Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Exame 2ª época 26-06-2013

1.a) Determine os valores próprios λ_n e funções próprias $y_n(x)$ do operador d/dx definidas no intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a condição fronteira $y(0) = y(2\pi)$.
b) Calcule os produtos internos de funções $\langle y_n | y_m \rangle$.
c) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n da expansão em série de uma função: $u(x) = \sum_n c_n \, y_n(x)$.
d) Obtenha a expansão em série da função delta de Dirac, $u(x) = \delta(x)$.

2. Considere o problema de Sturm-Liouville dado pela equação:

$$(1 - x^2) \, y''(x) - 2 \, x \, y'(x) - \frac{4}{1 - x^2} \, y(x) + \lambda \, y(x) = 0 \; , \qquad x \in [-1, +1] \; .$$

a) Diga justificando se esta equação está na forma de Sturm-Liouville, e defina a expressão do produto interno de funções adequado ao problema.
b) Verifique que as funções $u(x) = 1 - x^2$, $v(x) = x \, (1 - x^2)$, são funções próprias e determine os respetivos valores próprios.

3. Seja a função definida em $\mathbb{R}$, $f(x) = \Theta(x + a) - \Theta(x - a)$, com $a > 0$.
a) Represente graficamente a função $f(x)$.
b) Determine a derivada $f'(x)$.
c) Calcule as transformadas de Fourier das funções $f(x)$ e $f'(x)$.
d) Utilize os resultados anteriores para determinar o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(u \, z)/z \, dz$.

4. A função $u(t, x)$ obedece à equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \, \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \, u = 0 \; ,$$

sendo α, β, duas constantes reais positivas.
a) Escreva $u(t, x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t, k)$.
b) Determine a solução geral para a função $\tilde{u}(t, k)$ e $u(t, x)$.
c) Obtenha a expressão de $u(t, x)$ em termos da função inicial $u(0, z)$. Interprete o significado das constantes α, β.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-i \, k \, x} \, dx \; , \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) \, e^{i \, k \, x} \, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \, k \, x} \, dk = 2\pi \, \delta(x) \; , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) \, g(x) \, dx = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^* \, \tilde{g}(k) \, dk$$