/

(A)

TESTE DE MATEMÁTICA DISCRETA/FINITA - 23/3/2017

Duração: 50 minutos

NOME COMPLETO ....Solução..........NÚMERO................

I (*11 valores*)

Responda às perguntas deste grupo escrevendo um **V** ou **F** no quadrado do lado esquerdo, consoante a afirmação da alínea é **V**erdadeira ou **F**alsa. **Respostas erradas descontam.**

1) Sejam A e B dois conjuntos. Sabendo que $|A| = 7$ e $|B| = 9$ diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

[V] a) $|A \cup B| \leq 16$.

[F] b) $|A \cap B| < 5$.

[V] c) $|A \setminus B| < |B \setminus A|$.

[F] d) Qualquer aplicação de A para B é injectiva.

[F] e) Existem aplicações sobrejectivas de A para B.

[V] f) Existem aplicações sobrejectivas de B para A.

[V] g) Se $|A \cup B| = 13$ então $A \cap B \neq \emptyset$.

[V] h) Se $|A \cup B| = 13$ então $|A \setminus B| = 4$.

2) Nas próximas perguntas são apresentadas 3 respostas para cada pergunta. Apenas uma está correcta. Assinale com uma cruz a resposta correta. **Respostas erradas descontam.**

a) Quantos números de 6 algarismos se podem fazer utilizando apenas os algarismos 1,2,3 e 6?

Resp. (i) 6^4 ☐ (ii) 4^6 ☒ (iii) $6 \times 5 \times 4 \times 3$ ☐

b) Qual é o coeficiente de $x^2y^5z^3$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^{10}$?

Resp. (i) $\binom{10}{5}$ ☐ (ii) $\frac{10!}{2!3!5!}$ ☒ (iii) $\binom{10}{2}\binom{10}{5}\binom{10}{3}$ ☐ .

c) Numa prateleira da biblioteca há 5 livros diferentes em inglês, 6 livros diferentes em português e 4 livros diferentes em espanhol. De quantas maneiras podem ser alinhados na prateleira ?

Resp. (i) $5!6!4!$ ☐ (ii) $5!+4!+6!$ ☐ (iii)$15!$ ☒ .

d) Quantas soluções inteiras não negativas tem a equação $x+y+z+w=10$?

Resp. (i) $\binom{13}{10}$ ☒ (ii)$\sum_{k=0}^{10}\binom{10-k}{k}$ ☐

(iii) $p(10,4) :=$ n^o de partições do inteiro 10 em 4 parcelas. ☐

NOME Solução ....NÚMERO................

II *(6 valores)*

Responda às duas perguntas nesta folha de exame.

1) Prove a igualdade :

$$\binom{2k}{2} = 2\binom{k}{2} + k^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

2) Quantos números naturais de 6 algarismos não têm zeros e têm (pelo menos) um 1, um 2 e um 3? (indique o raciocinio)

1) $k=0$ $\quad \binom{0}{2}=0 \qquad 2\binom{0}{2}+0=0$

$k=1$ $\quad \binom{2}{2}=1 \qquad 2\binom{1}{2}+1=0+1=1$

$k\geq 2$ $\quad \binom{2k}{2} = \frac{(2k)!}{2!\,(2k-2)!} = \frac{2k(2k-1)}{\cancel{2}} = 2k^2-k$ ⊛

$2\binom{k}{2}+k^2 = \cancel{2}\frac{k!}{\cancel{2!}(k-2)!}+k^2 = k(k-1)+k^2 = 2k^2-k = \binom{2k}{2}$ //

2) Consideremos

$B := \{$nº naturais c/ 6 algarismos e q não têm zeros$\}$, $|B| = 9^6$.

Para $i = 1,2,3$ seja

$A_i := \{$nºs naturais c/ 6 algarismos q não têm zeros nem i's$\}$

Temos: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{$nºs naturais ~~c/~~ 6 algarismos q não têm zeros nem um dos algarismos 1, 2 ou 3$\}$.

O numero pretendido é portanto

$|B \setminus A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |B| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 9^6 - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ ⊛

Como $\forall i,j \in \{1,2,3\}$ $|A_i| = 8^6$ $\quad |A_i \cap A_j| = 7^6$ ($i \neq j$) e $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 6^6$

temos $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \times 8^6 - 3 \times 7^6 + 6^6$ pelo que, substituindo em ⊛

vem:

R: O nº de naturais de 6 algarismos que não têm zeros e têm pelo menos ~~[illegible]~~ um 1, um 2 e um 3 é:

$$\boxed{9^6 - 3\times 8^6 + 3\times 7^6 - 6^6}.$$

NOME Solução NÚMERO

III *(3 valores)*

Considere um conjunto com $2n$ elementos diferentes. Seja $v_n := n^o$ de maneiras de distribuir os $2n$ elementos por n conjuntos de 2 elementos.

Responda às seguintes perguntas justificando:

a) Determine v_1, v_2 e v_3.

b) Defina v_n por uma relação de recorrência.

c) Indique o termo geral de v_n.

a) • $v_1 = 1$ $\{1,2\}$

• Há 3 maneiras de distribuir os elementos de $[4] = \{1,2,3,4\}$ por 2 conjuntos c/ 2 elementos. São elas:

$\{1,2\}$ $\{3,4\}$
$\{1,3\}$ $\{2,4\}$ portanto $v_2 = 3$
$\{1,4\}$ $\{2,3\}$

• Para contar o nº de maneiras de distribuir os elementos de $[6]$ por 3 conjuntos c/2 elementos pensemos da seguinte forma:

1) O elemento 1 fará parte de um conjunto com 2 elementos, da forma $\{1, x\}$ com $x \in \{2,3,4,5,6\}$.
Há pois 5 maneiras diferentes de escolher o conjunto de 2 elementos q contem o nº 1.

2) Para cada uma destas 5 possibilidades restam 4 elementos em $[6] \setminus \{1,x\}$ que temos de distribuir por 2 conjuntos de 2 elementos. Podemos fazê-lo de $v_2 = 3$ maneiras.

Logo $v_3 = 5 \times v_2 = 5 \times 3 = 15$

b) Em geral teremos : $\boxed{v_n = (2n-1) \times v_{n-1} \quad e \quad v_1 = 1}$

$(2n-1)$: nº de conjuntos $\{1,x\}$

v_{n-1}: nº de maneiras de distribuir os $2(n-1) = 2n-2$ elementos $[2n] \setminus \{1,x\}$ por $n-1$ conjuntos de 2 elementos.

c) De b) vem $\boxed{v_n = (2n-1)(2n-3) \ldots 3 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} (2k-1)}$