Métodos Matemáticos da Física — 2014/15

Teste 1 — 28-03-2015

1.a) Considere a equação de Schrödinger no intervalo $x \in [0, \ell]$,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; .$$

Encontre pelo método de separação de variáveis a solução geral da equação, $u(t, x)$, que satisfaz as condições fronteira: $u(t, 0) = 0, \;\; u(t, \ell) = 0$.

b) Determine a solução da equação de Schrödinger no intervalo $x \in [0, \pi]$ sujeita à condição inicial,

$$u(0, x) = \sin x + 3 \, \sin 3x \; .$$

2. Considere as funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$, onde está definido o produto interno de função peso $\rho(x) = 1$.

a) Mostre que as funções $y_n(x)$ são ortogonais entre si e calcule o produto interno $\langle y_n | y_n \rangle$.

b) Seja uma função $u(x)$ expandida numa série de funções, $u(x) = \sum_n c_n \, y_n(x)$. Demonstre como se podem calcular os coeficientes c_n dessa série.

c) Determine o integral

$$\int_{-\ell}^{\ell} |u(x)|^2 \, dx$$

em termos dos coeficientes c_n definidos na alínea anterior.

3. Seja a função definida no intervalo $x \in [-\ell, \ell]$ como

$$u(x) = \Theta(x - a) = \begin{cases} 0 \, , & -\ell \leq x < a \\ 1 \, , & a < x \leq \ell \end{cases} \quad .$$

a) Utilizando os resultados do exercício 2. calcule os coeficientes c_n da série de Fourier de $u(x)$:

$$u(x) = \sum_n c_n \, e^{i\,n\,\pi\,x/\ell} \; .$$

b) Diga justificando quais os valores da série de Fourier nos pontos $x = -\ell$, $x = a$, $x = \ell$.