Métodos Matemáticos da Física 2010/11

Teste 1 26-03-2011

1. Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ .$$

a) Seja $v(x)$ uma função própria do operador d^2/dx^2: $v''(x) = \lambda\, v(x)$. Determine a solução $u(t,x)$ que satisfaz a condição inicial $u(0,x) = v(x)$.
b) Determine a solução $u(t,x)$ obedecendo a: $u(0,x) = a\,\cosh(k\,x + \alpha)$, onde a, k, α são constantes reais.

2. Admita que a função $f(x)$ definida no intervalo $-\pi \le x \le \pi$ pode ser escrita como uma série de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, y_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\,n\,x}\ .$$

a) Demonstre a relação existente entre os coeficientes c_n e os escalares $\langle y_n | f\rangle$.
b) Determine os coeficientes da série de Fourier complexa c_n para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & -a \le x \le a \\ 0\,, & |x| > a \end{cases}\ .$$

c) Obtenha a função $f(x)$ como uma série de Fourier de senos e cosenos.

3.a) Diga qual é a condição a que devem satisfazer os produtos internos $\langle u | A\, v\rangle$, $\langle A\, u |\, v\rangle$, para que o operador A seja hermítico no espaço vectorial onde está definido.
b) Tomando como produto interno,

$$\langle u |\, v\rangle = \int_a^b u^*(x)\, v(x)\, dx\ ,$$

verifique se o operador d^2/dx^2 é hermítico no espaço das funções $u(x)$ definidas no intervalo $[a,b]$ que obedecem às condições fronteira, $u(a) = 0$, $u(b) = c\, u'(b)$, e para que valores possíveis da constante c.