CDI 3 - 2019/20

Resolução do Exame de 1ª época, de 9/01/20.

(Por exemplo, faça-se $a=7$ nas questões 1. e 2.)

1. (a) $y'' - 2y' + 5y = -t + 7$

Eq. homog. $y'' - 2y' + 5y = 0$

Eq. caract. $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$

Base de soluções reais: $\{ e^t \cos 2t, \ e^t \operatorname{sen} 2t \}$

(Note-se, com efeito, que $e^{t(1+2i)} = e^t (\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$.)

Procure-se agora uma solução particular pelo MCI:

$y_p = At + B$

Tem-se $y_p' = A$, $y_p'' = 0$; para ser solução, terá de ser

$-2A + 5(At + B) = -t + 7 \Leftrightarrow 5At + 5B - 2A = -t + 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5A = -1 \\ 5B - 2A = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/5 \\ B = \frac{1}{5}\left(7 - \frac{2}{5}\right) = \frac{33}{25} \end{cases}$$

Sol. geral da EDO dada:

$$y(t) = c_1 e^t \cos 2t + c_2 e^t \sin 2t - \frac{1}{5} t + \frac{33}{25}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad (t \in \mathbb{R})$$

(b) $\begin{cases} y' = y(7-y) \\ y(0) = 14 \end{cases}$

São soluções de equilíbrio (constantes) $y \equiv 0$ e $y \equiv 7$. Para $y \not\equiv 0$ e $y \not\equiv 7$, pelo TEU as outras soluções nunca tomam os valores 0 e 7. Para essas,

$y' = y(7-y) \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y(7-y)} = 1. \ (*)$ MCI: $\dfrac{1}{y(7-y)} = \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{7-y}$

$\Leftrightarrow 1 = A(7-y) + By$

$y=0$: $1 = 7A \Leftrightarrow A = 1/7$

$y=7$: $1 = 7B \Leftrightarrow B = 1/7$

$(*) \Leftrightarrow \dfrac{1}{7}\left[\dfrac{y'}{y} + \dfrac{y'}{7-y}\right] = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{7}\left[\log|y| - \log|7-y|\right] = t + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log\left|\dfrac{y}{7-y}\right| = 7t + C_1 \Leftrightarrow \dfrac{y}{7-y} = e^{7t} \cdot K$, com $K = \pm e^{C_1}$

($C_1 = 7C$)

Com C.I. $y(0) = 14$, vem $\dfrac{14}{-7} = K \Leftrightarrow K = -2$.

Logo, vem $\dfrac{y}{7-y} = -2e^{7t} \Leftrightarrow y = -2(7-y)e^{7t} \Leftrightarrow y(1 - 2e^{7t}) = -14e^{7t}$

$\Leftrightarrow \; y = \dfrac{-14e^{7t}}{1-2e^{7t}} = \dfrac{14e^{7t}}{2e^{7t}-1}$, sol. para

$2e^{7t}-1 > 0 \Leftrightarrow e^{7t} > 1/2 \Leftrightarrow t > \frac{1}{7}\log\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{7}\log 2.$

Ou seja, a solução do PVI dado é $\quad y(t) = \dfrac{14e^{7t}}{2e^{7t}-1}$ em $\left]\dfrac{-\log 2}{7}, +\infty\right[$.

2\. PVI $\quad x' = Ax \quad , \; x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \;$, com $\; A = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Como A é uma matriz triangular, vê-se sem contas que os val. pp são $\quad \lambda_1 = -1/2 \;$ e $\; \lambda_2 = -1$.

$\lambda_1 = -1/2$: $\quad Av = -1/2\, v \Leftrightarrow \begin{cases} -\cancel{1/2}v_1 - v_2 = -\cancel{1/2}v_1 \\ \quad \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = 0$

Um vector pp associado: $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sol. associada: $X_1(t) = e^{-t/2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = -1$: $\quad Av = -v \Leftrightarrow \begin{cases} -1/2 v_1 - v_2 = -v_1 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = \frac{1}{2}v_1 \\ - \end{cases}$

Um vector pp associado: $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$. Sol. associada: $X_2(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Uma m.f.s. para $x' = Ax$ é

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}$$

As soluções de $x' = Ax$ têm então a forma

$$x(t) = X(t)\,c \quad , \text{ com } \; c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

C. I.: $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$. Vem $\quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} +c_1 + c_2 = -1 \\ c_2 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -15 \\ c_2 = 14 \end{cases}$.

A solução é $\quad x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t/2} & e^{-t} \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -15 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15e^{-t/2} + 14e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{bmatrix}$.

3\. (a) C

(b) B

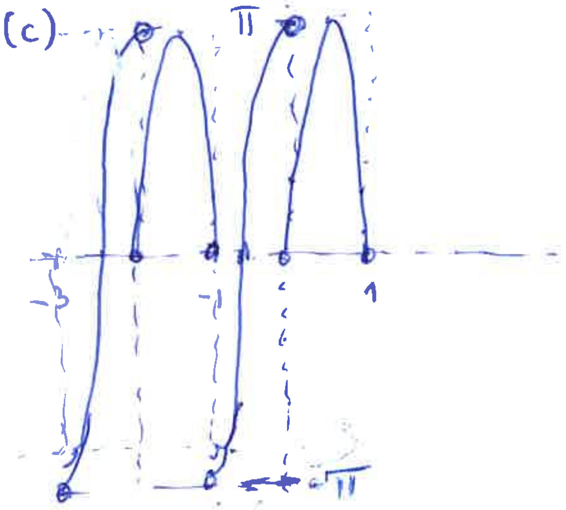
(c) B

4. (a) $P_3 = 1 + \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + \frac{\pi}{2}\sin(\pi x) - 2\cos(2\pi x) - 2\sin(2\pi x)$.

(b) $L=1$. Na série de Fourier de f, $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\right)$, tem-se que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\sin(10\pi x)\,dx = b_{10} \underset{\substack{\uparrow \\ (k=5 \text{ na série dada})}}{=} -2\cdot\frac{10}{10^2-1} = -\frac{20}{99}.$$

(c)



Para $x=1$; sendo $S(x)$ a soma de Fourier de f, vem

$$S(1) = \frac{f(1^-)+f(1^+)}{2} = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

5. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua, $f\geq 0$, $f(0)=0$.

Seja $y(t)$ a sol. do PVI $\begin{cases} y''-y=f(t) \\ y(0)=y'(0)=0\end{cases}$, e veja-se que é crescente.

Sol. homog. $y''-y=0$; eq. caract.: $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 1$

Sol. geral da homog.: $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$.

Pelo MVC, procure-se a sol. do PVI dado.

As sol. da eq. não homogénea $y''-y=f(t)$ são da forma $y = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{-t}$, onde as funções $c_1(t), c_2(t)$ são de classe C^1 e satisfazem

$$\begin{cases} c_1' e^t + c_2' e^{-t} = 0 \\ c_1' e^t - c_2' e^{-t} = f(t). \end{cases}$$

Para $t=0$, usando as C.I., vem:

$y(0)=0 \Leftrightarrow c_1(0)+c_2(0)=0$ (1)

(3) $y'(0) = \underbrace{(c_1' e^t + c_2' e^{-t})}_{=0 \text{ pelo MVC}}\Big|_{t=0} + (c_1 e^t - c_2 e^{-t})\Big|_{t=0} = c_1(0)-c_2(0)=0$ (2)

De (1) e (2), $\begin{cases} c_1(0)+c_2(0)=0 \\ c_1(0)-c_2(0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow c_1(0)=c_2(0)=0.$

Por outro lado, use-se agora o MVC para expressar a sol. do PVI dado: Vem

$$2c_1' = \underbrace{f(t)}_{\geq 0} \Rightarrow c_1(t) = \frac{1}{2}\int f(t)\,dt \geq 0 \quad , \forall t \geq 0$$

(pois $c_1(t) \uparrow$ e $c_1(0)=0$)

$$2c_2' = -\underbrace{f(t)}_{\geq 0} \Rightarrow c_2(t) = -\frac{1}{2}\int f(t)\,dt \leq 0 \quad , \forall t \geq 0$$

(pois $c_2(t) \downarrow$ e $c_2(0)=0$).

Logo, de (3)

$$y'(t) = \underbrace{c_1(t)}_{\geq 0}e^{t} - \underbrace{c_2(t)}_{\leq 0}e^{-t} \geq 0 \quad , \forall t \geq 0 \Rightarrow$$

$y(t)$ é crescente em $[0,+\infty[$.

6. Para a eq. das ondas dada, tem-se $c=3$ e $L=\pi$. Sabe-se que são soluções as funções dadas pela série de somas das funções da forma (4) no enunciado, ou seja,

(2) $$u(t,x) = \sum_{n\geq 1} \sin(nx)\left(a_n \cos(3nt) + b_n \sin(3nt)\right)$$

Com condições iniciais
$$u(0,x) = x(\pi^2-x^2) =: f(x) \quad (\mathrm{I})$$
$$u_t(0,x) = 1 =: g(x) \quad (\mathrm{II}) \quad , 0 \leq x \leq \pi,$$

Terá de ser:

(I) $u(0,x) = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(nx) = x(\pi^2-x^2)$,

Pelo que (a_n) são os coeficientes da série de senos da função $f(x)=x(\pi^2-x^2)$ em $[0,\pi]$.

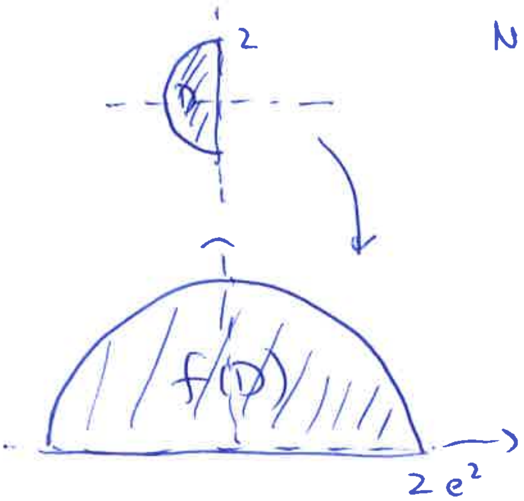
(II) De (2), derivando em ordem a t,

$$u_t(t,x) = \sum_{n\geq 1} \sin(nx)\left(-3a_n \sin(3nt) + 3b_n \cos(3nt)\right)$$

$$\Rightarrow u_t(0,x) = \sum_{n\geq 1} 3b_n \sin(nx) = 1 \quad \text{em } [0,\pi].$$

Logo, $(3b_n)$ são os coeficientes da série de senos da função $g(x)=1$ em $[0,\pi]$.

7.



Na forma polar, $D=\{re^{i\theta} : 0\le r\le 2,\ \theta\in[\pi/2, 3\pi/2]\}$

Para $z=re^{i\theta}\in D$,

$$f(z)=f(re^{i\theta})=-i\,re^{i\theta}e^{r}=$$
$$=e^{-i\pi/2}\,re^{i\theta}e^{r}=\underbrace{re^{r}}_{\rho}\,e^{i\overbrace{(\theta-\pi/2)}^{\omega}}$$
$$=\rho e^{i\omega}\text{, com } \rho=re^{r} \text{ e } \omega=\theta-\pi/2\in[0,\pi]$$

Logo, $f(D)=\{\rho e^{i\omega} : 0\le re^{r}\le 2e^{2},\ \omega\in[0,\pi]\}$.

(b) Com $z=x+iy$,

$$f(z)=\bar{z}-|z|^2+i(\operatorname{Im} z)^2-1/2(\operatorname{Re} z)^3=$$
$$=x-iy-(x^2+y^2)+iy^2-1/2\,x^3=$$
$$=\underbrace{x-x^2-y^2-1/2\,x^3}_{u}+i\underbrace{(y^2-y)}_{v}$$

$$J(u,v)=\begin{bmatrix} 1-2x-\frac{3}{2}x^2 & -2y \\ 0 & 2y-1 \end{bmatrix}.$$

Eq. de C.-R. $\begin{cases} 1-2x-3/2\,x^2=2y-1 \\ 0=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x-3/2\,x^2=0 \\ y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+4x-4=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{3}=\frac{-2\pm 4}{3}\Leftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{2}{3}$

Logo, f tem derivadas nos pontos $z=-2$ e $z=\frac{2}{3}$.

A derivada, quando existe, é dada por

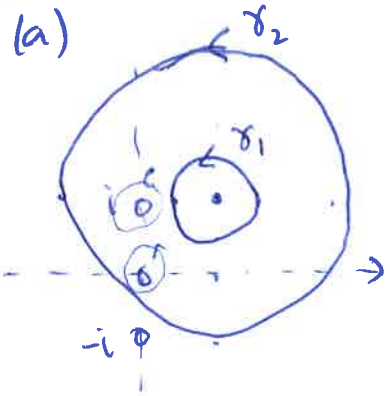
$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Logo, $f'(-2)=1+4-\frac{3}{2}\cdot 4=5-6=-1$

e $f'\left(\frac{2}{3}\right)=1-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=1-\frac{6}{3}=1-2=-1.$

8.

(a)



Sejam γ_1, γ_2 as circunferências com centro em $1+i$ e raios $r_1 = 1/2$, $r_2 = 2$, respec.

Seja $f(z) = \dfrac{e^{z+2i}}{z^2(z^2+1)}$.

Tem-se $z^2(z^2+1) \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0 \wedge z^2 \neq -1 \Leftrightarrow z \neq 0$ e $z \neq \pm i$

$\therefore$ f é holomorfa em $D \setminus \{0, i, -i\}$

Como as 3 singularidades estão no ext γ_1, então existe um simplesmente conexo, que contém γ_1, onde f é holomorfa. Pelo T. Cauchy, tem-se

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0.$$

Para γ_2, tem-se que $0, i \in \text{int}\,\gamma_2$ e $-i \in \text{ext}\,\gamma_2$. Pelo TCMC e FIC (incluindo FIC para a 1ª derivada), para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{C_\varepsilon(0)} f(z)\,dz + \int_{C_\varepsilon(i)} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{C_\varepsilon(0)} \frac{\left(e^{z+2i}/(z^2+1)\right) = f_1}{z^2}\,dz + \int_{C_\varepsilon(i)} \frac{\frac{e^{z+2i}}{z^2(z+i)}}{z-i}\,dz =$$

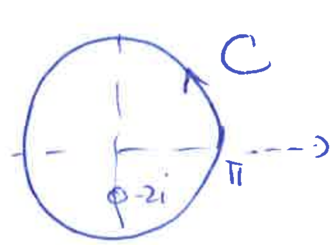
$$= 2\pi i \left(\frac{e^{z+2i}}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=0} + 2\pi i \left(\frac{e^{z+2i}}{z^2(z+i)}\right)\Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \left.\frac{e^{z+2i}(z^2+1) - e^{z+2i}\cdot 2z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=0} + 2\pi i\,\frac{e^{3i}}{-2i} =$$

$$= 2\pi i\, e^{2i} - \pi e^{3i} = 2\pi i(\cos 2 + i \,\text{sen}\, 2) - \pi(\cos 3 + i \sin 3)$$

$$= -\pi(\cos 3 + 2\sin 2) + i\pi(2\cos 2 - \sin 3).$$

(b) $I = \int_{|z|=\pi} \underbrace{(z+2i)^3 \cos\left(\frac{2i}{z+2i}\right)}_{f(z)} dz$



$f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$.

Pelo T. Resíduos, com $-2i \in \operatorname{int} C$, vem

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -2i).$$

Calcule-se $\operatorname{Res}(f,-2i)$ através da série de Laurent.
(Com efeito, $-2i$ é uma singularidade essencial.)
Use-se para isso o desenvolvimento em s. Taylor de $\cos z$. Vem

$$\cos\left(\frac{2i}{z+2i}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{(2i)^{2n}}{(z+2i)^{2n}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\overbrace{(-1)^n (i)^{2n}}^{=1} \cdot 2^{2n}}{(2n)!\,(z+2i)^{2n}}$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z+2i)^{2n-3}} = ⊛$$

(a fazer $2n-3=1 \Leftrightarrow n=2$ aqui)

~~com $2n-3=1 \Leftrightarrow n=\frac{4}{2}=2$, obtém~~

$$= (z+2i)^3 + 2(z+2i) + \frac{2^4}{4!}\frac{1}{z+2i} + \cdots$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,-2i) = a_{-1} = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3} \Rightarrow I = 2\pi i \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3} i$.

9. (a) B
   (b) A
   (c) A

10. Seja f holomorfa em $B^*_\delta(z_0)$.

($\Rightarrow$) Se z_0 é um pólo de ordem m ($m \in \mathbb{N}$), por definição (de pólos), vem que a série de Laurent de f em $B^*_\delta(z_0)$ tem a forma

$$f(z) = a_{-m}(z-z_0)^{-m} + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

com $a_{-m} \neq 0$.

Assim

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = \lim_{z\to z_0} \Big[a_{-m} + \dots + \underbrace{a_{-1}(z-z_0)^{m-1}}_{\to 0} + \underbrace{a_0 (z-z_0)^m}_{\to 0} + \dots\Big]$$

$= a_{-m} \neq 0$

($\Leftarrow$) Suponha-se agora que

$$\exists \lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) := \ell \neq 0.$$

Então a função

$$g(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & , z \in B_\delta^*(z_0) \\ \ell & , z = z_0 \end{cases}$$

é holomorfa em $B_\delta(z_0)$, pelo Teorema do Prolongamento Analítico. Assim, g tem desenvolvimento em série de Taylor,

$$g(z) = (z-z_0)^m f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n (z-z_0)^n,$$

c/ $g(z_0) = b_0 = \ell \neq 0$.

Logo em $B_\delta^*(z_0)$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} = b_0 (z-z_0)^{-m} + b_1 (z-z_0)^{-m+1} + \dots,$$

pelo que f tem um pólo de ordem m em z_0.