Espaços afins

Aula 8 - 20/03/2019

Sumário

- Soma de vectores e produto por um escalar
- Equação vectorial de uma recta e de um plano
- Espaços afins
- Axiomas de incidência e de medida para um espaço afim
- Teorema da razão

Composição de vectores

Neste contexto de geometria axiomática, a soma de vectores vai ser definida como composição de aplicações. Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de pontos. Denotamos por $\vec{\mathcal{E}}$ o conjunto dos vectores de $\mathcal{E}$.

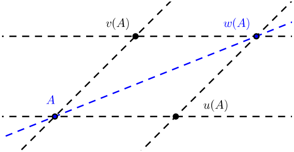
Proposição. Sejam $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$ e seja $w = u \circ v$, ou seja, $w(A) = u(v(A)), \ A \in \mathcal{E}$. Então
1) w é um vector de $\mathcal{E}$;
2) $[Au(A)w(A)v(A)]$ é um paralelogramo, para qualquer $A \in \mathcal{E}$.

Dem. 1) Sejam $A, A' \in \mathcal{E}$. Como v e u são vectores, temos que $[A\,A'\,v(A')\,v(A)]$ e $[v(A)\,w(A)\,w(A')v(A')]$ são paralelogramos. Logo, pelo teorema de Désargues, $[A\,A'\,w(A')w(A)]$ é um paralelogramo, ou seja, w é um vector.
2) Seja $A' = v(A)$. Então $u(A') = w(A)$. Como u é vector, tem-se que $[A\,u(A)\,u(A')\,A']$ é um paralelogramo, ou seja, $[A\,u(A)\,w(A)\,v(A)]$ é um paralelogramo.

Soma de vectores

Definição. Dados vectores v e u, o vector $w = v \circ u$ é designado soma de u e v e é denotado $w = u + v$.

O facto de $[A\, u(A)\, w(A)\, v(A)]$ ser um paralelogramo corresponde à *regra do paralelogramo* para somar vectores.



Proposição. São válidas as seguintes propriedades:

(i) Para quaisquer vectores u, v, w, tem-se $(u + v) + w = u + (v + w)$.

(ii) Para quaisquer u, v vectores, tem-se $u + v = v + u$.

(iii) Para qualquer vector u, tem-se $u + \vec{0} = u$.

(iv) Para qualquer vector v, existe um único vector $-v$ tal que $v + (-v) = \vec{0}$.

Dem. Exercício.

Produto de um vector por um escalar

Proposição. Dado um número real λ e um vector $v = \overrightarrow{XY}$, a aplicação $\lambda v : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tal que $(\lambda v)(X) = Z$ com $Z \in XY$ satisfazendo

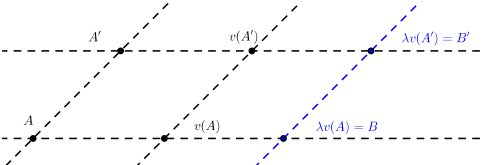
$$XY : XZ = 1 : \lambda$$

é um vector.

Dem. Sejam $A, A' \in \mathcal{E}$. Então, como v é um vector, temos que $[A\,A'\,v(A')\,v(A)]$ é um paralelogramo.
Sejam $(\lambda v)(A) = B$ e $(\lambda v)(A') = B'$.
Como $B \in A\,v(A)$ e $B' \in A'\,v(A')$ são tais que

$$A\,v(A) : A\,B = 1 : \lambda = A'\,v(A') : A'\,B',$$

concluímos que $[AA'B'B]$ é um paralelogramo, pelo teorema do alongamento.



Propriedades do produto de um vector por um escalar

Proposição. Seja u, v vectores e λ, μ números reais. São válidas as seguintes propriedades:

(i) $(\lambda\,\mu)\,v = \lambda\,(\mu\,v)$.

(ii) $(\lambda + \mu)\,v = \lambda\,v + \mu\,v$.

(iii) $\lambda\,(u + v) = \lambda\,u + \lambda\,v$.

(iv) $1\,v = v$.

Dem. (i), (ii), (iv) Exercício.

(iii) Seja $w = u + v$ e seja $A \in \mathcal{E}$. Sejam $B = \lambda u(A)$, $C = \lambda w(A), D = \lambda v(A)$. Temos de provar que $[ABCD]$ é um paralelogramo. Suponhamos que os quatro pontos A, B, C, D são não colineares. Temos que as rectas CD e $v(A)w(A)$ são paralelas, porque $Av(A) : AD = Aw(A) : AC$. Por outro lado, temos que AB e e $v(A)w(A)$ são paralelas visto que $[Av(A)w(A)u(A)]$ é um paralelogramo. Portanto AB é paralela a CD. Analogamente se provava que AD é paralela a BC. No caso em que os pontos A, B, C, D são colineares, utiliza-se uma régua na recta que os contém para provar que o ponto médio de $[AC]$ é igual ao ponto médio de $[BD]$

Teorema. O conjunto $\vec{\mathcal{E}}$ é um espaço vectorial real.

Equação vectorial da recta e do plano

Proposição. Sejam O e A dois pontos e seja r a recta que os contém. Então, para qualquer ponto $P \in r$, existe um único número real p tal que

$$\overrightarrow{OP} = p\,\overrightarrow{OA}.$$

Tem-se ainda que a aplicação $P \mapsto p$ é uma régua em r, com base nos pontos O e A.

Dem. Exercício.

Proposição. Sejam O, A, B pontos não colineares. Seja α o único plano que os contém. Então, um ponto $P \in \alpha$ se e só se existem e são únicos números reais a, b tais que

$$\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}.$$

Dem. Exercício.

Definição de espaço afim

A partir de um conjunto de pontos $\mathcal{E}$ que satisfaz os nove axiomas de incidência e medida, é possível definir o espaço vectorial $\vec{\mathcal{E}}$.
Estes dois conjuntos estão relacionados da seguinte forma: o conjunto $\vec{\mathcal{E}}$ é composto por bijecções de $\mathcal{E}$ com as propriedades seguintes:

(i) Dados $u, v \in \vec{\mathcal{E}}$, tem-se $(u+v)(X) = u(v(X)), \forall X \in \mathcal{E}$.

(ii) Dados $X, Y \in \mathcal{E}$, existe um único $v \in \vec{\mathcal{E}}$ tal que $v(X) = Y$.

Definição. Um espaço afim é um conjunto $\mathcal{S}$ ao qual está associado um espaço vectorial $\mathcal{V}$ de bijecções de $\mathcal{S}$ que satisfazem as propriedades (i) e (ii). Normalmente denotamos $\mathcal{V}$ por $\vec{\mathcal{S}}$ e designamo-lo por *espaço dos vectores de* $\mathcal{S}$ ou *espaço vectorial associado a* $\mathcal{S}$.
Já vimos que um conjunto onde sejam válidos os nove axiomas de incidência e medida tem uma estrutura de espaço afim.
Iremos mostrar em seguida que, num qualquer espaço afim, é possível definir os conceitos primitivos ponto, recta e plano de modo que sejam válidos os nove axiomas de incidência e medida.

Pontos, rectas, planos num espaço afim

Definição. Seja S um espaço afim, com espaço vectorial real associado $\vec{\mathcal{S}}$. Seja U um subespaço vectorial de $\vec{\mathcal{S}}$ e seja $X \in \mathcal{S}$. O subconjunto de S dado por

$$U(X) = \{u(X) : u \in U\}$$

é chamado *subespaço afim de $\mathcal{S}$ que passa por X e paralelo a U*. A dimensão de $U(X)$ é a dimensão do subespaço vectorial U. Definimos uma geometria em $\mathcal{S}$ considerando os seguintes conceitos primitivos:

- Pontos - os elementos de $\mathcal{S}$
- Rectas - os subespaços afins de $\mathcal{S}$ de dimensão 1
- Planos - os subespaços afins de $\mathcal{S}$ de dimensão 2
- incidir em - pertencer a

Axiomas de incidência e medida num espaço afim

Uma régua numa recta $U(X)$ é uma bijecção

$$\begin{array}{rcl} U(X) & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & p \end{array}$$

tal que se $P \in U(X)$, então $\overrightarrow{XP} = p\,\mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}$ é um vector não nulo de U.

Duas rectas $U_1(X_1)$ e $U_2(X_2)$ de $\mathcal{S}$ são paralelas se $U_1 = U_2$.

Um vector $\mathbf{v} \in \vec{\mathcal{S}}$ é paralelo a uma recta $r = U(X)$ se $\mathbf{v} \in U$.

Proposição. Duas rectas num espaço afim são paralelas se e só se são complanares e disjuntas.
Dem. Exercício.

Teorema. Num espaço afim de dimensão 3 são válidos os axiomas de incidência e de medida R.1,. . ., R.9.

Vector posição e teorema da razão

Para utilizar todas as ferramentas de álgebra linear em geometria, necessitamos de relacionar a nocão de razão com a noção de coordenadas num espaço vectorial. Como à partida todos os pontos de um espaço afim são equivalentes, podemos escolher qualquer um deles para "origem". Normalmente denotamos o ponto origem de um espaço afim por O.

Definição. Seja $\mathcal{S}$ um espaço afim e seja $O \in \mathcal{S}$ um ponto pré-fixado. Dado um ponto $P \in \mathcal{S}$, designamos o vector $\overrightarrow{OP}$ por vector posição do ponto P em relação à origem O.

Se A e B forem dois pontos e $X \in AB$, então os vectores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ são linearmente dependentes. Logo, existem números reais α, β tais que

$$\alpha\overrightarrow{AX} = \beta\overrightarrow{XB}.$$

Definimos no espaço afim a razão $AX : XB$ como $AX : XB = \beta : \alpha$.

Teorema.(*Teorema da razão*) Suponhamos que O é a origem de $\mathcal{S}$ e sejam A, B pontos tais que $\overrightarrow{OA} = u$ e $\overrightarrow{OB} = v$. Então o ponto X da recta AB tal que $AX : XB = \beta : \alpha$ tem vector posição

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\alpha u + \beta v}{\alpha + \beta}.$$