Métodos Matemáticos da Física 2018/19

Teste 1 12-04-2019

1.a) Diga quais as funções $y_n(x)$ utilizadas no desenvolvimento em série de Fourier complexa no intervalo $[-\ell, \ell]$ que satisfazem a condição fronteira $y_n(\ell) = y_n(-\ell)$.
b) Calcule o produto interno de funções $\langle y_n \,|\, y_n \rangle$ para n arbitrário.
c) Represente graficamente a função

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & -\pi \le x < 0 \\ \sin x\,, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

no intervalo $[-\pi, \pi]$ e determine a sua série de Fourier complexa nesse intervalo.
d) Aplique o teorema de Parseval para calcular o integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(x)\, dx\,.$$

Verifique se o resultado obtido coincide com o valor calculado pelo método de integração usual.

2.a) Determine as funções próprias do operador d^2/dx^2 que satisfazem as condições

$$y'(0) = 0\ , \quad y'(\ell) = 0\ .$$

b) Encontre pelo método de separação de variáveis as soluções $u(t, x)$ da equação de difusão que obedecem às condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0\ , \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0\ .$$

Explicite a expressão da solução geral da equação nessas condições fronteira.
c) Determine a solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que obedece às condições iniciais,

$$u(0, x) = A\, y_n(x)\ , \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0\ ,$$

onde $y_n(x)$ é uma função própria obtida na alínea a), com n arbitrário, e A é uma constante.