Conceitos Introdutórios

No seguinte quadro encontra-se um resumo dos métodos básicos de contagem, onde se vê, essencialmente, a caracterização deles e que evidencia o contraste entre os mesmos.

MÉTODO			O QUE CONTAM?	MODO DE CALCULAR
Arranjos	sem repetição	${}^{n}A_k$	**sequências**, de comprimento k, que se podem construir a partir de n elementos, sem repetir elementos ao longo da sequência	$\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$
	com repetição	${}^{n}A'_k$	**sequências**, de comprimento k, que se podem construir com n elementos, podendo ou não repetir elementos na sequência	$n^k = n * n * \dots * n$ (k vezes)
Permutações		$n!$	**sequências,** de comprimento n, que se obtêm trocando a ordem dos n elementos diferentes que a constituem	$n! = n(n-1)(n-2)\dots * 3 * 2 * 1$
Combinações		$\binom{n}{k}$	**subconjuntos**, de k elementos, de um conjunto com n elementos	$\binom{n}{k} = \frac{{}^{n}A_k}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

NOTA: nas sequências importa a ordem pela qual se põem os elementos (123 ≠ 321), já nas combinações é indiferente ({1,2,3} = {2,3,1}).

Existem ainda alguns casos particulares de relevo, dos quais cito estes dois:

- **permutações em sequências que têm elementos repetidos** – se a sequência tem n elementos, sendo n_1 elementos do tipo 1, n_2 do tipo 2, … e n_r do tipo r, então existem $\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_r!}$ permutações possíveis dos n elementos

- **permutações na mesa redonda** – ao distribuir n pessoas à volta da mesa, existem $\frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$ formas de as sentar, tal que várias distribuições não venham a revelar a mesma ordem de pessoas quando a mesa roda.

PROBLEMAS DE CONTAGEM

Preenchimento da "Tabela de 12 Entradas"

A "**Tabela das 12 Entradas**" consiste numa representação esquemática em tabela que faculta uma rápida visualização dos cálculos que se usam na contagem de distribuições de n-bolas por k-caixas.

Observação: a utilidade da tabela está no facto de se conseguirem resolver não só os problemas de contagem de distribuições de bolas por caixas, mas de permitir **fazer a contagem dos elementos de qualquer conjunto** a partir do qual se consiga estabelecer uma relação bijectiva com um dos doze conjuntos (cujos elementos são as distribuições) considerados em cada uma das entradas da tabela.

	n-bolas diferentes k-caixas diferentes	**n-bolas iguais k-caixas diferentes**	**n-bolas diferentes k-caixas iguais**	**n-bolas iguais k-caixas iguais**
nº de distribuições sem restrição	(1)	(4)	(10)	(12)
nº de distrib. em que existe no máximo uma bola por caixa	(2)	(5)	(7)	(8)
nº de distribuições em que nenhuma caixa fica vazia	(3)	(6)	(9)	(11)

Tenciona-se, com este "resumo", *facilitar a interpretação* dos casos apresentados na tabela e *compreender os raciocínios* por trás dos cálculos, ou seja, os métodos de contagem utilizados.

REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA

Sempre que as **bolas** forem diferentes podemos, para facilitar a sua diferenciação, numerá-las **de 1 a n**. Do mesmo modo, numeraremos as **caixas de I a k**.

* Esquematicamente, temos

BOLAS

❶ ❷ ❸ … ⓝ

CAIXAS

I II III IV … k

---

(1) – Pretende-se contar o nº de distribuições de um número **n** de **bolas diferentes** que se podem fazer **por k-caixas** também **diferentes** (sem restrição).

Por outras palavras, de quantas maneiras distintas podemos distribuir n-bolas diferentes por k-caixas diferentes?

Consideremos as bolas. Sabemos que **cada bola só pode ir para uma caixa**. No entanto, cada caixa pode conter uma, duas, três, etc, ou até todas as n-bolas, uma vez que não temos restrições.

Torna-se evidente que, se pensarmos em atribuir uma caixa a cada bola, todo o processo se simplifica e o número de **distribuições de caixas a bolas** será **igual** ao número de **distribuições de bolas por caixas**.

O quadro à direita mostra atribuições aleatórias das caixas às bolas. Cada linha da tabela mostra que uma distribuição das k-caixas pelas n-bolas não é mais do que uma **sequência de comprimento n** em que **os elementos são as caixas** numeradas de I a k. *Interpretemos a segunda linha da tabela: a bola 1 é colocada na caixa I, a bola 2 na caixa III, a bola 3 na caixa II, etc, e a bola n que foi aleatoriamente colocada na caixa III.*

❶	❷	❸	…	ⓝ
IV	V	k	…	k-2
I	III	II	…	III
		…………..		
k	***k***	***k***	**…**	***k***

É de ver que, ao longo destas sequências, **podemos repetir caixas** (concretamente, isto corresponde a considerar que a mesma caixa tem mais do que uma bola).

Revendo, a bola 1 pode ser colocada em qualquer uma das k caixas. Qualquer que seja escolhida a caixa onde a bola 1 é colocada, a bola 2 pode ir novamente para qualquer uma das k caixas. E assim sucessivamente, até se colocar a bola n numa das mesmas k caixas. Concluindo, existem $k * k * k * \ldots * k \; = \; k^n$ opções para fazer a atribuição de k caixas a n-bolas e igualmente k^n distribuições de n-bolas por k-caixas (**arranjos com repetição**).

R.: $\boldsymbol{k^n}$

---

(2) – Pretende-se contar o nº de distribuições de um número **n** de **bolas diferentes** que se podem fazer **por k-caixas** também **diferentes**, de forma a que **cada caixa** fique com, no máximo, **uma bola**.

Por outras palavras, como podemos distribuir n-bolas diferentes por k-caixas diferentes, sem que as caixas fiquem com mais que uma bola?

Desta vez temos que considerar dois casos.

1) Torna-se óbvio que, quando temos mais bolas do que caixas, não se consegue que cada caixa só tenha uma bola sem que sobrem bolas não distribuídas. Isto corresponde a afirmar que, **se $n > k$, não existem distribuições possíveis** que cumpram as condições requeridas.

2) No caso de termos menos ou tantas bolas como caixas ($\boldsymbol{n \leq k}$), o método para determinar de quantas formas podemos colocar as bolas começa com a escolha de um subconjunto de caixas. O objectivo é escolher em quais das k-caixas vai ser colocada **uma** bola (as restantes caixas ficarão vazias); como temos n-bolas para distribuir vamos fazer **n-subconjuntos de k.** Assim, temos $\binom{k}{n}$ formas de escolher n das k-caixas, a cada qual corresponderá uma e só uma bola. Resta-nos recordar que as bolas são diferentes portanto, depois de definido o n-subconjunto de caixas, existem **n!** maneiras de **permutar as bolas** entre si.

R.: $$\begin{cases} 0 \\ \binom{k}{n} * n! = \frac{k!}{n!(k-n)!} n! \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{, se \;\; n > k} \\ \boldsymbol{\frac{k!}{(k-n)!}} & \boldsymbol{, se \;\; n \leq k} \end{cases}$$

(3) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas diferentes por k-caixas diferentes** em que **nenhuma das caixas** fica **vazia**.
Por outras palavras, de quantas formas podemos colocar n-bolas diferentes em k-caixas diferentes sem que nenhuma caixa fique sem bolas?

Vamos estabelecer que o número que procuramos é $\boldsymbol{T(n,k)}$. Este é o número de distribuições das n-bolas numeradas pelas k-caixas diferentes em que **não se deixam caixas vazias**. Voltamos a considerar dois casos.

1) No caso em que temos menos bolas do que caixas, qualquer das distribuições possíveis implica que alguma(s) caixa(s) fique(m) vazia(s). Então, se $\boldsymbol{n} < k$ não existem distribuições nas condições indicadas, logo $\boldsymbol{T(n,k) = 0}$.

2) Temos, agora, o caso em que há mais ou tantas bolas como caixas ($\boldsymbol{n \geq k}$).
Vamos começar por compreender o número $T(n,k)$. Se queremos as distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que nenhuma caixa fica vazia, podemos então pensar que queremos o número total de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes *(1)* **menos** aquelas em que pelo menos uma caixa fica vazia.

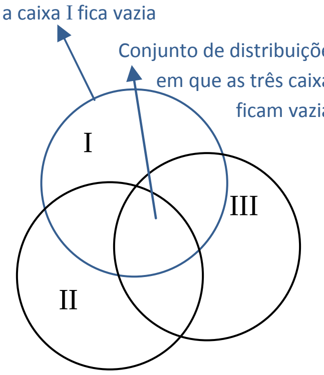
$\boldsymbol{T(n,k)}$: nº distr. de n-bolas ≠s por k-caixas ≠s, nenhuma caixa vazia
=
$\boldsymbol{k^n}$: nº distr. de n-bolas ≠s por k-caixas ≠s
-
$\boldsymbol{V(n,k)}$: nº distr. de n-bolas ≠s por k-caixas ≠s, alguma(s) caixa vazia

Em que consiste $\boldsymbol{V(n,k)}$?
Este número conta: as distribuições em que há apenas uma caixa vazia (I, II ou III); as distribuições em que há duas caixas vazias; ...; mais a distribuições em que todas as k-caixas estão vazias.

(EXEMPLO, supondo que k=3)
Representação esquemática de $\boldsymbol{V(n,3)}$ - neste Diagrama de Venn os círculos não representam caixas!

É o conjunto das distribuições em que a caixa I fica vazia

Conjunto de distribuições em que as três caixas ficam vazias



$V(n,3) = |D_I \cup D_{II} \cup D_{III}|$

Como se calcula $\boldsymbol{V(n,k)}$?
Usando o **princípio da inclusão-exclusão**, calcula-se $V(n,k)$ como sendo a **reunião de k-conjuntos** *(conjunto 1: distribuições em que I fica vazia; conjunto 2: distrib. em que II fica vazia, ..., conjunto k: distrib. em que a caixa k fica vazia)*, dada pela expressão geral seguinte:

$$|D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\sum_{1 \leq p_1 < \cdots < p_j \leq k} \left| D_{p_1} \cap \ldots \cap D_{p_j} \right| \right)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n \qquad = V(n,k)$$

Então podemos finalmente calcular $T(n,k)$ quando $n \leq k$:[1]
$\boldsymbol{T(n,k) = k^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n}$

Repare-se que, se $j = 0$, então, substituindo j por 0 na expressão do somatório, obter-se-ia precisamente $(-1)^{0-1}\binom{k}{0}(k-0)^n = \left(\frac{1}{-1}\right) * 1 * k^n = -k^n$. Observemos também que o factor $(-1)^{j-1}$ faz variar o sinal das expressões dentro do somatório, de tal forma que, quando j é par, j-1 é ímpar e a expressão é negativa, e quando (j-1) é par, a expressão é positiva.

$$T(n,k) = \boldsymbol{k^n} - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n = -\sum_{j=0}^{0} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n - \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \binom{k}{j} (k-j)^n$$
$$= \sum_{j=0}^{0} (-1)^{j} \binom{k}{j} (k-j)^n + \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} (k-j)^n$$

R.: $$\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{,se \ \ n < k} \\ \boldsymbol{\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n} & \boldsymbol{,se \ \ n \geq k} \end{cases}$$

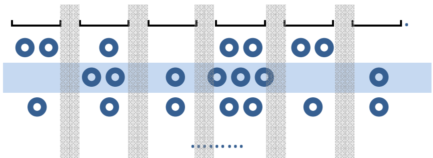
[1] ver a explicação das expressões de somatório e a demonstração da segunda igualdade na página 11 do resumo

(4) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas diferentes**.
Por outras palavras, de quantas maneiras distintas podemos colocar n-bolas iguais em k-caixas diferentes?

A resolução deste problema é indirecta. Há que estabelecer uma bijecção entre o conjunto destas distribuições e um outro conjunto que saibamos contar.

Consideremos k=6 e n=7 (meramente para facilitar a representação)

Olhemos para o esquema:



- as k-caixas estão dispostas numa fila
- temos n-bolas iguais para distribuir pelas k-caixas
- vemos algumas distribuições possíveis das n-bolas pelas k-caixas

Vejamos agora estas sequências:

00 1 0 1 1 00 1 00 1
1 00 1 0 1 000 1 1 0
0 1 0 1 0 1 00 1 0 1 0
………

- são sequências de comprimento 13 com cinco 1's e sete 0's

001011001001
100101000110
010101001010
………

numa representação menos esquemática

Será possível relacionarmos as distribuições com as sequências? Mais ainda: conseguimos garantir que existem **tantas distribuições** de *7* bolas iguais por *6* caixas diferentes **como sequências** de cinco *1*'s e sete *0*'s? Sim.

Como? Estabelecendo uma **bijecção**, ou seja, **fazer corresponder a cada elemento de um conjunto um e só um elemento do outro**. Assim, conseguimos garantir que os cardinais dos conjuntos são iguais, ou seja, que têm exactamente o mesmo número de elementos. Se soubermos calcular o número de elementos de um, temos, de imediato, o número de elementos do outro. (As bijecções não são bichos impossíveis de compreender!)

Entre que conjuntos queremos assentar a bijecção? O primeiro conjunto contém todas as distribuições possíveis de n-bolas iguais por k-caixas. O segundo conjunto é o das sequências de comprimento (n+k-1) com n zeros e (k-1) uns. Queremos que a toda distribuição do "conjunto 1" corresponda uma sequência do conjunto 2 (relação de aplicação), a cada sequência do "conjunto 2" corresponda apenas uma distribuição do "conjunto 1" (relação injectiva) e que todas sequências tenham correspondência com uma distribuição (relação sobrejectiva).

Como estabelecer a bijecção? Definindo as seguintes condições:
- **cada 0** (de uma sequência) **representa uma bola** (numa distribuição)
- **cada 1** (de qualquer sequência) **representa uma mudança de caixa** (na distribuição)
- **à esquerda do primeiro 1** (de qualquer sequência) **estão os 0's correspondentes às bolas da caixa I** (em qualquer distribuição)
- **entre o i-ésimo 1 e o (i+1)-ésimo 1** (de qualquer sequência) **estão os 0's correspondentes às bolas colocadas na caixa (i+1)** (em qualquer distribuição)
- **à direita do (k-1)-ésimo 1** (de uma sequência) **estão os 0's correspondentes às bolas da caixak** (nas distribuições)

Definida a bijecção, temos como garantido que o número de (n+k-1)-sequências de n zeros e (k-1) uns é igual ao número de distribuições de n-bolas iguais por k-caixas diferentes. Por isso, podemos contar o número destas sequências e saber quantas distribuições deste tipo existem.

Na contagem do número de sequências tomamos o seguinte raciocínio: dos (n-1+k) lugares que temos para colocar 0's e 1's escolhemos aleatoriamente n e colocamos os zeros (logicamente os (k-1) uns preencherão os restantes lugares vagos). De igual forma, podemos pensar em escolher (k-1) dos (n-1+k) lugares e posicionar os 1's, deixando os restantes lugares para os 0's.

Assim, podemos construir $\binom{n+k-1}{n}$ ou $\binom{n+k-1}{k-1}$ sequências de comprimento (n+k-1) com n zeros e (k+1) uns.

Logo, existem $\binom{n+k-1}{n}$ ou $\binom{n+k-1}{k-1}$ maneiras de distribuir n-bolas iguais por k-caixas.

R.: $\boldsymbol{\binom{n+k-1}{n}}$ ou $\boldsymbol{\binom{n+k-1}{k-1}}$

(5) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas diferentes** em que **cada caixa fique** com, no máximo, **uma bola**.
Por outras palavras, de quantas maneiras distintas podemos colocar n-bolas iguais em k-caixas diferentes sem que as caixas fiquem com mais que uma bola?

Novamente, consideremos dois casos.

1) É intuitivo que, quando temos mais bolas do que caixas, não se consegue que cada caixa só tenha uma bola, porque **sobram bolas** não distribuídas. Assim, se $\boldsymbol{n} > k$ não existem distribuições possíveis.

2) Se tivermos menos ou tantas bolas como caixas ($\boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{k}$), vamos escolher um **n-subconjunto de [k]** [2], ou seja, vamos escolher as caixas nas quais serão colocadas as bolas. Existem $\binom{k}{n}$ formas de escolher n das k-caixas e em cada uma delas ficará uma das n-bolas iguais, enquanto que as caixas que não pertencem ao subconjunto ficarão vazias.

R.: $\begin{cases} \mathbf{0} & , se \;\; \boldsymbol{n} > k \\ \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}} & , se \;\; \boldsymbol{n} \leq \boldsymbol{k} \end{cases}$

---

(6) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas diferentes** em que **nenhuma caixa** fique **vazia**.
Por outras palavras, de quantas formas podemos distribuir n-bolas iguais por k-caixas de modo a que cada caixa fique com, pelo menos, uma bola?

Notemos os dois casos:

1) Se houver menos bolas que caixas, não podemos distribuí-las de forma a que todas as caixas tenham bolas, portanto $\boldsymbol{n} < k \Rightarrow$ **0 distribuições**.

2) Atentemos na situação em que temos um número não inferior de bolas relativamente ao de caixas ($n \geq k$).

Com vista a garantir que nenhuma das caixas fica vazia, começamos por **colocar uma bola em cada caixa**. Sendo que temos k-caixas, distribuímos k bolas. Portanto, **restam (n-k)-bolas iguais** e pretendemos distribui-las aleatoriamente pelas mesmas k-caixas.

Isto leva-nos a um problema idêntico ao da entrada *(4)* da tabela (no qual se fez a *contagem das distribuições de n-bolas iguais por k-caixas diferentes*). Contudo, vemo-nos agora encarregues de distribuir apenas (n-k) bolas pelas mesmas k-caixas. Certamente, esta não é uma tarefa mais complicada. Em *(4)* fizémos corresponder distribuições de n-bolas iguais por k-caixas diferentes a (n+k-1)-sequências de n zeros e (k-1) uns.

Sinteticamente: agora vamos estabelecer uma bijecção entre as **distribuições de (n-k)-bolas por k-caixas** e as **sequências de comprimento (n-k+(k-1)) de (n-k) zeros e (k-1) uns**. O cardinal do conjunto de distribuições é igual ao cardinal do conjunto das sequências. Existem $\binom{(n-k)+(k-1)}{n-k} = \binom{n-1}{n-k}$ ou $\binom{n-1}{k-1}$ sequências, logo existem o mesmo número de maneiras de distribuir (n-k)-bolas por k-caixas.

R.: $\begin{cases} \mathbf{0} & , se \;\; \boldsymbol{n} < k \\ \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{k-1}} \; ou \binom{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n-k}} & , se \;\; \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{k} \end{cases}$

[2] [k] é uma notação que denota {1,2,3,…,k}
Neste caso, referente às k-caixas, trata-se do conjunto {caixa I, caixa II,… caixa k-1, caixa k}

(7) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas diferentes por k-caixas iguais** em que **cada caixa** fique, no máximo, com **uma bola**.
Por outras palavras, quantas opções tenho para distribuir n-bolas diferentes por k-caixas iguais sem que haja mais que uma bola por caixa?

Suponhamos 7 caixas e 4 bolas.

Ø ❸ ❹ Ø ❷ Ø ❶
Ø ❹ ❶ ❸ ❷ Ø Ø
❹ Ø ❷ Ø ❶ Ø ❸
………

$(n \leq k)$

Todos os esquemas de distribuições anteriores dizem respeito à mesma porque as caixas são iguais

Vejamos os dois casos distintos.

1) Mais uma vez, se temos **mais bolas** do que caixas, **sobram** bolas ao colocarmos apenas uma em cada caixa. **Não conseguimos distribui-las** sem que alguma(s) caixa(s) fique com várias bolas.

2) Agora, se pensarmos na situação em que não há mais bolas que caixas ($\boldsymbol{n \leq k}$): como as caixas são iguais, **é indiferente quais** delas escolhemos para colocar lá dentro uma bola. Por isso, existe apenas 1 maneira de distribuir n-bolas por n das k-caixas.

O facto de as bolas serem diferentes não influencia em nada o valor, como podemos conferir no exemplo.

(Se persistem dúvidas: mas porque é que não precisamos de combinações para calcular isto? Porque, sendo as caixas todas iguais, só existe 1 n-subconjunto de caixas, qualquer que seja valor de k. Não se pode falar em “escolher as caixas I, III e V” ou em “escolher a caixa k-5” pois as caixas **não estão numeradas** (não são diferentes!). Mas podemos falar em “escolher três das k-caixas” ou “escolher uma das k-caixas”. Só temos uma forma de o fazer… escolhê-las! E pôr, em cada, uma bola.)

R.: $\begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{,se}\ \ \boldsymbol{n} > k \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{,se}\ \ \boldsymbol{n \leq k} \end{cases}$

---

(8) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas iguais** em que **cada caixa** tenha **uma bola** no máximo.
Por outras palavras, de quantas maneiras podemos distribuir n-bolas iguais por k-caixas iguais em que não haja mais que uma bola por caixa?

Suponhamos 7 caixas e 4 bolas.

Ø ○ ○ Ø ○ Ø ○
Ø ○ ○ ○ ○ Ø Ø
○ Ø ○ Ø ○ Ø ○
………

$(n \leq k)$

Todos os esquemas de distribuições anteriores dizem respeito à mesma porque as caixas são iguais

O raciocínio é, em tudo, análogo ao de (7). *Vá, é só olhar para cima.*

R.: $\begin{cases} \mathbf{0} & \boldsymbol{,se}\ \ \boldsymbol{n} > k \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{,se}\ \ \boldsymbol{n \leq k} \end{cases}$

---

(9) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas diferentes por k-caixas iguais** em que **nenhuma caixa** fique **vazia**.
Por outras palavras, de quantas formas podemos distribuir n-bolas numeradas por k-caixas de modo a que cada caixa fique, pelo menos, com uma bola?

Ao número que procuramos vamos chamar $\boldsymbol{S(n,k)}$ [3]. São de distinguir os dois casos:

[3] $S(n,k)$ são os chamados Nº de Stirling de 2ª espécie. Estes números dependem claramente dos valores de n e k. *James Stirling (1692 – 1770), matemático escocês, contemporâneo de Isaac Newton*.

1) Quando temos **menos bolas** do que caixas, qualquer das distribuições possíveis implica que alguma(s) caixa(s) fique(m) vazia(s), logo não existem distribuições nas condições indicadas ($\boldsymbol{S(n,k)=0}$).

2) Temos, agora, a situação em que o número de caixas não é superior ao de bolas ($\boldsymbol{n \geq k}$).

Vamos começar por definir que o número $S(n,k)$ conta o número de distribuições das n-bolas numeradas por k-caixas iguais em que **não se deixam caixas vazias**. Podemos relacionar este número com o já calculado $T(n,k)$ que contava o número de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que nenhuma caixa fica vazia. Temos que ver que a única coisa que difere entre eles é que, agora, não nos interessa a numeração das caixas, uma vez que elas são todas iguais.

Portanto, se, ao calcularmos $T(n,k)$, temos em consideração que “ter as bolas ❶❷❸ na caixa I” ou “ter as bolas ❶❷❸ na caixa VI” são situações diferentes, quando calculamos $S(n,k)$ essas situações são a mesma porque as caixas não estão numeradas. Correspondem a dizer que “numa das caixas temos as bolas ❶❷❸”.

Vejamos o seguinte exemplo para que tudo se torne mais claro:

EXEMPLO em que distribuímos 9 bolas diferentes por 6 **caixas diferentes** e nenhuma fica vazia	Caixas					
	I	II	III	IV	V	VI
	❷❹❻	❸	❾	❶	❺	❼❽
	❾	❸	❷❹❻	❶	❺	❼❽
	❶	❸	❾❹❻	❼	❷	❽❺
	❾	❺	❸	❼❽	❷❹❻	❶
	…	…	…	…	…	…

Existem $T(9,6)$ distribuições destas. Aqui, todas as distribuições esquematizadas são diferentes.

EXEMPLO em que distribuímos 9 bolas diferentes por 6 **caixas iguais** e nenhuma fica vazia	Caixas					
	caixa	caixa	caixa	caixa	caixa	caixa
	❷❹❻	❸	❾	❶	❺	❼❽
	❾	❸	❷❹❻	❶	❺	❼❽
	❶	❸	❾❹❻	❼	❷	❽❺
	❾	❺	❸	❼❽	❷❹❻	❶
	…	…	…	…	…	…

Desta vez, as três distribuições salientadas a azul são exactamente a mesma porque as caixas são iguais (não estão numeradas, não importa a ordem, não diferem, etc). Visto isto, podemos concluir que **não importa a permutação das caixas** quando calculamos $S(n,k)$.

Então, vamos pegar no *número de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que nenhuma caixa fica vazia* e excluir dele os casos em que as distribuições diferem apenas devido a permutações de caixas, e concluir que:

$$S(n,k) = \frac{T(n,k)}{k!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\right)$$

(porque, apesar de, na dedução do cálculo do número $T(n,k)$, não se fazer referência à contabilização das permutações de caixas, estas foram levadas em consideração, como já pudemos confirmar a partir do exemplo da tabela).

R.: $\begin{cases} \mathbf{0} & ,\boldsymbol{se} \;\; \boldsymbol{n} < k \\ \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n\right) & ,\boldsymbol{se} \;\; \boldsymbol{n \geq k} \end{cases}$

(10) – Pretende-se contar o nº total de distribuições de **n-bolas diferentes por k-caixas iguais**.
Por outras palavras, de quantas maneiras podemos colocar n-bolas diferentes em k-caixas iguais (sem restrições)?

Para calcularmos este número vamos pensar em $S(n,k)$: o número de distribuições das n-bolas numeradas por k-caixas iguais em que não se deixa **nenhuma das k-caixas vazias.**

Se calcularmos $S(n,1)$ estamos a determinar o número de distribuições das n-bolas numeradas por uma caixa (igual a si própria, obviamente) em que a tal caixa não fica vazia (explicado de maais até!...). Se calcularmos $S(n,2)$ estamos a determinar o número de distribuições das n-bolas diferentes por duas caixas iguais em que nenhuma das duas caixas fica vazia. Ao calcular $S(n,j)$ estamos a determinar o número de distribuições das n-bolas distintas por j caixas iguais em que nenhuma das j caixas fica vazia. E assim, sucessivamente.

Vejamos: quando queremos calcular o *número total de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas iguais (sem restrição)* estamos a contar distribuições em que uma das k-caixas fica com as bolas todas e as restantes caixas ficam vazias **mais** o número de distribuições em que duas das k-caixas ficam com as bolas todas (considerando todas as distribuições possíveis das bolas entre as duas caixas iguais) e as restantes caixas ficam sem bolas **mais** o número de distribuições em que três das k-caixas ficam com todas as bolas (e se tem em conta todas as distribuições possíveis das bolas pelas três caixas iguais) e as restantes (k-3)-caixas ficam vazias **mais … mais** as distribuições em que todas as caixas (iguais) têm bolas.

Expressando matematicamente, isto é $\boldsymbol{B_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,j) + \cdots S(n,k)} = \sum_{j=1}^{k} S(n,j)$
Sendo B_n [4] o número total de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas iguais.

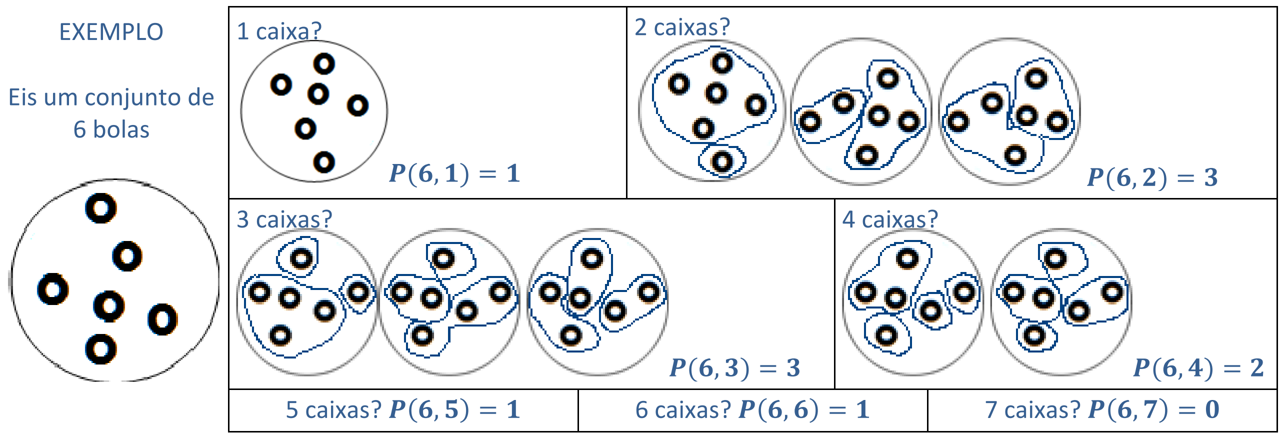
R.: $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{k} S(n,j)}$

---

(11) – Pretende-se contar o nº de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas iguais** em que **nenhuma caixa** fique **vazia**.
Por outras palavras, quantas distribuições de n-bolas iguais por k-caixas iguais podemos fazer, tal que cada caixa tenha pelo menos uma bola?

Ao número que procuramos vamos chamar $\boldsymbol{P(n,k)}$. Este é (como pede o enunciado) o número de distribuições das n-bolas iguais por k-caixas iguais em que não se deixam caixas vazias.

De quantas formas podemos distribuir as 6 bolas (sem que fiquem caixas vazias) por:



Conseguimos visualizar nos esquemas que este $P(n,k)$ é o **número de partições de [n] em k-partes**.

[4] B_n é chamado o n-ésimo Número de Bell.
Eric Temple Bell (1883 – 1960), matemático e autor de ficção científica escocês.

E podemos afirmar também que, quando existem mais caixas do que bolas, não há forma de distribuir as bolas sem que alguma(s) das caixas fique(m) vazia(s). Portanto, $\boldsymbol{n} < k \Rightarrow 0$ **distribuições possíveis**.

Observe-se a tabela de $P(n,k)$. Varia na vertical conforme n (nº de bolas) e na horizontal segundo k (nº de caixas).

n \ k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0
5	1	1	2	1	1	0	0
6	1	3	3	2	1	1	0
7	1	$P(7{,}2)$	$P(7{,}3)$	$P(7{,}4)$	$P(7{,}5)$	$P(7{,}6)$	1

Por mais que se tente, ainda **não foi descoberta uma expressão geral** para determinar o valor de $P(n,k)$ para qualquer n e qualquer k. No entanto, conseguiu-se estabelecer uma **relação de recorrência**:

$$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$$

Não, não caiu do céu... Esta relação de recorrência pode ser demonstrada combinatoricamente. Vamos interpretar cada um dos seus termos, começando por relembrar que
$\boldsymbol{P(n,k)}$ = nº de distribuições das n-bolas iguais por k-caixas iguais, nenhuma caixa vazia.

$\boldsymbol{P(n-1,k-1)}$ = nº de distr. de (n-1)-bolas iguais por (k-1)-caixas iguais, nenhuma caixa vazia
= nº de distr. de n-bolas iguais por k-caixas iguais, nenhuma caixa vazia, definindo que uma das caixas só terá uma bola
Para esclarecer este último tipo de distribuição: tiramos 1 das n-bolas iguais e colocamos numa das k-caixas-iguais, pomos a caixa de parte, e agora distribuímos as restantes n-bolas pelas restantes k-1 caixas. Temos $P(n-1,k-1)$ *maneiras distintas de fazer essa distribuição.*

$\boldsymbol{P(n-k,k)}$ = nº de distr. de (n-k)-bolas iguais por k-caixas iguais, nenhuma caixa vazia
= nº de distr. de n-bolas iguais por k-caixas iguais, todas as caixas têm duas bolas no mínimo
Em que consistem, claramente, estas distribuições? Começa-se por colocar k das n-bolas iguais uma em cada caixa, de seguida distribuem-se as (n-k)-bolas que sobraram novamente por todas as k-caixas de tal forma que nenhuma das k-caixas fique só com a primeira bola lá dentro. Tem-se $P(n-k,k)$ *formas distintas de fazer esta distribuição.*

Quer em $P(n-1,k-1)$, quer em $P(n-k,k)$, contam-se distribuições em que todas as caixas têm pelo menos uma bola, ou seja nenhuma das caixas fica vazia. No entanto, enquanto $P(n-1,k-1)$ conta aquelas em que **ter pelo menos uma caixa com apenas uma bola é obrigatório**, $P(n-k,k)$ conta as distribuições em que **cada caixa ter uma única bola é proibido**.
Estas duas condições complementam-se, isto é, a soma destes dois números dá o *número de distribuições de n-bolas iguais por k-caixas iguais, em que nenhuma das caixas pode ficar vazia, mas para as quais* ***não há restrição*** *quanto ao facto de terem apenas uma ou de terem mais de uma bola por caixa* ou, simplesmente, **o número de distribuições de n-bolas iguais por k-caixas iguais em que nenhuma caixa fica vazia** (precisamente **P(n,k)**).

Ficou demonstrado que $P(n,k)$ se define por recorrência por $\boldsymbol{P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)}$.

Podemos agora calcular algumas entradas incompletas da tabela acima:
$P(7{,}3) = P(6{,}2) + P(4{,}3) = 4$; $P(7{,}5) = P(6{,}4) + P(2{,}5) = 2$; $P(7{,}6) = P(6{,}5) + P(1{,}6) = 1$

R.: $\begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{, se \quad n < k} \\ \boldsymbol{P(n-1,k-1) + P(n-k,k)} & \boldsymbol{, se \quad n \geq k} \end{cases}$

(12) – Pretende-se contar o nº total de distribuições de **n-bolas iguais por k-caixas iguais**.
Por outras palavras, de quantas maneiras se podem distribuir n-bolas iguais em k-caixas iguais (sem restrições)?

Para calcularmos este número vamos pensar em $P(n,k)$: o número de distribuições das n-bolas iguais por k-caixas iguais em que não se deixa **nenhuma das k-caixas vazias.**

Calcular $P(n,1)$ é encontrar o número de distribuições das n-bolas iguais por uma caixa em que a tal caixa não fica vazia. Ao determinar $P(n,2)$ sabemos o número de distribuições das n-bolas iguais por duas caixas iguais em que nenhuma das duas caixas fica vazia. Ao calcular $S(n,j)$ estamos a determinar o número de distribuições das n-bolas iguais por j caixas iguais em que nenhuma das j caixas fica vazia. E assim, sucessivamente.

Então, se pretendemos desvendar o *número total de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas iguais (sem restrição)* estamos a contar distribuições em que uma das k-caixas fica com as bolas todas e as restantes caixas ficam vazias **mais** o número de distribuições em que duas das k-caixas ficam com as bolas todas (considerando todas as distribuições possíveis das bolas entre as duas caixas iguais) e as restantes caixas ficam sem bolas **mais** o número de distribuições em que três das k-caixas ficam com todas as bolas (e se tem em conta todas as distribuições possíveis das bolas pelas três caixas iguais) e as restantes (k-3)-caixas ficam vazias **mais … mais** as distribuições em que todas as caixas (iguais) têm bolas (iguais).

Expressando matematicamente, isto é $\boldsymbol{P(n,1)+P(n,2)+\cdots+P(n,j)+\cdots P(n,k)} = \sum_{j=1}^{k} P(n,j)$
E este é o número total de distribuições de n-bolas iguais por k-caixas iguais.

R.: $\boldsymbol{\sum_{j=1}^{k} P(n,j)}$

Conclusão

Eis a tabela das 12 entradas preenchida:

	n-bolas diferentes k-caixas diferentes	n-bolas iguais k-caixas diferentes	n-bolas diferentes k-caixas iguais	n-bolas iguais k-caixas iguais
nº de distribuições sem restrição	k^n	$\binom{n+k-1}{n}$	$B_n = \sum_{j=1}^{k} S(n,j)$	$\sum_{j=1}^{k} P(n,j)$
nº de distrib. em que existe no máximo uma bola por caixa	$\begin{cases} 0 & ,se\ \ n>k \\ \frac{k!}{(k-n)!} & ,se\ \ n\le k \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & ,se\ \ n>k \\ \binom{k}{n} & ,se\ \ n\le k \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & ,se\ \ n>k \\ 1 & ,se\ \ n\le k \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & ,se\ \ n>k \\ 1 & ,se\ \ n\le k \end{cases}$
nº de distribuições em que nenhuma caixa fica vazia	$T(n,k) = \begin{cases} 0 & ,se\ \ n<k \\ \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n & ,se\ \ n\ge k \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & ,se\ \ n<k \\ \binom{n-1}{n-k} & ,se\ \ n\ge k \end{cases}$	$S(n,k) = \frac{T(n,k)}{k!}$	$P(n,k) = P(n-1,k-1) + P(n-k,k)$

Farto das palavras "bolas", "caixas", "maneiras", "distribuir", "diferentes", "iguais", "vazias", "escolher", "colocar" e "distribuições"? Acredito.

Segue-se, na categoria de anexo, uma aproximação mais aprofundada, metódica e explicativa do próprio Princípio da Inclusão-Exclusão e da sua utilização no preenchimento da entrada (3) da tabela.

Para compreender melhor

Os objectivos desta secção são:
- enunciar o Princípio da Inclusão-Exclusão
- analisar o seu desenvolvimento para os primeiros valores de j
- demonstrar que no caso dos conjuntos D_{p_i} usados para determinar os números $T(n,k)$ da entrada *(3)* da tabela das 12 entradas se verifica a igualdade:

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1\le\cdots\le p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap D_{p_2}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n$$

O Princípio da Inclusão-Exclusão consiste numa fórmula geral; dela obtemos uma expressão que nos permite determinar **o número de elementos** que pertencem à **união de k-conjuntos** finitos. Isto é, permite-nos **determinar o cardinal** da reunião de k conjuntos.

O princípio diz que

$$|D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1\le\cdots\le p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)$$

onde

$|D_j|$ é o cardinal de um conjunto D_j (o seu número de elementos)

$(-1)^{j-1}$ faz variar o sinal das parcelas do somatório (ou seja, somam-se e subtraem-se parcelas alternadamente)

e, para já, não explicito mais observações. Será mais fácil compreender os somatórios apresentados ao longo do desenvolvimento dos casos k=1, k=2 e k=3.

$$\boxed{k=1}$$

Intuitivamente, sabemos à partida que a reunião de um conjunto D_1 tem tantos elementos como ele próprio. Por isso, estamos expectantes em chegar à igualdade $|D_1|=|D_1|$.

$$|D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)$$

O primeiro passo é substituir k por 1

$$|\boldsymbol{D_1}|=\sum_{j=1}^{1}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le 1}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)$$

Vemos que j varia de 1 a 1, por isso, o primeiro somatório só vai ter uma parcela: aquela em que j=1.

$$=(-1)^{1-1}\left(\sum_{1\le p_1\le 1}\left|D_{p_1}\right|\right)$$

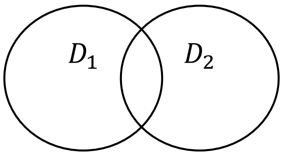
$1\le p_1<\cdots<p_1\le 1 \iff p_1=1$
Como só ficámos com um p_j a conjunção dentro do segundo somatório será de um só conjunto (D_{p1})

$$=1*|D_1|=|\boldsymbol{D_1}|$$

Como seria de esperar, o cardinal da união de D_1 consigo próprio é o número de elementos do próprio D_1.

$\boxed{k = 2}$

Quando queremos estudar a reunião de dois conjuntos, como pensamos para obter o seu cardinal?



Somamos o número de elementos de D_I com o número de elementos de D_{II}. Mas no fim desta soma, contámos duas vezes o elementos que pertencem a $D_I \cap D_{II}$ porque o conjunto intersecção está contido quer em D_I, quer em D_{II}.
Então, subtraímos uma vez o cardinal dessa conjunção à soma que tínhamos feito.

$$|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2| - |D_1 \cap D_2|$$

Portanto, no fim da simplificação do Princípio da Inclusão-Exclusão para k=2 esperamos obter a expressão acima.

$$|D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_k| = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \left(\sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_j \le k} \left| D_{p_1} \cap \ldots \cap D_{p_j} \right| \right)$$

Substituir k por 2

$$|\boldsymbol{D_1} \cup \boldsymbol{D_2}| = \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j-1} \left(\sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_j \le 2} \left| D_{p_1} \cap \ldots \cap D_{p_j} \right| \right)$$

j varia de 1 a 2, logo, o primeiro somatório vai ter duas parcelas

$$= \underbrace{(-1)^{1-1} \left(\sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_1 \le 2} |D_{p_1}| \right)}_{j=1} + \underbrace{(-1)^{2-1} \left(\sum_{1 \le p_1 < \cdots < p_2 \le 2} |D_{p_1} \cap D_{p_2}| \right)}_{j=2}$$

Na primeira parcela $1 \le p_1 \le 2$, por isso, o seu segundo somatório vai ter duas parcelas: uma em que $p_1 = 1$ e outra em que $p_1 = 2$

Na segunda parcela
$1 \le p_1 < \cdots < p_2 \le 2 \iff p_1 = 1 \wedge p_2 = 2$
logo o seu segundo somatório será de apenas uma parcela na qual $p_1 = 1$ e $p_2 = 2$

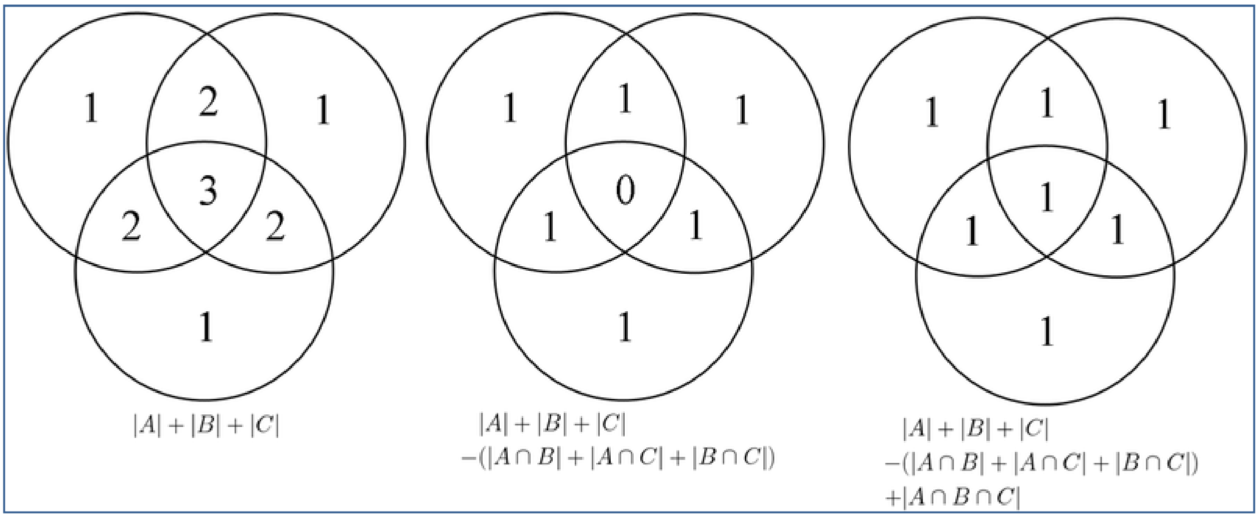
$$= (-1)^0 (\underbrace{|D_1|}_{p_1 = 1} + \underbrace{|D_2|}_{p_1 = 2}) + (-1)^1 \underbrace{(|D_1 \cap D_2|)}_{p_1 = 1 \wedge p_2 = 2}$$

$$= |\boldsymbol{D_1}| + |\boldsymbol{D_2}| - |\boldsymbol{D_1} \cap \boldsymbol{D_2}|$$

Conseguimos, novamente, ir ao encontro do esperado.

$\boxed{k = 3}$

Neste esquema, vê-se o raciocínio (idêntico ao da situação dos dois conjuntos) que fazemos para obter o número de elementos da reunião de três conjuntos. Os algarismos dentro dos conjuntos representam o **número de vezes que cada parte foi contada** quando se teve em conta a expressão abaixo de cada Diagrama de Venn.



Esquema 1 - FONTE: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Inclusion-exclusion-3sets.png

Comecemos a desenvolver o Princípio da Inclusão-Exclusão para k=3.

$$|D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k| = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1 \le p_1 < \dots < p_j \le k} \left|D_{p_1} \cap \dots \cap D_{p_j}\right|\right)$$

Substituir k por 3

$$|\boldsymbol{D_1} \cup \boldsymbol{D_2} \cup \boldsymbol{D_3}| = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1 \le p_1 < \dots < p_j \le 3} \left|D_{p_1} \cap \dots \cap D_{p_j}\right|\right)$$

j varia de 1 a 3, logo, o primeiro somatório vai ter três parcelas

$$= \underbrace{(-1)^{1-1}\left(\sum_{1 \le p_1 \le 3} |D_{p_1}|\right)}_{\mathbf{j=1}} + \underbrace{(-1)^{2-1}\left(\sum_{1 \le p_1 < p_2 \le 3} |D_{p_1} \cap D_{p_2}|\right)}_{\mathbf{j=2}} + \underbrace{(-1)^{3-1}\left(\sum_{1 \le p_1 < \dots < p_3 \le 3} |D_{p_1} \cap \dots \cap D_{p_3}|\right)}_{\mathbf{j=3}}$$

p_1 varia de 1 a 3 $\Rightarrow$ este somatório terá 3 parcelas

$1 \le p_1 = \mathbf{1} < p_2 = \mathbf{2} \le 3$ ou
$1 \le p_1 = \mathbf{1} < p_2 = \mathbf{3} \le 3$ ou
$1 \le p_1 = \mathbf{2} < p_2 = \mathbf{3} \le 3$

$1 \le p_1 < p_2 < p_3 \le 3$
$\Rightarrow p_1 = 1 \wedge p_2 = 2 \wedge p_3 = 3$

$$= (-1)^0(|D_1| + |D_2| + |D_3|) + (-1)^1(|D_{\mathbf{1}} \cap D_{\mathbf{2}}| + |D_{\mathbf{1}} \cap D_{\mathbf{3}}| + |D_{\mathbf{2}} \cap D_{\mathbf{3}}|) + (-1)^2(|D_1 \cap D_2 \cap D_3|)$$

$1 \le \boldsymbol{p_1} = \mathbf{1} \le 3$ $\quad$ $1 \le \boldsymbol{p_1} = \mathbf{2} \le 3$ $\quad$ $1 \le \boldsymbol{p_1} = \mathbf{3} \le 3$

$$= (|\boldsymbol{D_1}| + |\boldsymbol{D_2}| + |\boldsymbol{D_3}|) - (|\boldsymbol{D_1} \cap \boldsymbol{D_2}| + |\boldsymbol{D_1} \cap \boldsymbol{D_3}| + |\boldsymbol{D_2} \cap \boldsymbol{D_3}|) + |\boldsymbol{D_1} \cap \boldsymbol{D_2} \cap \boldsymbol{D_3}|$$

Vejamos que $|\boldsymbol{D_1}| = |\boldsymbol{A}|,\ |\boldsymbol{D_2}| = |\boldsymbol{B}|,\ |\boldsymbol{D_3}| = |\boldsymbol{C}|$ (do esquema) **para confirmar que o princípio mais uma vez nos deu expressões idênticas às obtidas por raciocínio.**

Acabados os desenvolvimentos de k=1, k=2 e k=3, torna-se mais evidente a forma como se deve desenvolver o Princípio da Inclusão-Exclusão para os restantes valores de k.

Agora vamos justificar a igualdade que obtivemos durante a resolução do problema *(3)* :

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1 \le p_1 < \dots < p_j \le k} \left|D_{p_1} \cap \dots \cap D_{p_j}\right|\right) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n$$

Recordemos que:

D_{p_i} é o conjunto de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que a caixa p_i fica vazia
$|D_{p_i}|$ é o número de distribuições pertencentes ao conjunto D_{p_i} (cardinal de D_{p_i})

Como calculamos, por exemplo, $|D_{IV}|$? O número de distribuições em que a caixa IV fica vazia é $(k-1)^n$ porque (recordando a entrada *(1)* da tabela) cada bola vai poder ser distribuída por (k-1) caixas: todas menos a IV.

Como calculamos $|\boldsymbol{D_{p_1}} \cap \dots \cap \boldsymbol{D_{p_j}}|$? O número de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que as caixas $p_1, p_2, \dots$ e p_j ficam vazias é $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{j})^{\boldsymbol{n}}$ porque cada uma das bolas vai poder ser distribuída por (k-j) caixas.

Isto significa que, **no caso dos nossos conjuntos $\boldsymbol{D_{p_i}}$** deste exercício, todas as parcelas do segundo somatório $\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|\boldsymbol{D_{p_1}}\cap\ldots\cap\boldsymbol{D_{p_j}}\right|\right)$ têm o mesmo valor: $(k-j)^n$ (isto é uma sorte!!)

Se substituirmos na expressão inicial obtemos:

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}(k-j)^n\right)$$

Para cada j, o somatório

$$S=\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}(k-j)^n\right)$$

Representa uma soma de tantas parcelas iguais $(k-j)^n$ quantas o número de j-subconjuntos $\{p_1<\cdots<p_j\}$, $1\le p_1$ e $p_j\le k$, do conjunto {1,2,...,k}. Como o número de j-subconjuntos de um conjunto com k elementos é $\binom{k}{j}$, o somatório S é uma soma de $\binom{k}{j}$ parcelas $(k-j)^n$, portanto

$$S=\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}(k-j)^n\right)=\left(\binom{k}{j}(k-j)^n\right)$$

E obtemos:

$$|D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n$$

como queríamos demonstrar.

Se esta demonstração ainda não for suficientemente esclarecedora, tentemos por outra via. Conhecido o valor de $|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}|$, vamos lá observar a expressão

$$|D_1\cup D_2\cup\ldots\cup D_k|=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n$$

Com esta expressão pretendíamos, no problema *(1)*, calcular $\boldsymbol{V(n,k)}$: o número de distribuições de n-bolas diferentes por k-caixas diferentes em que existem caixas vazias.

Vamos ver primeiro o desenvolvimento do princípio:

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap D_{p_2}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right)$$

$= (-1)^0\left(|D_1|+\cdots+|D_j|+\cdots+|D_k|\right)$
$+(-1)^1(|D_1\cap D_2|+|D_1\cap D_3|+\cdots+|D_2\cap D_3|+\cdots+|D_{k-1}\cap D_k|)$
$+(-1)^2(|D_1\cap D_2\cap D_3|+|D_1\cap D_2\cap D_4|+\cdots+|D_{k-2}\cap D_{k-1}\cap D_k|)$
$+\cdots$
$+(-1)^{i-1}(|D_1\cap\ldots\cap D_i|+|D_1\cap\ldots\cap D_{i-1}\cap D_{i+1}|+\cdots+|D_{k-i}\cap\ldots\cap D_{k-1}\cap D_k|)$
$+\cdots$
$+(-1)^{k-1}(|D_1\cap D_2\cap\ldots\cap D_{k-1}\cap D_k|)$

Como é que este monstro me vai ajudar??

Vamos interpretar esta expressão enorme:

Em **cada linha** temos **uma parcela do primeiro somatório**. Dentro de cada parcela deste estão várias parcelas do desenvolvimento do segundo somatório.
Vamos concentrar-nos no segundo somatório e na visão extensiva das suas parcelas.
- Na primeira linha, temos k parcelas, cada uma das parcelas é o cardinal de apenas um conjunto.
- Na segunda linha, as parcelas são cardinais de intersecções de dois conjuntos de entre os k. Quantas intersecções de dois conjuntos existem? Existem $\binom{k}{2}$ maneiras de eu escolher dois dos k conjuntos, logo temos $\binom{k}{2}$ conjunções de 2 conjuntos e, portanto, este somatório tem $\binom{k}{2}$ parcelas.
- Na terceira linha, temos a soma de cardinais de conjunções de três conjuntos. Desta vez temos $\binom{k}{3}$ formas de intersectar k conjuntos três a três. Certamente, esta linha tem $\binom{k}{3}$ parcelas.
- **Na i-ésima linha** (parcela do primeiro somatório em que $j = i$)**, somam-se cardinais de intersecções de $\boldsymbol{i}$ conjuntos. Com os k conjuntos podemos fazer $\binom{k}{i}$ intersecções i a i, cujos cardinais são todos parcelas do segundo somatório**.
- Na última linha, em que j toma o valor k, o segundo somatório tem apenas uma parcela que é precisamente o cardinal da intersecção de todos os conjuntos (não nos esqueçamos que $\binom{k}{k} = 1$).

Daqui conseguimos concluir que, para qualquer valor de j, o segundo somatório tem $\binom{k}{j}$ parcelas. Juntando a isso o facto de sabermos que o cardinal das intersecções de j conjuntos é dado por $(k-j)^n$, podemos proceder às substituições na fórmula do princípio

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\sum_{1\le p_1<\cdots<p_j\le k}\left|D_{p_1}\cap\ldots\cap D_{p_j}\right|\right) = \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}\left(\binom{k}{j}(k-j)^n\right) = \sum_{j=1}^{k}\left((-1)^{j-1}\binom{k}{j}(k-j)^n\right)$$

e obtemos o que queríamos demonstrar.