1. ESTUDO DE ALGUNS MODELOS PROBABILÍSTICOS

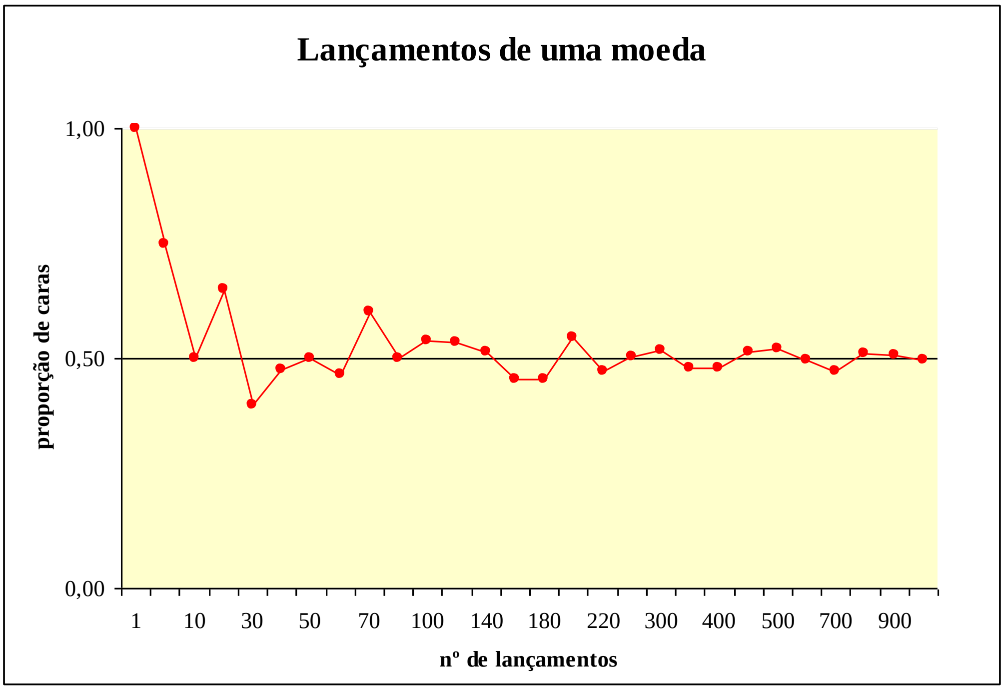
1.1 INTRODUÇÃO

A probabilidade é atribuída a "acontecimentos" que estão associados a experiências com as seguintes características:

- o resultado individual é imprevisível
- são conhecidos todos os possíveis resultados
- a experiência pode ser repetida em idênticas circunstâncias

e que designamos por **experiências aleatórias**.

Nos fenómenos aleatórios apesar de serem imprevisíveis os resultados individuais está presente uma regularidade ao longo de um grande número de repetições da experiência. É o que acontece por exemplo, quando se lança uma moeda equilibrada. Há somente duas possibilidades "cara" ou "coroa". Na figura seguinte encontra-se o resultado de lançamentos de uma moeda de 1 a 1000 e as respectivas frequências relativas (proporção) de "cara" em cada série de lançamentos.



A proporção de "caras" é muito variável ao princípio mas vai estabilizando à medida que se aumenta o número de lançamentos. Esta proporção tende a estabilizar em torno do valor 0.5 ao qual chamamos probabilidade de "cara". Esta experiência traduz a noção frequencista de probabilidade segundo a qual:

Probabilidade de um resultado de uma experiência aleatória é o limite para que tende a proporção de vezes que esse resultado aparece, numa longa série de repetições da experiência.

Note-se que quando se lança uma moeda, embora sendo desconhecido cada resultado individual sabe-se que os possíveis resultados são "cara" e "coroa". Além disso, a experiência descrita na figura anterior diz-nos que a probabilidade de "cara" e consequentemente "coroa" é 1/2. De facto, se supusermos que a moeda é equilibrada havendo somente duas possibilidades é de prever que a probabilidade seja igual para cada uma delas e igual a 0.5. Estamos mum caso de "equiprobabilidade" dos resultados o que nem sempre acontece. Note-se que temos aqui a base de qualquer modelo probabilístico.

Espaço Amostra Ω - conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Acontecimento é um resultado ou conjunto de resultados de uma experiência aleatória. Isto é, um acontecimento é um subconjunto do espaço amostra.

Espaço de probabilidade (modelo de probabilidade) consiste num espaço amostra Ω, uma família de acontecimentos e uma lei de probabilidade que a cada acontecimento atribui uma probabilidade.

O espaço amostra pode ser muito simples (formado por um nº finito de elementos) ou mais complexo (nº infinito numerável de elementos ou mesmo infinito não numerável). São exemplos disso o espaço amostra da experiência anterior

1) $\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$

Pensemos agora na experiência que consiste em contar o nº de chamadas telefónicas que chegam à central da FCUL entre o período das 10h às 11h, então o espaço amostra associado a esta experiência é

2) $\Omega = \{0,1,2,3,...,100,...\}$

Ou ainda retomando os dados referentes ao tempo de vida de rádios em u.t.

3) $\Omega = / R^{+}$

A noção frequencista de probabilidade baseia-se numa forma experimental de definir probabilidade. No entanto, a probabilidade de um acontecimento é uma função matemática que a cada acontecimento atribui um número real e satisfaz um conjunto de propriedades ou axiomas. Esta axiomática das probabilidades é devida ao matemático russo Kolmogorov e é por isso conhecida por

1.2 A AXIOMÁTICA DE KOLMOGOROV

Axiomática de Kolmogorov:

A1) $\forall A, \quad P(A) \geq 0$

A2) $P(\Omega) = 1$

A3) $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots : A_i \cap A_j = \varnothing$, então $P(\mathrm{A}_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

A partir da axiomática podemos obter várias propriedades da função **probabilidade**, que são de grande utilidade para calcular a probabilidade de acontecimentos mais complexos.

Consequências da axiomática:

I- $A, B \in \Omega, \quad \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ **Regra da Adição**

Dem:

$$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \overset{A3}{\Rightarrow} P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P((A \cap B))$$

$$B = (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \overset{A3}{\Rightarrow} P(B) = P(B \setminus (A \cap B)) + P(A \cap B)$$

II- $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

e portanto segue-se que:

III- $\forall A, 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (A \subseteq \Omega)$

IV- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Exercício: Escolheu-se aleatoriamente uma mulher americana entre os 25 e os 29 anos. O gabinete de recenseamento diz-nos que as probabilidades de escolhermos uma mulher com cada um dos estados civis, solteira, casada, viúva ou divorciada são respectivamente (probabilidades calculadas usando a teoria frequencista):

Estado civil	Solteira	Casada	Viúva	divorciada
Probababilidade	0.352	0.577	0.003	0.068

a) Será que este modelo de probabilidade satisfaz a axiomática?

b) Qual a probabilidade de que uma mulher não seja casada?

Resolução:

a) Note-se que Ω={solteira, casada, viúva, divorciada} então a soma das probabilidades de cada estado deve ser igual a 1.

$$0.352+0.577+0.003+0.068=1$$

b) Por outro lado, usando a regra da adição tem-se

P{não casado}=P{solteira}+P{viúva}+P{divorciada}=0.423

ou ainda pela propriedade IV, P{não casado}=1-P{casado}=1-0.577=0.423.

1.3 PROBABILIDADE CONDICIONAL E ACONTECIMENTOS INDEPENDENTES

Acontecimentos independentes

Exemplo: Um casal tinha planeado ter 4 filhos. Mas tiveram 4 raparigas e tentaram ter um rapaz, no entanto, a 5ª, 6ª e 7ª filhas foram também raparigas. Eles pensam que agora terão maior chance de ter um rapaz à 8ª vez. Será verdade?

Claro que não, estamos num caso de independência, isto é, a probabilidade de nascer rapaz ou rapariga em cada nascimento mantém-se constante e igual a 0.5 e inalterada pelo que aconteceu em nascimentos anteriores.

Assim, P(8º filho ser rapaz se o casal tem 7 raparigas)= 0.5

Esta probabilidade que acabámos de calcular corresponde à noção de probabilidade condicional. Isto é, sabendo que se realizou um acontecimento B, neste caso"o casal tem 7 raparigas", pretendemos calcular a probabilidade de realização de outro acontecimento designado por A (o 8º filho ser rapaz).

Definição 1: A probabilidade condicional de um acontecimento A dado que se realizou B, é igual a

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

desde que P(B)>0.

Verificámos que no caso do exemplo anterior a probabilidade do acontecimento A se mantém igual a 0.5, apesar da realização de B.

Tal como no lançamento de uma moeda a probabilidade de "cara" é sempre igual a 0.5 independentemente do número de cara obtidas em anteriores lançamentos. A moeda não tem *memória*.

Definição 2: Dois acontecimentos são **independentes** se a realização de um deles não modifica a probabilidade de realização do outro.

Ou seja, formalmente $P(A/B)=P(A)$ donde se tem, atendendo à definição 2

Definição 3: Dois acontecimentos A e B são **independentes** sse

$$P(A\cap B)=P(A)P(B) \tag{2}$$

A esta regra também se chama **regra da multiplicação.**

Exercício 1: Num voo de Tóquio para Lisboa a minha bagagem vai ser transferida três vezes. Se a probabilidade de cada uma das transferências não ser feita a tempo for $\frac{4}{10}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{1}{10}$ respectivamente, por ordem de transferência, qual a probabilidade de a minha bagagem não chegar?

<u>Resolução</u>: P(a bagagem não chegar)=1-P(bagagem chegar)=1-$\frac{6}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}$, este cálculo é feito utilizando a propriedade (IV) $P\left(A^c\right)=1-P(A)$ -e a independência dos acontecimentos.

Exercício 2: Para se deslocar de casa ao emprego, o sr. Xis tem apenas três meios de transporte distintos à sua escolha, T1, T2 e T3. Sabe-se que a probabilidade de

i) chegar a horas ao emprego é 4/10

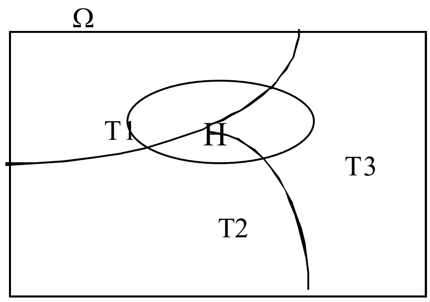
ii) chegar atrasado, sabendo que utilizou T1 é 8/10

iii) chegar atrasado, sabendo que utilizou T2 é 1/2

iv) chegar a horas, sabendo que utilizou T3 é 3/5

v) utilizar T2 e T3 é a mesma.

Calcule a probabilidade de Xis utilizar T1.



Defina-se o acontecimento H-"chegar a horas", então as probabilidades referidas nas alíneas anteriores podem escrever-se:

P(H)=4/10: P(H^c/T1)=8/10; P(H^c/T2)=1/2; P(H/T3)=3/5; P(T2)=P(T3)=x

$$P(H) = P(\{(H \cap T_1) \cup (H \cap T_2) \cup (H \cap T_3)\}) =$$

$$= P(T_1)P(H / T_1) + P(T_2)P(H / T_2) + P(T_3)P(H / T_3) =$$

$$= (1-2x)\frac{2}{10} + \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = \frac{4}{10} \Leftrightarrow 2 - 4x + 5x + 6x = 4 \Leftrightarrow 7x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7}$$

onde $1 = P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) = P(T_1) + 2\text{x} \Leftrightarrow P(T_1) = 1 - 2x$

E portanto P(T_1)=3/7.

O resultado que utilizamos para escrever P(H) é conhecido pelo nome de Teorema da Probabilidade Total. Note-se que o espaço de resultados se pode escrever como a união de subconjuntos disjuntos, neste caso T_1,T_2 e T_3. Estes subconjuntos constituem o que se costuma chamar uma partição de Ω. Formalmente podemos enunciar este resultado para um número n de elementos da partição.

TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL: Sejam

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ subconjuntos de Ω tais que $C_i \cap C_j = \emptyset$ e $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = \Omega$, isto é, a família $\{C_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, constitui uma partição de Ω. Suponhamos ainda que $P(C_i) > 0,\ i = 1, \ldots, n$ e seja $A \subseteq \Omega$, então

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) P(A / C_i) \tag{3}$$

Exercício 3: Usando os dados do exercício anterior calculemos agora a probabilidade do senhor Xis ter usado o transporte T_1, sabendo que chegou a horas ao emprego.

A probabilidade de chegar a horas ao emprego é conhecida e positiva e $\{T_1, T_2, T_3\}$ constitui uma partição de Ω, portanto, estamos em condições de utilizar o teorema de Bayes vindo

$$P(T_1 / H) = \frac{P(T_1)P(H / T_1)}{P(H)} = \frac{P(T_1)P(H / T_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(T_i)P(H / T_i)} = \frac{\frac{3}{7}\frac{2}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{3}{14}\left(\neq \frac{3}{7}\right)$$

A probabilidade de T_1 foi modificada pela realização do acontecimento H. À $P(T_1/H)$ chama-se probabilidade *a posteriori* de T_1, e por oposição, a $P(T_1)$ chama-se probabilidade *a priori* de T_1.

De uma forma geral podemos enunciar o seguinte resultado:

TEOREMA DE BAYES:

Seja $C_1, C_2, \ldots, C_n$ uma partição de Ω, com $P(C_i) > 0,\ i = 1, \ldots, n$ e A um acontecimento com $P(A) > 0$, então

$$P(C_i / A) = \frac{P(C_i)P(A / C_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(C_j)P(A / C_j)} \qquad i = 1, \ldots, n \tag{4}$$