Resolução do Exame de 23/01/2018 (AM3 - CD3)

1.(a) $y' + (\sin t - \frac{1}{t})y = 6t \sin t$, $y(\pi) = 3\pi$.

A EDO é linear de 1ª ordem; procure-se um factor integrante: com $a(t) = \sin t - \frac{1}{t}$, $A(t) = -\cos t - \log t$ é uma primitiva de $a(t)$, para $t>0$. Um factor integrante será

$$e^{A(t)} = e^{-\cos t} \cdot \frac{1}{t} \quad (t>0).$$

Multiplicando a eq. dada por $e^{A(t)}$, obtém-se

$$\left(y e^{-\cos t} \cdot \frac{1}{t}\right)' = 6 \cancel{t} \cdot \sin t \cdot \frac{1}{\cancel{t}} \cdot e^{-\cos t} \quad (t>0)$$

Integrando em ambos os lados,

$$y e^{-\cos t} \frac{1}{t} = 6 e^{-\cos t} + C \iff y = 6t + C e^{\cos t} \cdot t \quad (t>0),$$

$C \in \mathbb{R}$.

Com C.I $y(\pi) = 3\pi$, vem

$$3\pi = 6\pi + C e^{-1} \pi \iff 3-6 = C e^{-1} \iff C = -3e.$$

Logo, a solução pretendida é

$$y = 6t - 3e\, t\, e^{\cos t} \iff y = 3t\left(2 - e^{1+\cos t}\right), \text{ em }]0,+\infty[.$$

(b) (1) $y' = 16 - y^2$. O domínio desta EDO é $\mathbb{R}^2$.

Como $16 - y^2 = (4-y)(4+y)$, $y \equiv 4$ e $y \equiv -4$ são soluções em $\mathbb{R}$ da EDO dada (são os pontos de equilíbrio).

Para soluções distintas y, pelo TEU tem-se que $y(t) \neq 4$ e $y(t) \neq -4$, $\forall t$ (uma vez que os gráficos de soluções não se cruzam).

Assim, para $y \neq \pm 4$, vem

$$(1) \iff \frac{y'}{(4-y)(4+y)} = 1.$$

Pelo Mét. dos Coef. Indet., procurem-se constantes A, B tais que

$$\frac{A}{4-y} + \frac{B}{4+y} = 1 \iff A(4+y) + B(4-y) = 1$$

$y=4$: $8A = 1 \iff A = 1/8$

$y=-4$: $8B = 1 \iff B = 1/8$

Obtém-se então

$$y'\left[\frac{1}{4-y} + \frac{1}{4+y}\right] = 8 \iff$$

$$\iff -\log|4-y| + \log|4+y| = 8t + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\iff \log\left|\frac{4+y}{4-y}\right| = 8t + C \iff \frac{4+y}{4-y} = K e^{8t}, \text{ com } K = \pm e^{C} \ (\in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

Explicitando agora a solução $y=y(t)$:

$$4+y = Ke^{8t}(4-y) \Leftrightarrow (1+Ke^{8t})y = 4(Ke^{8t}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{4(Ke^{8t}-1)}{1+Ke^{8t}}$$ em intervalos I onde $1+Ke^{8t}\neq 0$,

i.e., $e^{8t}\neq -\frac{1}{K} \Leftrightarrow t\neq \frac{1}{8}\log(-\frac{1}{K}) = -\frac{1}{8}\log(-K)$ para $K<0$.

Assim, para além das soluções $y=4$ e $y=-4$ em $\mathbb{R}$, têm-se as soluções dadas por

$$y = \frac{4(Ke^{8t}-1)}{1+Ke^{8t}}$$ em $\mathbb{R}$ se $K>0$

em $]-\infty, -\frac{1}{8}\log(-K)[$ e em $]-\frac{1}{8}\log(-K), +\infty[$ se $K<0$.

(c) $\underbrace{2xy^2-2xy}_{u} + \underbrace{(2x^2y+2y-x^2)}_{v}\, y' = 0$

O domínio da EDO é $\mathbb{R}^2$.

Como a EDO é exacta (de facto $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$), procure-se um potencial Φ de (u,v):

$$\nabla\Phi = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2xy^2-2xy \Rightarrow \Phi = x^2y^2-x^2y+\varphi(y) \quad (1) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^2y+2y-x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Derivando (1) em ordem a y e igualando a (2), vem que

$$\cancel{2x^2y} - \cancel{x^2} + \varphi'(y) = \cancel{2x^2y} + 2y - \cancel{x^2} \Leftrightarrow \varphi'(y) = 2y \Leftrightarrow \varphi(y) = y^2 + c.$$

Então

$$\Phi(x,y) = x^2y^2 - x^2y + y^2$$ é <u>um</u> potencial de (u,v) em $\mathbb{R}^2$

e as soluções de EDO $u+v\,y'=0$ são dadas na forma <u>implícita</u> por

(3) $\quad x^2y^2 - x^2y + y^2 = C$, C constante.

Com a C.I. $y(0)=-1$, substituindo em (3) vem que $1=C$; logo, na forma implícita, a solução pretendida é dada por $x^2y^2-x^2y+y^2=1$.

Como se trata de uma eq. de grau 2 em y, facilmente se explicita y:

$$(x^2+1)y^2 - x^2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 \pm\sqrt{x^4+4(1+x^2)}}{2(1+x^2)} = \frac{x^2\pm\sqrt{(x^2+2)^2}}{2(1+x^2)} = \frac{x^2\pm(x^2+2)}{2(1+x^2)}$$

donde se deduz que

$$y = \frac{x^2+(x^2+2)}{2(1+x^2)} = \frac{2x^2+2}{2(1+x^2)} = 1$$ (o que não satisfaz a C.I $y(0)=-1$)

ou

$$y = \frac{x^2-(x^2+2)}{2(1+x^2)} = -\frac{2}{2(1+x^2)} = -\frac{1}{1+x^2}$$ (que satisfaz a C.I $y(0)=-1$)

A solução pretendida é $y = -\frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. $x' = Ax$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Procurem-se os val. pp. de A: $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = -4 \Leftrightarrow \lambda-1 = \pm 2i \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2i$.

Com $\lambda = 1+2i$, procure-se um vector pp associado:

$Av = \lambda v$, c/ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq 0$: $\begin{cases} v_1 - v_2 = (1+2i)v_1 \\ 4v_1 - v_2 = (1+2i)v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_2 = 2iv_1 \\ - \end{cases}$

Por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ é um vector pp. associado a λ, pelo que se obtém uma sol. complexa dada por

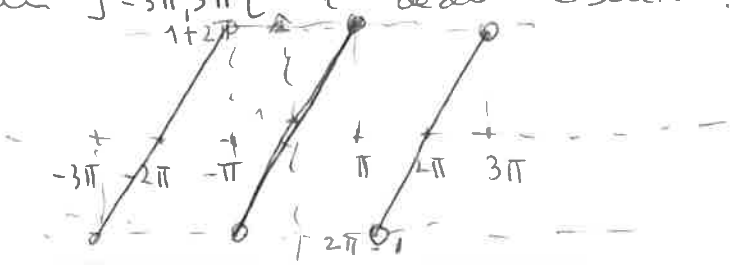
$$e^{(1+2i)t}v = e^t e^{2it}\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} = e^t(\cos(2t)+i\sin(2t))\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{e^t\begin{bmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{bmatrix}}_{X_1(t)} + i\,\underbrace{e^t\begin{bmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{bmatrix}}_{X_2(t)}$$

É sabido que $X_1(t)$, $X_2(t)$ são duas soluções 0.i, pelo que uma m.f.s. é dada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t\cos(2t) & e^t\sin(2t) \\ 2e^t\sin(2t) & -2e^t\cos(2t) \end{bmatrix}$$

3. (a) $1+f' = 1+2x$ em $]-\pi,\pi[$, e $1+f'$ é 2π-periódico. O seu gráfico em $]-3\pi,3\pi[$ é dado abaixo:



Sendo $S(x)$ a soma da série de Fourier de f', tem-se

$$S(-15\pi) \overset{f' \, 2\pi\text{-per.}}{=} S(\pi) = \frac{f_e'(\pi)+f_d'(\pi)}{2} = 0$$

$$S\left(\frac{5\pi}{2}\right) = S(2\pi + \pi/2) \overset{f' \, 2\pi\text{-per.}}{=} S(\pi/2) \overset{f' \text{ ct. em } \pi/2}{=} f'(\pi/2) = \pi.$$

(b) Usando a identidade de Parseval:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2\right),$$ com $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$ $(b_n = 0)$.

Vem $\|f\|^2 = 2\int_0^{\pi} x^4\,dx = \frac{2}{5}\pi^5$ (1)

e $\pi\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n^2\right) = \pi\left[\frac{4\pi^4}{\cancel{2}\cdot 9} + \sum_{n\geq 1}\frac{16}{n^4}\right]$ (2).

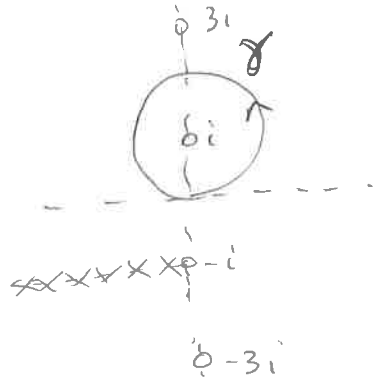
Igualando (1) e (2)

$$\cancel{\pi}\left(\frac{2\pi^4}{9} + 16\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\right) = \frac{2}{5}\pi^{\cancel{5}\,4} \iff \cancel{16}^{\,8}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{\cancel{2}}{5} - \frac{\cancel{2}}{9}\right)$$
(9) (5)

$$\iff \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{9-5}{45}\right) = \frac{\pi^4}{\cancel{8}_{\,2}}\cdot\frac{\cancel{4}}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

4. (a) C ; (b) B ; (c) B.

5. (a) A fç. $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+9}$ é



$z^2+9=0$

$\iff z = \pm 3i$

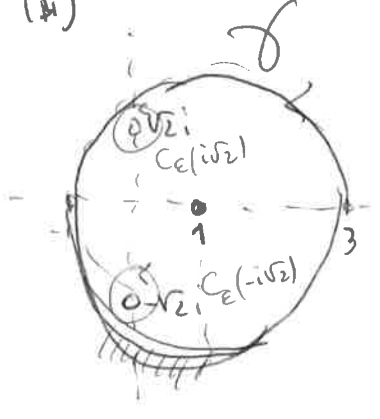
holomorfa em

$$\mathbb{C} \setminus (\{x - i : x \leq 0\} \cup \{3i, -3i\})$$

(Note-se que $z+i$ não pode pertencer a Ox^-!)

Como a curva γ dada por $|z-i| = 1$ está contida num aberto simplesmente conexo onde f é holomorfa, pelo T. de Cauchy tem-se que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

(b)



$f(z) = \frac{3e^{z^2}+1}{z^2+2}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-i\sqrt2, i\sqrt2\}$,

$(z^2 = 2 \iff z = \pm i\sqrt2)$ Os pontos $\sqrt2 i$ e $-\sqrt2 i$ estão ambos no interior da curva, pois

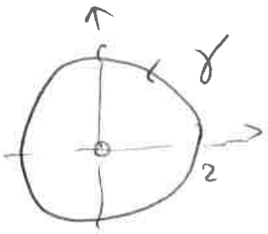
$$|\pm i\sqrt2 - 1| = \sqrt{2+1} = \sqrt3 < 2 = \text{raio da circunferência } \gamma$$

Pelo T. Cauchy para multiplamente conexos, seguido da FIC, ③
tem-se

$$\int_{|z-1|=2} \frac{3e^{z^2}+i}{z^2+2}\,dz \underset{\substack{(\text{para } \varepsilon>0 \\ \text{pequeno})}}{=} \int_{C_\varepsilon(-i\sqrt{2})} \frac{\frac{3e^{z^2}+i}{z-\sqrt{2}i}}{z+\sqrt{2}i}\,dz + \int_{C_\varepsilon(i\sqrt{2})} \frac{\frac{3e^{z^2}+i}{z+\sqrt{2}i}}{z-\sqrt{2}i}\,dz$$

$$\underset{(\text{FIC})}{=} 2\pi i \left\{ \left(\frac{3e^{z^2}+i}{z-\sqrt{2}i}\right)\Bigg|_{z=-\sqrt{2}i} + \left(\frac{3e^{z^2}+i}{3+\sqrt{2}i}\right)\Bigg|_{z=\sqrt{2}i} \right\} =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{3e^{-2}+i}{-2\sqrt{2}i} + \frac{3e^{-2}+i}{2\sqrt{2}i} \right] = 0.$$



(iii) A fc. $f(z)=z^3\cos\left(\frac{2i}{z}\right)dz$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.
Como a singularidade 0 está no interior da curva, pelo T. Resíduos vem que

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0).$$

Como $z=0$ é uma singularidade essencial, calcule-se a_{-1} através da sua série de Laurent: da tabela, tem-se

$$z^3\cos\left(\frac{2i}{z}\right) = z^3\left[1-\left(\frac{2i}{z}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\left(\frac{2i}{z}\right)^4\cdot\frac{1}{4!}+\dots\right]$$

$$= z^3+2z+\frac{2^4}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\dots, \quad \text{pelo que } a_{-1}=\frac{2^4}{4\times3\times2}=\frac{2}{3}$$

Logo $\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}i.$

6. (a) A ; (b) A ; (c) A.

7. (a) $f(z)=e^{iz/2} = e^{\frac{i}{2}[z+\pi-\pi]} = e^{\frac{i}{2}(z+\pi)}\cdot \underbrace{e^{-i\pi/2}}_{=-i} =$

$$= -i\sum_{n\geq0}\frac{\left(\frac{i}{2}(z+\pi)\right)^n}{n!} =$$

$$= -i\sum_{n\geq0}\frac{i^n}{2^n n!}(z+\pi)^n = \sum_{n\geq0}\frac{-i^{n+1}}{2^n n!}(z+\pi)^n, \quad z\in\mathbb{C}.$$

(b) Com $g(z)=\frac{1}{(z-2)^2 z}$, tem-se g holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$

(Podemos então já afirmar, sem recurso à tabela, que o maior anel de convergência da série pedida é $B_2^*(2) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 2\}$)

Tem-se

$$g(z) = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{z-2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\Big[\underbrace{-\left(\frac{z-2}{2}\right)}_{w}\Big]} \underset{\text{(tabela)}}{\overset{(*)}{=}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{(z-2)^2} \cdot \sum_{n \geq 0} \left[-\left(\frac{z-2}{2}\right)\right]^n = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} (z-2)^{n-2}, \text{ em } B_2^*(2).$$

[Para determinar o anel de convergência, poder-se-ia também usar a tabela, pois em $(*)$, a igualdade é válida para $|w| = \left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$ e $z \neq 2$, i.e., para $0 < |z-2| < 2$.].

8.(a) (i) Eq. de C-R. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$. $f = u + iv$ holom. em D "domínio"

Se u é constante vem que $\nabla u = 0 \underset{\text{Eq. C-R}}{\Rightarrow} \nabla v = 0 \underset{D \text{ domínio}}{\Rightarrow} v$ constante.

Se u e v são constantes, obviamente $f = u + iv$ é constante.

(ii) Se $U = e^u \cos v$ é constante, tem-se $\nabla U = 0$, pelo que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} e^u \cos v - e^u \dfrac{\partial v}{\partial x} \sin v = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} e^u \cos v - e^u \dfrac{\partial v}{\partial y} \sin v = 0 \end{cases} \underset{\text{Eq. C-R}}{\Rightarrow} \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} \cos v + \dfrac{\partial u}{\partial y} \sin v\right) e^u = 0 \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} \cos v - \dfrac{\partial u}{\partial x} \sin v\right) e^u = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$ Tem $\det A = 1 \neq 0$, pelo

que se tem $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow u$ constante $\underset{(i)}{\Rightarrow} f$ constante.

<u>outro modo</u>: $U = \operatorname{Re}\left(e^{f(z)}\right)$, $\boxed{F(z) = e^{f(z)}}$ é holomorfa em D.

Por (i), $\boxed{F(z) = e^{u+iv}} = a + ib$ (constante em $\mathbb{C}$) $\Rightarrow$

$e^u = \ln a$ e $v = b \pmod{2\pi}$. Mas, v é <u>contínua</u>, pelo que terá de ser v constante.

(b) Ainda com $F(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv}$, tem-se $|e^{f(z)}| = e^u$ limitada se u é limitada. Como $F(z) = e^{f(z)}$ é inteira, pelo T. <u>Liouville</u> $F = e^f$ é <u>constante</u>. Mas $e^f = \underbrace{e^u \cos v}_{\text{constante}} + i \underbrace{e^u \sin v}_{\text{constante}} \underset{(a)(ii)}{\Rightarrow} f$ <u>constante</u>.