Experiência 1: CORDA VIBRANTE; MODOS ESTACIONÁRIOS

As ondas mecânicas, de que conhecemos vários exemplos no dia a dia (ondas sonoras, ondas na superfície da água, vibração da corda da guitarra, etc.) são movimentos globais de um conjunto de partículas que interagem entre si. Se existe interação entre as partículas constituintes de um dado meio, uma perturbação que seja aplicada a uma das partículas, levando por exemplo essa partícula a uma vibração, essa perturbação será transmitida às partículas vizinhas, que vão progressivamente entrar também em oscilação.

Este fenómeno de propagação de uma perturbação não se verifica apenas no caso da existência de um meio material que serve de suporte à propagação. Na realidade, sabemos que as ondas eletromagnéticas se propagam na ausência de qualquer meio suporte.

Neste trabalho vamos introduzir algumas noções que caracterizam as ondas, tomando como exemplo as ondas mecânicas para as quais se torna mais fácil a compreensão dos conceitos apresentados. Os conceitos referidos são, no entanto, igualmente válidos para os outros tipos de ondas.

Uma onda periódica é caracterizada por grandezas físicas como: o comprimento de onda λ, a frequência, f, e a velocidade de propagação v. O comprimento de onda é definido como a distância mínima entre dois pontos que estão no mesmo estado de vibração. A frequência, que é a taxa a que a perturbação se repete, é característica da perturbação inicial. Pelo contrário a velocidade a que a onda se propaga é caraterística do meio. O comprimento de onda por seu lado depende da frequência e da velocidade de propagação.

Sempre que é possível descrever a propagação de uma onda a partir de uma só variável espacial dizemos que há propagação unidimensional. Um fio esticado constitui um exemplo evidente de meio unidimensional para a propagação de ondas mecânicas. Para uma onda que se propaga segundo o eixo dos *xx*, temos que

$$\varphi(x,t)=\varphi(x,t+T) \tag{1}$$

e também

$$\varphi(x,t)=\varphi(x+\lambda,t) \tag{2}$$

De facto uma onda é um fenómeno periódico no espaço e no tempo descrito por uma equação matemática que relaciona as quantidades v, T e λ. Para uma onda unidimensional que se propaga, por exemplo, no sentido positivo do eixo dos *xx*, a condição de propagação impõe que a perturbação seja a mesma em todos os pontos (x,t) tais que $(x-vt)=\text{constante}$, ou seja

$$\varphi(x,t)=\varphi(x-vt) \tag{3}$$

e, analogamente para uma onda que se propaga no sentido negativo do eixo dos *xx*

$$\varphi(x,t)=\varphi(x+vt) \tag{4}$$

O argumento da função φ designa-se por fase. Pontos (x,t) com a mesma fase (x $\pm$ vt) apresentam-se com a mesma configuração. Para satisfazer as condições de periodicidade no espaço e no tempo é necessário que

$$\varphi(x,t) = \varphi(x+\lambda,t) \quad e \quad \varphi(x,t) = \varphi(x,t+T) \tag{5}$$

ou seja

$$(x+\lambda) + vt = x + v(t+T)$$

logo

$$\lambda = vT = \frac{v}{f} \tag{6}$$

A frequência angular dada por

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \tag{7}$$

De uma forma idêntica é possível definir o número de onda *k*, tal que

$$k\lambda = 2\pi \Leftrightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{8}$$

A velocidade de propagação pode então escrever-se como

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{9}$$

Considerando uma onda sinusoidal pode escrever-se

$$\varphi = A \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right) = A \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t) \tag{10}$$

ou, de uma forma mais geral,

$$\varphi = A \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{11}$$

onde a constante ϕ, designada por constante de fase inicial, garante-nos a possibilidade de ter um estado de vibração não nulo no instante inicial.

As funções que escrevemos para representar uma onda que se propaga no sentido positivo ou negativo do eixo dos *xx*, são soluções da equação geral das ondas. Sendo esta equação linear, qualquer combinação linear de soluções indicadas é também solução desta equação. Isto corresponde ao chamado princípio da sobreposição, que nos garante que duas ondas propagando-se num meio se vão adicionar em cada ponto sem se alterarem mutuamente. Para ondas mecânicas este princípio é válido no caso de meios que obedeçam à lei de Hooke e isso corresponde a considerar ondas de pequena amplitude.

Quando consideramos a sobreposição de duas ondas que se propagam no mesmo meio, temos a considerar efeitos distintos dependendo da diferença entre as ondas consideradas. No caso de duas ondas sinusoidais idênticas (mesma frequência e mesma velocidade de propagação), mas com fases diferentes, dadas por

$$\varphi_1 = A \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = A \cdot \mathrm{sen}(kx - \omega t + \phi) \tag{12}$$

a sobreposição das duas ondas ($\varphi_1 + \varphi_2$) tem a forma

$$\varphi = \left[2A \cdot \cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right] \cdot \text{sen}\left(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}\right) \tag{13}$$

Neste caso, temos uma onda também com a mesma frequência e comprimento de onda, desfasada de $\phi/2$ de φ_1, cuja amplitude $A_\varphi = 2A \cdot \cos(\phi/2)$, depende da diferença de fase ϕ entre as duas ondas.

Para ϕ = 0 as duas ondas adicionam-se reforçando-se; tem-se uma amplitude máxima A_φ=2A e diz-se que há interferência construtiva. Para $\phi=\pi$ as duas ondas cancelam-se pois A_φ=0 e diz-se que há interferência destrutiva.

No caso de duas ondas idênticas, com a mesma fase, mas que se propagam em sentidos contrários, ou seja

$$\varphi_1 = A \cdot \text{sen}(kx - \omega t) \quad \text{e} \quad \varphi_2 = A \cdot \text{sen}(kx + \omega t) \tag{14}$$

a sobreposição das duas ondas (φ_1+ φ_2) tem a forma

$$\varphi = 2A \cdot \sin(kx) \cdot \cos(\omega t) \tag{15}$$

e obtemos uma onda estacionária. A fase da onda é dada por um produto de duas funções sinusoidais em que uma das funções só depende do espaço e a outra só depende do tempo.

Esta onda apresenta zeros de vibração (nodos), que são independentes do tempo, para os valores kx=0, π, 2π,… Para kx = $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$,…, os pontos vibram sempre com uma amplitude máxima 2A (antinodos). Uma tal onda designa-se por onda estacionária devido ao facto de não haver uma verdadeira propagação da perturbação.

Ondas deste tipo podem ser por exemplo geradas, por exemplo, numa corda vibrante de extremidades fixas. Para uma corda que é posta em vibração, o facto de as extremidades serem fixas impõe à partida restrições no comportamento da onda uma vez que os pontos extremos não vibram. É fácil de verificar que, dada esta restrição, só ondas de determinado comprimento de onda se podem propagar na corda. Os modos de vibração correspondentes a estes comprimentos de onda, que são característicos da corda com as condições fronteira específicas impostas (extremidades fixas), são modos naturais de vibração deste sistema, designados por modos normais ou modos próprios.

Para uma corda de extremidades fixas e comprimento L, os modos próprios de vibração terão comprimentos de onda dados por

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{16}$$

sendo as frequências correspondentes dadas pela relação

$$f_n = \frac{n \cdot v}{2L} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{17}$$

Numa corda sob tensão mecânica a velocidade de propagação de uma onda é dada por

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \tag{18}$$

onde F é a tensão aplicada e ρ a massa por unidade de comprimento da corda. Usando a equação (17) podemos obter a relação

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

O valor da frequência para n=1 é designado por frequência fundamental e os restantes por harmónicas desta frequência fundamental. Estas frequências naturais de vibração são frequentemente designadas por frequências ressonantes. Excitado o sistema com uma perturbação exterior de frequência igual a um destes valores, verifica-se o fenómeno da ressonância, que corresponde a um aumento da amplitude de vibração relativamente à excitação inicial. Este fenómeno é um fenómeno bem conhecido em física que está na base de muitas aplicações práticas.