

## Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral III

(DF - 2018/19)

### Capítulo I - Equações Diferenciais (1ª parte)

#### EDOs

##### 1.1. Equações diferenciais ordinárias escalares

1. Determine a solução geral das equações que se seguem.

a)  $y' + xy = 0$ ,   b)  $y' - 4y = 16x$ ,   c)  $y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin x$ .

2. Determine a única solução de cada um dos seguintes PVI's:

(a)  $y' - \frac{y}{x} = x^2 \sin x$ ,    $y(-\pi/2) = 0$  (cf. ex.1.c))

(b)  $(t^2 + 1)y' + t(2y - 1) = 0$ ,    $y(0) = 1$

3. Seja  $N(t)$  o tamanho de uma população no instante  $t$ . Suponha que a população cresce de acordo com a equação  $N'(t) = \frac{1}{100}N^2(t)$  e que no instante inicial  $t = 0$  a população tem o valor 10. Determine  $N(t)$  e o intervalo onde está definida. O que acontece à população quando  $t \rightarrow 10^-$ ?

4. Determine a solução geral das equações seguintes:

a)  $y' = -\frac{x^2}{y^2}$ ;   b)  $y' = y^2$  (esboce o gráfico das soluções);

c)  $y' = 3xy^2$ ;   d)  $y' + y^2 \sin x = 0$ .

5. Encontre a solução do problema logístico  $\begin{cases} y' = 2y(3 - y) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ .   (Sol:  $y(t) = \frac{6e^{6t}}{1+2e^{6t}}$ .)

6. Seja  $y = y(t)$  a população (medida em milhares) de uma espécie biológica no instante  $t$ , cujo crescimento é regido pela equação logística  $y' = y(1 - \frac{1}{6}y)$ .

a) Sem resolver a equação diferencial, justifique se há ou não populações  $y(t)$  que tomam valores 1 e 12 (milhares) em diferentes instantes de tempo.

b) Determine a solução  $y(t)$  que tem o valor 1 (milhar) no instante  $t = 0$ .

7. Um tanque com 2000 litros de capacidade está inicialmente cheio de água pura. A partir de determinado instante (considerado inicial, i.e.,  $t = 0$ ), começa a entrar líquido poluído no tanque, contendo 20% de poluente, a um ritmo de 4 l/min. O tanque possui um sistema de esvaziamento que permite manter o volume total de líquido constante. Obtenha uma expressão analítica para a quantidade de poluente no tanque, no instante  $t$  (tempo em minutos, volume em litros).

Qual a percentagem de poluente ao fim de  $10^3$  minutos? E ao fim de um dia? (Use uma calculadora para obter um valor aproximado.)   (Sol.  $\approx 17,3\%$ ;  $\approx 18,9\%$ .)

8. Determine a solução da equação  $y'' = 1 + (y')^2$  que satisfaz as condições  $y(0) = 1$  e  $y'(0) = 0$ . (Sugestão: faça  $y' = u$ .) (Sol.  $y(t) = -\log(\cos t) + 1, t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .)
9. O chamado *modelo de predador-presa de Lotka-Volterra* (Lotka: 1880-1949; Volterra: 1860-1940) é dado por

$$x' = ax - bxy, \quad y' = -cy + dxy, \quad (1)$$

onde  $a, b, c, d$  são constantes positivas e  $x(t), y(t)$  representam respectivamente a população de presas e de predadores no instante  $t$ .

- a) Ache as soluções de equilíbrio (i.e., constantes).
- b) Supondo que se pode escrever  $y(t)$  como função de  $x(t)$ , ou vice-versa, resolva (1) como uma equação de variáveis separáveis. Verifique que as soluções  $(x, y) = (x(t), y(t))$  estão sobre curvas de nível da função  $F(x, y) = x^c y^a e^{-(dx+by)}$ . (De facto, pode mostrar-se que as curvas de nível de  $F$  são curvas fechadas, circulando em volta do ponto de equilíbrio  $(c/d, a/b)$ . Cf. M. Braun, pp. 443).

10. As curvas de nível para a temperatura numa placa metálica são dadas por elipses de equação  $4x^2 + y^2 = 120 - c$  ( $c$  constante positiva), correspondendo a localização da fonte de calor ao ponto  $(x, y) = (0, 0)$ , com temperatura 120 C. Estando uma partícula na posição plana  $(x, y) = (2, -3)$ , encontre a trajectória da partícula quando ela se move continuamente sobre a placa, na direcção de maior crescimento da temperatura. (Sugestão: Recorde as propriedades do gradiente e use trajectórias ortogonais.)
11. Calcule as trajectórias ortogonais à família de hipérboles dada pelas equações  $x^2 - y^2 = c, c \geq 0$ . (Sol. hipérboles dadas por  $y = k/x, k \in \mathbb{R}$ .)
12. O modelo de Gompertz (1779-1865) é um dos modelos matemáticos mais usados em medicina para o crescimento de tumores. De início, o volume das células cancerígenas aumenta exponencialmente por divisão, mas, à medida que o volume aumenta, o tumor cresce mais devagar. Supondo que  $V(t)$  designa o volume do tumor no instante  $t$ , este modelo propõe a taxa de variação do volume dada por

$$V'(t) = r(t)V(t), \quad (1)$$

onde  $r(t)$ , a taxa de reprodução das células, decresce exponencialmente de acordo com a Lei de Malthus:  $r'(t) = -\alpha r(t)$ , onde  $\alpha > 0$  é uma constante calculada com base em dados experimentais e estatísticos.

- a) Determine as soluções de (1) em função do volume inicial ( $t = 0$ ) do tumor  $V_0$ .
- b) Calcule  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t)$ . (Sol.  $V = V_0 e^{\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})}$ .)

13. Resolva as EDOs exactas seguintes:

- (a)  $y \cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0$ ;
- (b)  $(x + \sin y)dx + (x \cos y - 2y)dy = 0$ .

14. Escolhendo adequadamente um factor integrante da forma  $\mu(x) = e^{G(x)}$ , resolva os PVI seguintes:

(a)  $y + (x^2y^3 - x)y' = 0$  ( $x > 0$ ),  $y(4) = 1$ ; (Sol.  $y = \sqrt[3]{4/x}$  em  $]0, +\infty[$ .)

(b)  $x^3 - xy^2 + 2x^2yy' = 0$  ( $x > 0$ ),  $x(1) = 1$ . (Sol.  $y = \sqrt{x(2-x)}$  em  $]0, 2[$ .)

15. Recorde que uma **equação de Bernoulli** é uma EDO que se pode escrever na forma

$$x' + a(t)x = b(t)x^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (B)$$

e que a mudança de variável  $u = x^{1-n}$  transforma (B) numa equação linear.

a) Determine a solução geral da EDO  $x' + x = tx^3$ . (Sol.  $x \equiv 0$ ,  $x = \frac{\pm 1}{\sqrt{t + \frac{1}{2} + Ce^{2t}}}$ .)

b) Determine a solução geral da EDO  $x' - \frac{x}{2t} = 5t^2x^5$  ( $t > 0$ ). (Sol.  $x \equiv 0$ ,  $\frac{\pm \sqrt{t}}{\sqrt[4]{C - 4t^5}}$ .)

16. Recorde que uma **equação homogénea** é uma equação que se pode escrever na forma

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \quad \text{com } f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (H)$$

e que a mudança de variável  $u = \frac{y}{t}$  transforma (H) na equação de variáveis separáveis  $u' = \frac{f(u) - u}{t}$ .

Resolva a EDO  $y' = \frac{y^2}{ty + y^2}$ . (Sol.  $ye^{-t/y} = C$ )

17. Determine a expressão analítica e o domínio maximal explícito das soluções da EDO  $y' = \sqrt{y}$ .

18. Resolva a EDO  $y'' + e^ty' = e^t$ . (Sol.  $y = t + C_1 + C_2 \int e^{-e^t} dt$ .)

## 1.2. Equações diferenciais lineares de ordem $n$

19. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , considere a equação linear homogénea de ordem  $n$  de coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

- (a) Com  $n = 2$ , sabendo que as raízes do polinómio característico são 2 e 5, escreva a solução geral da equação dada.
- (b) Com  $n = 2$ , sabendo que uma raiz do polinómio característico é  $2 - i$ , escreva a solução geral da equação dada.
- (c) Com  $n = 2$ , sabendo que a única raiz do polinómio característico é 2, escreva a solução geral da equação dada.
- (d) Com  $n = 3$ , sabendo que as raízes do polinómio característico são 0,  $-3$  e 5, escreva a solução geral da equação dada.
- (e) Com  $n = 3$ , sabendo que as raízes do polinómio característico são  $-7$  e 5, a segunda com multiplicidade 2, escreva a solução geral da equação dada.

- (f) Com  $n = 3$ , sabendo que  $1$  e  $-3+5i$  são raízes do polinómio característico, escreva a solução geral da equação dada.
- (g) Com  $n = 4$ , sabendo que as raízes do polinómio característico são  $2$ , com multiplicidade  $3$ , e  $-1$ , escreva a solução geral da equação dada.
20. Indique a solução dos seguintes problemas de valores iniciais, sem efectuar cálculos:
- (a)  $7y''' - 3y'' + y' - 9y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ .
- (b)  $y'' + 4y = 8$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 0$ .
21. Determine a solução geral da equação  $y'' - y = 2\sin t$ , sabendo que uma solução particular é  $y_p(t) = -\sin t$ .
22. Seja  $a \in \mathbb{R}$  e considere a EDO  $y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0$ .
- a) Determine uma base das soluções da EDO e o wronskiano dessa base.
- b) Para  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  qualquer, resolva o PVI

$$y'' + ay' + \frac{a^2}{4}y = 0, \quad y(t_0) = x_1, y'(t_0) = x_2,$$

para os casos  $t_0 = 0$  e  $t_0 = 2/a$  ( $a \neq 0$ ).

(Sol.  $x_1 e^{-\frac{a}{2}t} + (\frac{a}{2}x_1 + x_2)te^{-\frac{a}{2}t}$ ;  $-\frac{2e}{a}x_2 e^{-\frac{a}{2}t} + e(\frac{a}{2}x_1 + x_2)te^{-\frac{a}{2}t}$ )

23. Considere a equação

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad \text{com } p, q, g \in C(I).$$

- (a) Mostre que a substituição  $y = u(t)\varphi(t)$ , onde  $\varphi(t)$  é uma solução não trivial da equação homogénea, reduz a equação dada à equação linear de primeira ordem

$$\varphi(t)w' + (2\varphi'(t) + p(t)\varphi(t))w = g(t),$$

onde  $w = u'$ .

- (b) Use o método anterior (designado por **método de redução da ordem**) para encontrar a solução geral da seguinte equação:

$$y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{4}{t^2}y = 1 - \frac{1}{t^3}, \quad t > 0$$

verificando que  $\varphi(t) = t^2$  é solução particular da equação homogénea associada.

(Sol.  $y = \frac{t^2}{4} \log t + \frac{1}{3t} - \frac{C_1}{4t^2} + C_2 t^2$ ,  $t > 0$ .)

24. Determine a solução geral das equações seguintes:

a)  $y'' + 3y = -9$

b)  $y'' + 2y' - y = 10$

c)  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{e^{-2t} + 1}$

d)  $y'' - y = -11x^2 + 1$

e)  $y''' + y' = \sec x$ ,  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$

(Sol particular: c)  $y_P = -\frac{1}{2} \log(1 + e^{-2t})e^{2t} + \arctan(e^{-t})e^t$ ; e)  $y_P = -\frac{1}{2} \log(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}) + \log(\cos x) \sin x - x \cos x$ .)

25. (Abel-Liouville) Sejam  $\phi_1$  e  $\phi_2$  soluções de  $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ , com  $a$  e  $b$  contínuas num intervalo  $I$ . Recorde o wronskiano dado por  $W(t) = \phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t)$ . Prove que

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds}, \quad \forall t_0, t \in I.$$

26. Considere o movimento de um pêndulo simples (sem atrito e sem termo forçante) no plano dado pela 2ª lei de Newton,

$$x'' = -k \sin x, \quad (1)$$

onde:  $x$  é a posição angular do pêndulo (sendo  $x = 0$  a posição de repouso), o pêndulo tem uma massa  $m$  aplicada no extremo de uma vara rígida sem peso e de comprimento  $\ell$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $k = g/\ell$ . Para amplitudes  $x$  pequenas tem-se  $x \approx \sin x$ , pelo que frequentemente se substitui (1) pela equação aproximada (dita do **oscilador harmónico**)

$$x'' = -kx. \quad (2)$$

- a) Verifique que as soluções de (2) podem ser escritas na forma  $x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$ ,  $A \geq 0$ ,  $\delta \in [0, 2\pi]$ , onde  $\omega = \sqrt{k}$ .

Nota. Diz-se que  $\frac{\omega}{2\pi}$  é a frequência natural do pêndulo,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  o seu período e  $A$  a amplitude da oscilação.

- b) Determine ainda a solução de (2), sabendo que o pêndulo está inicialmente em repouso (i.e.,  $x(0) = 0$ ) e foi sujeito a uma velocidade inicial  $v$ . (Sol.  $x = \frac{v}{\omega} \sin \omega t$ .)

- c) Resolva a equação do oscilador harmónico *amortecido*, i.e., *com atrito*, dada por

$$x'' = -kx - 2\lambda x'. \quad (k, \lambda > 0). \quad (3)$$

- d) Usando o método dos coeficientes indeterminados, mostre que para a equação do oscilador harmónico *forçado* sem atrito, dada por

$$x'' = -kx + f_0 \cos(\omega_0 t), \quad \text{onde } \omega_0 > 0,$$

se obtêm, para o caso  $\omega \neq \omega_0$ , soluções  $x(t) = A \sin(\omega t + \delta) + \frac{f_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$ , com  $A, \delta$  como em a).

*Adenda.* Se  $\omega = \omega_0$ , a força exterior está em *ressonância* com o sistema, dando origem a oscilações de amplitudes “infinitas”, que um sistema físico não pode suportar. Isto explica alguns fenómenos desastrosos, como o da queda da ponte de Tacoma em 1940 (ver e.g. livro de M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, pp. 173, ou Carlos Sarrico, *Análise Matemática*, pp. 258).

27. Considere a equação diferencial linear de segunda ordem  $y'' + 2y' - 3y = g(x)$ . Indique a forma de uma solução particular quando  $g(x)$  é igual a:

a)  $x + 1$    b)  $e^x + 2e^{2x}$    c)  $7 \cos(3x) + x^2$    d)  $5e^{-3x}$    e)  $x^2 e^x$ .

(Nota: Não se pede para calcular uma solução particular.)

### 1.3. Sistemas lineares de EDOs

28. Considere o sistema de EDOs  $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -4x + 3y + 10 \cos t \end{cases}$ .
- a) Usando a primeira equação para tirar  $y = x' + 2x$ , derive esta expressão, e obtenha uma equação linear de segunda ordem para  $x$ .
- b) Resolva o sistema dado a partir da resolução da equação obtida em a).
- (Observação: Este método é chamado método de eliminação e é frequentemente muito eficaz.)
29. Mostre que todas as soluções  $(x(t), y(t))$  do sistema  $\begin{cases} x' = -5x + 2y \\ y' = x - 4y \end{cases}$  satisfazem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$ . E, para soluções com  $y(t) \neq 0$ , qual o limite  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{x(t)}{y(t)}$ ?
30. Determine a solução geral dos sistemas:
- a)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x + y \end{cases}$ ;    b)  $x' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$     c)  $x' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x$ ;
- d)  $x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$ ;    e)  $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$ ;    f)  $x' = \begin{bmatrix} -4 & -3 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x$ .
31. Determine a solução do problema de Cauchy
- $$x' = Ax + h(t), \quad x(0) = x_0,$$
- com: a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ .
- b)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos^2 t \end{bmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ .
- c)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .
32. Para um sistema linear homogêneo  $x' = Ax$  ( $A \in \mathcal{M}_n$ ), justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
- (a) se  $\det A = 0$ , então existem soluções não nulas que são limitadas em  $\mathbb{R}$ .
- (b) se existem soluções não nulas que são limitadas em  $\mathbb{R}$ , então  $\det A = 0$ .
- (c) se todos os valores próprios de  $A$  têm parte real negativa, então todas as soluções  $x(t)$  satisfazem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ .
- (d) se todas as soluções  $x(t)$  satisfazem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ , então todos os valores próprios de  $A$  têm parte real negativa.

#### 1.4. Soluções de EDOs: miscelânea

33. Segue-se uma lista de problemas de Cauchy. Para quais deles pode garantir a existência de uma única solução *local* (i.e., definida numa vizinhança do instante  $t_0$  onde é dada uma condição inicial)?

- (a)  $x'(t) = x^2 + \sin x + 2t^5$ ,  $x(1) = 9$ .
- (b)  $x'(t) = |x|$ ,  $x(0) = k$  ( $k > 0$ ).
- (c)  $x'(t) = \sqrt{|x|}$ ,  $x(1) = 0$  e  $x'(t) = \sqrt{|x|}$ ,  $x(0) = 1$ .
- (d)  $x'(t) = \sqrt[3]{x^2} + tx$ ,  $x(4) = 0$ .

34. Justifique se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

- (a) Qualquer solução da equação  $x' = x^2 + t^6 + 1$  é estritamente crescente.
- (b) A solução do PVI  $x' = \cos^2 x - 2$ ,  $x(0) = 0$  é uma função não negativa em  $\mathbb{R}$ .
- (c) A solução do PVI  $x' = x^4 + t$ ,  $x(-1) = 1$  tem um mínimo em  $t = -1$ .

*Algumas soluções:*

28.  $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 3 \cos t - \sin t$ ,  $y(t) = 4c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} - 7 \cos t + \sin t$ .

30.  $X(t)C$  com m.f.s.  $X(t)$  dadas por:

a)  $X(t) = \begin{bmatrix} e^t \cos 2t & e^t \sin 2t \\ -2e^t \sin 2t & 2e^t \cos 2t \end{bmatrix}$ ; b)  $X(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}e^{(1+\sqrt{2})t} & -\sqrt{2}e^{(1-\sqrt{2})t} \\ e^{(1+\sqrt{2})t} & e^{(1-\sqrt{2})t} \end{bmatrix}$ ;

d)  $X(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}$ ; f)  $X(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & -(\frac{4}{3}+t)e^{-t} \\ 6e^{2t} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

31. a)  $x(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ -3e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}$ ; b)  $x(t) = \begin{bmatrix} \cos t(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{1}{3}) + \sin t(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2) \\ -\sin t(\frac{\cos^3 t}{3} - \frac{1}{3}) + \cos t(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} + 2) \end{bmatrix}$ ;

c)  $x(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^t + e^{3t}(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}t) \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{3t} \end{bmatrix}$ .

32. V,F,V,V. 33. Sim; Sim; Não,Sim; Não. 34. V,F,V.