Teste de Análise Matemática III/Cálculo Diferencial e Integral III

10 Novembro 2018 - duração 1h30m

Indique a sua versão do teste na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.

Versão A

1. (a) Resolva o PVI $y' = \dfrac{3}{t}y + t^4e^{2t} - 4t^2, y(1) = 4e^2$, para $t > 0$.

   (b) Resolva a EDO $y' = \frac{6(1+y^3)}{ty^2}$ para $t > 0$, indicando os intervalos de definição das soluções.

   (c) Encontre a solução geral da EDO $y'' + y = 4\cos^2 t$.

2. Determine a solução geral do sistema $x' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} x$.

3. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Existe uma solução $y(t)$ da EDO $y'' - 4y' + 5y = 2te^{2t}$ da forma (onde $a, b \in \mathbb{R}$):
   A: $y(t) = e^{2t}\cos t + (at + b)e^{2t}$. B: $y(t) = e^{2t}\cos t + ae^{2t}\sin t + be^{2t}$. C: $y(t) = e^{-2t} + t(at + b)e^{2t}$.

   (b) A mudança de variáveis $u = \frac{y}{t}$ transforma a EDO $2\frac{y}{t}y' - (\frac{y}{t})^2 + 1 = 0$ em:
   A: $2uu' = 1 - u^2$. B: $2uu' = (1 - u^2)/t$. C: $2uu' = -(1 + u^2)/t$.

   (c) As trajectórias $y = y(x)$ ortogonais à família de curvas $y = ce^x$ satisfazem a EDO
   A: $y' = -y^{-1}$. B: $y' = -e^{-x}y$. C: $y' = -e^{-x}$.

   (Nota: cada resposta correcta = $0,7$ val., cada resposta errada = $-0,2$ val.)

4. (a) Seja $-1 - \cos(\frac{\pi}{2}x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin(\frac{n\pi}{2}x)$ a série de Fourier de uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e 4-periódica. Calcule:
   (i) $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$; (ii) o polinómio de Fourier P_3 de ordem 3 de g e a norma quadrática de P_3 em $[-2, 2]$.

   (b) Seja $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e sejam a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, os coeficientes da Fourier de f. Prove que

$$\int_0^{\pi} (f(x) - f(-x))^2\,dx = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

FIM

Cotações propostas: 4 + 1,9 + 2,1 + 2 (Total: 10 valores)

Série de Fourier de $f \in SC([-L, L])$: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Identidade de Parseval: para $f \in SC([-L, L])$, $\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\right)$.