Métodos Matemáticos da Física 2018/19

Teste 2 10-05-2019

1. Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + (2-x)\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

a) Coloque a equação sob a forma de Sturm-Liouville.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema e calcule os produtos internos $\langle u|u\rangle$, $\langle u|v\rangle$, onde $u(x) = 1$, $v(x) = x$.
c) Admita que a solução $y(x)$ da equação acima se pode escrever como uma série de potências de x. Deduza a relação de recorrência entre os seus coeficientes e escreva a expressão da solução encontrada até à ordem x^4 para um valor de λ arbitrário.
d) Determine os valores próprios associados a funções próprias, $P_n(x)$, dadas por polinómios de grau n bem definido. Obtenha as funções próprias $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ admitindo que $P_n(0) = 1$.
e) Calcule o produto interno $\langle P_0|P_1\rangle$ e diga se esperava o resultado obtido e porquê.

2.a) Identifique o domínio das coordenadas angulares (θ, ϕ) e escreva a expressão do produto interno $\langle u|v\rangle$ de funções $u(\theta,\phi)$, $v(\theta,\phi)$ dessas mesmas coordenadas.
b) Indique os valores possíveis dos números l, m que indexam as funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$, explicitando as restrições pertinentes. Diga que valores tomam os produtos internos $\langle Y_l^m \,|\, Y_{l'}^{m'}\rangle$ para números l, m, l', m' arbitrários.
c) Uma certa função harmónica esférica é dada por $Y(\theta,\phi) = c\,(3\cos^2\theta - 1)$. Determine o valor absoluto da constante c.
d) Qualquer função das coordenadas angulares pode ser expandida como uma combinação linear de funções harmónicas esféricas:

$$u(\theta,\phi) = \sum_{l,m} c_{lm}\, Y_l^m(\theta,\phi)\ .$$

Deduza nestas condições o valor do produto interno $\langle Y_l^m|u\rangle$ para quaisquer índices l, m.