Exame de Cálculo Diferencial e Integral III

9 Janeiro 2020 - duração: Parte I: 1h30m; Parte II (2^o Teste): 1h30m; Total: 3h

Indique a sua versão do exame/teste na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.
Recorde que, por convenção, as curvas de Jordan são percorridas uma vez no sentido directo.

Versão A

Parte I

Nota: Nas questões 1 e 2 faça $a =$ máximo entre 2 e o último dígito do seu número de aluno.

1. (a) Resolva a EDO $y'' - 2y' + 5y = -t + a$.

   (b) Resolva o problema logístico $y' = y(a - y)$, $y(0) = 2a$.

2. Determine a solução do sistema $x' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$ com condição inicial $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ a \end{bmatrix}$.

3. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Sabendo que $1 - \mathrm{e}^t, -t, t + 2\mathrm{e}^t$ são soluções da EDO $y''' + ay'' + by' + cy = 0$, as constantes a, b, c são: A: não se pode concluir. B: $a = -2, b = 1, c = 0$. C: $a = -1, b = c = 0$.

   (b) A mudança de variáveis $u = \frac{y}{t}$ (para $t \neq 0$) transforma a EDO $y' = (1 + \frac{y}{2t})^2$ em: A: $tu' + u = 0$. B: $tu' = 1 + \frac{u^2}{4}$. C: $tu' = (1 + \frac{u}{2})^2$.

   (c) As trajectórias ortogonais à família de curvas $y = cx^2$ são dadas por (onde c, k são constantes): A: $\frac{x^2}{2} = ky$. B: $\frac{x^2}{2} + y^2 = k$. C: $\frac{x^2}{2} - y^2 = k$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,7$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

4. Sabe-se que a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} \pi\cos(\pi x) & \text{se } -1 < x < 0 \\ \pi\sin(\pi x) & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$ no intervalo $[-1, 1]$ é: $1 + \frac{\pi}{2}\cos(\pi x) + \frac{\pi}{2}\sin(\pi x) - 2\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k)^2-1} + \frac{2k\sin(2k\pi x)}{(2k)^2-1}\right)$.

   (a) Escreva o polinómio de Fourier P_3 de ordem 3 de f.

   (b) Determine o valor de $\int_{-1}^{1} f(x)\sin(10\pi x)\,dx$, sem efectuar as contas do integral.

   (c) Faça o gráfico de f em $[-3, 1]$ e determine a soma da sua série de Fourier no ponto $x = 1$.

5. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, $f \geq 0$ e tal que $f(0) = 0$, prove que é crescente em $[0, +\infty[$ a solução do PVI $y'' - y = f(t),\ y(0) = y'(0) = 0$. (Sugestão: Método de variação das constantes.)

Parte II ($2^{o.}$ Teste)

6. É sabido que existem soluções da equação das ondas $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ para $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times [0, L]$ com condições $u(t, 0) = u(t, L) = 0$, $t \geq 0$, da forma

$$u_n(t, x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x)\left(a_n\cos(\frac{cn\pi}{L}t) + b_n\sin(\frac{cn\pi}{L}t)\right), \quad n = 1, 2, \dots. \tag{1}$$

   Usando (1), encontre a solução da equação das ondas $u_{tt} = 9u_{xx}$ para $0 \leq x \leq \pi, t \geq 0$ com condições de fronteira e iniciais

$$\begin{cases} u(t, 0) = u(t, \pi) = 0,\ t \geq 0 \\ u(0, x) = x(\pi^2 - x^2), u_t(0, x) = 1,\ 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

apresentando o resultado na forma de série. Não precisa de calcular os coeficientes da série, mas relacione-os com os coeficientes de Fourier de certa ou certas funções.

7. (a) Sendo D o semicírculo de centro 0 e raio 2 contido no semiplano $Re\, z \leq 0$ e $f(z) = -ize^{|z|}$, determine analiticamente o conjunto $f(D)$ (com os seus elementos na forma polar) e represente geometricamente $f(D)$.

   (b) Sendo $f(z) = \bar{z} - |z|^2 + i(\mathrm{Im}\, z)^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{Re}\, z)^3$, determine em que pontos $z \in \mathbb{C}$ existe derivada $f'(z)$ e calcule-a.

8. Faça o esboço das curvas, indique o domínio das funções integrandas e calcule os integrais seguintes, apresentando o resultado na forma $a + ib$:

   (a) $\displaystyle\int_{|z-1-i|=r} \frac{e^{z+2i}}{z^2(z^2+1)} dz$ para $r = 1/2$ e $r = 2$; (b) $\displaystyle\int_{|z|=\pi} (z+2i)^3 \cos\Big(\frac{2i}{z+2i}\Big) dz$.

9. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Sendo $(e^{iz}+1)^{-1} = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, com $c_n \in \mathbb{C}$, o raio de convergência desta série é:
   A: $R = 2\pi$. B: $R = \pi$. C: $R = +\infty$.

   (b) A parte real dos números complexos $z = (-2i)^i$ é:
   A: $\cos(\ln 2)e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. B: A: $2e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. C: $-\sin(\ln 2)e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (c) Sendo $g(z) = \frac{\sin z}{\cos(iz)-1}$, o valor de $\mathrm{Res}\,(g, 0)$ é: A: 2. B: $-\frac{1}{2}$. C: $-i$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,7$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

10. Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $B^*_\delta(z_0)$, i.e., numa vizinhança de z_0 privada de z_0. Prove que z_0 é um pólo de ordem m ($m \in \mathbb{N}$) de f se e só se existe $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$.

FIM

Cotações propostas: Parte I. 2,8+1,9+2,1+1,8+1,4 (Total: 10 valores)
Parte II. 1,5+2+3,2+2,1+1,2 (Total: 10 valores)

Série de Fourier de $f \in SC([-L, L])$: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$

Erro quadrático E entre P_n (pol. Fourier) e $f \in SC([-L, L])$: $\|f - P_n\| = \left[\|f\|^2 - L\Big(\dfrac{a_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\Big)\right]^{1/2}$

Fórmula de D'Alembert: $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds$, $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Fórmulas Integrais de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, com $z_0 \in \mathrm{int}\,\gamma$

Fórmula dos Resíduos: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Res}\,(f, z_i)$, com $z_i \in \mathrm{int}\,\gamma, i = 1, \ldots, p$

Algumas séries de Taylor: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $z \in \mathbb{C}$;

$\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$, $|z| < 1$; $\log(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$, $|z| < 1$

$\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$, $z \in \mathbb{C}$; $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots$, $z \in \mathbb{C}$