MAT. FINITA e MAT. DISCRETA 2018/2019-

Prof. Ilda Perez

Parte III: Grafos planares

1. Grafos planares - generalidades

Supomos que todos os alunos já tiveram uma breve introdução a grafos.

Notações. Um grafo é um par $G = (V, A)$, em que $V = V(G)$ é um conjunto (finito), o conjunto dos *vértices de* G, e $A = A(G)$ é o conjunto das *arestas de* G. Cada aresta $a \in A$ é representada pelos pares ordenados de vértices que a constituem $a = \{(u, v), (v, u)\}$. Escreveremos simplesmente $a = uv$, $u, v \in V$ eventualmente $a = uu$, neste caso último caso .a aresta a é um *lacete* de G.

Designaremos vértices e arestas por letras minúsculas, para os vértices usamos as últimas letras do alfabeto: $u, v, \ldots$... e para as arestas pelas primeiras letras do alfabeto letras $a, b, \ldots$. As arestas serão tambem identificadas pelo par de vértices correspondente.

O **grau de um vértice** $v \in V$ denota-se $deg(v)$ e é por definição o número de vezes que v é extremidade de uma aresta, isto é:

$$deg(v) := |\{e \in A : e = uv,\ v \neq u\}| + 2 \times |\{e \in A : e = uu\}|$$

tendo-se,

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \times |A|$$

Recordamos ainda que:

Um **caminho de comprimento** k **em** G é uma sucessão de $(k+1)$ vértices $\Gamma = v_1 \ldots v_k v_{k+1}$ tais que $v_i v_{i+1}$ é uma aresta de G qualquer que seja $i \in \{1, \ldots, k\}$ e Γ não repete arestas (caminho simples).

Os vértices v_1 e v_{k+1} são as extremidades do caminho Γ e diz-se que Γ é um caminho de v_1 a v_{k+1} (ou vice-versa). Se $v_1 = v_{k+1}$ o *caminho é fechado* e chama-se um **ciclo** de G.

Um *caminho é elementar* se não passa duas vezes pelo mesmo vértice, um ciclo elementar é um **circuito** do grafo.

Um grafo G é **conexo** se quaisquer que sejam os dois vértices $u, v \in V$ existe um caminho em G de u a v.

Dois grafos $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ são **isomorfos** se existe uma bijeção $f : V \longrightarrow V'$ tal que $uv \in A$ se e só se $f(u)f(v) \in A'$.

Qualquer grafo pode ser representado gráficamente por um desenho no plano construido da seguinte forma: os vértices do grafo são representados por pontos do plano e as arestas por curvas simples [1] unindo os pontos que representam os seus vértices extremidades. Claro um mesmo grafo é representado por diferentes desenhos no plano.

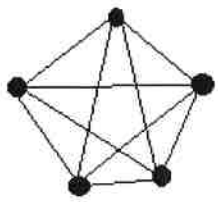
Definição. Neste capítulo estudamos **grafos planares** que são os grafos que têm uma representação gráfica no plano satisfazendo a seguinte condição suplementar:

(P) Sendo l_a e l_b curvas simples do plano que representam arestas a e b do grafo, l_a e l_b intersectam-se apenas em pontos do plano que representem vértices comuns a ambas as arestas a e b .

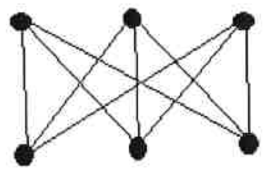
A um desenho do grafo satisfazendo a condição (P) chamamos **representação topológica de** G. Chamaremos **grafo plano** a qualquer desenho que seja a representação topológica de um grafo planar.

Na figura estão representados os grafos completos K_4 e K_5 e o grafo bipartido completo $K_{3,3}$. Quais são grafos planares ?

K_4



K_5



$K_{3,3}$

1.1. Como testar a planaridade de um grafo?

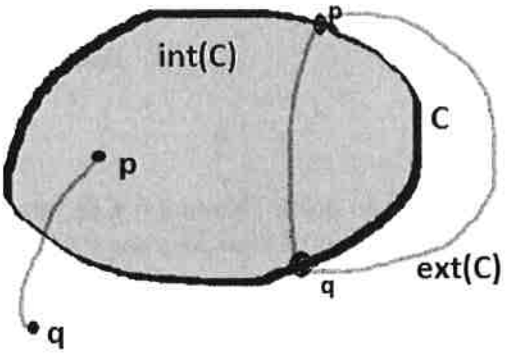
Há vários algoritmos eficientes para o fazer. Todos eles se baseiam em dois teoremas de demonstração não trivial *o teorema da Curva de Jordan* e o *teorema de Kuratowski* que enunciamos a seguir e que exemplificamos como

[1] Uma curva simples do plano é uma curva que não se autointersecta

utilizar para obter uma representação topológica de um grafo, se ele for planar, ou para mostrar que uma tal representação não existe.

Teorema da curva de Jordan. *Toda a curva C, simples e fechada, do plano divide o plano em duas regiões, uma limitada, a região interior de C que se denota $int(C)$ e a outra não limitada, a região exterior de C, $ext(C)$. Qualquer curva do plano unindo um ponto $p \in int(C)$ a um ponto $q \in extC$ intersecta a curva C em pelo menos um ponto.*

Dois pontos $p, q \in C$ da curva C podem unir-se por curvas que com excepção dos pontos p e q estão totalmente contidas numa das regiões: $int(C)$ ou $ext(C)$.



Exemplos. Aplicação do Teorema da Curva de Jordan para deduzir da planaridade dos grafos da Fig. 1:

(i) K_4 é planar.

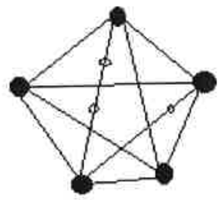
(ii) K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

(K_5 feito na aula teórica, $K_{3,3}$ fica como exercício.)

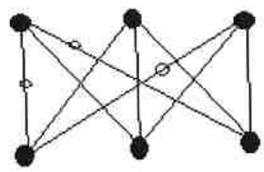
Ao contrário do teorema da Curva de Jordan que tem um carácter geométrico, o próximo teorema, o *Teorema de Kuratowski* caracteriza grafos planares de forma puramente combinatória, a partir de subgrafos [2] proibidos.

Teorema de Kuratowski *Um grafo G é planar se e só se não contem nenhum subgrafo isomorfo a uma configuração do tipo K_5 ou $K_{3,3}$.*

Configuração de tipo K_5 ou de tipo $K_{3,3}$: é um grafo obtido subdividindo arestas de K_5, respectivamente de $K_{3,3}$, introduzindo sobre elas vértices de grau 2.



tipo K_5



tipo $K_{3,3}$

A parte fácil da demonstração deste Teorema é a de que um grafo que contenha um subgrafo de tipo K_5 ou de tipo $K_{3,3}$ não é planar. Caso o fosse K_5 e $K_{3,3}$ seriam planares o que já provámos que não acontece.

A implicação contrária: de que um grafo que não é planar contem um subgrafo do tipo proibido não será feita (podem consultar, por exemplo B. Mohar, C. Thomassen, *Graphs on Surfaces*)

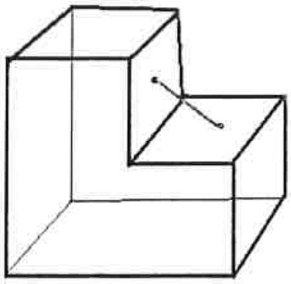
Grafos planares e esqueletos de poliedros convexos.

Uma classe importante de grafos planares é constituida pelos grafos que descrevem as incidências vértices/arestas/faces de certos poliedros, nomeadamente dos poliedros convexos.

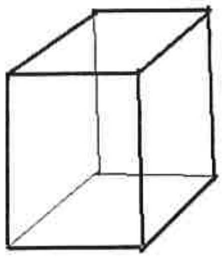
---

[2] Subgrafo de um grafo $G = (V, A)$ é qualquer grafo $G' = (V', A')$ em que $V' \subseteq V$ e $A' \subseteq A$

Informalmente um poliedro é um sólido geométrico cujas faces são polígonos. Um poliedro é **convexo** se contem o segmento de reta que une dois quaisquer dos seus pontos. Na figura estão representados dois poliedros o da esquerda não é convexo e o prisma da direita é.



não convexo



convexo

De um modo mais rigoroso: um **poliedro convexo** é uma região limitada do espaço que é a interseção de um número finito de semiespaços (os semiespaços definidos pelos planos que contêm as faces do poliedro).

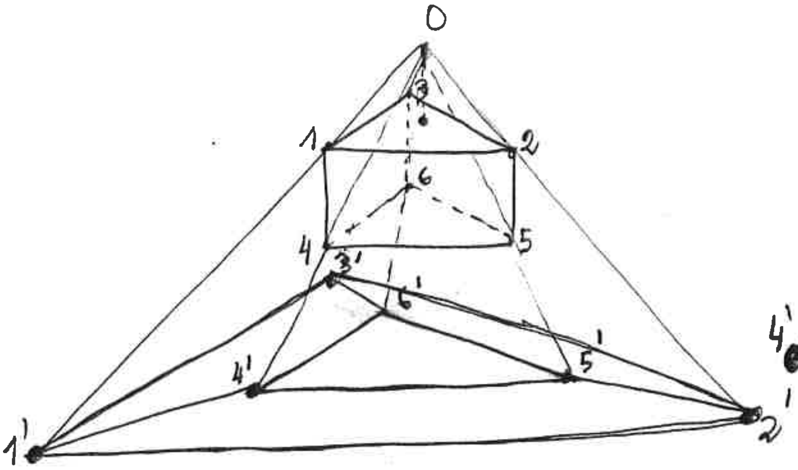
A um poliedro **P** está canónicamente associado um grafo, o **esqueleto de P** que se denota $skel(\mathbf{P}) = (V, A)$, cujos vértices são os vértices do poliedro e cujas arestas são as arestas do poliedro. Tendo-se o seguinte Teorema, cuja demonstrção se esboça geométricamente.

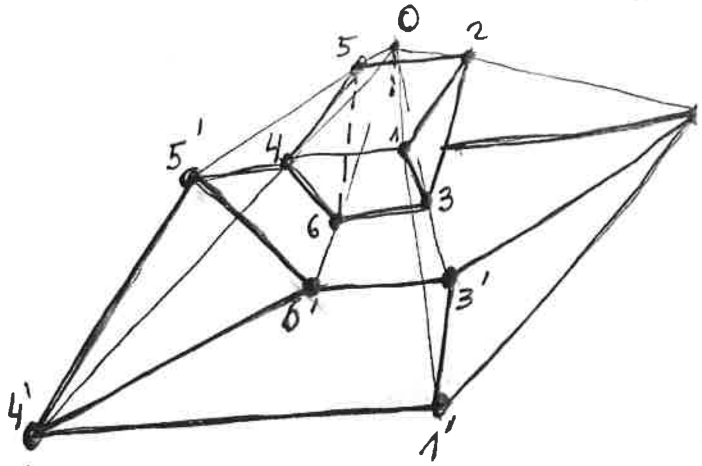
Teorema *O esqueleto de um poliedro convexo é um grafo planar.*

Esboço de Dem. Obtem-se uma representação topológica no plano do esqueleto de **P** projectando o esqueleto (vértices e aresta de **P**) por um ponto O "muito próximo de um ponto interior a uma face F" num plano π. O plano π deve ser escolhido de tal modo todas as semiretas de origem O e que passem por vértices do poliedro **P** intersectem π.

Note que a face infinita do grafo planar topológico é limitada pela projeção da face mais próxima do onto **O**.

Exemplos.





Nem todos os grafos planares são esqueletos de poliedros convexos. Por exemplo grafos planares que tenham lacetes ou arestas em paralelo não podem ser esqueletos de poliedros convexos. Os grafos sem lacetes nem arestas em paralelo chamam-se **grafos simples**.

Dado um grafo planar como verificar se ele é ou não o esqueleto de um poliedro?

Em caso afirmativo como construir um poliedro que o tenha como esqueleto?

O próximo Teorema que damos e utilizaremos sem demonstração permite responder integralmente à primeira pergunta. A sua demonstração (ver, por exemplo, B. Grunbaum "Convex polytopes") fornece tambem um algoritmo para, caso exista, construir um poliedro convexo que tenha por esqueleto o grafo dado.

1º Teorema de Steinitz (caracterização dos esqueletos de poliedros convexos)

Um grafo é o esqueleto de um poliedro convexo se e só se é um grafo planar, simples, com pelo menos 4 vértices, e é 3-conexo.

Um grafo é 3-conexo se qualquer que seja o par de vértices $u, v \in V$ o subgrafo que se obtem de G removendo os vértices u e v e as arestas incidentes nalgum destes vértices é ainda um grafo conexo.

2. Propriedades dos grafos planares

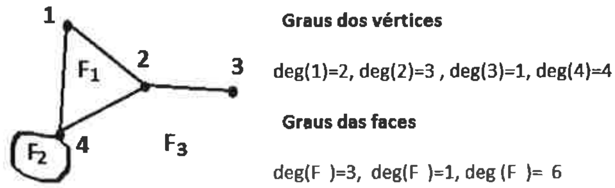
2.1. Faces e Dual de um grafo planar

Seja $G = (V, A)$ uma representação planar de um grafo.

As arestas de G dividem o plano em regiões - **as faces de G**. Dois pontos estão na mesma região se existe uma curva do plano que os une sem intersectar arestas de G. Como os nossos grafos são finitos uma das faces é sempre uma região ilimitada , *a face infinita*.

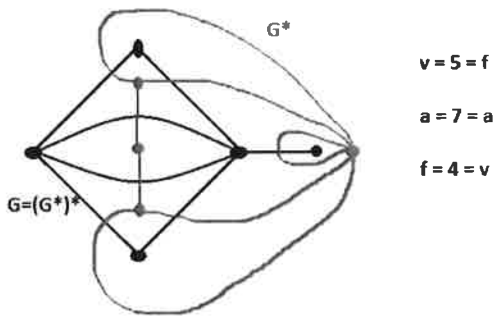
O grau de uma face F de G denota-se $deg(F)$ e é o número de arestas de F, as arestas contidas em F contam das vezes. Verificando-se a igualdade (justifique!):

$$\sum_{F\ face\ de\ G} deg(F) = 2 \times |A|$$



O grafo G define um outro grafo planar, G^*, o dual de G. Os vértices de G^* são as faces de G. Há tantas arestas F_1F_2 quantas as arestas comuns às faces F_1 e F_2 em G. A cada aresta a de G totalmente contida numa única face F, corresponde em G^* um lacete $a^* = FF$.

Exemplo. Construção do grafo planar dual



Na figura representámos a construção do dual.

Repare, no caso de G ser um grafo conexo, nas igualdades:

n^o de faces de G = n^o de vértices de G^*.

n^o de arestas de G = n^o de arestas de G^*.

n^o de vértices de G = n^o de faces de G^*.

e ainda na igualdade: $(G^*)^* = G$.

2.2. Fórmula de Euler para grafos planares

Teorema (Fórmula de Euler)

Seja $G = (V, A)$ um grafo plano conexo.

Designemos por v, a, f os números, respectivamente de vértices, arestas e faces de G. Então:

$$v - a + f = 2$$

Dem. Por indução no número de arestas. Feita na teórica.

Corolário 1 *Seja $G = (V, A)$ um grafo plano, com c componentes conexas.*

Designemos por v, a, f os números, respectivamente de vértices, arestas e faces de G. Então:

$$v - a + f = c + 1$$

Corolário 2 *Seja $G = (V, A)$ um grafo planar, simples e conexo .*

Designemos por v, a os números, respectivamente de vértices, arestas de G. Então, se $v \geq 3$:

$$a \leq 3v - 6$$

Dem. fazer na TP

Corolário 3 *Qualquer grafo planar G tem um vértice de grau menor ou igual a 5.*

Dem. fazer na TP.

Steinitz antes de caracterizar os esqueletos de poliedros convexos (no que chamámos 1 Teorema de Steinitz) tinha já caracterizado os triplos (v, a, f) que correspondem aos números de vértices, arestas e faces de poliedros convexos no seguinte Teorema:

2º Teorema de Steinitz (Caracterização dos triplos (v, a, f) de poliedros convexos)

Um triplo de nmeros naturais (v, a, f) é o triplo de vértices, arestas e faces de um poliedo convexo $\mathbf{P}$ se e só se satisfaz as três condições seguintes:

(i) $v - a + f = 2$ *(Fórmula de Euler)*

(ii) $4 \leq v \leq 2a/3$.

(iii) $4 \leq f \leq 2a/3$

2.3. Aplicações da fórmula de Euler

1. Teorema de Descartes (Gauss-Bonnet discreto)

Seja $\mathbf{P}$ um poliedro e u um vértice de $\mathbf{P}$.

Qualquer que seja a face F de $\mathbf{P}$ que contenha u designamos por $\angle_F(u)$ o ângulo interno de F com vértice u.

Define-se **curvatura de P (ou deficiência angular) no vértice** u e denota-se $\delta(u)$ à diferença $\delta(u) = 2\pi - \sum_{F \text{ face de } \mathbf{P} u \in F} \angle_F(u)$.

Chamaremos **curvatura total de P-** $K(\mathbf{P})$- soma das curvaturas de P em todos os vértices: $K(\mathbf{P}) = \sum_{u \text{ vertice de } \mathbf{P}} \delta(u)$.

O Teorema seguinte mostra que todos os poliedros convexos têm a mesma curvatura total que é 4π = área da superfície da esfera de raio 1 =a curvatura da esfera!

Teorema de Descartes (Gauss-Bonnet discreto)

Seja **P** *um poliedro convexo. Então:*

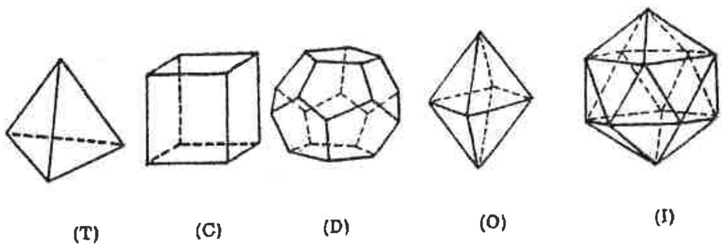
$$K(P) := \sum_{u \text{ vertice de } \mathbf{P}} \delta(u) = 4\pi$$

Dem. Exercício a fazer nas TP.

2. Unicidade dos poliedros convexos regulares - os 5 sólidos platónicos

Um poliedro convexo é regular , se as suas faces são polígonos regulares todos iguais (o que implica que as arestas sejam todas iguais) e os seus vértices têm todos o mesmos grau.

Teorema (Sólidos Platónicos) *Existem apenas* 5 *poliedros convexos regulares: o tetaredro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro*



Dem. Exercício a fazer na TP.

3. Jogo das couves e jogo das couves de Bruxelas (para pensarem)

Jogo das couves (Sprouts) - jogo inventado por J.H. Conway e M. S. Paterson anos 1960 (ver Berlekamp-Conway-Guy *Winning ways for your mathematical Plays"*)

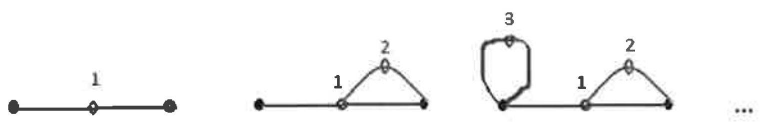
É um jogo para dois jogadores que jogam alternadamente introduzindo uma nova aresta e um novo vértice num grafo plano.

A posição inicial do jogo são n- pontos marcados numa folha de papel.

Quando chega a sua vez qualquer dos jogadores escolhe um par de vértices de grau menor que 3 e une-os por uma curva simples que não contenha mais nenhum ponto do grafo já desenhado. Sobre a curva traçada o jogador insere um novo vértice de grau 2. O jogador seguinte joga exactamente com as mesmas regras no novo grafo plano.

Perde o primeiro jogador que não puder jogar.

Exemplo de jogo



O jogo acaba sempre? obter limites inferiores ou superiores para o número de jogadas? Existe estratégia ganhante o primeiro ou o segundo jogador? ...

A variante deste jogo conhecida por "Jogo das couves de Bruxelas" analisa-se via Fórmula de Euler.

4. Número cromático de um grafo planar e Teorema das 4 cores.

Uma **k- coloração de um grafo** $G = (V, A)$ é uma partição do conjunto dos vértices em k subconjuntos, $V = V_1 \uplus V_2 \uplus \ldots \uplus V_k$, satisfazendo a seguinte condição: nenhuma aresta de G tem ambos os vértices no mesmo conjunto V_i. Diz-se que o conjunto V_i é o conjunto dos vértices de cor i.

O **número cromático de um grafo** G é o menor número $k \in \mathbb{N}$ para o qual o grafo admite uma k- coloração. Dito de outra maneira é o número cromático é o menor número de cores necessário para colorir os vértices do grafo de modo a que vértices adjacentes (extremidades de uma aresta) fiquem de cores diferentes. O número cromático de G denota-se (G) ou $\gamma(G)$.

A célebre Conjectura das 4 cores, surgiu da observação feita em meados dos século XIX por um estudante liceal, Francis Guthrie, ao seu irmão mais velho, aluno universiário de matemtica, que a tentou explicar e, não conseguindo, a levou ao seu professor de Morgan (lógico - leis de Morgan). A observao inicial de F. Guthrie tornou-se rápidamente na seguinte conjectura:

Conjectura das 4 cores (G. Guthrie 1952)*Bastam 4 cores para colorir as faces de um qualquer grafo planar G de modo a que faces adjacentes (com pelo menos uma aresta comum) tenham cores diferentes.*

Passando ao dual, a conjectura enuncia-se da seguinte maneira:

Qualquer que seja o grafo planar simples G, o número cromático de G é $\chi(G) \leq 4$.

A Conjectura teve diversas falsas demonstrações, algumas, mesmo erradas com consequências interessantes, tal como a de Kempe em 1879 cujo argumento central é a base da demonstração do teorema das 5 cores com que concluímos esta passagem pelos grafos planares.

A Conjectura passou a **Teorema das 4 cores**, mais de 100 anos depois, em 1976, por K. Appel e W. Hanken que encontraram uma maneira de reduzir os casos a analisar a um número finito, gerados e analisados por computador. Esta demonstração inicial foi revista e muito simplificada por Robertson-Sanders- Seymour-Thomas em finais dos anos 90. O desenvolvimento de linguagens e programas de demonstração formal permitiu obter uma nova demonstração computacional mas esta verificável.

O texto que se segue é extraído do artigo de G. Gonthier, "Formal Proof- the four-color Theorem " *Notices of the AMS*, vol. 55, no 11, Dec. 2008), sobre o sistema de demonstração formal que desenvolveu e utilizou para obter uma demonstração totalmente verificável.

For some thirty years, computer science has been working out a solution to this problem: formal program proofs. The idea is to write code that describes not only what the machine should do, but also why it should be doing ita formal proof of correctness. The validity of the proof is an objective mathematical fact that can be checked by a different program, whose own validity can be ascertained empirically because it does run on many inputs. The main technical difficulty is that formal proofs are very difficult to produce, even with a language rich enough to express all mathematics.

In 2000 we tried to produce such a proof for part of code from [13], just to evaluate how the field had progressed. We succeeded, but now a new question emerged: was the statement of the correctness proof (the specification) itself correct? The only solution to that conundrum was to formalize the entire proof of the Four-Color

Theorem, not just its code. This we finally achieved in 2005.

While we tackled this project mainly to explore the capabilities of a modern formal proof systemat first, to benchmark speedwe were pleasantly surprised to uncover new and rather elegant nuggets of mathematics in the process. In hindsight this might have been expected: to produce a formal proof one must make explicit every single logical step of a proof; this both provides new insight in the structure of the proof, and forces one to use this insight to discover every possible symmetry, simplification, and generalization, if only to cope with the sheer amount of imposed detail.

Antes de provarmos o Teorema das 5 cores, um Teorema que fornece um limite superior para o número cromático de qualquer grafo em função do máximo dos graus dos vértices.

Teorema fraco de Brooks

Seja G um grafo simples. Se o máximo dos graus dos vértices de G é d, então o número cromático de G é menor ou igual do que $d+1$: $\chi(G) \leq d+1$.

Dem. Por indução no número de vértices.

Teorema das 5 cores

Qualquer que seja o grafo planar G verifica a desigualdade: $\chi(G) \leq 5$

Dem. Por indução no número de vértices, usando o facto de que qualquer grafo planar tem um vértice de grau menor ou igual a 5 e "argumento das cadeias alternadas de Kempe".

A demonstração será feita na teórica.