Algoritmo

Tem-se o seguinte algoritmo para a diagonalização de uma matriz real e simétrica, tendo por matriz diagonalizadora uma matriz ortogonal:

Sendo $A \in M_n(\mathbb{R})$ matriz simétrica, $t \leq n$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ os valores próprios distintos de A

Passo 1. Determinar uma base para cada subespaço próprio $E_{\lambda_i}, i \leq t$, de A;

Passo 2. Ortogonalizar as bases de $E_{\lambda_i}, i \leq t$ (usando, por exemplo, o processo de Gram-Schmidt); e normalizar cada um dos seus vetores, obtendo bases *o.n.* de $E_{\lambda_i}, i \leq t$;

Passo 3. Construir a matriz Q, cujas colunas são os vetores das bases *o.n.* de $E_{\lambda_i}, i \leq t$. A matriz Q é ortogonal, *i.e.* $Q^{-1} = Q^T$.

Q é uma matriz diagonalizadora de A e

$$Q^{-1}AQ = Q^TAQ = D$$

é uma matriz diagonal.

Primeira redução - mudança de eixos

De regresso às secções cónicas em busca de uma equação reduzida.

Retome-se a equação matricial geral

$$X^TAX + B^TX + c = 0$$

$(0 \neq A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ matriz simétrica, $B \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R})$.

Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ são os valores próprios de A e $Q \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonalizadora de A, ortogonal, então

$Q^TAQ = D$, sendo $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$.

As colunas de Q formam uma base *o.n.* de $\mathbb{R}^2$ de vetores próprios de A.

Tem-se $A = QDQ^T$ e

$X^TAX + B^TX + c = 0 \Leftrightarrow X^TQDQ^TX + B^TX + c = 0.$

Faz-se a mudança de variável $X' = Q^TX$;

então $X'^T = (Q^TX)^T = X^TQ$

e $B^TX = B^TQQ^TX = B^TQX'$.

Com esta mudança de variável, a equação da cónica escreve-se

$$X'^T D X' + B^T Q X' + c = 0$$

Pondo $X'^T = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix}$ e $B^T Q = \begin{bmatrix} d_1' & d_2' \end{bmatrix} = B'^T$

tem-se

$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + d_2 y' + c = 0}$$

Observe-se que nesta equação foram eliminados os termos em xy, chamados termos *cruzados* ou *retangulares*.

Segunda redução - mudança da origem

$$\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + d_2 y' + c = 0}$$

Há dois casos: ambos os valores próprios são não nulos ou um dos valores próprios é nulo.

Caso 1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$

Completando os quadrados, chega-se à equação

$$\lambda_1 (x' + a')^2 + \lambda_2 (y' + b')^2 + c' = 0$$

fazendo nova mudança de variável $x'' = x' + a', y'' = y' + b'$

obtém-se a equação reduzida

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c' = 0}$$

Classificação I

A equação reduzida tem por conjunto solução

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + c' = 0}$$

- Se $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, c' < 0$ (ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, c' > 0$), uma elipse;
- Se $\lambda_1 \lambda_2 < 0, c' \neq 0$, uma hipérbole;
- casos degenerados:

$$\begin{cases} \text{se } \lambda_1\lambda_2 > 0, c' = 0 & \text{um ponto} \\ \text{se } \lambda_1, \lambda_2, c' \text{ têm o mesmo sinal} & \varnothing \\ \text{se } \lambda_1\lambda_2 < 0, c' = 0 & \text{retas concorrentes} \end{cases}$$

Caso 2. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ (ou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$)

A equação obtida na primeira redução

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d_1 x' + d_2 y' + c = 0$$

simplifica para

$$\lambda_1 x'^2 + d_1 x' + d_2 y' + c = 0$$

Completando o quadrado, obtemos

$$\lambda_1 (x' + a')^2 + d_2 y' + c' = 0$$

Se $d_2 \neq 0$ podemos reescrever

$$\lambda_1 (x' + a')^2 + d_2 (y' + b') = 0$$

e fazendo nova mudança de variável

$x'' = x' + a', y'' = y' + b'$

obtém-se a equação reduzida

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + d_2 y'' = 0}$$

cujo conjunto solução é uma parábola.

Se $d_2 = 0$ obtemos a equação

$$\lambda_1(x' + a')^2 + c = 0$$

fazendo nova mudança de variável $x'' = x' + a', y'' = y'$
obtém-se a equação reduzida

$$\boxed{\lambda_1 x''^2 + c = 0}$$

que tem por conjunto solução
um dos seguintes casos degenerados:

$$\begin{cases} \text{duas retas paralelas} & \text{se } \lambda_1, c \text{ têm sinais opostos} \\ \text{duas retas coincidentes} & \text{se } c = 0 \\ \varnothing & \text{se } \lambda_1, c \text{ têm o mesmo sinal} \end{cases}$$

Resumo. A primeira mudança de variáveis

$$X' = Q^T X$$

traduz uma rotação dos eixos coordenados, desde que $\det(Q) = 1$;
a segunda mudança de variáveis

$$X'' = X' + K \text{ onde } K^T = \begin{bmatrix} a' & b' \end{bmatrix}$$

corresponde a uma mudança da origem do referencial.
Partindo da base canónica de $\mathbb{R}^2$ $(e_1, e_2) = ((1,0),(0,1))$ obtemos a nova base de $\mathbb{R}^2$, (v_1, v_2), sendo v_i é a i-ésima coluna de Q:
$v_1 = Qe_1, v_2 = Qe_2$.

Exemplo

Seja a equação $3x^2 - 8xy - 3y^2 + x + 2y - 1 = 0$.

$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$; $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$; $c = -1$.

Os valores próprios de A são $5, -5$ *e têm sinais contrários.*

Será uma equação de uma hipérbole?

O vetor $u' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ *é vetor próprio de A associado ao valor próprio* -5, *e* $||u'|| = \sqrt{5}$.

Portanto $u = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ *é vetor próprio de A, associado a* -5, *com norma 1.*

O vetor $v' = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *é vetor próprio de A associado ao valor próprio* 5, *e* $||v'|| = \sqrt{5}$.

Portanto $v = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ *é vetor próprio de A, associado a* 5, *com norma 1.*

A matriz $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ *é uma matriz diagonalizadora de A, ortogonal.*

A é a matriz da rotação em torno da origem, no sentido direto, com ângulo $\alpha = \operatorname{arccos} 1/\sqrt{5}$.

Sejam $X' = Q^T X$ *e* $B'^T = B^T Q = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - 1 = 0$$

$$\boxed{-5x'^2 + 5y'^2 + \sqrt{5}x' - 1 = 0}$$

Completando o quadrado

$$-5\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 5y'^2 - \frac{3}{4} = 0$$

faz-se nova mudança de variável

$$(x'', y'') = (x' - \frac{1}{2\sqrt{5}}, y\prime)$$

e obtemos $-5x''^2 + 5y''^2 - \frac{3}{4} = 0$

finalmente

$$\boxed{-\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{20}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{20}}\right)^2} - 1 = 0}$$

é a equação reduzida de uma hipérbole.