Uma resolução do <u>Exame de CDI 3</u>, de 10/01/2019

Versão (A) (Parte I)

1.(a) $y''' + 9y' = 0$

Eq. característica: $\lambda^3 + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda^2+9) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \lambda^2 = -9$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \lor \lambda = \pm 3i$

Base de soluções (reais): $\{1, \cos 3t, \sin 3t\}$

Sol. geral da eq.: $y = c_1 + c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

Para introduzir as condições iniciais dadas, calcule-se y' e y'':

$y' = -3c_2 \sin 3t + 3c_3 \cos 3t$

$y'' = -9(c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t)$

C.I. $\begin{cases} y(\pi) = 1 \\ y'(\pi) = 0 \\ y''(\pi) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \overbrace{\cos(3\pi)}^{=-1} + c_3 \overbrace{\cancel{\sin(3t)}}^{=0} = 1 \\ 3c_2 \underbrace{\cancel{\sin(3\pi)}}_{=0} + 3c_3 \underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} = 0 \\ -9\cdot(c_2 \underbrace{\cos(3\pi)}_{=-1} + c_3 \underbrace{\sin(3\pi)}_{=0}) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - c_2 = 1 \\ c_3 = 0 \\ 9c_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 10/9 \\ c_3 = 0 \\ c_2 = 1/9 \end{cases}$

Solução pedida: $y = \frac{10}{9} + \frac{1}{9} \cos 3t$.

(b) Eq. Bernoulli: $y' - y\left(1 + \frac{1}{2t}\right) - \frac{4}{t^2} y^5 = 0 \quad (t > 0)$.

Para $y \neq 0$, fazendo a MV $\boxed{u = y^{-4}}$, tem-se:

$u' = -4y^{-5} y' =$

$= -4y^{-5}\left[y\left(1+\frac{1}{2t}\right) + \frac{4}{t^2} y^5\right]$

$= -4 \underbrace{y^{-4}}_{=u}\left(1 + \frac{1}{2t}\right) - \frac{16}{t^2} = -u\left(4 + \frac{2}{t}\right) - \frac{16}{t^2}$

$\Leftrightarrow u' + \left(4 + \frac{2}{t}\right) u = -\frac{16}{t^2}$ ← eq. linear de 1ª ordem.

Resolve-se agora esta equação:

$a(t) = 4 + \frac{2}{t}$, $A(t) = 4t + 2\log t \quad (t > 0)$

factor integrante: $e^{A(t)} = e^{4t} \cdot e^{2\log t} = t^2 e^{4t}$.

Multiplicando a eq. linear acima por $t^2 e^{4t}$, obtém-se:

$$\underbrace{t^2 e^{4t} u' + \left(4+\frac{2}{t}\right) t^2 e^{4t} u}_{(t^2 e^{4t} u)'} = -16 \frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}} e^{4t} \Leftrightarrow (t^2 e^{4t} u)' = -16 e^{4t}$$

Primitivando, $t^2 e^{4t} u = -4e^{4t} + C \Leftrightarrow u = \dfrac{-4e^{4t} + C}{t^2 e^{4t}}$ $(C \in \mathbb{R})$

$$= \frac{-4 + Ce^{-4t}}{t^2} = \frac{1}{y^4}$$

Voltando para a eq. original, obtêm-se as soluções ($\neq 0$) dadas por

$$y = \pm \sqrt[4]{\frac{t^2}{Ce^{-4t} - 4}} \quad \text{(em intervalos onde } \underset{t>0}{Ce^{-4t} - 4 > 0}\text{)}.$$

Com a C.I. $y(1) = 1$, vem $1 = +\dfrac{1}{\sqrt[4]{Ce^{-4} - 4}} \Leftrightarrow Ce^{-4} - 4 = 1$

$\Leftrightarrow C = 5e^4$, pelo que a solução é

$$(*) \quad y = \sqrt[4]{\frac{t^2}{5e^{4-4t} - 4}}, \quad \text{para } t > 0 \text{ e}$$

$5e^{4-4t} - 4 > 0 \Leftrightarrow e^{4-4t} > \frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - 4t > \log\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow 4 - \log\left(\frac{4}{5}\right) > 4t$

Logo, a sol. em $(*)$ $\Leftrightarrow t < 1 + \log\left(\frac{5}{4}\right)$

está definida no intervalo $I = \left]0, 1 + \log\left(\frac{5}{4}\right)\right[$.

(c) As trajectórias ortogonais à família de curvas dadas por $y^3(e^{-x} + 3) = c$ deverão, em cada ponto P sobre essas curvas, ter declive igual ao declive do vector $\nabla F(P)$, para $F(x,y) = y^3(e^{-x} + 3)$.

Ora $\nabla F(x,y) = \left(-y^3 e^{-x}, 3y^2(e^{-x} + 3)\right)$, pelo que, para $y \neq 0$, as trajectórias terão de ser soluções da EDO

$$y' = \frac{3y^2(e^{-x} + 3)}{-y^3 e^{-x}} \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{y}(1 + 3e^x).$$

Separando as variáveis, pode agora resolver-se:

$$y'y = -3(1 + 3e^x) \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -3(x + 3e^x) + C$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6(x + 3e^x) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. (a) B ; (b) B ; (c) A

3. (a) $P_2 = \frac{\pi^2}{3} + 2\pi \cos x + 2\pi \sin x + \frac{\pi}{2} \cos(2x) + \pi \sin(2x)$

(b) Com as notações habituais, $L=\pi$ e o coef. de Fourier

$$a_7 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(7x) f(x)\, dx \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(7x) f(x)\, dx = \pi a_7$$

Pela série de Fourier dada, deduzimos que

$$a_7 = \frac{2\pi}{7^2} = \frac{2\pi}{49} \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(7x) f(x)\, dx = \frac{2\pi^2}{49}.$$

(c) Usando a série de Fourier dada, vem que

$$f(2x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2\pi \cos(2nx)}{n^2} + \frac{2\pi \sin(2nx)}{n} \right) \quad \text{em } [-\pi/2, \pi/2]$$

$$f(-2x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2\pi \cos(-2nx)}{n^2} + \frac{2\pi \sin(-2nx)}{n} \right)$$

$$= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \left(\frac{2\pi \cos(2nx)}{n^2} - \frac{2\pi \sin(2nx)}{n} \right)$$

$\Rightarrow$ Para $g(x) = f(2x) + f(-2x)$, a sua série de Fourier é dada pela soma das duas séries anteriores, donde

$$g(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n\geq 1} \frac{4\pi \cos(2nx)}{n^2} \quad \text{em } [-\pi/2, \pi/2].$$

4. (1) $x' = A(t)\, x$, com $A(t)_{n\times n}$ matriz de fç. contínuas e T-periódicas.

a) Como $A(t)$ é T-periódica, tem-se que $A(t+T) = A(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Sendo $\varphi(t)$ uma solução de (1) e definindo $\psi(t) = \varphi(t+T)$, tem-se

$$\psi'(t) = \varphi'(t+T) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ é solução de (1)}}}{=} \overbrace{A(t+T)}^{=A(t)}\, \overbrace{\varphi(t+T)}^{=\psi(t)} = A(t)\, \psi(t),$$

pelo que $\psi(t)$ é solução de (1).

b) Seja $X(t) = [X_1(t) \dots X_m(t)]$ uma m.f.s. de (1).

Qualquer solução $\varphi(t)$ de (1) escreve-se na forma

$$\varphi(t) = c_1 X_1(t) + \dots + c_m X_m(t) \qquad (2)$$

($\Rightarrow$) Se todas as sol. de (1) são T-periódicas, em particular vem que $X_i(T) = X_i(0)$ para $i = 1, \dots, m$, pelo que $X(T) = X(0)$.

($\Leftarrow$) Se $X(T) = X(0)$, isto significa que $X_i(T) = X_i(0)$ para $i = 1, \dots, m$.

Como qualquer sol. de (1) é dada por (2), para provar que todas as soluções são T-periódicas basta mostrar que, se $X_i(T) = X_i(0)$, então as soluções $X_i(t)$ são T-periódicas. $(i = 1, \dots, m)$.

Seja então $X_i(T) = X_i(0)$.

Por (a), a função $Y_i(t) = X_i(t+T)$ é também uma solução de (1). Além disso,

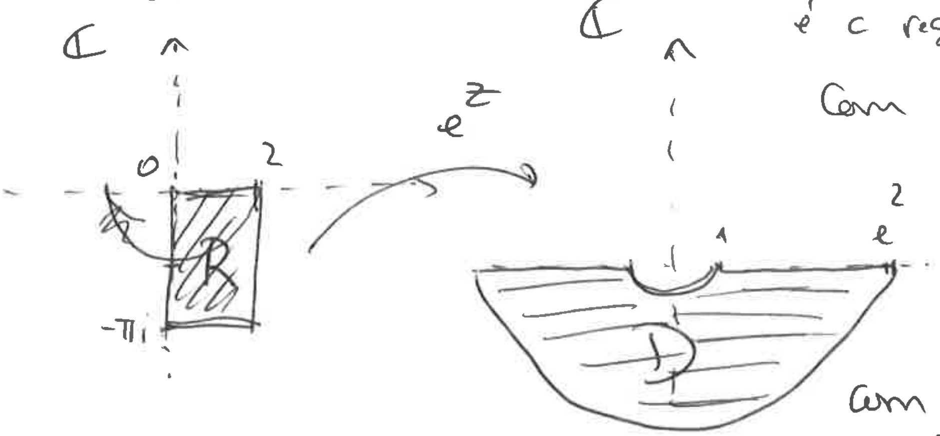
$$Y_i(0) = X_i(T) \underset{\text{hipótese}}{=} X_i(0).$$

Pelo T.E.U., vem que $\boxed{Y_i(t) = X_i(t), \forall t \in \mathbb{R}}$ (porque $Y_i(t)$ e $X_i(t)$ são soluções com a mesma condição inicial para $t=0$), ou seja,

$$X_i(t+T) = X_i(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad //$$

(Parte II)

5. (c)



A imagem de R pela exponencial é a região D na figura:

Com $0 \le x \le 2$, $-\pi \le y \le 0$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = \underbrace{\rho e^{iy}}_{\text{forma polar}},$$

com $\rho = e^x \in [e^0, e^2] = [1, e^2]$

e $\arg(e^z) = y \in [-\pi, 0]$.

5.(b) $f(z) = z - |z|^2 + (1+2i)(\mathrm{Re}\, z)^2 =$ ← para $z = x+iy$

$= x+iy-(x^2+y^2)+(1+2i)x^2 =$

$= x+iy-\cancel{x^2}-y^2+\cancel{x^2}+2ix^2 = \underbrace{x-y^2}_{u} + i(\underbrace{y+2x^2}_{v})$

u, v são de classe C^1.

Assim, existe derivada de f para pontos $z = x+iy$ sse as eq. de Cauchy-Riemann forem satisfeitas nesses pontos.

$$J(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & -2y \\ 4x & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Eq. C-R: } \begin{cases} 1 = 1 \\ 4x = 2y \Leftrightarrow y = 2x. \end{cases}$$

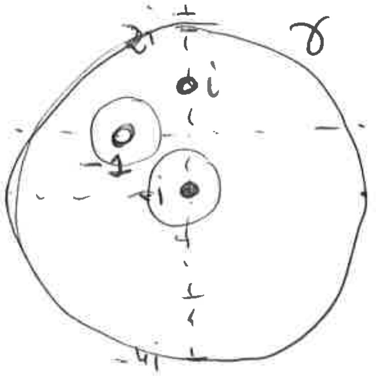
A função f tem derivada nos pontos da forma

$$z = x + i2x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nesses pontos, a derivada é dada por

$$f'(x+i2x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,2x) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,2x) = 1+4x.$$

6. (i) A fc. $f(z) := \dfrac{e^{iz}}{(z-i)(z+1)^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{-1, i\}$.



As singularidades $-1, i$ estão ambas no interior da curva $\gamma = C_3(-i)$.

Pelo T.C.H.C. seguido da FIC, tem-se, para $\varepsilon > 0$ pequeno:

$$\int_{|z+i|=3} f(z)\,dz = \int_{C_\varepsilon(i)} \frac{\overbrace{\frac{e^{iz}}{(z+1)^2}}^{=f_1}}{z-i}\,dz + \int_{C_\varepsilon(-1)} \frac{\overbrace{\frac{e^{iz}}{z-i}}^{=f_2}}{(z+1)^2}\,dz$$

$$= 2\pi i\, f_1(z)\Big|_{z=i} + 2\pi i\, f_2'(z)\Big|_{z=-1} =$$

(FIC e FIC para a 1ª derivada)

$$= 2\pi i \frac{e^{-1}}{(i+1)^2} + 2\pi i \left.\frac{ie^{iz}(z-i) - e^{iz}\cdot 1}{(z-i)^2}\right|_{z=-1}$$

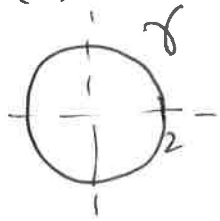
$$= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} + 2\pi i \frac{ie^{-i}(-1-i) - e^{-i}}{(-1-i)^2}$$

$$= \pi e^{-1} + 2\pi i \frac{e^{-i}(-i+\cancel{1}-\cancel{1})}{2i} = \pi e^{-1} + \pi i e^{-i} =$$

$= \pi e^{-1} - \pi i (\cos 1 - i \sin 1) =$

$= \pi (e^{-1} - \sin 1) - i \pi \cos 1 .$ //

(ii)

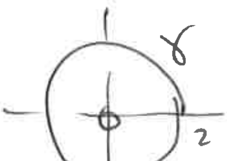


Com $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z^2+9}$, f não está definida para $z^2+9=0 \Leftrightarrow z^2 = 9 \Leftrightarrow z = \pm 3i$, e f holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{3i,-3i\}$.

Como $3i, -3i$ estão no exterior da curva γ (ver figura), é possível inserir γ num simplesmente conexo onde f é holomorfa. Pelo T. Cauchy vem que $\int_\gamma f = 0$.

(iii)

A fç. $f(z) := z^2 e^{\frac{i}{2z}}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.



A singularidade 0 está no interior de $\gamma = C_2(0)$. Pelo T. dos resíduos,

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0).$$

Calcule-se pois $\operatorname{Res}(f,0)$. Ora

$$e^{\frac{i}{2z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2z}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{z^n}$$

$$z^2 e^{\frac{i}{2z}} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\right)^n z^{2-n}.$$

Com $2-n=-1 \Leftrightarrow n=3$, obtém-se o coeficiente $a_{-1} = \operatorname{Res}(f,0) =$
~~dado~~ $= \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{i}{2}\right)^3 = \dfrac{-i}{6\times 8} \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \cancel{2}\pi i \cdot \dfrac{(-i)}{\cancel{6}_{3}\times 8} = \dfrac{\pi}{24}.$

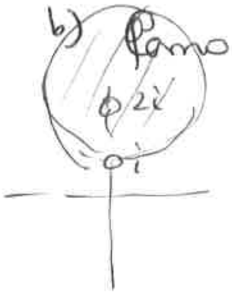
7. (a) B ; (b) C ; (c) C .

8. $g(x) = \dfrac{1}{(z-2i)^7(z-i)}$ g é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{i,2i\}$

(a) A fç g tem um pólo de ordem 1 em i:

$$\lim_{z\to i} (z-i) g(z) = \lim_{z=i} \frac{1}{(z-2i)^7} = \frac{1}{(-i)^7} = \frac{1}{\underbrace{(-i)^4}_{=1}\underbrace{(-i)^3}_{=-i}} = i$$

$\Rightarrow \operatorname{Res}(g,i) = i.$



b) Como a fc. g é holomorfe em $\mathbb{C} \setminus \{i, 2i\}$, pelo T. de Laurent sabemos desde já que o desenvolvimento de g em série de Laurent numa bola $B_r^*(2i)$ é válida para $r>0$ tal que $r \le |2i-i| = |i| = 1$. Logo o desenvolvimento abaixo vai ser válido em $B_1^*(2i)$.

Vem que,

$$g(z) = \frac{1}{(z-2i)^7(z-i)} = \frac{1}{(z-2i)^7} \frac{1}{(z-2i)+i} =$$

$$= \frac{1}{(z-2i)^7} \cdot \frac{1}{i} \frac{1}{1-\left[-\left(\frac{z-2i}{i}\right)\right]} =$$ (tabela)

$$= \frac{1}{(z-2i)^7} \frac{1}{i} \sum_{n\ge0} \left(-\left(\frac{z-2i}{i}\right)\right)^n = \frac{1}{(z-2i)^7} \cdot \frac{1}{i} \sum_{n\ge0} i^n (z-2i)^n$$

$$= \sum_{n\ge0} i^{n-1}(z-2i)^{n-7}, \text{ em } B_1^*(2i).$$

9.

Sendo f holomorfe em $D \supset \overline{B_r(z_0)}$ e $f(z) = c$ (constante) para $|z-z_0| = r$, usando a FIC, vem que

$\forall z \in B_r(z_0)$, $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{c}{w-z}\, dw = c \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{1}{w-z}\, dw}_{}$$

= índice da curva $|z-z_0|=r$ em relação ao ponto z

$= c \times 1 = c.$

Logo, $f(z) = c$, $\forall z \in \overline{B_r(z_0)}$.