Tópicos Extra

I - Sobre conjuntos infinitos e cardinais infinitos diferentes

.

Exercício 1: Mostre, usando a definição de conjunto infinito que os conjuntoS: $\mathbb{N}$, $\mathcal{Z}$, um intervalo $]a,b[\subset \mathbb{R},\ a,b\in\mathbb{R},\ a<b$ são conjuntos infinitos.

Exercício 2: Defina uma bijecção entre o intervalo $]-\pi/2,\pi/2[$ e $\mathbb{R}$.

Esta bijecção garante, por uma lado, que $\mathbb{R}$ é um conjunto infinito e, por outro, que o intervalo $]-\pi/2,\pi/2/[$ tem a mesma cardinalidade do conjunto $\mathbb{R}$.

Teorema de Cantor(1891) *Não existe nenhuma bijecção entre os conjuntos* $\mathbb{N}$ *e* $]0,1[$.

Nota: Qualquer número do intervalo $]0,1[$ é representado por uma dízima finita ou infinita da forma $0,a_1a_2a_3...a_n...,\quad a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Os números representados por dízimas finitas, têm tambem uma (única) representação como dízima infinita de período 9. Exemplos: $0,1=0,0(9)$, $0,3256=0,3255(9)$. Tomaremos neste caso as dzimas finitas prolongadas com infinitos $0's$. Podemos pois dizer que qualquer número do intervalo $]0,1[$ é representado de maneira única por uma dízima infinita.

Demonstração. A demonstração do teorema de Cantor é feita por absurdo.

Suponhamos que existe uma bijecção $f:\mathbb{N}\longrightarrow]0,1[$ que a cada número natural $n\in\mathbb{N}$ faz corresponder um número $f(n)=0,a_1a_2a_3...$ do intervalo $]0,1[$, representado pela sua dízima infinita.

Consideremos um número real $b=0,b_1b_2b_3...$ cujas casas decimais b_k, $k\in\mathbb{N}$ são escolhidas de modo a satisfazer as duas condições seguintes:

(i) b_k é diferente da k-ésima casa decimal do número $f(k)$

(ii) $b_k\neq 0,9$.

Qualquer número b "construido" de modo a satisfazer as condições acima é um número real do intervalo $]0,1[$ representado por uma dízima infinita e que, por definição não é nenhum dos números $f(n),\ n\in\mathbb{N}$. Portanto a bijecção f não é sobrejectiva, uma contradição!

Exercício 3: Porque é que na demonstração do teorema de Cantor exigimos $b_k\neq 0,9$?

Exercício 4: Deduza do Teorema de Cantor que não existe nenhuma bijecção entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.