



MEDIÇÕES E INCERTEZAS EXPERIMENTAIS¹

1 Introdução

Medir é comparar uma grandeza com outra da mesma espécie que se toma como unidade. Esta comparação pode ser feita diretamente, por exemplo medindo um comprimento com uma régua, ou indiretamente, utilizando um instrumento de medida que permite obter um valor numérico para a grandeza (o que implica ter sido realizada uma calibração prévia desse instrumento utilizando a grandeza da mesma espécie que define a unidade ou uma fração dela - um padrão). O resultado da medida é assim um valor numérico seguido de uma unidade.

Uma medida experimental consiste assim na utilização de um instrumento de medida para medir uma grandeza e corresponde a uma interação entre o instrumento de medida e o fenómeno caracterizado pela grandeza que se mede. Em muitos casos esta interação pode mesmo alterar significativamente o resultado da grandeza a medir. (Por exemplo não é correto medir a temperatura de 1 cm³ de água num dado instante, introduzindo um termómetro de mercúrio com 1 cm³ que se encontra a uma temperatura diferente, nem usar uma craveira para medir a espessura de uma lâmina de borracha). É necessário saber quantificar essa influência e escolher o instrumento adequado.

Os instrumentos de medida podem também ser classificados de acordo com a forma como é apresentado o valor da medição, em analógicos (valor traduzido numa escala que varia continuamente com uma relação proporcional à grandeza medida) ou digitais (escala numérica onde o valor aparece representado por dígitos).

Assim numa medida experimental com um instrumento de medida, esse instrumento transforma um sinal de entrada X (grandeza a medir) num sinal de saída Y (valor numérico com unidade respetiva).

O processo de calibração do instrumento consiste na medida de grandezas da mesma espécie X , *padrões*, com as quais se constrói uma representação gráfica, muitas vezes traduzida por uma relação analítica, que constitui a *curva de calibração* do instrumento.

A *resolução ou poder resolvente* do instrumento define-se como o menor ΔX que pode medir, ou seja, que corresponde a uma variação ΔY mensurável pelo instrumento na escala mais sensível.

¹ Maria Margarida Cruz e Rui Agostinho

O valor numérico obtido numa medição experimental, x_{exp} , não é o valor exato da grandeza que se pretende determinar. Está limitado pela precisão do instrumento e do processo de medida. Define-se **erro absoluto** como o módulo do desvio entre o valor medido x e o valor verdadeiro x_0 da grandeza: $|x - x_0|$. Como o valor verdadeiro não é conhecido, determina-se frequentemente um limite superior do erro, $|\Delta x|$, para medir a incerteza associada e dá-se como resultado da medida o intervalo $x_{\text{exp}} \pm |\Delta x|$, onde o valor verdadeiro da grandeza é considerado estar contido ².

Quando a grandeza a medir não apresenta flutuações maiores que a resolução do instrumento de medida (menor valor que é possível medir com ele), o valor que se obtém na medição é sempre o mesmo e limitado por essa resolução, devendo ser tomado como incerteza da medida a incerteza da escala do instrumento.

Quando a grandeza a medir apresenta flutuações da ordem de grandeza ou superiores à resolução do instrumento de medida, a incerteza da medida não é limitada pelo instrumento, mas deve ser calculada quantificando as flutuações.

Assim o resultado de uma medida experimental não é apenas um valor numérico seguido de uma unidade, mas um intervalo de valores. Este resultado pode ser expresso de várias formas; por exemplo, se a medida do comprimento, l , de um lápis permitiu obter um valor 14.73 cm, sabendo que está seguramente entre 14.71cm e 14.75 cm, ele pode ser representado usando um majorante do erro absoluto possível, módulo do desvio absoluto máximo, $|\Delta x| = 0.02$ cm (que passaremos a designar por incerteza expandida ou simplesmente incerteza), ou incerteza expandida relativa $|\Delta x/x_{\text{exp}}| = 0.14\%$:

$$l = (14.73 \pm 0.02) \text{ cm} \quad \text{ou} \quad l = 14.73 \text{ cm} (1 \pm 0.14\%)$$

onde a incerteza para o valor é explicitamente indicada, seja em valor absoluto (incerteza absoluta - 1º caso) ou em valor relativo (incerteza relativa - 2º caso). A última representação é muitas vezes simplificada como: $l = 14.73 \text{ cm} (\pm 0.14\%)$. Uma outra forma de representar o resultado, consiste em utilizar algarismos significativos (uma medida representada por algarismos significativos, significa que o número é representado até ao primeiro dígito afetado pelo erro) Assim, a medida expressa em algarismos significativos é $l = 14.73 \text{ cm}$ ($14.73+0.02=14.75$ e $14.75-0.02=14.71$), pois que o erro apenas altera o último algarismo representado. Esta representação deixa alguma indeterminação no valor da incerteza experimental associada e, normalmente, só se deve omitir a

² Estatisticamente o intervalo pode ser definido considerando que contém o valor exato com diferentes graus de confiança

incerteza experimental quando ela não afecta o valor representado. No caso do lápis seria $l = 14.7$ cm mas perder-se-ia informação.

A incerteza experimental pode ser dominada pela resolução do instrumento de medida, ou não, adicionada de incertezas resultantes do próprio processo de medida ou intrínsecas ao fenómeno. Os erros de medição associados classificam-se genericamente em dois tipos:

- sistemáticos
- acidentais ou estatísticos

Erros sistemáticos – são erros que se cometem sempre no mesmo sentido (ou sempre por excesso, ou sempre por defeito); podem dever-se a uma deficiência do processo de medida (observacional, por exemplo erros de paralaxe ou de tempo de resposta do observador) ou a uma deficiência do instrumento de medida (desvio de zero ou alteração da calibração) ou ainda a uma interferência não contabilizada do instrumento de medida no fenómeno (por exemplo a utilização de um amperímetro com uma resistência interna demasiado elevada num circuito). Estes erros nem sempre são fáceis de identificar, mas quando detetados podem ser corrigidos ou bastante reduzidos.

Erros acidentais ou estatísticos – são erros que se cometem aleatoriamente nos dois sentidos e resultam do facto de a resolução dos instrumentos de medida ser melhor que as flutuações do valor a medir ou da natureza estatística do próprio processo (por exemplo o número de núcleos que decaem num decaimento radioativo). O valor destes erros pode ser reduzido fazendo um tratamento estatístico de um conjunto grande de medidas.

2 Erros estatísticos

Supondo corrigidos os erros sistemáticos, os erros estatísticos associados à resolução dos instrumentos (e não intrínsecos ao fenómeno) podem ser majorados pela **incerteza da leitura** que é definida de acordo com a escala do instrumento. Convenciona-se o seguinte:

- nos instrumentos de medida com escala analógica (variação contínua proporcional à grandeza medida) a incerteza da leitura é igual a metade da menor divisão da escala³. (Nos casos em que uma divisão na escala é suficientemente grande para permitir uma subdivisão mental em menores divisões, o erro deve ser considerado igual a metade dessa menor subdivisão mental. Este critério depende do observador e tem que ser definido com segurança);

³ Corresponde a considerar que existe igual probabilidade (distribuição uniforme) de o valor se encontrar em $]x-\delta, x+\delta[$, onde x é o valor correspondente ao traço mais próximo da escala e δ a variação correspondente a metade uma divisão.

- nos instrumentos digitais a incerteza da leitura é igual a uma unidade do último dígito representado (instrumento sem arredondamento), ou metade dessa unidade (instrumento com arredondamento)

Quando a grandeza a medir apresenta flutuações da ordem de grandeza ou superior à escala do instrumento de medida, a incerteza da medida não é limitada pelo instrumento mas por essas flutuações e é necessário quantificar essa influência.

2.1 Erros aleatórios

2.1.1 N>20

Se os erros forem aleatórios, e o número de medidas for elevado ($N > 20$), pode utilizar-se um tratamento estatístico dos valores experimentais. As frequências dos valores medidos distribuem-se segundo uma curva gaussiana e o valor médio é a melhor estimativa do resultado

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{N}$$

ou seja, o melhor valor a considerar para x . A largura da distribuição das medidas experimentais pode ser parametrizada pelo desvio padrão (desvio quadrático médio):

$$s_x = \sqrt{(\Delta x)^2} = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{(N-1)}}$$

Numa distribuição normal ou gaussiana, 68.3% dos valores experimentais encontram-se no intervalo $[\bar{x} - s_x; \bar{x} + s_x]$ e 95.4% no intervalo $[\bar{x} - 2s_x; \bar{x} + 2s_x]$. Assim, **o desvio padrão da amostra s_x representa a incerteza típica associada ao conjunto de medições**. Como cada valor medido tem 68% de probabilidade de pertencer ao intervalo $[\bar{x} - s_x; \bar{x} + s_x]$ e 95% de probabilidade de pertencer ao intervalo $[\bar{x} - 2s_x; \bar{x} + 2s_x]$, pode considerar-se que também o valor exato da grandeza a medir está associado à mesma probabilidade e tem 68% de probabilidade de pertencer ao intervalo $[\bar{x} - s_x; \bar{x} + s_x]$ (*incerteza padrão*) e 95% de probabilidade de pertencer ao intervalo $[\bar{x} - 2s_x; \bar{x} + 2s_x]$. Assim, quando se considera o desvio padrão como o erro associado à média associa-se *ao conceito de incerteza na medição uma probabilidade estatística*.

Se se realizarem vários conjuntos de N medidas, os valores médios \bar{x} calculados para os diferentes conjuntos distribuem-se também segundo uma gaussiana, cuja largura é mais estreita e caracterizada pelo desvio padrão⁴:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$$

que pode ser considerado a incerteza associada ao valor médio de um conjunto elevado de medidas ($N > 20$):

$$x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}}$$

2.1.2 $N < 10$

Se não é possível fazer um tratamento estatístico detalhado (número de medidas pequeno $N < 10$) deve tomar-se como melhor valor o valor médio, e, como incerteza da medição, o maior desvio em valor absoluto entre cada medida e este valor

$$x = \bar{x} \pm |\Delta x|_{\max}$$

2.1.3 $10 < N < 20$

Na situação intermédia, quando $10 < N < 20$, o desvio padrão s_x é uma boa medida da incerteza associada ao valor médio.

$$x = \bar{x} \pm s_x$$

2.1.4 Critérios de rejeição de valores na amostra

Existem alguns critérios que permitem rejeitar um valor isolado que se afaste muito do restante conjunto de valores. Estes critérios baseiam-se nas distribuições estatísticas esperadas (por exemplo para a distribuição gaussiana ou normal $P(x \notin [\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]) = 0.33\%$) mas devem ser utilizados com cuidado quando o número de valores experimentais é pequeno. Tendo em conta a probabilidade referida, pode considerar-se como critério, num conjunto de N medidas ($N > 10$), não conservar valores que se afastem mais do que $3\Delta x$ do valor médio \bar{x} , calculando \bar{x} e Δx com os restantes $N-1$ valores.

⁴ Ver exemplo no apêndice A

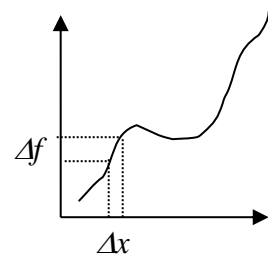
Quando o número de valores é pequeno não se podem rejeitar valores porque a incerteza do valor médio é muito elevada, e é com este valor que o desvio padrão é calculado. Se possível deve tentar obter-se um maior número de valores.

2.1.5 Propagação de incertezas

Frequentemente é necessário calcular grandezas a partir de valores obtidos experimentalmente. A precisão do valor calculado depende consequentemente da precisão dos valores medidos experimentalmente. Esta relação pode ser quantificada matematicamente determinando a propagação da incerteza.

Em primeira aproximação, a variação de uma função $f(x)$ está relacionada com a variação da variável x por:

$$\Delta f(x) \approx f'(x_0) \Delta x = \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \Delta x, \text{ como se representa no gráfico junto.}$$



Esta relação é tão mais válida quanto menor for Δx e desde que a primeira derivada da função não tenha um valor próximo de zero.

Assim, considerando esta expressão aproxima a propagação das variações de x para $f(x)$ ela permite obter a incerteza que afeta $f(x_0)$ em função da incerteza que afeta x :

$$\text{incerteza absoluta } |\Delta f| \approx \left| \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0} \right| |\Delta x|$$

$$\text{incerteza relativa } \frac{|\Delta f|}{|f(x_0)|} \approx \left| \frac{\left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0}}{f(x_0)} \right| |\Delta x|$$

Se a grandeza calculada depende de mais do que uma medida experimental, as incertezas das diferentes medidas, afetam o resultado final, adicionando-se independentemente as contribuições correspondentes:

$$\text{incerteza absoluta } |\Delta f| \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x=x_0, y=y_0} |\Delta y|$$

$$\text{incerteza relativa } \frac{|\Delta f|}{|f(x_0, y_0)|}$$

onde $\frac{\partial f}{\partial x}$ representa a derivada de f em ordem a x considerando y constante e $\frac{\partial f}{\partial y}$ representa a derivada de f em ordem a y considerando x constante. Como estas derivadas correspondem a uma variação parcial associada a cada variável, também se designam variáveis parciais.

No caso em que $|\Delta x|$ corresponde a uma incerteza estatística, as relações anteriores são válidas para cada um dos valores $|\Delta f_i|$ associados a cada Δx_i , e como é:

$$s_{\bar{f}}^2 = (\Delta \bar{f})^2 = \frac{\sum_i (\Delta f_i)^2}{N(N-1)} = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}^2 \sum_i (\Delta x_i)^2}{N(N-1)} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}^2 s_{\bar{x}}^2 \quad (|\Delta f|^2 \text{ para } N > 20)$$

$$\text{e} \quad s_f^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}^2 s_x^2 \quad (|\Delta f|^2 \text{ para } N < 20)$$

vem para incerteza de f , se a função depende de uma só variável:

$$\text{incerteza absoluta} = |\Delta f| = \left| \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0} \right| |\Delta x| \quad \text{e} \quad \text{incerteza relativa} = \frac{|\Delta f|}{|f(x_0)|}$$

e, se depender de mais do que uma variável:

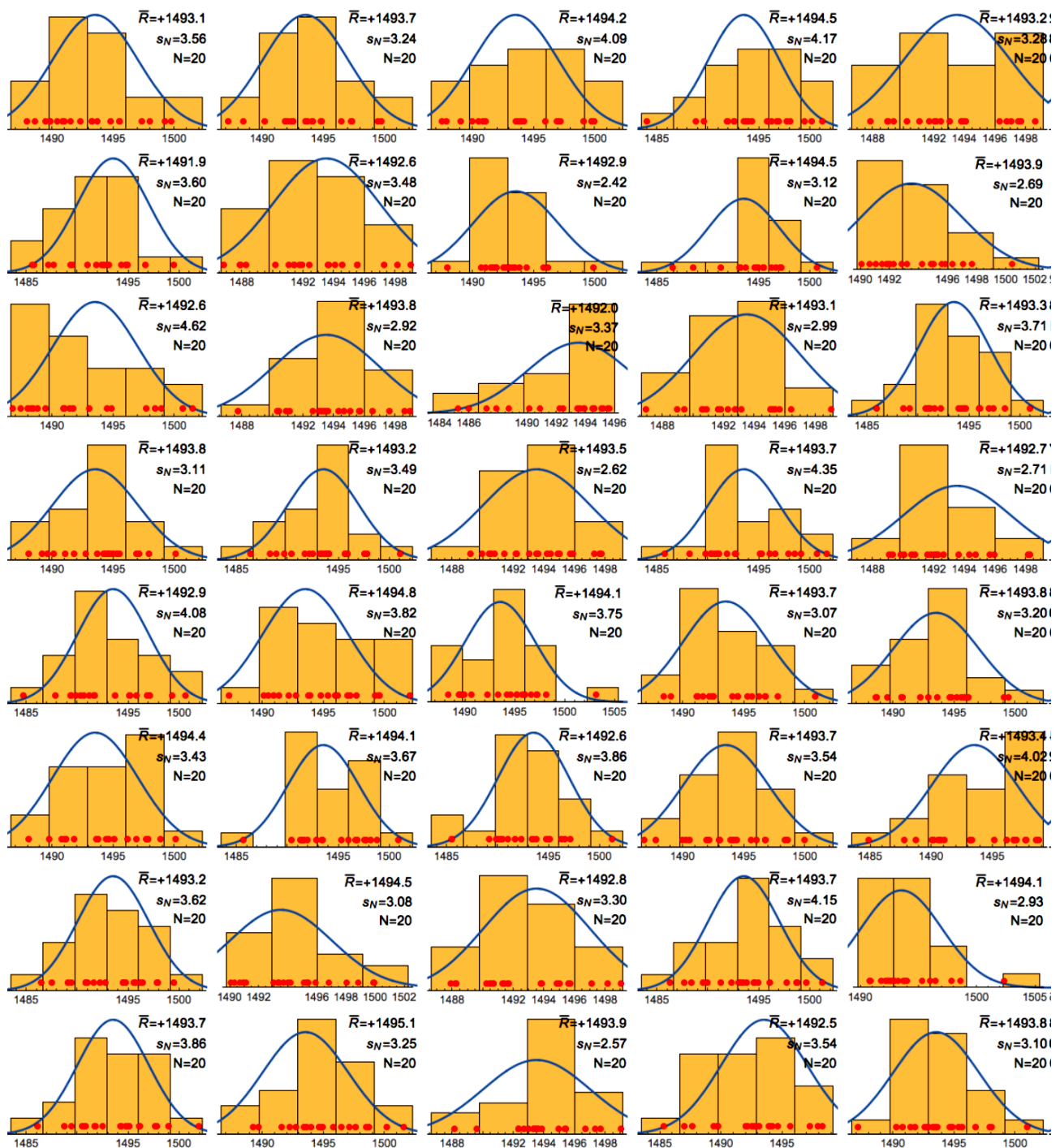
$$s_{\bar{f}}^2 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} \right]^2 s_{\bar{x}}^2 + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \right]^2 s_{\bar{y}}^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{incerteza absoluta} = |\Delta f| = \sqrt{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0, y_0} \right]^2 (\Delta x)^2 + \left[\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x_0, y_0} \right]^2 (\Delta y)^2 + \dots} \\ \text{incerteza relativa} = \left| \frac{\Delta f}{f(x_0, y_0)} \right| \end{cases}$$

Apêndice A

Exemplo do cálculo da distribuição da média

Para exemplificar o que foi dito relativamente ao desvio padrão da média, apresentam-se abaixo os resultados de 40 determinações do valor de uma resistência de valor $R=1493.5\ \Omega$, realizadas a partir de 20 medidas consecutivas com um instrumento e um procedimento que geraram para cada conjunto de medidas um desvio padrão diferente com valor médio $\sigma=3.4\ \Omega$.



Na figura encontram-se representados os histogramas para os 40 conjuntos de 20 medições, com a gaussiana ajustada sobreposta. Em cada um deles também se indica o valor médio e o desvio padrão desse grupo de 20 medições. Como se vê há uma boa flutuação de valores entre valores obtidos nos 40 grupos.

O valor médio de cada determinação com $N=20$ foi calculado usando:

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^N R_i / N$$

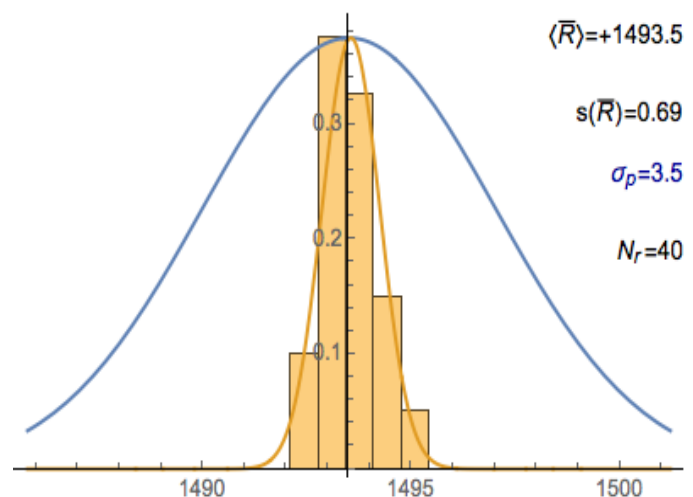
Fazendo um histograma com os 40 valores médios obtidos (Figura A2), obtém-se uma distribuição muito mais estreita (a que se ajusta a gaussiana representada pela linha castanha) do que qualquer das anteriores (linha azul). Isso significa que o desvio padrão da distribuição de valores médios é muito menor, neste caso $0.69 \Omega \ll 3.4 \Omega$.

O valor médio das 40 médias $R = 1493.5 \Omega$ está muito mais próxima do valor verdadeiro e a incerteza associada, parametrizada pelo desvio padrão da média, é menor do que a incerteza associada a cada medida individual.

O valor médio e desvio padrão desta variável serão:

$$\langle \bar{R} \rangle = \frac{\sum_{j=1}^{40} \bar{R}_j}{40}$$

$$s_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{40} (\bar{R}_j - \langle \bar{R} \rangle)^2}{40(40-1)}}$$



E pode mostrar-se que o desvio padrão da média decresce quando aumenta o número de elementos de cada determinação.

$$s_{\bar{R}} = \frac{s_R}{\sqrt{N}}$$

Uma conclusão imediata é a seguinte: quando se fazem poucas medições a largura da distribuição das médias aproxima-se do desvio padrão da medida e só se pode realizar um cálculo de desvio padrão com um número representativo de medidas, que em geral é não inferior a 10.