Métodos Matemáticos da Física — 2014/15

Teste 2 — 04-05-2015

1. Considere a equação diferencial

$$x^2\, y''(x) + (2\,x - x^2)\, y'(x) + \lambda\, x\, y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

a) Coloque a equação sob a forma de Sturm-Liouville.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema.

2. Considere a equação diferencial

$$x\, y''(x) + (2 - x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x e deduza a relação de recorrência entre os seus coeficientes. Escreva a expressão da solução encontrada até à ordem x^4. Admita que $y(0) = 1$.
b) Determine os valores próprios, λ_n, associados a funções próprias, $y_n(x)$, dadas por polinómios de grau n.
c) Obtenha as expressões das funções próprias, $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_3(x)$, e os respectivos valores próprios.

3.a) Mostre que a função harmónica esférica $Y_l^m(\theta, \phi) = c\, \sin\theta\, \cos\theta\, e^{-i\,\phi}$ (c é uma constante) é função própria do operador

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\, \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ .$$

b) Encontre, justificando, os valores l, m, da mesma função.
c) Escreva a definição de produto interno adequado às funções harmónicas esféricas. Calcule o produto interno entre a função $Y_l^m(\theta, \phi)$ dada acima e a função $u(\theta, \phi) = \sin\theta\, e^{-i\,\phi}$.