Métodos Matemáticos da Física 2013/14

Exame 1ª época 12-06-2014

1. Considere as funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$.
a) Calcule o produto interno $\langle y_n | y_m \rangle$ para $n = m$. Tome uma função peso $\rho(x) = 1$.
b) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão em série de uma função, $u(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$, admitindo que as funções $y_n(x)$ são ortogonais.
c) Determine os coeficientes c_n da série da função $u(x) = \cos a\,x$, admitindo que $a\,\ell/\pi \notin \mathbb{Z}$.
d) Obtenha a função $u(x)$ como uma série de senos e cosenos.

2. Considere a equação diferencial

$$(2x - x^2)\, y''(x) + (2 - 2x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [0, 2] \ .$$

a) Verifique se a equação está na forma de Sturm-Liouville. Coloque-a nessa forma caso não esteja.
b) Defina, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado ao problema.
c) Determine as funções próprias $y_1(x)$, $y_2(x)$, dadas por polinómios de graus $n = 1$ e $n = 2$ respetivamente, assim como os seus valores próprios. Considere $y_n(0) = 1$.

3. Considere a equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\,\alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \ .$$

a) Deduza a equação diferencial a que obedece a transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(t, k)$ e a solução geral da equação, $u(t, x)$.
c) Calcule $\tilde{u}(0, k)$ e determine $u(t, x)$ dada a condição inicial, $u(0, x) = \cos a\,x$.

4. Considere a equação diferencial não homogénea

$$i\,y'(x) + a\,y(x) = -f(x) \ , \qquad x \in [-\ell, +\ell] \ , \qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

a) Explicite a expressão de uma solução particular $y(x)$ dada em termos de uma função de Green $G(x, z)$.
b) Deduza a equação diferencial a que satisfaz a função de Green $G(x, z)$.
c) Obtenha a função de Green $G(x, z)$, admitindo que

$$G(x, z) = y_h(x - z)\,\Theta(x - z) \ ,$$

onde $y_h(x)$ é uma solução da equação homogénea.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \ , \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\,\delta(x) \ , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$