Métodos Matemáticos da Física — 2013/14

Teste 3 — 10-05-2014

1. Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + (1-x)\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\ , \qquad x \in [0, +\infty[\ .$$

a) Encontre a relação entre os valores de $y(x)$ e da sua derivada em $x = 0$.
b) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x. Obtenha a relação de recorrência entre os coeficientes da série de potências e calcule os primeiros seis termos da série admitindo que $y(0) = 1$.
c) Determine os valores próprios, λ_n, cujas funções próprias, $y_n(x)$, são polinómios de grau n.
d) Diga justificando se a equação acima está na forma de Sturm-Liouville.

2. As funções próprias dos operadores,

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\ , \qquad B = \partial/\partial\phi\ \ ,$$

são as funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta,\phi)$.
a) Diga quais são os valores próprios de A e B associados a $Y_l^m(\theta,\phi)$, e explicite a condição de normalização a que obedecem estas funções.
b) Mostre que $u(\theta,\phi) = \sin\theta\,\cos\theta\,e^{i\phi}$ é uma função própria dos operadores A e B.
c) Identifique a função harmónica esférica proporcional a $u(\theta,\phi)$: $Y_l^m = c\,u$, e determine a constante de proporcionalidade c, a menos de um sinal convencional.

3.a) Represente graficamente as funções

$$f(x) = x + x\,\Theta(x)\ , \qquad g(x) = x + (1+x)\,\Theta(x)\ ,$$

onde $\Theta(x)$ é a função de Heaviside.
b) Calcule as derivadas de $f(x)$ e $g(x)$.
c) Determine os valores $F(1/2)$, $F(2)$, da função $F(x)$ definida por:

$$F(x) = \int_0^x (1+2\,y)\,\delta(y-1)\,dy\ .$$

Encontre a expressão analítica da função $F(x)$.