Resolução do Teste de CDI 3 de 10/11/2018

1.(a) PVI $y' = \frac{3}{t}y + t^4 e^{2t} - 4t^2$, $y(1) = 4e^2$ (para $t>0$)

Trata-se de uma EDO linear de 1ª ordem:

(1) $y' - \frac{3}{t}y = t^4 e^{2t} - 4t^2$

Procura-se um factor integrante (F.I.):

$a(t) = -\frac{3}{t}$, $A(t) = -3\log t$; F.I.: $e^{-3\log t} = t^{-3}$.

Multiplicando a EDO (1) por t^{-3}, tem-se

$$\left(y'\frac{1}{t^3} - \frac{3}{t^4}y\right) = t e^{2t} - 4t^{-1} \Leftrightarrow \left(y\frac{1}{t^3}\right)' = t e^{2t} - 4t^{-1}$$

$$\Leftrightarrow y\frac{1}{t^3} = \int t e^{2t}\,dt - 4\log t = \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{2}\int e^{2t}\,dt - 4\log t$$

$$= \frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} - 4\log t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow y = t^3\left(\frac{1}{2} t e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} - 4\log t + c\right)$$

C.I.: $y(1) = 4e^2 \Leftrightarrow 4e^2 = 1.\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + 0 + c\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c = 4e^2 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{15}{4}e^2$.

Solução $y = t^3\left(\frac{1}{2}t e^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} - 4\log t + \frac{15}{4}e^2\right)$, $t>0$.

(b) (2) $y' = \frac{6(1+y^3)}{ty^2}$ para $t>0$.

O domínio desta EDO é $\{(t,y): t>0, y \neq 0\} = D$.

Com $f(t,y) = \frac{6(1+y^3)}{ty^2}$ em D, tem-se $f(t,-1) = 0$, $\forall t>0$, i.e.,

$y \equiv -1$ é uma solução de (2), definida para $t>0$.

Pelo T.E.U., qualquer outra solução não assume o valor -1.

A EDO é de variáveis separáveis. Para $y \neq -1$, vem

$$(2) \Leftrightarrow \frac{y'y^2}{(1+y^3)} = \frac{6}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log|1+y^3| = 6\log t + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \log|1+y^3| = 18\log t + K = \log(t^{18}) + K \quad | \text{ para } K = 3C \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow |1+y^3| = t^{18}.e^K \Leftrightarrow 1+y^3 = K_1 t^{18}, \text{ onde } K_1 = \pm e^K$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{K_1 t^{18} - 1}.$$

Vejamos o domínio destas soluções, recordando que se considera apenas $t>0$ e que $y \neq 0$.

- Se $K_1 < 0$, vem $K_1 t^{18} - 1 < 0$, pelo que a solução está definida em $]0, +\infty[$.
- Se $K_1 = 0$, obtém-se de facto a solução $y = -1$, já considerada, definida em $]0, +\infty[$.
- Se $K_1 > 0$, terá de ser $K_1 t^{18} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow t^{18} \neq 1/K \Leftrightarrow t \neq \frac{1}{\sqrt[18]{K}}$, pelo que se obtém soluções em $]0, \frac{1}{\sqrt[18]{K}}[$ e em $]\frac{1}{\sqrt[18]{K}}, +\infty[$.

(c) (3) EDO $y'' + y = 4\cos^2 t$.

Procure-se 1º a solução geral da eq. homogénea $y'' + y = 0$.

Eq. caract: $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i$

Sol. geral: $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Procure-se agora solução de (3) pelo MVC:

$$y = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t,$$

onde $c_1(t), c_2(t)$ devem satisfazer o sistema

$$\begin{cases} c_1' \cos t + c_2' \sin t = 0 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t = 4\cos^2 t \end{cases}$$

Note-se que o wronskiano é $\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Usando a regra de Cramer, tem-se

$$c_1' = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 4\cos^2 t & \cos t \end{vmatrix} = -4 \sin t \cos^2 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{4}{3}\cos^3 t + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R};$$

$$c_2' = 1 \begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 4\cos^2 t \end{vmatrix} = 4\cos^3 t = 4\cos t(1 - \sin^2 t)$$

$$\Rightarrow c_2 = 4\int \cos t \, dt - 4\int \cos t \sin^2 t \, dt$$

$$= 4 \sin t - \frac{4}{3}\sin^3 t + K_2, \quad K_2 \in \mathbb{R}$$

Finalmente, obtém-se a expressão geral das soluções da EDO dada por

$$y = \left(\frac{4}{3}\cos^3 t + K_1\right)\cos t + 4\left(\sin t - \frac{4}{3}\sin^3 t + K_2\right)\sin t$$

$$= K_1 \cos t + K_2 \sin t + \frac{4}{3}(\cos^4 t - \sin^4 t) + 4\sin^2 t, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Outro modo: Em vez de usar o MVC de Lagrange para resolver a eq. completa, poder-se-ia usar o MCI. Com efeito, note-se que $4\cos^2 t = 2(1 + \cos 2t)$, pelo que se poderia procurar uma solução particular da forma

$$y_p = A + B\cos(2t) + C\sin(2t).$$ (A, B, C constantes a determinar).

Ou ainda: Nesta situação, resulta também procurar uma solução particular da forma $y_p = A\cos^2 t + B\sin^2 t$, c/ A, B constantes.

2. $x' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} x$.

Com $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$, começa-se por determinar os valores pp de A:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -5 \\ 5 & \lambda + 8 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+8) + 25 =$$
$$= \lambda^2 + 6\lambda - 16 + 25$$
$$= \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2$$

Então existe apenas o valor pp $\lambda = -3$ (duplo).

Procure-se um vetor pp associado a $\lambda = -3$:

$(A + 3I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ - \end{cases}$ c/ $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Por exemplo, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ é vector pp

Obtém-se desde já uma solução do sistema, dada por

$$x_1(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Procure-se agora um vector $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ tal que $(A + 3I)u = v$. Vem $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & -5 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 5u_2 = 1 \\ - \end{cases}$

E.g. com $u_1 = 0$, obtém-se o vector $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix}$, e vem a solução

$$X_2(t) = e^{-3t}(u + tv) = e^{-3t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}\right)$$
$$= e^{-3t}\begin{bmatrix} t \\ 1/5 - t \end{bmatrix}$$

Uma m.f.s. do sistema é dada por

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & t\,e^{-3t} \\ -e^{-3t} & (1/5 - t)e^{-3t} \end{bmatrix},$$ sendo as soluções da forma $x = X(t)\,c$, para $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

3. (a) A
(b) C
(c) A.

4. (a) (i) Com a notação habitual, tem-se $\boxed{L=2}$, para $a_0 = a_0(g)$,

$\frac{a_0}{2} = -1$ e $a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$, pelo que $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 2a_0 = -4$.

(ii) O Polinómio de Fourier de g é

$$P_3(x) = -1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin(\pi x) + \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right).$$

Com a notação usual, $a_0 = -2$, $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = \frac{2}{3}$ e $a_m = 0$ para $m = 2, 3, \ldots$ Tem-se

$$\|P_3\|^2 = 2\left(\frac{(-2)^2}{2} + 1 + 2^2 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 2\left(8 + \frac{4}{9}\right) = \frac{2.76}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|P_3\| = \sqrt{\frac{2\times 76}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{38}.$$

(b) Escreve-se a série de Fourier de $f(x)$, de $f(-x)$ e de $g(x) := f(x) - f(-x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$f(-x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{m\geq 1} a_n \cos(nx) - b_n \sin(nx)$$

$$g(x) \sim \sum_{m\geq 1} 2b_m \sin(nx).$$

Pela identidade de Parseval, vem agora

$$(*) \quad \|g\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \pi\left(\sum_{m\geq 1} 4b_n^2\right) = 4\pi\sum_{m\geq 1} b_m^2.$$

Mas, a função $g(x)$ é ímpar, já que

$$g(-x) = f(-x) - f(x) = -\big(f(x) - f(-x)\big) = g(x),$$

pelo que $g^2(x)$ é uma função par. Assim, de $(*)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = 2\int_0^{\pi} g(x)^2\,dx \Rightarrow \int_0^{\pi} g(x)^2\,dx = 2\pi\sum_{m\geq 1} b_m^2.$$

Outro modo: Como acima, poderíamos começar por observar que a função $g(x)$ é ímpar, pelo que, sendo $a_n^* = a_n^*(g)$, $b_n^* = b_n^*(g)$ os coeficientes de Fourier de g em $[-\pi, \pi]$, se tem $a_m^* = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Calculem-se agora os coef. de Fourier b_m^* de g:

$$b_m^* = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin(nx)\,dx\right]$$

$$\underset{\substack{\text{MV. no } u=-x \\ \text{no integral}}}{=} b_m - \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi}(-1)f(u)\sin(-nu)\,du = b_m + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nu)\,du = b_m + b_m = 2b_m.$$

Logo, pela id. Parseval, $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \pi\sum_{m\geq 1} 4b_m^2 \underset{g(x)^2 \text{ par}}{\Rightarrow} \int_0^{\pi} g(x)^2\,dx = 2\pi\sum_{m\geq 1} b_m^2.$