Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Exame 1ª época 07-06-2013

1.a) Determine os valores próprios λ_n e funções próprias $y_n(x)$ que satisfazem a:

$$y''(x) = \lambda\, y(x)\ , \qquad x \in [-\ell, \ell]\ ,$$

e às condições fronteira $y(-\ell) = 0,\ \ y(\ell) = 0$.

b) Seja $u(x, y)$ uma função que satisfaz a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ , \qquad x \in [-\ell, +\ell]\ , \qquad y \in [0, +\infty[\ ,$$

e as condições fronteira $u(-\ell, y) = 0,\ \ u(\ell, y) = 0,\ \ \lim_{y\to+\infty} u(x, y) = 0.$
Admita que $u(x, y)$ pode ser escrita como uma combinação linear de funções $y_n(x)$ obtidas na alínea a): $u(x, y) = \sum_n c_n(y)\, y_n(x)$. Obtenha as equações diferenciais a que devem obedecer os coeficientes $c_n(y)$.

c) Encontre as soluções $c_n(y)$ e $u(x, y)$ que satisfazem as condições fronteira acima enunciadas.

2.a) Coloque na forma de Sturm-Liouville a equação diferencial

$$(1 - x^2)\, y''(x) - x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0\ , \qquad x \in [-1, +1]\ .$$

b) Defina, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado a este problema.

c) Determine a função própria $y(x)$ dada por um polinómio do segundo grau, tomando $y(1) = 1$.

3.a) Calcule a derivada e a segunda derivada da função $g(x) = x\, \Theta(x)$.

b) Mostre que a função

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - z)\, f(z)\, dz\ ,$$

é solução da equação diferencial: $y''(x) = f(x)$.

c) Obtenha a partir desta última equação diferencial a relação entre as transformadas de Fourier das funções $y(x)$ e $f(x)$.

d) Utilize o resultado da alínea c) para determinar a transformada de Fourier da função $g(x)$.

4.a) Calcule a transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-|x|}$.

b) Utilize o teorema de Parseval para determinar o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} (z^2 + 1)^{-2}\, dz$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x)\ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$