

Dinâmica de Rotação

Ana Patrícia 52871
Ernesto González 52857
Gonçalo Jesus 52874
Tiago Pereira 53107

Física Experimental I
Faculdade de Ciências - Universidade de Lisboa
Ano Letivo 2018/2019



Ciências
ULisboa

Faculdade
de Ciências
da Universidade
de Lisboa

Conteúdo

1	Resumo	2
2	Introdução	5
3	Fundamentação Teórica	6
4	Método e Equipamento	8
5	Resultados	10
6	Conclusão	21
	Bibliografia	22
A	Figuras	23

Capítulo 1

Resumo

Historiadores e tecnologistas apontam que a roda foi a maior invenção da Humanidade [5] com diversas aplicações nas engenharias e ciências. Uma roda descreve um movimento rotacional à volta do seu eixo central (ou de rotação). Neste trabalho propomos estudar o movimento de rotação de um corpo rígido, focando a nossa atenção em rotação uni-axial sem translação. Para estes efeitos, escolheu-se uma barra metálica com duas massas cilíndricas de posição ajustável simetricamente dispostas em relação ao centro geométrico da barra. Fixamos a barra em eixo solidário com um disco dividido em sectores alternadamente transparentes e opacos. Enrolado à volta do eixo de rotação está um fio ligado a um peso suspenso por uma roldana (ver Figura 1.1).

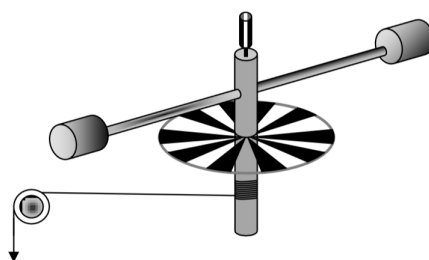


Figura 1.1: Esquema do sistema de rotação.

Uma vez que o disco roda juntamente com a barra, é-nos permitida a medição e cálculo das variáveis rotacionais¹ com uma foto-porta e o *DataStudio*². Inicialmente, enquanto o peso suspenso cai, o fio desenrola-se do eixo de rotação, obrigando o sistema a rodar com uma aceleração angular cada vez maior (ver primeiros 10 segundos da Figura 1.2). Após a queda do peso, com o fio já solto e o sistema livre de forçamento, vemos como a barra roda cada vez mais devagar, eventualmente parando (ver Figura 1.2 após os primeiros 10 segundos).

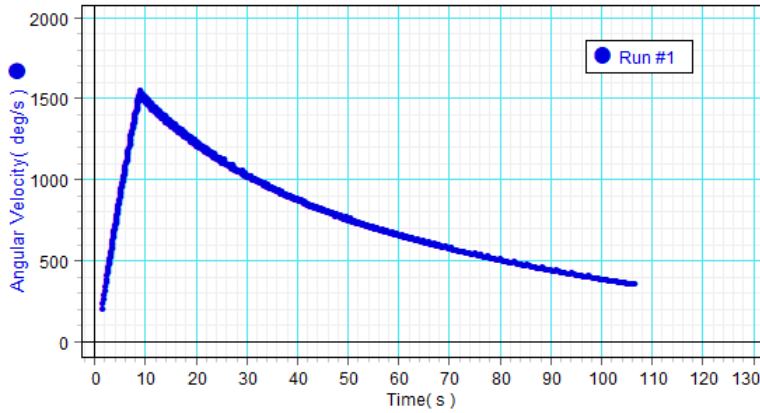


Figura 1.2: Velocidade angular por unidade de tempo.

Atendendo a $I = \sum_i m_i R_i^2$ e $M = I\alpha$ vemos que se mudar-mos a distância das massas obtemos momentos de inércia (consequentemente acelerações angulares) diferentes. Seguindo este raciocínio estudamos o movimento do sistema para três distâncias d das massas ao centro de rotação e um caso sem massas (ver Figura 1.3).

Vê-mos que a relação entre o momento de inércia do sistema e a o quadrado das distâncias das massas ao centro é linear. A interpretação física das grandezas em jogo permite-nos ainda concluir que a ordenada na origem é o momento de inércia da barra cilíndrica (sem massas adicionais).

¹ *Elapsed time*, período, velocidade angular e aceleração angular.

² Software para tratamento de dados.

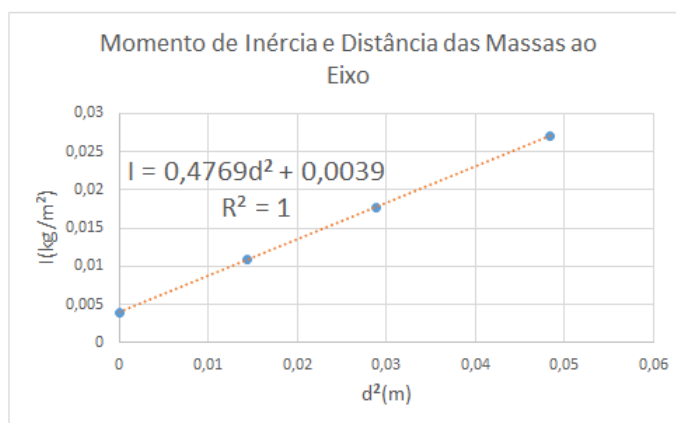


Figura 1.3: Momento de inércia e distância das massas ao eixo de rotação ($d=0$ indica ausência das massas cilíndricas).

Capítulo 2

Introdução

O que têm em comum uma roda gigante, um pião e uma bailarina a executar o *sur le cou-de-pied*¹? Todos descrevem movimentos de rotação. Neste trabalho propomos estudar um movimento de rotação de um corpo rígido num referencial fixo. Pretendemos verificar a relação entre o momento de inércia e a aceleração angular, estudar e justificar os diferentes tipos de movimento que o sistema apresenta, caracterizar a aceleração angular do movimento inicial, a aceleração angular média das forças de atrito, a aceleração angular associada ao momento aplicado pela força de tensão do fio em que a massa m ² está suspensa, o tipo de movimento da massa m , que desce na vertical, a aceleração linear correspondente e a tensão no fio enquanto a massa desce, e finalmente, o momento aplicado pela força de tensão. Com os valores obtidos, determinamos, em cada caso, o momento de inércia do sistema caracterizado pela incerteza respetiva, bem como a sua dependência com a distância das massas móveis ao centro de rotação.

¹Piruetta que começa com um pé descansando entre o tornozelo e a base dos gêmeos. Esse pé é elevado para voltar para dentro em direção à perna de apoio para fazer o giro.

²Massa suspensa pelo fio ligado ao eixo de rotação do corpo rígido, que ao cair desencadeia uma aceleração angular crescente no corpo, devido à tensão do fio.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

O movimento de rotação de um corpo em relação a um ponto O é caracterizado pelo momento angular \vec{L} . Num corpo rígido, constituído por um conjunto de partículas, cada uma com momento angular $\vec{\ell}_i$ temos $\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i$. Em qualquer momento do movimento temos

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}.$$

A variação no tempo do momento angular é igual ao momento (torque) da força aplicada [4]. Da Geometria, sabemos que θ é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{medida em radianos}).$$

A velocidade angular (instantânea) ω é

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

e, por sua vez, a aceleração angular (instantânea) consiste em

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Associando as grandezas do movimento circular com as do movimento rotacional¹ ficamos com

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} \iff \vec{M} = I \vec{\alpha}.$$

¹Uma partícula que descreve um movimento circular em volta de um ponto O consiste, em realidade, num sistema rotacional.

O *Teorema dos eixos paralelos* diz que o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo de rotação que passa pelo seu centro de massa, I_{CM} e o seu momento de inércia relativamente a um eixo paralelo ao primeiro, I_p estão relacionados por

$$I_p = I_{CM} + md^2$$

onde d é a distância entre os eixos de rotação paralelos e m a massa do sólido[4].

Capítulo 4

Método e Equipamento

O equipamento utilizado na experiência foi:

- Barra com duas massas cilíndricas de posição ajustável, fixa em eixo solidário com *chopper*¹ que é apoiada num eixo fixo;
- Massa calibrada;
- Prato para massas, com fio terminado por fita de velcro;
- Roldana;
- Interface com foto-porta e o programa *DataStudio*.

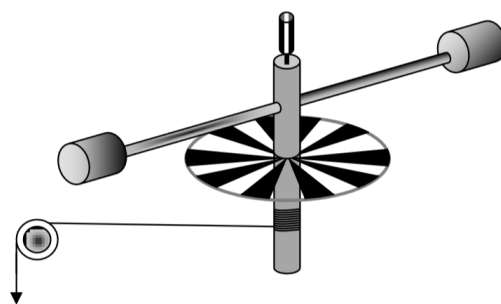


Figura 4.1: Esquema do sistema de rotação.

¹Disco dividido em sectores alternadamente transparentes e opacos.

Prendeu-se a barra cilíndrica no eixo de rotação e, por sua vez, as massas cilíndricas a uma distância d do centro de rotação. Enrolou-se o fio com a massa ligada à volta do eixo de rotação. Suspendeu-se a massa e deixou-se cair, observando de imediato como, à medida que o fio se ia desenrolando, a barra (consequentemente o disco) rodavam cada vez mais rápido. Entretanto, a foto-porta registava o tempo decorrido entre cada interrupção do seu feixe de luz, pelas secções opacas do disco. Com estes tempos, e sabendo o arco de cada secção, o *DataStudio* apresenta-nos o *elapsed-time*, a velocidade angular e aceleração angular.

Repetimos este procedimento três vezes para cada disposição das massas cilíndricas. Posicionamos as massas cilíndricas a distâncias de $0.12 \pm 0.05m$, $0.17 \pm 0.05m$, $0.22 \pm 0.05m$ e $0m$ ².

²A distância ser 0 representa a ausência das massas.

Capítulo 5

Resultados

Com todas as considerações feitas e o planeamento definido, avançamos para a experiência. O primeiro passo foi determinar a natureza¹ e incerteza associada ao equipamento relevante para a experiência (ver Tabela 5.1).

	Natureza	Incerteza
Balança Digital	0.01g	0.01g
Suporte Graduado	0.1cm	0.05cm
Craveira	0.02mm	0.02mm
Palmer	0.01mm	0.005mm

Tabela 5.1: Natureza e incerteza do equipamento usado.

Tendo em conta as incertezas, seguimos para a medição das dimensões de massas e volumes relevantes para a experiência (ver Tabela 5.2).

¹Mínima divisão da escala.

Dimensões	Valor
Massa do prato	$2.14 \times 10^{-1} kg \pm 0.005\%$
Massa cilíndrica I	$2.39 \times 10^{-1} kg \pm 0.004\%$
Massa cilíndrica II	$2.38 \times 10^{-1} kg \pm 0.004\%$
Massa da barra	$1.31 \times 10^{-1} kg \pm 0.008\%$
Massa suspensa	$209.50 \times 10^{-3} kg \pm 0.004\%$
Raio do torno ²	$7.75 \times 10^{-3} m \pm 6.45\%$

Tabela 5.2: Dimensões relevantes das componentes do sistema.

Posteriormente, passamos à realização da experiência *per se* e obtivemos os seguintes resultados. Nos gráficos e tabelas seguintes apresentamos os dados recolhidos (e analisados com o *DataStudio*).

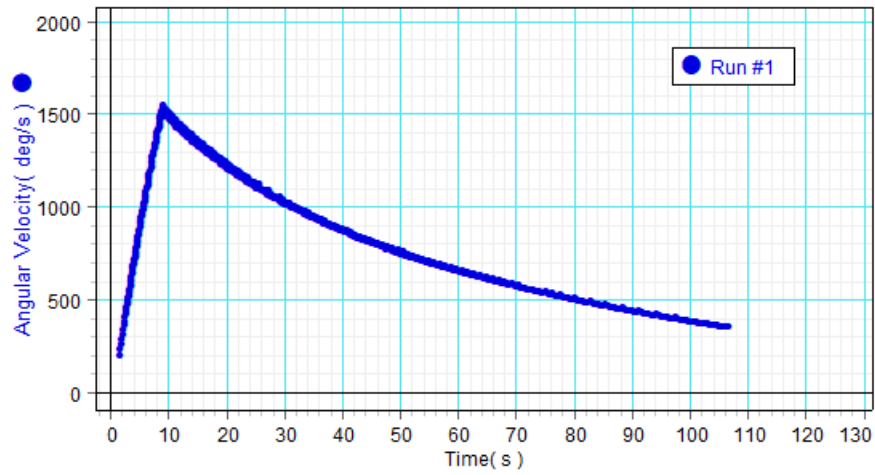


Figura 5.1: Velocidade angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$.

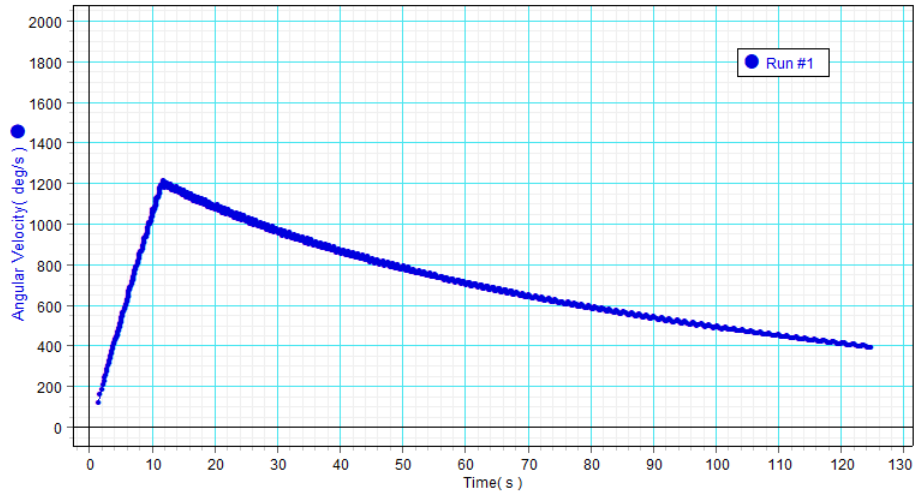


Figura 5.2: Velocidade angular em função do tempo para $d = 0.17 \pm 0.05m$.

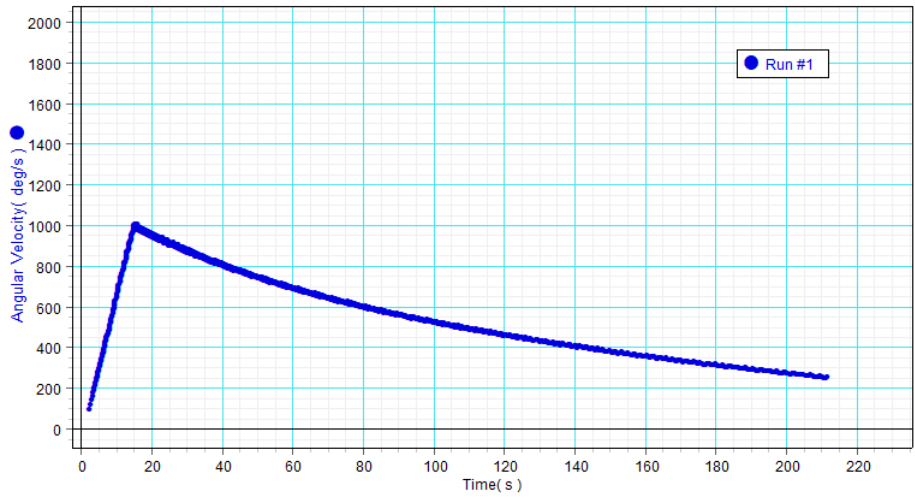


Figura 5.3: Velocidade angular em função do tempo para $d = 0.22 \pm 0.05m$.

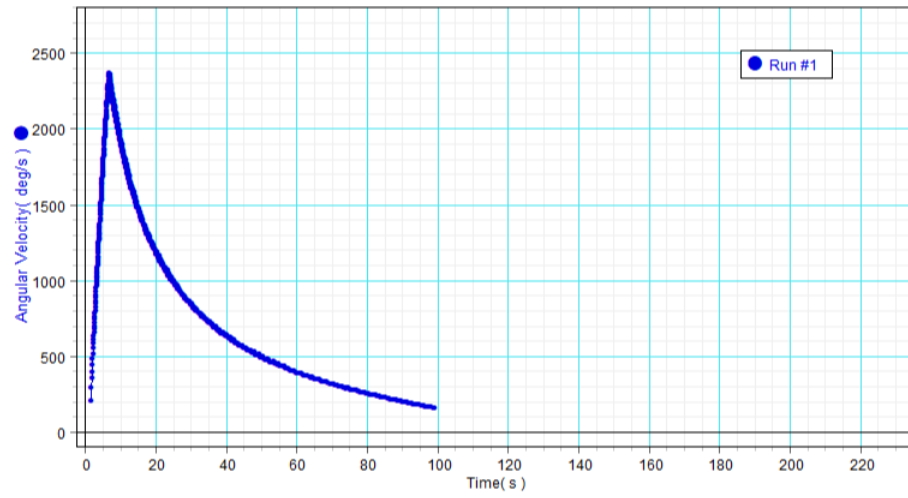


Figura 5.4: Velocidade angular em função do tempo para barra sem massas cilíndricas.

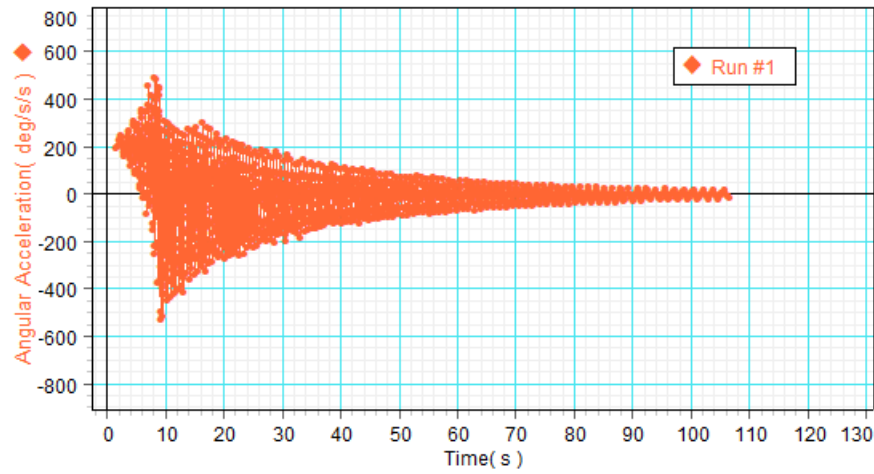


Figura 5.5: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$.

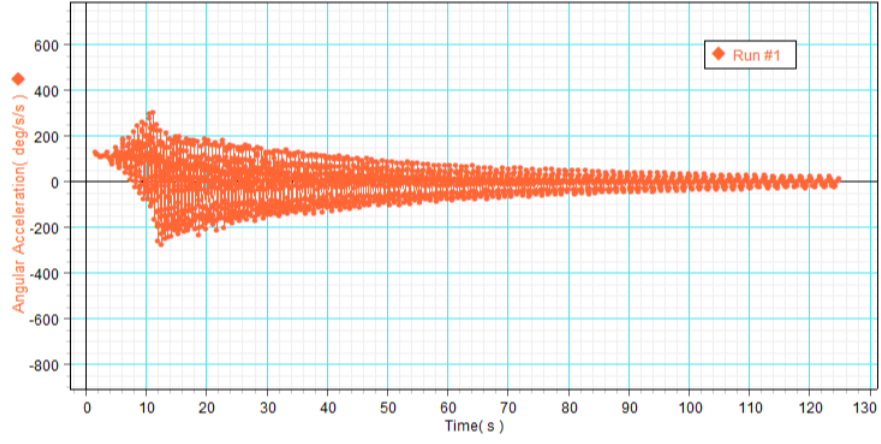


Figura 5.6: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.17 \pm 0.05m$.

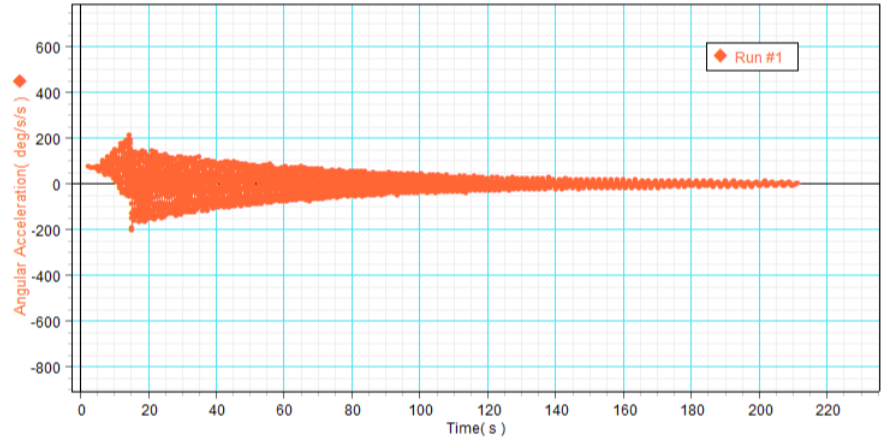


Figura 5.7: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.22 \pm 0.05m$.

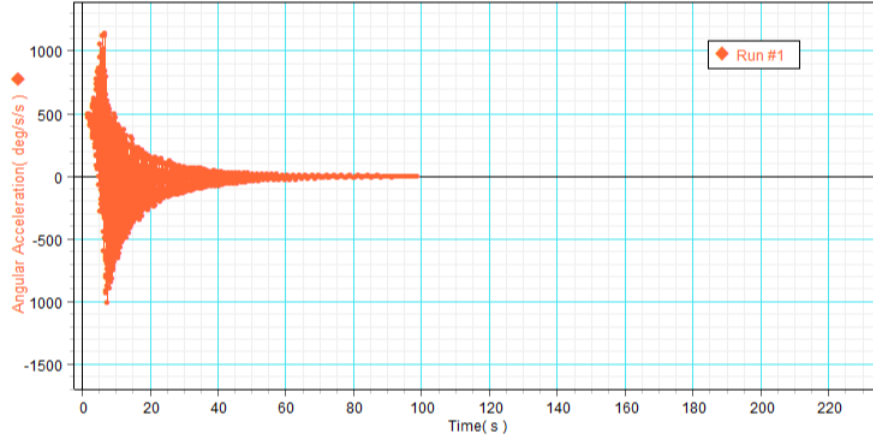


Figura 5.8: Aceleração angular em função do tempo para barra sem massas cilíndricas.

Analizando os gráficos, notamos que a velocidade angular aumenta rapidamente num primeiro instante, para todos os casos. Facilmente se conclui que tal incremento se deve à tensão do fio, que ao desenrolar pela queda da massa provoca uma aceleração angular crescente (em módulo) no sistema rotacional. Vejamos detalhadamente, por exemplo, para $d = 0.12 \pm 0.05m$.

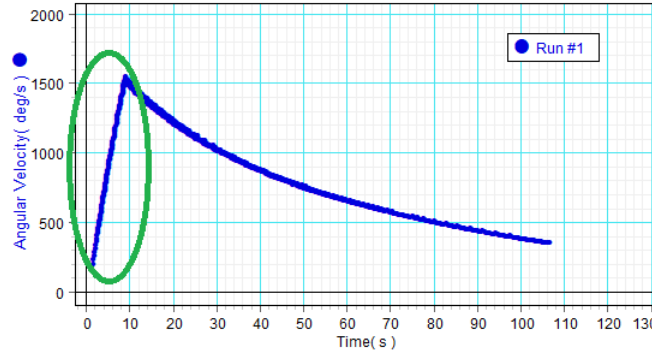


Figura 5.9: Velocidade angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$, com dados referentes à queda do grave assinalados pelo anel verde.

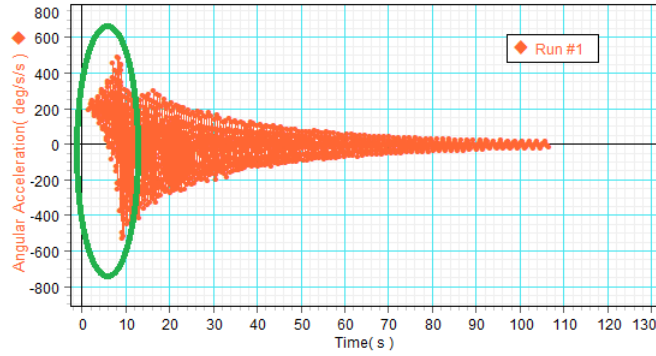


Figura 5.10: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$, com dados referentes à queda do grave assinalados pelo anel verde.

Nas Figuras 5.9 e 5.10 podemos ver que, na zona assinalada pelo anel verde, a velocidade angular e a aceleração angular aumentam forçosamente (em módulo). E de facto, é nestes mesmos primeiros 10 segundos que a massa está ainda ligada ao torno do sistema rotacional. Podemos, então, caracterizar o movimento, até à queda da massa, como movimento acelerado. Vejamos agora o que acontece nos próximos segundos, até ao final do registo.

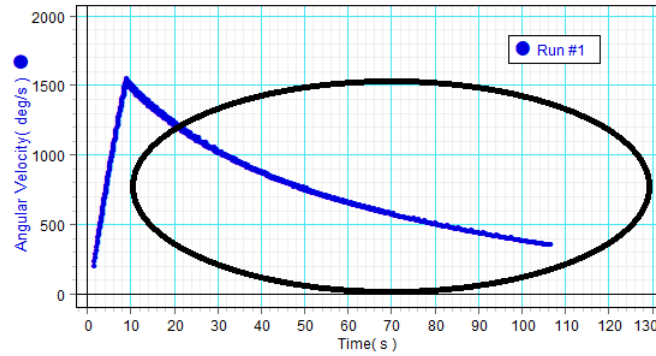


Figura 5.11: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$, com dados referentes à rotação livre de forçamento, assinalados pelo anel preto.

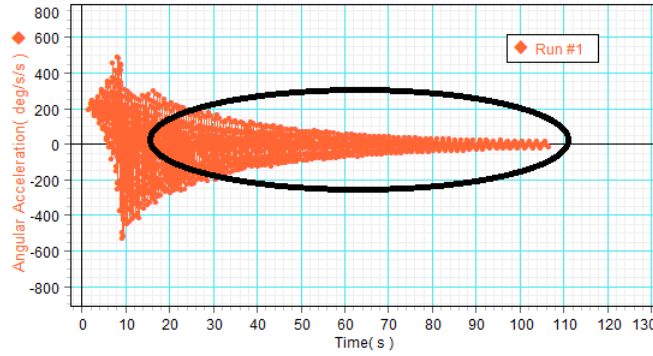


Figura 5.12: Aceleração angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$, com dados referentes à rotação livre de forçamento, assinalados pelo anel preto.

Analogamente, atendendo às Figuras 5.11 e 5.12, observamos como a velocidade angular decresce, juntamente com a aceleração angular (em módulo). Visto que o fio já se soltou e a tensão já não obriga o torno a rodar (consequentemente a barra e o disco), o sistema rotacional é deixado rodar livremente, isto se não fossem as forças de atrito presentes.

Podemos apontar para forças de atrito de naturezas diferentes: resistência do ar face e fricção da barra ao rodar sobre o torno, entre outras. Estas forças de atrito obrigam então ao sistema a ir rodando cada vez mais devagar e, eventualmente, a parar.

Atendendo a esta divisão do movimento em duas partes³, podemos derivar as acelerações angulares associadas a cada um destes momentos. Desta forma temos

Para $d = 0.12 \pm 0.05m$:

Momento Inicial $\alpha_i = 3.14 \text{ rad/s}^2 \pm 0.45\%$

Momento Final $\alpha_f = -0.11 \text{ rad/s}^2 \pm 0.03\%$

Para $d = 0.17 \pm 0.05m$:

Momento Inicial $\alpha_i = 1.88 \text{ rad/s}^2 \pm 5.6\%$

Momento Final $\alpha_f = -0.08 \text{ rad/s}^2 \pm 0.02\%$

³acelerado pela massa e desacelerado pelas forças de atrito

Para $d = 0.22 \pm 0.05m$:

Momento Inicial $\alpha_i = 1.21 \text{ rad/s}^2 \pm 0.36\%$

Momento Final $\alpha_f = -0.04 \text{ rad/s}^2 \pm 1.7\%$

Para $d = 0m$:

Momento Inicial $\alpha_i = 7.84 \text{ rad/s}^2 \pm 0.04\%$

Momento Final $\alpha_f = -0.10 \text{ rad/s}^2 \pm 0.04\%$

Como já vimos, no momento final, as únicas forças a ser aplicada no sistema são forças de atrito. Podemos, então, dizer que a aceleração angular no momento final em cada caso é a aceleração angular média das forças de atrito.

Ademais da força de tensão do fio, no momento inicial, também temos forças de atrito. Desta forma, se considerarmos que a aceleração média das forças de atrito no momento final é também a aceleração média das forças de atrito no momento inicial ficamos com

$$\alpha_{tensão} = \alpha_i - \alpha_f.$$

Temos, então

Para $d = 0.12 \pm 0.05m$: $\alpha_{tensão} = 3.25 \text{ rad/s}^2 \pm 0.45\%$

Para $d = 0.17 \pm 0.05m$: $\alpha_{tensão} = 1.96 \text{ rad/s}^2 \pm 5.1\%$

Para $d = 0.22 \pm 0.05m$: $\alpha_{tensão} = 1.25 \text{ rad/s}^2 \pm 0.35\%$

Para $d = 0m$: $\alpha_{tensão} = 7.94 \text{ rad/s}^2 \pm 0.4\%$

Veja-se que a tensão exercida pelo fio no torno é de igual magnitude que a tensão exercida pelo fio na massa suspensa. Daí surge

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} \iff mg - T = ma \iff T = m(g - a) \iff T = m(g - \alpha r).$$

com r o raio do torno e m a massa suspensa.

Efetuada os cálculos para cada distância dos cilindros, d , obtemos

Para $d = 0.12 \pm 0.05m$: $a = 0.0252 \text{ m/s}^2 \pm 0.36\%$ e $T = 2.050 \text{ N} \pm 0.45\%$;

Para $d = 0.17 \pm 0.05m$: $a = 0.0152 \text{ m/s}^2 \pm 4.91\%$ e $T = 2.052 \text{ N} \pm 5.1\%$;

Para $d = 0.22 \pm 0.05m$: $a = 0.0097 \text{ m/s}^2 \pm 0.37\%$ e $T = 2.054 \text{ N} \pm 0.35\%$;

Para $d = 0m$: $a = 0.0615 m/s^2 \pm 0.12\%$ e $T = 2.042 N \pm 0.4\%$.

Como já vimos o momento é uma das grandezas que caracteriza o movimento rotacional. Podemos então calcular o momento aplicado pela força de tensão.

Temos

$$\tau_{tensão} = I\alpha_{tensão} \iff T \times r = I\alpha_{tensão} \iff I = \frac{\alpha_{tensão}}{T \times r}.$$

Mais uma vez, efetuamos os cálculos para cada distância dos cilindros, d :

Para $d = 0.12 \pm 0.05m$: $I = 0.0108 kgm^2 \pm 0.22\%$;

Para $d = 0.17 \pm 0.05m$: $I = 0.0177 kgm^2 \pm 2.5\%$;

Para $d = 0.22 \pm 0.05m$: $I = 0.0270 kgm^2 \pm 0.2\%$;

Para $d = 0m$: $I = 0.0039 kgm^2 \pm 0.12\%$.

De acordo com o *Teorema dos eixos paralelos*[4] temos

$$I_p = I_{CM} + md^2,$$

pelo que será expectável encontrar uma relação entre o momento de inércia calculado acima e a distância das massas cilíndricas ao eixo de rotação, d . Vejamos a Figura 5.13.

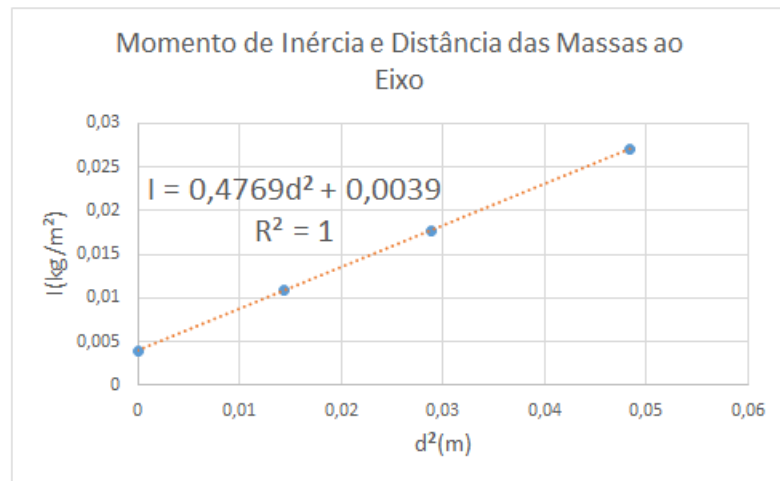


Figura 5.13: Relação entre a posição das massas e o momento de inércia do sistema.

O declive da reta dá-nos a massa do corpo. Neste caso, $m = 0.4769\text{kg}$.

Capítulo 6

Conclusão

Finalizado o tratamento e interpretação dos dados podemos afirmar com alguma certeza que o momento de inércia de um sistema depende apenas da massa e da distribuição desta massa pelo seu volume, com ênfase na disposição da massa perpendicularmente disposta ao eixo de rotação. Durante a queda da massa concluímos, então, que há duas forças a atuar no corpo rígido: a tensão do fio ligado à massa e as forças de atrito. A força de tensão desaparece (justifique) quando o fio se solta, sobrando apenas as forças de atrito que desaceleram o corpo rígido.

Quanto às diferentes disposições das massas cilíndricas, podemos comentar que quanto mais afastadas estão as massas do eixo de rotação, mais tempo é requerido para parar o corpo, e sendo que no caso em que retiramos as massas, o corpo não só parou mais rápido como também atingiu uma velocidade angular máxima mais elevada que nas outras disposições.

Bibliografia

- [1] M.C. Abreu, L. Matias, L.F. Peralta *Física Experimental: Uma Introdução*. Editorial Presença, Lisboa: 1^a. ed., 1994. ISBN 972-23-1832-2.
- [2] R.A. Serway and J. W. Jewett, Jr. *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Cengage, Boston: Tenth edition, 2014. ISBN 978-1-337-55329-2.
- [3] Jearl Walker, David Halliday, Robert Resnick *Fundamentals of Physics*. Wiley, United States of America: 10th edition, 2014. ISBN 978-1-118-23072-5.
- [4] Maria Margarida Cruz *Dinâmica de Rotação*. Textos Complementares em Física Experimental I. Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- [5] Richard W. Bulliet *The Wheel: Inventions and Reinventions*. Columbia University Press, United States of America: 1st Edition, 2016. ISBN 978-0-231-17338-4.

Apêndice A

Figuras

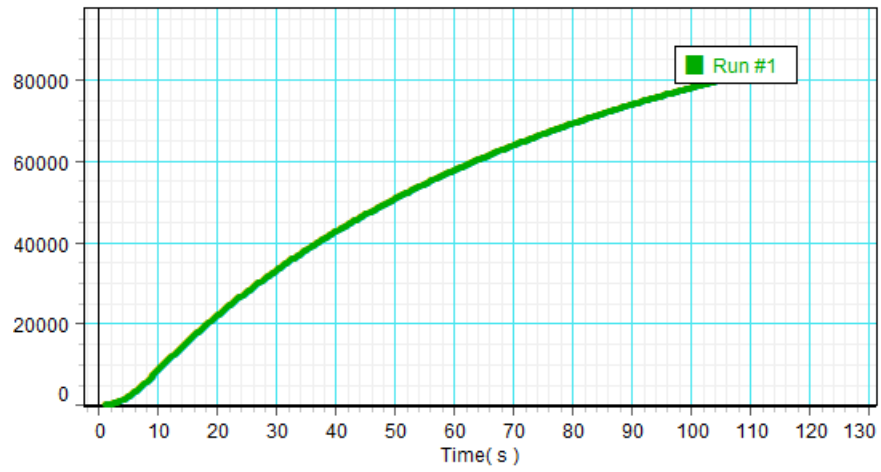


Figura A.1: Posição angular em função do tempo para $d = 0.12 \pm 0.05m$.

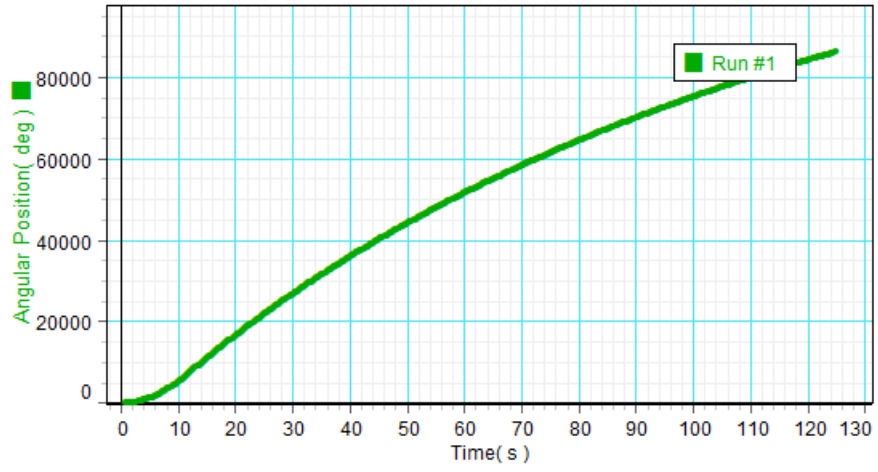


Figura A.2: Posição angular em função do tempo para $d = 0.17 \pm 0.05m$.

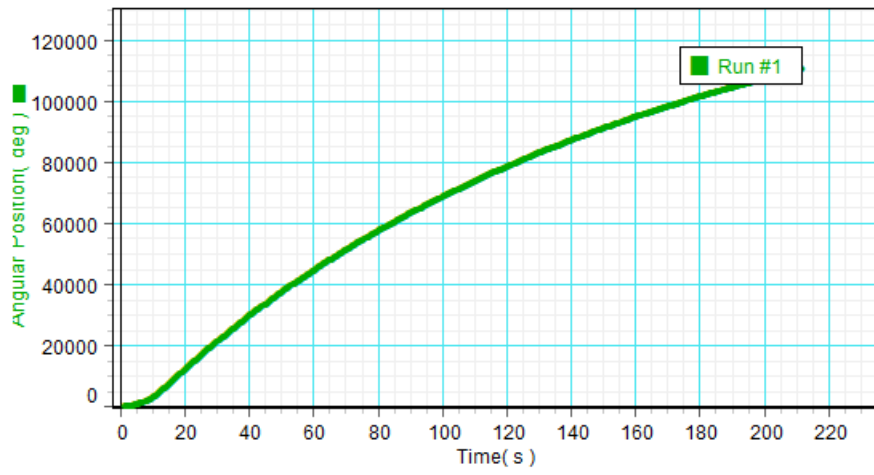


Figura A.3: Posição angular em função do tempo para $d = 0.22 \pm 0.05m$.

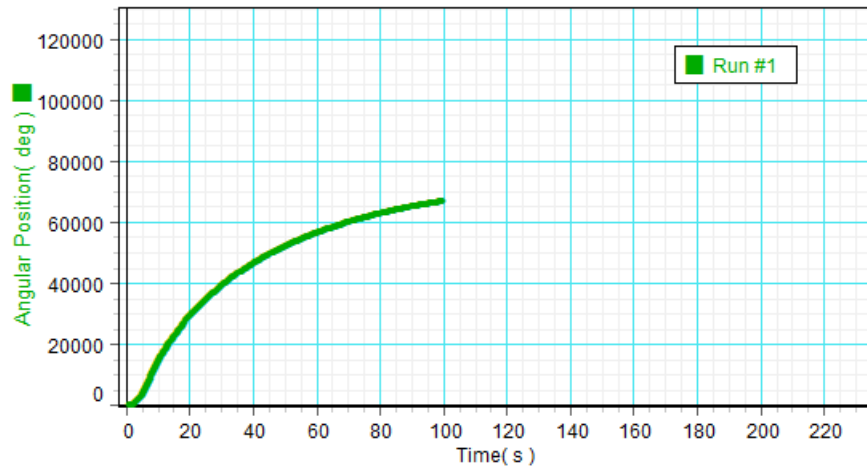


Figura A.4: Posição angular em função do tempo para barra sem massas cilíndricas.

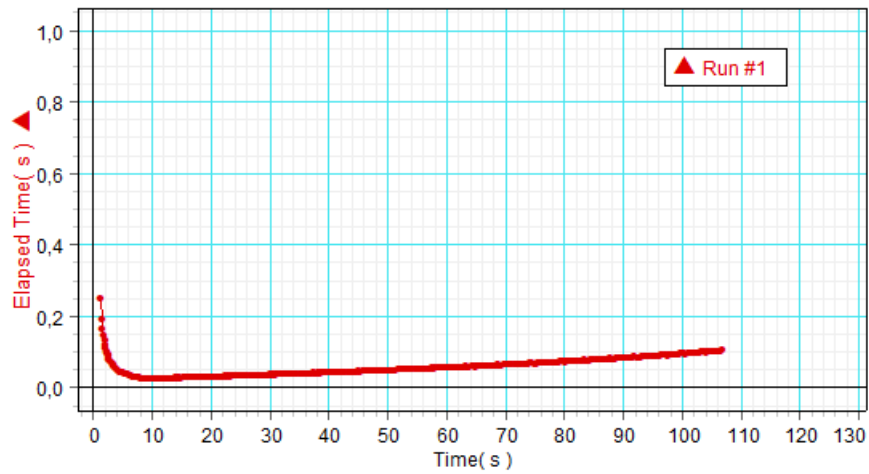


Figura A.5: *Elapsed time* para $d = 0.12 \pm 0.05m$.

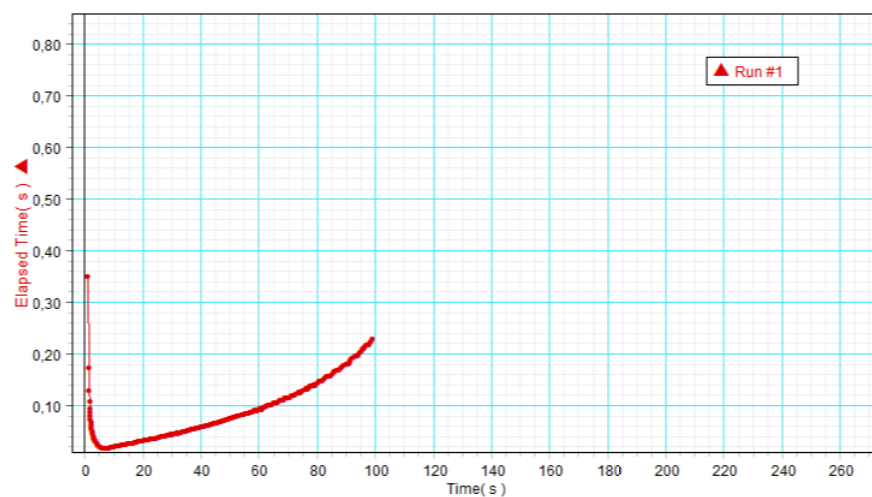


Figura A.6: *Elapsed time* para barra sem massas cilíndricas.