Métodos Matemáticos da Física — 2018/19

Exame 2 — 06-07-2019

1. As funções $y_n(x) = e^{i\,n\,x}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $x \in [0, 2\pi]$, satisfazem as condições fronteira, $y_n(\ell) = y_n(0)$, $y_n'(\ell) = y_n'(0)$, onde $\ell = 2\pi$.

a) Verifique se $y_n(x)$ são funções próprias dos operadores derivada e segunda derivada, d/dx, d^2/dx^2, e justifique se os respectivos valores próprios são ou não degenerados.

b) Calcule os produtos internos $\langle y_n | y_n \rangle$.

c) Escreva a expressão que permite calcular os coeficientes c_n da série de Fourier, $\sum_n c_n\, y_n(x)$, de uma função $u(x)$ arbitrária.

d) Determine a série de Fourier da função $f(x) = e^{i\,x/2}$.

e) Justifique que valores deve ter a série de Fourier de $f(x)$ em $x = 0$ e $x = \pi$.

f) Explicite a expressão da série de Fourier em $x = \pi$ e utilize-a para obter o valor de π como uma série numérica.

2.a) Coloque a equação diferencial

$$y''(x) - 2x\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0\ , \qquad x \in \mathbb{R}\ ,$$

na forma de Sturm-Liouville e defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema.

b) Verifique que as funções $y_1(x) = x$, $y_3(x) = a_1\, x + x^3$, são ambas soluções da equação para um certo valor de a_1, e determine os respectivos valores próprios.

c) Calcule o produto interno $\langle y_1 |\, y_3 \rangle$, para um coeficiente a_1 arbitrário, sabendo que

$$F_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^n\, dx = \frac{2}{n+1} F_{n+2}\ , \qquad F_0 = \sqrt{\pi}\ .$$

O que tem de especial o produto interno obtido para o valor de a_1 encontrado na alínea b)? Seria de esperar e porquê?

3.a) Represente graficamente as funções $f(x) = \Theta(x-1) - \Theta(x-2)$, $g(x) = x^2\, f(x)$.

b) Obtenha as expressões simplificadas das funções generalizadas $f'(x)$, $g'(x)$.

c) Calcule o integral $\int_0^3 g'(x)\, dx$ usando a expressão de $g'(x)$ obtida na alínea b) e confronte com o resultado previsto considerando apenas a expressão de $g(x)$.

4. A função $u(x, y)$ definida no domínio $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\ .$$

a) Escreva $u(x, y)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(k, y)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(k, y)$.

b) Determine a solução $\tilde{u}(k, y)$ e a solução geral $u(x, y)$ que sejam ambas finitas no domínio indicado $y \geq 0$.

c) Obtenha a expressão da solução $u(x, y)$ em termos de x, y para $y > 0$, que satisfaz a condição fronteira $u(x, 0) = \delta(x)$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\ , \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk\ ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\, \delta(x)\ , \qquad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$