Proposição

Sejam $P, Q \in \mathbb{R}^n$ e $W \leq \mathbb{R}^n$. São equivalentes as condições

(a) $P + W = Q + W$

(b) $P \in Q + W$

(c) $\exists\ A \in \mathbb{R}^n \quad P, Q \in A + W$

(d) $Q - P = \overrightarrow{PQ} \in W$

Corolário

Se $A, B \in \mathbb{R}^n$ e $W \leq \mathbb{R}^n$ então $A + W = B + W$ ou $A + W \cap B + W = \emptyset$

Observação

Fixado um subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^n$, a relação binária definida em $\mathbb{R}^n$ por
$A \sim B$ se e só se $A + W = B + W$,
para quaisquer $A, B \in \mathbb{R}^n$, é uma relação de equivalência.

Corolário

Se $A, B \in \mathbb{R}^n$ e $W, Z \leq \mathbb{R}^n$ são tais que $A + W \subseteq B + Z$. Então $W \subseteq Z$.
Além disso, se $A + W = B + Z$ então $W = Z$.

Definição

Sejam $A \in \mathbb{R}^n$ e $F \leq \mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{F}$ um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ contendo A.

(a) *Diz-se que F é o* subespaço vetorial associado a $\mathcal{F}$ *se $\mathcal{F} = A + F$.*

(b) *Chama-se* dimensão de $\mathcal{F}$ *à dimensão do subespaço vetorial associado a $\mathcal{F}$.*

Observação

Se $\mathcal{F}$ tem dimensão k, uma base afim de $\mathcal{F}$ tem $k + 1$ pontos.

Observação

- *Se $P \in \mathbb{R}^n$, $\{P\}$ é um subespaço afim de dimensão 0.*
- *Se $A, B \in \mathbb{R}^n$ são pontos distintos*

$$r = \{A + \alpha \overrightarrow{AB} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço afim de dimensão 1

- *Se $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^n$ e u, v são vetores l.i. de $\mathbb{R}^n$,*

$$\pi = \{A + \alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

é um subespaço afim de dimensão 2.

- *Se $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^n$ e $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ são vetores l.i. de $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{H} = A + \langle u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \rangle$$

é um subespaço afim de dimensão $n - 1$.

Terminologia

- *Se $A, B \in \mathbb{R}^n$ são pontos distintos,*

$$r = \{A + \alpha \overrightarrow{AB} : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

designa-se por reta *definida pelos pontos A, B.*

- *Se $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^n$ e u, v são vetores l.i. de $\mathbb{R}^n$, o subespaço afim*

$$\pi = \{A + \alpha u + \beta v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

designa-se por plano *de $\mathbb{R}^n$.*

- *Se $n \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^n$ e $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ são vetores l.i. de $\mathbb{R}^n$, o subespaço afim*

$$\mathcal{H} = A + \langle u_1, u_2, \ldots, u_{n-1} \rangle$$

designa-se por hiperplano *de $\mathbb{R}^n$.*

Observação

- *Os hiperplanos de $\mathbb{R}^3$ são os planos*
- *Os hiperplanos de $\mathbb{R}^2$ são as retas, e há apenas um plano.*

Teorema

Seja $\{\mathcal{F}_i = A_i + F_i : i \in I\}$ uma família não-vazia de subespaços afins de $\mathbb{R}^n$. Supondo que

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i \neq \varnothing$$

então $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ é subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ associado ao subespaço vetorial $\bigcap_{i\in I} F_i$ e

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i = A + \bigcap_{i\in I} F_i \quad \text{para qualquer} \quad A \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i.$$