r)$ e $f(s)$ são rectas.

Para concluir que $f(r) \parallel f(s)$, vamos mostrar que $\overrightarrow{f(C)f(D)} = \overrightarrow{f(A)f(B)}$ e $f(B) \notin f(s)$. Assim, por definição da aplicação $\vec{f}$, temos

$$\overrightarrow{f(C)f(D)} = \vec{f}(\overrightarrow{CD}) = \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

Suponhamos por absurdo que $f(B) \in f(s)$. Então, para algum $\mu \in \mathbb{R}$, $f(B) = (1-\mu)f(C) + \mu f(D)$. Como f é bijectiva e f^{-1} é afim, temos

$$B = f^{-1}(f(B)) = (1-\mu)f^{-1}(f(C)) + \mu f^{-1}(f(D)) = (1-\mu)C + \mu D,$$

o que é uma contradição porque $B \notin s$.

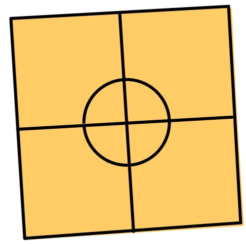
Pavimentações do plano por polígonos regulares

Uma pavimentação do plano é uma decomposição do plano em polígonos, sem espaços vazios nem sobreposições. Diz-se que uma pavimentação é regular se for composta por polígonos regulares todos iguais e se as intersecções das fronteiras dos polígonos que a compõem forem vértices dos polígonos. Os vértices dos polígonos da pavimentação são designados nós da pavimentação.

Para descrever todas as pavimentações possíveis com polígonos regulares, observemos que a medida α de cada ângulo interno de um polígono regular com n lados é dada pela expressão

$$\alpha = \frac{(n-2)\pi}{n}$$

e cada nó corresponde sempre ao mesmo número de polígonos, sendo a soma de todos os ângulos com origem em cada nó igual a 2π.



Pavimentações do plano por polígonos regulares - caracterização

Esta caracterização já era conhecida na Grécia Antiga.

Teorema. Os únicos polígonos que dão origem a pavimentações regulares do plano são os triângulos, os quadrados e os hexágonos.

Dem. Consideremos uma pavimentação regular do plano. Então, cada nó é intersecção de m lados dos polígonos que constituem a pavimentação, com $m \geq 3$. Assim, temos que $m \times \dfrac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi$, portanto $m = \dfrac{2n}{n-2} \geq 3$. Obtemos assim $3 \leq n \leq 6$. Analisando os casos possíveis, obtemos

- $n = 3 \rightarrow m = 6$ (triângulos)
- $n = 4 \rightarrow m = 4$ (quadrados)
- $n = 5 \rightarrow m = \dfrac{10}{3} \notin \mathbb{N}$
- $n = 6 \rightarrow m = 3$ (hexágonos)

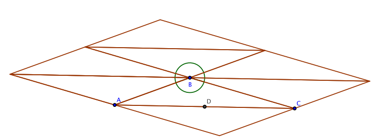
Nota. Para saber mais: http://mathworld.wolfram.com/Tessellation.html.

Pavimentações monoédricas - triângulos e quadriláteros

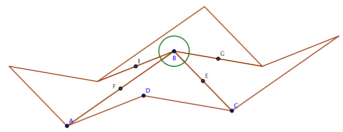
Uma pavimentação diz-se monoédrica se for composta por polígonos congruentes entre si. O domínio fundamental de uma pavimentação é um seu subconjunto que contém um nó em que confluem ângulos cuja soma é igual a 2π.

Proposição. Os triângulos e os quadriláteros pavimentam o plano.

Dem. Triângulos $\rightarrow$ Consideremos um triângulo $[ABC]$. Seja D o único ponto tal que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Fazendo translações pelos vectores AB e CB, obtemos um domínio fundamental da pavimentação do plano.



Quadriláteros $\rightarrow$ Consideremos um quadrilátero $[ABCD]$. Fixando um dos seus vértices, constroem-se dois quadriláteros congruentes com $[ABCD]$ através de simetrias centrais com centro nos pontos médios dos lados do quadrilátero que o contêm. Repete-se o processo com os pontos médios dos lados dos novos quadriláteros que contêm o ponto em questão, obtendo-se um domínio fundamental.



Pavimentações monoédricas - hexágonos

Existem apenas três tipos de pavimentações com hexágonos irregulares convexos.

1. Dois lados congruentes e paralelos:

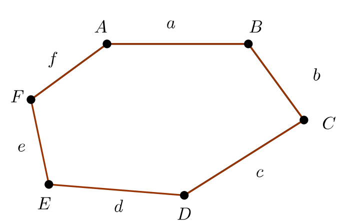
$$a = d,\ A + B + C = 2\pi.$$

2. Dois pares de lados congruentes

$$a = d,\ c = e,\ A + B + D = 2\pi.$$

3. Três lados congruentes, formando três ângulos iguais a $2\pi/3$.

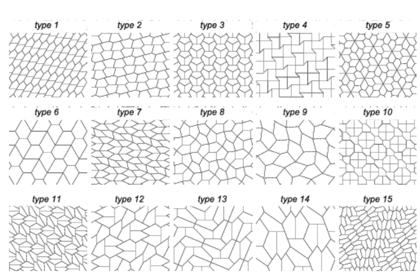
$$a = b,\ c = d,\ e = f,\ A = C = E.$$



Nota. Para saber mais: http://mathworld.wolfram.com/HexagonTiling.html

Pavimentações monoédricas - pentágonos

Existem apenas quinze tipos de pavimentações com pentágonos irregulares convexos.



Nota. Para saber mais: http://mathworld.wolfram.com/PentagonTiling.html.

Caso geral

Em 2017, o matemático francês M. Rao provou que as pavimentações aqui apresentadas constituem os únicos tipos de pavimentações monoédricas do plano com polígonos convexos.

Nota. https://www.quantamagazine.org/pentagon-tiling-proof-solves-century-old-math-problem-20170711/

Aula 24

Diagramas de Voronoi - introdução histórica

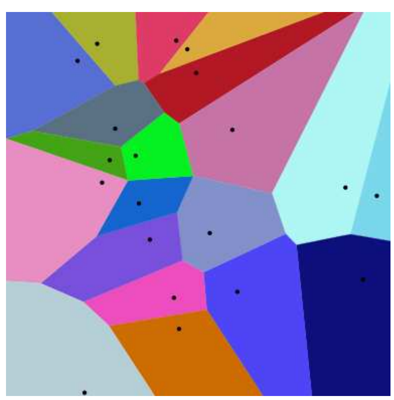
De uma forma geral, podemos definir um diagrama de Voronoi como uma pavimentação do espaço em regiões associadas a determinados pontos específicos, a que se costuma chamar geradores ou sementes ou sítios, com a seguinte propriedade: se um ponto estiver na região de um determinado sítio, então está mais perto desse sítio do que de qualquer outro gerador. Este tipo de estrutura geométrica foi utilizado informalmente desde os tempos de Descartes. No século XIX, Dirichlet utilizou diagramas de Voronoi para estudar as formas quadráticas. O médico britânico John Snow utilizou um diagrama de Voronoi em 1854 durante uma epidemia de cólera em Londres para provar que um dos focos de infecção era uma fonte de água contaminada.

Os diagramas de Voronoi devem o seu nome ao matemático ucraniano Georgy Voronyi que definiu e estudou o caso n-dimensional no início do século XX.

Estes diagramas têm inúmeras aplicações e são bastante utilizados em todas as áreas em que é necessário analisar distribuições espaciais de dados.

Na figura podemos observar um diagrama de Voronoi com as respectivas regiões assinaladas a cores.

Diagramas de Voronoi - figura



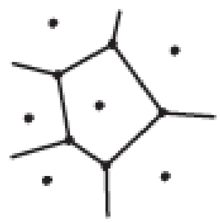
Diagramas de Voronoi - definição

Definição. Seja $\{A_1, \ldots, A_k\}$ um conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$. Um diagrama de Voronoi é uma partição do espaço $\mathbb{R}^n$ em k regiões $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_k$ com as seguintes propriedades:

- $A_i \in \mathcal{G}_i, \ i = 1, \ldots, n.$
- Se $P \in \mathcal{G}_i$, então $\overline{PA_i} < \overline{PA_j}, \ j \neq i, \ j = 1, \ldots, n.$

Denotamos um diagrama de Voronoi gerado pelos pontos $A_1, \ldots A_n$ por $Vor(A_1, \ldots, A_n)$.

Exemplo 1. Um diagrama de Voronoi para 6 pontos não colineares de $\mathbb{R}^2$.

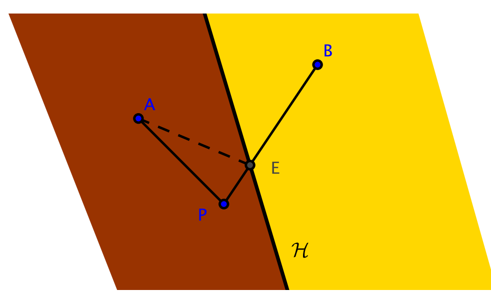


Definição. Um conjunto $\mathcal{C}$ de pontos de $\mathbb{R}^n$ diz-se convexo se dados dois pontos $A, B \in \mathcal{C}$, o segmento de recta $[AB]$ está contido em $\mathcal{C}$.

Teorema. As regiões de um diagrama de Voronoi são conjuntos convexos.

Construção de diagramas de Voronoi (dois geradores)

Sejam A e B dois pontos de $\mathbb{R}^2$. Um diagrama de Voronoi com geradores A e B consiste em dois semiplanos S_1 e S_2, em que a fronteira é a mediatriz do segmento de recta $[AB]$.



Diagramas de Voronoi (dois geradores)

Dem. Seja $\mathcal{H}$ a mediatriz do segmento $[AB]$ e seja S_1 a região que contém B.

Consideremos $P \in S_1 \setminus \mathcal{H}$. Se $P \in [AB]$, o resultado é imediato. Vamos provar que, para $P \notin [AB]$, se tem $d(P, A) < d(P, B)$.

Seja $E = \mathcal{H} \cap [PB]$, então $d(E, A) = d(E, B)$. Por outro lado

$$d(P, B) = d(P, E) + d(E, B) = d(P, E) + d(E, A).$$

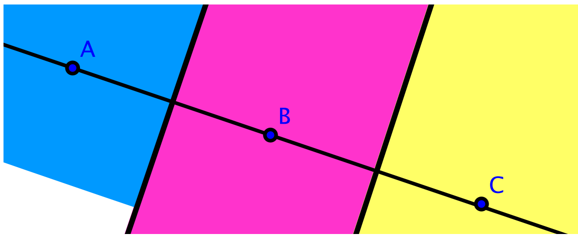
Como E, P, A são não colineares (visto que $P \notin [AB]$) tem-se, pela desigualdade triangular,

$$d(P, B) = d(P, E) + d(E, A) > d(P, A).$$

Construção de diagramas de Voronoi (mais do que dois geradores colineares)

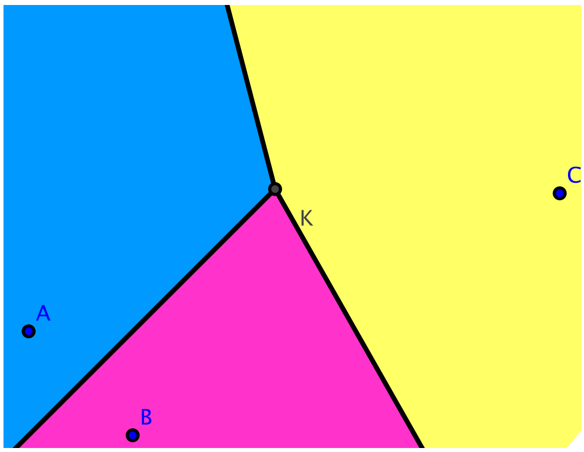
Estendendo a ideia de construção dos diagramas de Voronoi com dois geradores, constroem-se facilmente diagramas de Voronoi com três ou mais geradores colineares .

Por exemplo, um diagrama de Voronoi com três geradores A, B, C colineares, onde $B \in [AC]$, consiste em três regiões, em que as fronteiras são as mediatrizes dos segmentos de recta $[AB]$ e $[BC]$.



Construção de diagramas de Voronoi (três geradores não colineares)

Um diagrama de Voronoi com geradores A, B, C não colineares consiste em três regiões, em que as fronteiras são semirectas com origem em K, o circuncentro de $\triangle ABC$, e contidas nas meditarizes dos três lados de $\triangle ABC$.

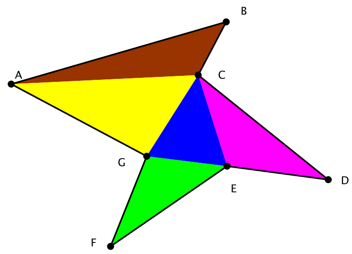


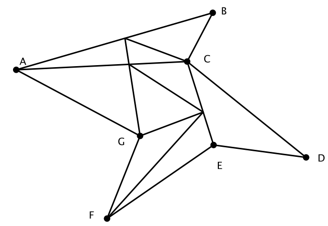
Diagramas de Voronoi (quatro ou mais geradores) e triangulações de polígonos

O método anterior de construção de diagramas de Voronoi a partir das mediatrizes dos segmentos de recta de pares de pontos não é muito eficaz, sendo preferível recorrer a triangulações.

Uma triangulação de um polígono $\mathcal{P}$ é uma decomposição de $\mathcal{P}$ em triângulos $T_1, \ldots T_k$ de modo que os vértices de cada triângulo T_i sejam também vértices do polígono $\mathcal{P}$.

Por exemplo, a decomposição do polígono $[ABCDEFG]$ do lado esquerdo é uma triangulação e a do lado direito não é.





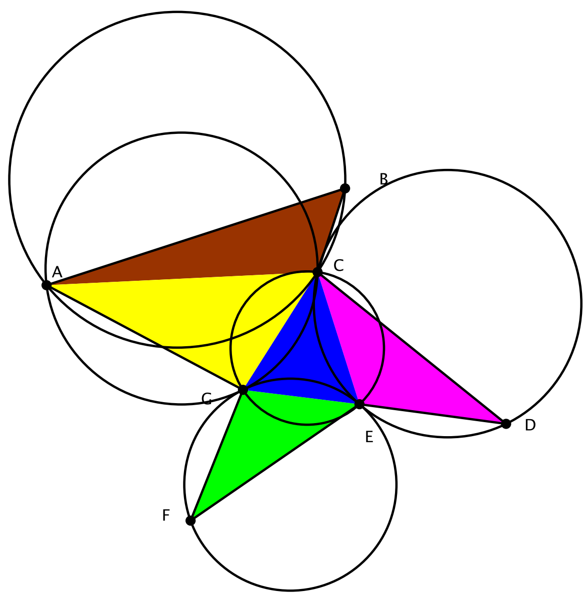
Triangulações de Delaunay

Dado um polígono, uma triangulação de Delaunay é uma triangulação em que a circunferência circunscrita de cada triângulo não intersecta os vértices dos outros triângulos.

As triangulações de Delaunay permitem construir eficazmente diagramas de Voronoi com 4 geradores ou mais.

Para mais informação sobre este assunto, consultar
http://mathworld.wolfram.com/DelaunayTriangulation.html

Triangulação de Delaunay - exemplo



Invólucro convexo de um polígono

Definimos invólucro convexo de um polígono como o menor polígono convexo que contém o polígono original. Na figura, o polígono $[ABDF]$ é o invólucro convexo do polígono $[ABCDEFG]$.

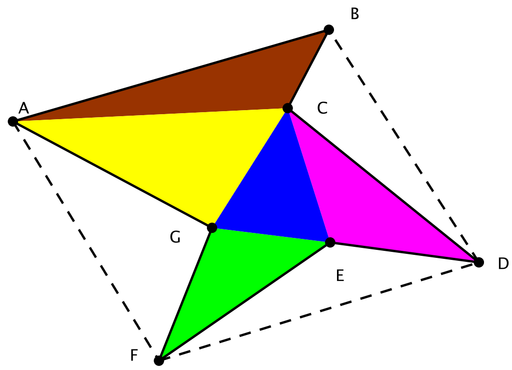
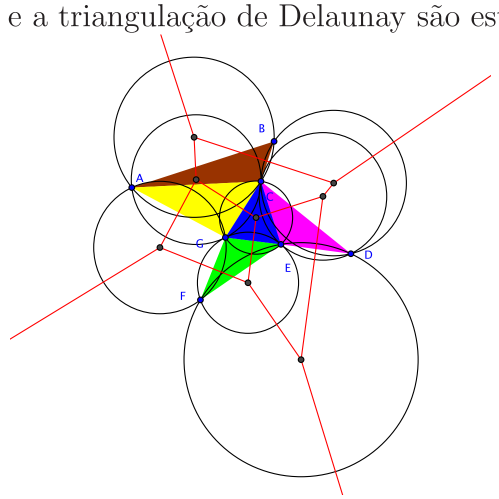


Diagrama de Voronoi e triangulação de Delaunay

Unindo os centros das circunferências circunscritas a todos os triângulos de uma triangulação de Delaunay do invólucro convexo de um polígono, obtém-se um diagrama de Voronoi (linhas a vermelho) cujos geradores são os vértices dos triângulos originais.

O diagrama de Voronoi e a triangulação de Delaunay são estruturas duais.



Diagramas de Voronoi e sustentabilidade

A estrutura de um diagrama de Voronoi ocorre na natureza, desde as manchas de uma girafa, as asas de uma libélula, as nervuras de uma folha ou os padrões formados pelo solo quando tem falta de água. Ultimamente esta estrutura tem sido utilizada na arquitectura paramétrica para criar ambientes sustentáveis do ponto de vista do espaço e da energia.

Filme. https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar/pattern/dino/v/patterns2_new

Uma axiomática para a sustentabilidade

O caminho para a sustentabilidade é um processo em curso que não podemos ignorar nem descurar. Dois matemáticos propuseram em 2014 os seguintes axiomas como um ponto de partida para nos envolvermos neste grande desafio que toda a humanidade enfrenta.

S.1 O estado actual da humanidade não é moralmente aceitável como exemplo de desenvolvimento social.

S.2 A espécie humana está a provocar um impacto negativo na vida das gerações futuras, comprometendo as suas necessidades e anseios.

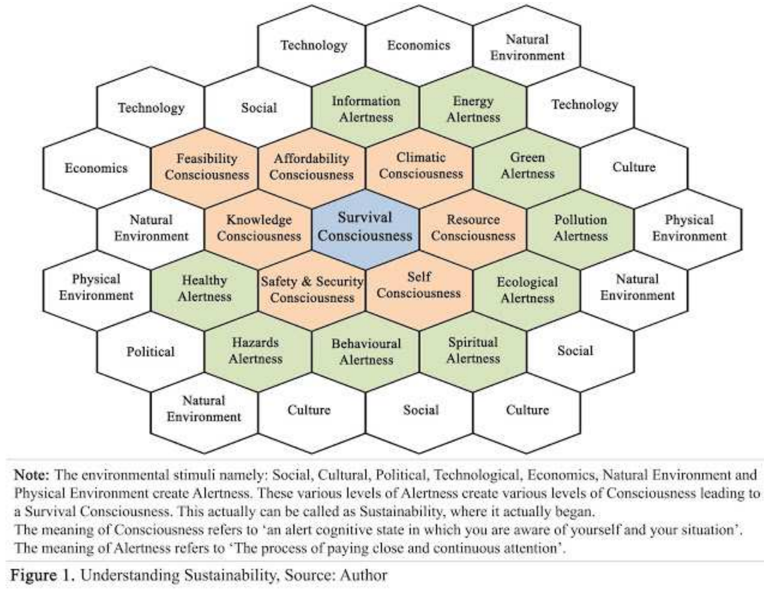
S.3 Todos os problemas que a humanidade enfrenta devem ser tratados simultaneamente, sem ordem de preferência.

S.4 O nosso sistema social e ecológico precisa de mudanças profundas.

Fonte. J. Hamilton, T. Pfaff, Sustainability education: the What and How for Mathematics, PRIMUS, 2014.

Estado de consciência e estado de compromisso constante

Num artigo que relaciona os diagramas de Voronoi com o conceito de sustentabilidade, os autores propõem o seguinte diagrama sobre consciência e compromisso.



Fonte. http://natureofenvironment.blogspot.com/2018/06/voronoi-and-sustainability_27.html.

Metas para o desenvolvimento sustentável - 2030 (SDG)

Segundo a ONU, todos os estados devem trabalhar em diversas vertentes de modo a atingirem as seguintes metas em 2030.

Fonte. https://www.un.org/sustainabledevelopment/sustainable-development-goals/

Mais ligações: Matemática, Sustentabilidade e Educação

- https://cgcs.mit.edu/about/overview (página do MIT sobre alterções climáticas)
- http://sustainabilitymath.org/ (página criada por professores de matemática sobre educação para a sustentabilidade)

- https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921800914000615 (artigo sobre o modelo de Lotka-Volterra aplicado à sustentabilidade do planeta Terra)
- https://www.elsevier.com/connect/q-and-a-when-a-theoretical-article-is-misinterpreted (entrevista sobre o artigo acima referido)
- http://library.msri.org/msri/MathClimate.pdf (artigo sobre a matemática das alterações climáticas)
- http://ap-unsdsn.org/wp-content/uploads/University-SDG-Guide_web.pdf (um guia sobre a aplicação dos SDGs nas universidades)