Geometria / Geometria I - Ano lectivo 2018/2019
Folha 2 - Axioma das paralelas e axiomas de medida

1. Diga, justificando, se em cada um dos modelos seguintes de geometria de incidência é válido o axioma R.6 (axioma das paralelas de Playfair).

   (a) O modelo do tetraedro no conjunto $\{A, B, C, D\}$.

   (b) O modelo dos sete pontos e sete rectas no conjunto $\{A, B, C, D, E, F, G\}$.

   (c) O modelo da "soma-nim nula"no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

2. Considere uma geometria onde são válidos todos os axiomas de incidência. Mostre que o axioma das paralelas de Playfair implica a seguinte condição:

   "Se r e s são duas rectas contidas no mesmo plano que não intersectam uma terceira recta t no mesmo plano, então r e s não se intersectam".

3. Considere uma geometria em que são válidos todos os axiomas de incidência e os axiomas R.7 e R.8. Mostre que, se a, b, c, d forem as coordenadas dos pontos colineares A, B, C, D relativamente a uma régua na única recta que os contém, a noção de razão

   $$AB : CD = (a - b) : (c - d)$$

   está bem definida.

4. Considere uma geometria em que são válidos todos os axiomas de incidência e os axiomas R.7 e R.8. Demonstre as seguintes propriedades.

   (a) Sejam A, B, C, D, E pontos de uma recta não todos iguais tais que

   $$AB : CD = x : y \ \text{ e } \ AB : DE = x : z.$$

   Então
   $$AB : CE = x : y + z.$$

   (b) Sejam A, B, C pontos de uma recta, tais que $A \neq C$ e $AB : BC = x : y$. Então
   $$AB : AC = x : x + y \ \text{ e } \ AC : BC = x + y : y.$$

5. Considere uma geometria em que são válidos os axiomas R.1,. . . , R.9. Demonstre as seguintes proposições.

   (a) Sejam r e s duas rectas concorrentes num ponto X. Sejam $A_1, A_2 \in r$, $B_1, B_2 \in s$, todos distintos de X e tais que

   $$XA_1 : XA_2 = XB_1 : XB_2.$$

   Então as rectas A_1B_1 e A_2B_2 são paralelas.

(b) Dados três pontos A, B, C não colineares, existe um único ponto D tal que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Tem-se ainda que D pertence ao mesmo plano que os pontos A, B, C.

(c) Sejam A, B, C, D quatro pontos.

i. Se $[ABCD]$ é um paralelogramo, então a recta AB é paralela à recta CD e a recta AD é paralela à recta BC.

ii. Se a recta AB é paralela à recta CD e a recta AD é paralela à recta BC e A, B, C, D são não colineares, então $[ABCD]$ é um paralelogramo.

6. Seja $[ABCD]$ um paralelogramo não-degenerado. Mostre que, se W é o ponto médio de $[BC]$, então $AW \cap BD = X$, com $DX : XB = 2 : 1$.

7. Sejam A, B, C, D pontos do espaço tais que X, Y, Z, W, os pontos médios dos segmentos de recta $[AB], [BC], [CD], [DA]$ respectivamente, são não colineares. Mostre que $[X, Y, Z, W]$ é um paralelogramo.

8. Sejam r e r' duas rectas concorrentes. Sejam A, B, C três pontos de r e A', B', C' três pontos de r'.

   (a) Mostre que se AB' é paralela a BA' e BC' é paralela a CB', então AC' é paralela a CA'

   (b) Se r e r' forem rectas paralelas, pode garantir que a afirmação da alínea anterior é verdadeira?

9. (*Teorema de Menelau*) Sejam A, B, C três pontos não colineares e seja r uma recta que intersecta a recta BC em X, a recta AC em Y e a recta AB em Z. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2,\ CY : YA = \beta_1 : \beta_2,\ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Mostre que

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0.$$

10. (*Teorema de Ceva*) Sejam A, B, C três pontos não colineares e sejam $X \in BC$, $Y \in AC$ e $Z \in AB$. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ números reais tais que

$$BX : XC = \alpha_1 : \alpha_2,\ CY : YA = \beta_1 : \beta_2,\ AZ : ZB = \gamma_1 : \gamma_2.$$

Mostre que, se as rectas $AX,\ BY,\ CZ$ forem concorrentes num ponto P, então

$$\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2 = 0.$$