Métodos Matemáticos da Física 2014/15

Exame 1ª época 20-06-2015

1. Admita que a solução $u(t,x)$ da equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, , \qquad x \in [-\ell, \ell] \, ,$$

pode ser escrita como uma série de Fourier: $u(t,x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(t)\, e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$.

a) Determine as equações diferenciais a que devem satisfazer os coeficientes $c_n(t)$ e encontre as respectivas soluções.

b) Dada a condição inicial, $u(0,x) = \delta(x-a) + \delta(x+a)$, onde $a \in \mathbb{R}_+$, calcule os coeficentes $c_n(0)$ e obtenha a série de Fourier de $u(t,x)$ em função do tempo.

2. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\, y''(x) - 2\,x\,y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \, , \qquad x \in [-1,1] \, .$$

a) Verifique se a equação está na forma de Sturm-Liouville e defina, justificando, o produto interno de funções adequado ao problema.

b) Determine os valores próprios e funções próprias $y_n(x)$ dadas por polinómios de grau $n \leq 3$: $y_n(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$. Convencione $y_n(1) = 1$.

c) Dada a função $u(x) = x^2$, calcule os produtos internos $\langle y_n | u \rangle$.

3.a) Calcule a transformada de Fourier da função $g(x) = \begin{cases} 1 & , \; -u \leq x \leq u \\ 0 & , \; |x| > u \end{cases}$.

b) Utilize o teorema de Parseval e o resultado de a) para exprimir o integral $\int_{-u}^{+u} f(x)\,dx$ em termos da transformada de Fourier da função $f(x)$ (arbitrária).

c) Estenda a relação anterior ao limite $u \to +\infty$, notando que $\tilde{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Conclua qual o valor de

$$\lim_{u \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, \frac{\sin u\,x}{x}\, dx \, ,$$

para uma função $F(x)$ arbitrária.

4. Considere a equação diferencial não homogénea:

$$\begin{aligned} & y''(x) + a^2\, y(x) = -f(x) \, , \qquad x \in [0,\ell] \, , \qquad a > 0 \, , \\ & y(0) = 0 \, , \quad y'(0) = 0 \, . \end{aligned}$$

a) Explicite a expressão da solução $y(x)$ em termos da função de Green $G(x,z)$, e escreva a equação diferencial e condições fronteira a que satisfaz $G(x,z)$.

b) Admitindo que a função de Green é da forma

$$G(x,z) = c\, \sin a(x-z)\, \Theta(x-z) + c_1\, \cos a\,x + c_2\, \sin a\,x \, ,$$

determine as constantes c, c_1, c_2.

c) Obtenha a solução $y(x)$ da equação não homogénea com $f(x) = 1$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \, , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\, dk = 2\pi\, \delta(x) \, , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$