Métodos Matemáticos da Física — 2013/14

Exame de época especial — 17-07-2014

1. Considere a equação diferencial

$$(2x - x^2)\, y''(x) + (2 - 2x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [0, 2] \ .$$

a) Verifique se a equação está na forma de Sturm-Liouville e coloque-a nessa forma caso não esteja.
b) Defina, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado ao problema.
c) Mostre que as funções $y_1(x) = x - 1$, $y_2(x) = 3\,(x-1)^2 - 1$, são funções próprias, e determine os respetivos valores próprios.
d) Calcule os produto internos $\langle y_1 |\, y_1 \rangle$, $\langle y_1 |\, y_2 \rangle$, $\langle 2\,i\,y_1 + y_2 |\, y_1 \rangle$.

2.a) Determine a transformada de Fourier da transformada de Fourier de uma função arbitrária $f(x)$.
b) Defina a convolução de duas funções, $F(x) = (g * h)(x)$.
c) A transformada de Fourier de uma função gaussiana, $g(x) = e^{-x^2/a}$, é dada por $\tilde{g}(k) = \sqrt{\pi\, a}\ e^{-a\,k^2/4}$. Determine a transformada de Fourier da convolução $F(x) = (g * h)(x)$, sendo $h(x) = e^{-x^2/b}$.
d) Obtenha a expressão analítica da função $F(x)$.

3. Considere a equação diferencial,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [0, +\infty[\ ,$$

sujeita à condição fronteira $\lim_{y \to +\infty} u(x, y) = 0$.
a) Deduza a equação diferencial a que obedece a transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(k, y)$ e a solução geral da equação, $u(x, y)$.

4. Considere a equação diferencial não homogénea,

$$y'(x) + a\, y(x) = -f(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}_+ \ , \quad a \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

com a condição fronteira $y(0) = 0$.
a) Explicite a expressão da solução $y(x)$ em termos de uma função de Green $G(x, z)$.
b) Obtenha a função de Green $G(x, z)$ sabendo que satisfaz a equação

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, z) + a\, G(x, z) = -\delta(x - z) \ ,$$

impondo a condição fronteira consistente com a função $y(x)$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x) \ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$