MATEMÁTICA FINITA- 2018/2019 - Prof. Ilda Perez

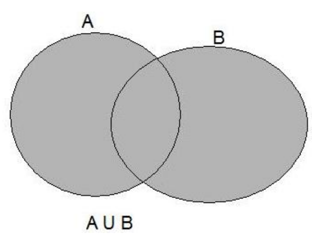
I. Contagens

1. Operações com conjuntos

Dados dois conjuntos A, B definem-se os conjuntos:

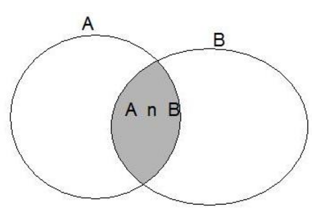
União de A com B:

$$A \cup B := \{x : x \in A \ ou \ x \in B\}$$



Intersecção de A com B:

$$A \cap B := \{x : \ x \in A \ e \ x \in B\}$$

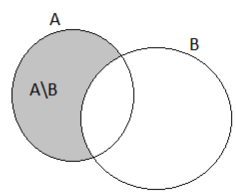


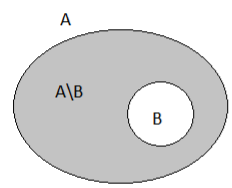
A e B são *conjuntos disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$. Neste caso, usa-se $A \uplus B$ em vez de $A \cup B$.

Diferença A menos B:

$$A \setminus B := \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Se $B \subset A$, ao conjunto $A \setminus B$ chama-se *complementar de* B *em* A *ou relativamente a* A.



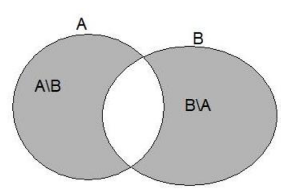


A\B é o complementar de B em A

Repare que:
1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.
2) $A = (A \setminus B) \uplus A \cap B$.

Diferença simétrica de A *e* B :

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



Repare que:

$$A \cup B = (A \setminus B) \uplus (A \cap B) \uplus B \setminus A = (A \Delta B) \uplus (A \cap B)$$

Produto cartesiano de A por B:

$$A \times B := \{(a, b) : \ a \in A \ e \ b \in B\}$$

é o conjunto de todos os pares ordenados em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo a B. Pomos:

$$A \times A = A^2.$$

Notação. Dado um conjunto A, finito, denotamos por: $|A|$ - o número de elementos ou cardinal de A (também se usa a notação $\#(A)$ em vez de $|A|$).

Trabalharemos com conjuntos finitos e o "nosso protótipo de conjunto finito" é o conjunto $[n] := \{1, \ldots, n\}$.

Temos:

Proposição 1. *Sejam A e B dois conjuntos finitos.*

(i) Se A e B são conjuntos disjuntos então $|A \uplus B| = |A| + |B|$.

(ii) $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Notação. Usaremos uniões, intersecções e produtos cartesianos de $n \geq 2$ conjuntos, e as notações:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots ... \cup A_n = \cup_{k=1}^{n} A_k = \cup_{k \in [n]} A_k$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots ... \cap A_n = \cap_{k=1}^{n} A_k = \cap_{k \in [n]} A_k$$
$$A_1 \times \ldots \times A_n$$

Quando todos os A_k forem iguais a A escrevemos A^n.

Repare que A^n éo conjunto de todos os n-plos ordenados de elementos de A, isto é:

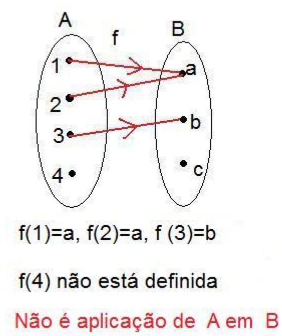
$$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_i \in A, \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

2. Injectividade e cardinalidade. Bijeções e contagens.

Definições. (Aplicação. Injectividade e sobrejectividade)

Sejam A e B dois conjuntos.

Uma aplicação f de A para B, indica-se $f : A \longrightarrow B$, e é uma correspondência que a cada elemento $a \in A$ faz corresponder um e um só elemento $f(a)$ pertencente a B. O elemento $f(a) \in B$ diz-se a imagem de a por f.



5.A

5.B

Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ diz-se:

injectiva se elementos diferentes de A têm imagens diferentes em B.

sobrejectiva se todos os elementos de B são imagem de algum elemento de A.

bijectiva ou *uma bijecção* se é injectiva e sobrejectiva.

Exemplo. A aplicação f representada na figura 5.B não é nem injectiva nem sobrejectiva (justifique).

No caso de conjuntos finitos a seguinte proposição que relaciona a cardinalidade dos conjuntos de partida e de chegada de aplicações injectivas, sobrejectivas e bijectivas é óbvia:

Proposição 1 *Sejam A e B dois conjuntos finitos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação de A para B.*

(i) Se f é injectiva então $|A| \leq |B|$.

(ii) Se f é sobrejectiva então $|A| \geq |B|$.

(iii) Se f é bijectiva então $|A| = |B|$.

Exercício. Sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Diga justificando se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(1) Existe uma aplicação injectiva de A para B.

(2) Existe uma aplicação sobrejectiva de A para B.

(3) Qualquer aplicação de A para B é sobrejectiva.

Como Corolário direto da Proposição 1 temos:

Corolário 1 *Seja A um conjunto finito e A' uma parte própria de A, i.e. A' é um subconjunto de A estritamente contido em A, então não existe aplicação injectiva $f : A \longrightarrow A'$.*

Nesta disciplina trataremos essencialmente de conjuntos FINITOS. *A propriedade anterior é precisamente a propriedade que distingue conjuntos finitos de infinitos.*

Conjunto infinito. Um conjunto A é infinito se existe uma aplicação injectiva de A para uma sua parte própria A', $A' \subset A$ ($A' \subseteq A$ e $A' \neq A$).

Exercício. Prove a partir da definição que:

- $\mathbb{N}_0$ e $\mathbb{Z}$ são conjuntos infinitos.

- Sejam A e B conjuntos, $A \subseteq B$. Se A é um conjunto infinito então B também o é.

É natural, uma vez definido conjunto infinito, querer saber se todos os conjuntos infinitos têm o mesmo cardinal, ou número de elementos. Como se comparam cardinais ? Sen entrar em detalhes:

Conjuntos têm o mesmo cardinal ou são equipotentes, e escreve-se $\#A = \#B$ (ou, no caso finito, $|A| = |B|$) se existir uma bijeção $f : A \longrightarrow B$.

Conjunto numerável (= enumerável = contável) É um conjunto que tem o mesmo cardinal que uma parte do conjunto $\mathbb{N}$. Um conjunto numerável ou é finito ou é infinito (e equipotente a $\mathbb{N}$).

O cardinal de $\mathbb{N}$ é o menor dos cardinais infinitos.

O conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, tem o mesmo cardinal do que $\mathbb{N}$ (ver exercício das $TP's$), no entanto o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais tem um cardinal maior que o de $\mathbb{N}$.

Para o provar que $\#\mathbb{R} > \#\mathbb{N}$ prova-se que não é possível definir uma aplicação bijectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ (veja Tópico extra - infinitos diferentes - na página do moodle)

Antes de começarmos própriamente a contar é importante chamar a atenção para o facto de que, como acabamos de ver **contar é a arte de estabelecer bijecções**. Com efeito os problemas de contagem, mesmo em conjuntos finitos, reduzem-se frequentemente a estabelecer uma bijecção entre dois conjuntos: um conjunto A cujos elementos queremos contar e um conjunto B que sabemos quantos elementos tem (ver por exemplo a Demonstração do Corolário 2.1 na próxima secção).

O facto de que a existência de uma aplicação injectiva entre dois conjuntos finitos (ou infinitos) permite relacionar os seus cardinais tem a seguinte versão mais geral chamada "Principio dos cacifos" que permite conclusões aparentemente "inesperadas" atravé da identificação do que são os cacifos em diversos contextos. .

Princípio dos cacifos ou das cartas e caixas de correio. *Um carteiro faz a distribuição diária pelas m caixas de correio de uma rua. Se leva n cartas e $n > m$ então alguma das casas (caixas de correio) receberá pelo menos 2 cartas.*

Exercício. Mostre que se disparar 65 tiros num alvo quadrado de 40 $cm \times$ 40 cm então certamente pelo menos duas das balas acertaram no alvo a menos de $7,1$ cm uma da outra.

3. Problemas básicos de contagem

Definições (k-sequência e k-subconjunto)

Seja A um conjunto finito com n-elementos, $|A| = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Uma k- *sequência de elementos do conjunto* A é uma sequência de comprimento k formada por elementos do conjunto A é o mesmo que um k-uplo ordenado de elementos de A e denota-se: $(a_1, \ldots, a_k)$ *ou* $a_1 \ldots a_k$, *com* $a_i \in A$. Designamos por:

${}^nA'_k$:=*número de k-sequências de elementos de* A

Uma k- sequência de elementos do conjunto A pode ou não repetir elementos de A. Se não repete elementos de A escrevemos $(a_1, \ldots, a_k)$ *com* $a_i \neq a_j$ $i \neq j$. Designamos por:

${}^nA_k$:=*número das k-sequências com elementos diferentes de* A.

Nota. k-sequências com os mesmos elementos ordenados de maneira diferente são diferentes : $(1, 2, 2) \neq (2, 1, 2)$ *e* $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$.

Um k- *subconjunto do conjunto* A é um subconjunto de A com k-elementos e denota-se $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$. Ao escrevemos "o subconjunto $\{a_1, \ldots, a_k\}$ de A" estamos automáticamente a dizer tem k-elementos de A todos distintos. A ordem pela qual listamos os elementos do subconjunto é indiferente $(\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\} = \{1, 3, 2\} = ...)$

Utilizaremos a seguinte notação:

$\mathcal{P}_k(A)$ - *o conjunto de todos os* k*-subconjuntos de* A (subconjuntos de A com k elementos).

$\mathcal{P}(A)$ -*o conjunto das partes de* A - o conjunto de TODOS os subconjuntos de A.

e notaremos por $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *ou* ${}^nC_k$:= *número de k-subconjuntos de* A $= |\mathcal{P}_k(A)|$.

Os próximos 3 teoremas dão expressões algébricas que permitem calcular os números ${}^nA'_k,\ {}^nA'_k$ e ${}^nC_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Estes números são bem conhecidos do secundário e todos eles se obtêm pensando num algoritmo (processo geral) que permita listar todas as k-sequências ou k-subsconjuntos que queremos contar. Deixamos a argumentação (feita na teórica) ao leitor.

Exercício. Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(i) Liste todas as 2-sequências e 3-sequências de elementos de A. Dito de outra maneira: descreva em extensão os conjuntos A^2 e A^3.

(ii) Liste todas as 2 e 3-sequências de elementos diferentes de A.

(iii) Liste todos os elementos de $\mathcal{P}_k(A)$, para $k = 0, \dots, 4$.

Teorema 1 - (Arranjos com repetição de n elementos, k a k) *Dado um conjunto finito com n elementos A, $|A| = n$. Sendo ${}^nA'_k :=$ o número de k-sequências de elementos de A. Tem-se*

$$ {}^nA'_k = n^k \quad n, k \in \mathbb{N} $$

Corolário 2.1 (cardinal das partes de um conjunto) *Se A é um conjunto finito então $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

Dem. Suponhamos que $|A| = n$. Consideremos, sem perda de generalidade que $A = [n]$. Vamos mostrar que existe uma bijecção $f : \mathcal{P}([n]) \longrightarrow \{0, 1\}^n$ que associa a cada subconjunto de $[n]$ uma n-sequência de $0's$ e $1's$. Como $|\{0, 1\}^n| = 2^n$ vem pelo Corolário 1-(iii) que $|\mathcal{P}([n])| = |\{0, 1\}^n| = 2^n$.

A bijecção f é definida para cada $X \subseteq [n]$ por $f(X) = (x_1, \dots, x_n)$ em que $x_i = 0$ se $i \notin X$ e $x_i = 1$ se $i \in A$.

Exemplo: Se $n = 2$, $[n] = \{1, 2\}$ temos $\mathcal{P}([2]) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ e $f : \mathcal{P}([2]) \longrightarrow \{0, 1\}^2$ é a aplicação definida por: $f(\emptyset) = (0, 0)$, $f(\{1\}) = (1, 0)$, $f(\{2\}) = (0, 1)$, $f(\{1, 2\}) = (1, 1)$.

Teorema 2 - (Arranjos sem repetição de n elementos, k a k, permutações de n elementos) *Dado um conjunto finito A, $|A| = n$. Para todo o $k \in \mathbb{N}$, designemos por ${}^nA_k :=$ nº de k-sequências de elementos de A, sem repetição de elementos de A. Tem-se*

$$^nA_k = n(n-1)\dots(n-k+1) \qquad 0 \leq k \leq n$$

Se $n = k$ ${}^nA_k = n(n-1)\dots 2.1 = n!$ é o número de permutações de n elementos.

Convenção. Convenciona-se que $0! = 1$. Com esta convenção:

$$^nA_k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad 0 \leq k \leq n$$

Teorema 3 - (Combinações de n-elementos k a k) *Dado um conjunto finito A, $|A| = n$. Para todo o $k \in \mathbb{N}_0$ seja ${}^nC_k :=$ nº de k-subconjuntos de A. Temos ${}^nC_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$.*

Corolário 3.1. (Anagramas) *Seja $\mathbf{x}$ uma n-sequência/palavra cujas entradas/letras são os elementos do conjunto $\{x_1, \dots, x_k\}$.*

Seja $n_i :=$nº de $x_i' s$, $i = 1, \dots, k$, usados na sequência $\mathbf{x}$. Definamos:

$\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_k \end{pmatrix} :=$ número de n-sequências/palavras diferentes com as mesmas entradas/letras de $\mathbf{x}$ (anagramas da palavra/sequência $\mathbf{x}$).

Então:

$$\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2, \dots, n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n - n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}\dots\begin{pmatrix} n_k \\ n_k \end{pmatrix}.$$

Nota. Reparar que se $n_1 + n_2 = n$ então: $\begin{pmatrix} n \\ n_1, n_2 \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1!n_2!} = \begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n_2 \end{pmatrix}$

4. Propriedades dos números binomiais

Teorema 4. (Propriedades básicas dos números binomiais)

(1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ $0 \leq k \leq n.$

(2) *Relação de recorrência - construção do triângulo de Pascal.*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

(3)Soma dos números de uma linha do triângulo de Pascal

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(4)Crescimento dos números de uma linha do triângulo de Pascal

A sucessão dos $(n+1)$ termos, $\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$, da n-ésima linha do triângulo de Pascal é estritamente crescente para $k = 0, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (e estritamente decrescente para $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil, \ldots, n$.

Notação. Qualquer que seja o número real $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ e $\lceil x \rceil$, denotam os seguintes números inteiros:

$\lfloor x \rfloor$:=*maior inteiro menor ou igual a x*

$\lceil x \rceil$:=*menos inteiro maior ou igual a x*

Dem. (1) Pode ser demonstrada de duas maneiras:

(A) <u>Algébricamente</u>, usando o Teorema 3 e verificando que as expressões algébricas de $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{n-k}$ são iguais.

(B) <u>Combinatóricamente</u> usando a definição de $\binom{n}{k} := |\mathcal{P}_k(A)|$ e a bijecção $f : \mathcal{P}_k(A) \longrightarrow \mathcal{P}_{n-k}(A)$ que a cada k-subconjunto $B \subseteq A$ faz corresponder

$f(B) = B^c = A \setminus B$ o $(n-k)$-subconjunto complementar de B em A. Pelo Corolário 1-(iii) concluímos que $|\mathcal{P}_k(A)| = |\mathcal{P}_{n-k}(A)|$ e portanto $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.

(2) Tambem pode ser demonstrada algébricamente (usando as expressões algébricas dadas do Teorema 3) ou combinatóricamente.

(3) Considere-se o conjunto $[n]$ que tem n-elementos.

Pelo Corolário 2.1. sabemos que $|\mathcal{P}([n])| = 2^n$ e por outro lado

$\mathcal{P}_k([n]) = \mathcal{P}_0([n]) \uplus \mathcal{P}_1([n]) \uplus \ldots \uplus \mathcal{P}_n([n])$.

E pelo Teorema 3: $|\mathcal{P}_k([n])| = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ o que implica a igualdade pretendida.

(4) Para saber quando é que a sequência $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}, \quad k = 0, \ldots, n$ é estritamente crescente determinamos os $k's$ para os quais a seguinte desigualdade é verificada:

$$\frac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}} > 1$$

A desigualdade anterior é equivalente a:

$$\frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{n-k+1}{k} > 1 \iff k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Combinando este resultado com (1) concluimos a prova de (4).

Corolário 4.2. (Binómio de Newton) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} y^k$.

Uma das demonstrações deste Corolário é por indução em n e utiliza a fórmula de recorrência dada no Teorema 4-(2) . Deixamo-la como exercício (feito na aula teórica).

Outra demonstração é a que faremos do próximo Teorema 5. O Teorema 5 inclui o Teorema do Binómio de Newton como caso particular.

Teorema 5. (Desenvolvimento do multinómio).

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\{(n_1,\ldots,n_k): n_1+\ldots n_k = n\}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} =$$

$$= \sum\nolimits_{\{(n_1,\ldots,n_k): n_1+\ldots n_k = n\}} \tfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

Notas antes da demonstração.

1) Repare que quando $k = 2$ obtem precisamente o binómio de Newton.

2) Exemplo: como usar o teorema 5 para calcular o coeficiente de $x^2 y^{10} z$ no desenvolvimento de $(x + y + z + w)^{13}$: do enunciado, o coeficiente pedido é : $\binom{13}{2, 10, 0, 1} = \frac{13!}{2!10!0!1!} = 78.$

Dem. Quando desenvolvemos, usando a distributividade da multiplicação em relação à soma, o produto de n factores iguais $(x_1 + \ldots + x_k)$:

$$(x_1 + \ldots + x_k)(x_1 + \ldots + x_k) \ldots (x_1 + \ldots + x_k)$$

obtemos a soma de todos os monómios de grau n, nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$.

Cada um desses monómios, da forma $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ com $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n,\ n_i \geq 0$, obtem-se escolhendo x_1 em n_1 dos n factores $(x_1 + \ldots + x_k)$, x_2 em n_2 das restantes $n - n_1$ factores, . . . , e por último o factor x_k nos $n_k = n - n_1 - \ldots n_{k-1}$ factores restantes.

Pelo Corolário 3.1. para cada decomposição $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ há precisamente $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$ maneiras diferentes de obter o monómio $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$ o que demonstra o resultado.

5. Princípio de Inclusão - Exclusão

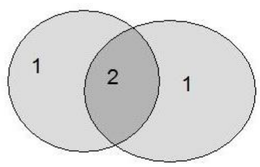
Dados n conjuntos *disjuntos*, $A_1, \ldots A_n$, sabemos que o cardinal da união é a soma dos cardinais:

$$|A_1 \uplus A_2 \uplus \ldots \uplus A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

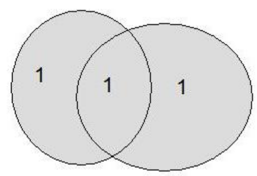
O principio da inclusão-exclusão é uma forma de calcular o cardinal de uma união de conjuntos não necessáriamente disjuntos.

Ele generaliza a seguinte maneira de expressar os cardinais da união de 2 e de 3 conjuntos:

Caso n=2. Quando fazemos a soma $|A_1| + |A_2|$ cada elemento de $A_1 \Delta A_2$ é contado 1 vez e os elementos de $A_1 \cap A_2$ são contados 2 vezes (Figura 6.A) por isso $|A_1 + A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ (Figura 6.B) .



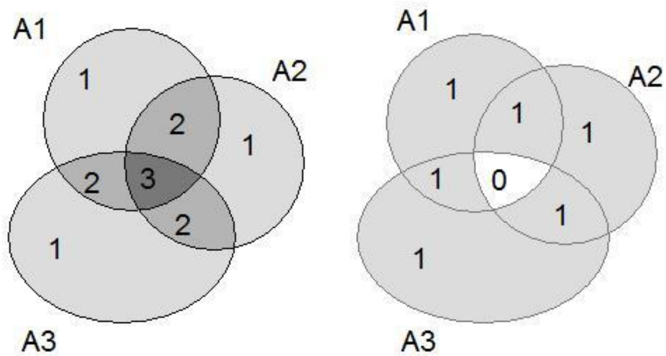
6A



6B

Caso n=3. Quando fazemos a soma $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ contamos duas vezes os elementos de $A_1 \cap A_2,\ A_1 \cap A_3,\ A_2 \cap A_3$ e 3 vezes os elementos $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ (Figura 7A).

Quando fazemos a soma $|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$ todos os elementos de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ são contados uma vez excepto os que pertencem a $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ que, agora, não são contados vez nenhuma (Figura 7.B.



$7.A. |A_1|+|A_2|+|A_3|$ $\qquad$ $7.B. |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_2 \cap A_3|$

Portanto

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1 \cap A_2|-|A_1 \cap A_3|-|A_2 \cap A_3|+|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

Generalizando esta maneira de pensar obtemos:

Teorema 6 (Principio de Inclusão Exclusão):

Sejam $A_1, \ldots A_n$ conjuntos finitos

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|.$$

Dem. A demontração faz-se por indução em n usando a propriedade distributiva de união em relação à intersecção de conjuntos.

Exercício 1. Para $n = 4$ desenvolva a expressão dada no Princípio de Inclusão Exclusão para calcular $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$.

Exercício 2. De quantas maneiras diferentes podemos colocar 5 bolas numeradas em 3 caixas tambem numeradas sem deixar nenhuma caixa vazia?

Exercício 3. (Desarranjos) Quantas permutações da sequência 12345 verificam a propriedade *nenhum dos números i ocupa a posição i na permutação*?

I. 2. Contagens e Relações de recorrência

1. Relações de Recorrência - generalidades

Em muitos problemas de contagem o objectivo é definir uma sucessão u_n que representa o número de elementos de um conjunto definido para qualquer $n \in \mathbb{N}$ ou uma sucessão $u(n,k)$ que conta o número de elementos de um certo conjunto definido para cada $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ etc...

Resolver um problema de contagem deste tipo é definir algébricamente os termos da sucessão u_n, isto é, dar um modo de calcular o número u_n para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Há essencialmente duas maneiras de definir algébricamente a sucessão u_n:

1) pelo termo geral, dando uma expressão algébrica para u_n em função de n.

2) pela relação de recorrência, uma expressão algébrica que exprime o n-ésimo termo em função de k termos anteriores e que, sabendo os k primeiros termos, permite calcular sucessivamente todos os termos da sucessão.

Exemplo 1. Progressão aritmética de razão $r \in \mathbb{R}$

É uma sucessão $a_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ definida (indiferentemente) de uma das seguintes maneiras:

Relação de recorrência: $a_n = a_{n-1} + r \quad se\ n \geq 1$ com a condição inicial a_0

Termo geral: $a_n = a_0 + nr,\ n \in \mathbb{N}_0$

Exemplo 2. Progressão geométrica de razão $r \in \mathbb{R}$

É uma sucessão $g_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ definida (indiferentemente) de uma das seguintes maneiras:

Relação de recorrência: $g_n = rg_{n-1} \quad se\ n \geq 1$ com a condição inicial g_0

Termo geral: $g_n = g_0 r^n,\ n \in \mathbb{N}_0$

Exemplo 3. *O João vai subir uma escada de n- degraus, podendo a cada passo subir* 1 *ou* 2 *degraus de cada vez. De quantas maneiras diferentes pode o João subir a escada?*

$d_n :=$ *n^o de maneiras diferentes pode o João subir uma escada com n degraus*

Calculamos directamente da definição: $d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 3,\ d_4 = 5,\ d_5 = ?$

A maneira mais fácil de definir algébricamene o número $d_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$ é pensar da seguinte forma:

Ao chegar ao degrau n o João ou vem do degrau $n-1$ subindo, no último passo um único degrau - tem d_{n-1} maneiras de chegar ao degrau n desta forma. Ou então chega ao degrau n vindo directamente do degrau $n-2$, subindo no último passo 2 degraus de uma vez - tem d_{n-2} maneiras de chegar ao n-ésimo degrau desta maneira.

Portanto, a sucessão d_n é definida pela relação de recorrência:

$(F) \qquad d_n = d_{n-1} + d_{n-2}, n \geq 2 \textit{com a condição inicial } d_1 = 1, \ d_2 = 2$

A Sucessão de Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Pergunta 1: *Qual o termo geral da sucessão d_n?*

Não há nenhum processo geral que permita determinar, em geral, o termo geral de uma sucessão definida por uma relação de recorrência.

Veremos no próximo parágrafo como fazê-lo para um tipo muito particular de relações de recorrência (que inclui a relação de Fibonacci) as relações de recorrência lineares com coeficientes constantes, primeiro no caso homogéneo e depois no caso não homogéneo.

2. Relações de recorrência lineares com coeficientes constantes

2.1. Caso Homogéneo

Definições Uma relação de recorrência, de ordem k, linear homogénea com coeficientes constantes é um relação de recorrência que exprime o nésimo termo u_n, como soma de k termos anteriores multiplicados por constantes:

$$(H_k) \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}, \quad \textit{em que } a_i \in \mathbb{R} (ou \mathbb{C})$$

Qualquer que seja a condição inicial $u_1, \ldots, u_k$ (lista dos k primeiros termos da sucessão $u_n, n \in \mathbb{N}$) a relação de recorrência (H_k) permite determinar sucessivamente todos os termos da sucessão.

O polinómio característico da relação de recorrência (H_k) é o polinómio, $p(t)$

de grau k, numa variável t, definido a partir de (H_k) por:

$$p(t) := t^k - a_1 t^{k-1} - a_2 t^{k-2} - \ldots - a_{k-1} t - a_k$$

Proposição 1.(Raízes do polinómio característico e soluções de (H_k))
Uma progressão geométrica $g_n = r^n, n \in \mathbb{N}_0,\ r \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é solução da relação de recorrência

$$(H_k) \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}, \quad em\ que\ a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$$

se e só se r é uma raíz do seu polinómio característico $p(t) := t^k - a_1 t^{k-1} - a_2 t^{k-2} - \ldots - a_{k-1} t - a_k$

Dem. Se $g_n = r^n$ satisfaz (H_k) então: $r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \ldots + a_k r^{n-k}, \ \ para \ \ n \geq k$

$\Longleftrightarrow r^{n-k}(r^k - a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \ldots + a_k) = 0, \ \ para \ \ n \geq k$. Como $r \neq 0$,

$\Longleftrightarrow \ p(r) = r^k - a_1 r^{k-1} - a_2 r^{k-2} - \ldots - a_{k-1} r - a_k = 0$

$\Longleftrightarrow \ r$ é uma raíz do polinómio $p(t)$.

Proposição 2 (combinações lineares de soluções de (H_k) são tb solução)
Considere-se uma relação de recorrência (H_k) linear, homogénea, com coeficientes constantes:

$$(H_k) \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}, \quad em\ que\ a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$$

Se v_n e w_n, $n \in \mathbb{N}_0$ satisfazem (H_k) então quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha v_n + \beta w_n$ tambem satisfaz (H_k) (para $n \geq k$).

Dem. Exercício.

Resposta à Pergunta 1: termo geral da sucessão de Fibonacci d_n.

No Exemplo 3 definimos a sucessão d_n pela recorrência:

(F) $\ d_n = d_{n-1} + d_{n-2} (n \geq 3)$ *com as condições iniciais* (*c.i.*) $d_1 = 1,\ d_2 = 2$.

(F) é uma relação de recorrência de ordem 2, linear, homogénea, com coeficientes constantes. Usamos as Proposições 1 e 2 para determinar o termo geral da sucessão d_n. A ideia é a seguinte:

Passo 1) *Determinamos as raízes do polinómio característico de* (F)

O polinómio característico de (F) é $p(t) = t^2 - t - 1$ cujas raízes (as soluções de $t^2 - t - 1 = 0$) são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad e \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

A Proposição 1 garante-nos que as progressões geométricas $r_1^n = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ e $r_2^n = (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ com $n \in \mathbb{N}$ são soluções da relação de recorrência (F).

A Proposição 2 diz-nos que qualquer sucessão $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n, \quad n \in \mathbb{N}$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tambem o é.

Passo 2) Procuramos $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ de modo a que a sucessão $v_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n = \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}$ satisfaça a condição inicial $(c.i.) \quad d_1 = 1, \ d_2 = 2 :$

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_1 & = 1 \\ d_2 & = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\beta & = 1 \\ (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2\alpha + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2\beta & = 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \alpha & = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \beta & = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \end{array}$$

Resposta Pergunta 1. O termo geral da sucessão de Fibonacci $d_n, \ n \in \mathbb{N}$ **é:**

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Proposição 3 (Relações de recorrência de tipo (H_2))

Considere-se uma sucessão $u_n, \ n \in \mathbb{N}_0$ *definida pela relação de recorrência* H_2

$(H_2) \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} \quad$ *com condições iniciais* $u_0, \ u_1$

Seja $p(t) := t^2 - a_1 t - a_2$ *o polinómio característico de* (H_2)

Caso 1) Se $\underline{p(t) \text{ tem duas raízes (complexas) diferentes } r_1 \text{ e } r_2}$ *(isto é* $p(t) = (t - r_1)(t - r_2)$*) então o termo geral da sucessão é da forma* $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ *em que* α *e* β *são a única solução do sistema:*

$$(S1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = u_0 \\ r_1\alpha + r_2\beta = u_1 \end{array} \right.$$

Caso 2) Se p(t) tem uma raíz dupla r (isto é $p(t) = (t-r)^2$) então o termo geral da sucessão é da forma $u_n = \alpha r^n + \beta n r^n$ em que α e β são a única solução do sistema:

$$(S2) \qquad \begin{cases} \alpha = u_0 \\ r\alpha + r\beta = u_1 \end{cases}$$

Dem. No caso 1) basta mostrar que quaisquer que sejam as condições iniciais u_0, u_1 o sistema $(S1)$ é possível e determinado (justifique que assim é).

No caso 2) há que verificar primeiro (faça-o!) que, neste caso, a sucessão nr^n satisfaz a relação de recorrência (H_2). Depois que o sistema $(S2)$ é possível e determinado quaisquer que sejam as condições iniciais u_0, u_1.

Processo Geral para resolver uma relação de recorrência do tipo (H_k)

O processo geral que descrevemos agora, generaliza para relações de qualquer ordem $k \geq 2$ o que provámos para as relações de recorrência de ordem 2 lineares, homgéneas com coeficientes constantes.

Seja $u_n, n \in \mathbb{N}_0$ uma sucessão definida pela relação de recorrência

$(H_k) \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}, \quad$ *em que* $a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$

com condições iniciais: $u_0, \ldots, u_{k-1}$

Para determinar o termo geral de u_n procede-se da seguinte maneira:

Passo 1) Determinar as k raízes complexas do polinómio característico

$$p(t) := t^k - a_1 t^{k-1} - a_2 t^{k-2} - \ldots - a_{k-1} t - a_k$$

O polinómio tem k raízes complexas, não necessáriamente todas diferentes. Suponhamos que há $r_1, \ldots, r_j$ raízes diferentes com multiplicidades respectivamente $m_1, \ldots, m_j$, $m_1 + \ldots + m_j = k$.

A cada raíz com multiplicidade $m_i \geq 1$ associamos m_i soluções da equação (H_k) : r_i^n, $nr_i^n \ldots n^{m_i-1} r_i^n$

Passo 2) Determinar para que valores dos k escalares é que uma combinação linear das k soluções determinadas no passo anterior satisfaz a condição inicial.

Caso Não Homogéneo (aulas Teorico-Práticas)

Definições Uma relação de recorrência, de ordem k, linear Não Homogénea com coeficientes constantes é um relação de recorrência do tipo:

(nH_k) $u_n = a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\ldots+a_ku_{n-k}+f(n)$, *em que* $a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$ *e* $f(n)$*é uma função de* n*, não nula.*

A relação de recorrência homogénea associada à relação (nH_k) é:

(H_k) $u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k}, (n \geq k)$

Já trablhámos diversos exemplos de relações de recorrência não homogéneas:

Exemplo 1. Progressão aritmética de razão $r \neq 0$: $a_n = a_{n-1} + r(n \geq 1)$, condição inicial a_0, . (A relação de recorrência homogénea associada é $a_n = a_{n-1}$.)

Exemplo 2. (Exercício 2.2) Soma dos primeiros termos de um progressão aritmética: $A_n = A_{n-1} + nr$, , condição inicial A_0

Exemplo 3. (Exercício 2.3) Soma dos primeiros termos de um progressão geométrica: $G_n = G_{n-1} + r^n$, , condição inicial G_0

Um poutro exemplo:

Exemplo 4. $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-3} + n^5 - 7n$ condições iniciais u_0, u_1, u_2. A relação de recorrência homgénea associada é $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-3}$, $(n \geq 3)$.

Proposição 4 (Relação entre soluções de (nH_k) e (H_k))

Sejam $u_n, v_n, n \in \mathbb{N}_0$ *duas soluções da relação de recorrência:*

(nH_k) $u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k} + f(n)$, *em que* $a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C})$

então $u_n - v_n$ *é solução da equação homogénea associada:*

$$(H_k) \quad u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k}.$$

Dem. Exercício.

Corolário 4.1 (Resolução de (nH_k))

Conhecendo uma solução particular $u_n, n \in \mathbb{N}_0$ *de* (nH_k) *qualquer outra solução é da forma* $u_n + h_n$ *onde* h_n *é uma solução da equação homogénea associada* (H_k) *(que sabemos resolver...)*

Processo Geral para resolver uma relação de recorrência da forma (nH_k)

Para determinar o termo geral de uma sucessão $u_n,\ n \in \mathbb{N}_0$ definida por:

$(nH_k)\ \ u_n = a_1u_{n-1}+a_2u_{n-2}+\ldots+a_ku_{n-k}+f(n),\ \ em\ que\ a_i \in \mathbb{R}(ou\mathbb{C}),\ f(n) é$ *uma função de n, não nula*, com condições iniciais: $u_0, \ldots, u_{k-1}$

Passo 1) Determinar uma solução particular $v_n, n \in \mathbb{N}_0$ de (nH_k), independentemente das condições iniciais da sucessão que pretendemos.

Não há nenhum processo geral para esta procura. Na prática se $f(n)$ é um polinómio de grau k, uma exponencial procuramos uma solução particular do mesmo tipo.

Passo 2) Resolvemos a relação homogénea associada,

$(H_k) \quad u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \ldots + a_ku_{n-k}, (n \geq k)$

Obtemos a forma geral de TODAS as suas soluções, como combinação linear de k soluções particulares determinadas a partir do polinómio característico.

Passo 3) O termo geral da sucessão pretendida será $u_n = v_n + h_n$ onde v_n a solução particular determinada no Passo 1 e h_n a solução da relação homgénea calculada de modo a u_n satifazer as condições iniciais dadas.

I. 3. Contagens e Aproximações

.

1. Valores aproximados e crescimento das sucessões $n!$ e $p(n)$

Definição. (sucessões assintóticamente iguais)

Sejam $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ duas sucessões. Diz-se que f e g são *assintóticamente iguais* qdo $n \to \infty$, e escreve-se $\mathbf{f} \sim \mathbf{g}$ se $lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1$.

Teorema de Stirling

$n!$ é assintóticamente igual a $(\frac{n}{e})^n \;.\sqrt{2\pi n}$

$$n! \;\sim\; (\frac{n}{e})^n.\sqrt{2\pi n}.$$

em versão logarítmica:

$$\ln(n!) \;\sim n(\ln(n) - 1) + \frac{1}{2}\ln(2\pi n)$$

Tabela de aproximações do teorema de Stirling

	$n!$	$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}$
$n = 1$	1	0.922
$n = 2$	2	1.919
$n = 3$	6	5.836
$n = 10$	3 628 800	3 598 695.619
$n = 20$	2.433×10^{18}	2.423×10^{18}

Controlo sobre o erro da estimativa de Stirling $n!$ (ver Slomson) Prova-se o seguinte enquadramento:

$\forall n \in \mathbb{N}$ a sucessão $n!$ está enquadrada pelas sucessões:

$$(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n} \leq \; n! \; \leq \; \mathbf{C}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\pi n}, \; \textit{em que } \mathbf{C} = 1.1.$$

em versão logarítmica :

$$n(\ln(n)-1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)\leq \ln(n!)\leq ln(1.1)+n(\ln(n)-1)+\frac{1}{2}\ln(2\pi n)$$

Damos em seguida dois exemplos de aplicação do Teorema de Stirling à comparação de números:

Exemplo 1. Dos números: 100! e 50^{100} qual é o maior?

Comparemos os logaritmos usando o Teorema de Stirling e a Nota acima para aproximar ln(100!). Vem: $ln(100!)\sim 100(\ln(100)-1)+\frac{1}{2}ln(200\pi)\simeq 360,5+3,2=\mathbf{363,7}$ e $ln(50^{100})=100ln(50)=\mathbf{391,2}$ pelo que $\mathbf{50^{100}}\ >\ \mathbf{100!}$

Exemplo 2. Estime o n^o de algarismos dos números 100! e de 50^{100}.

Recorde: n^o de algarismos de $N\in\mathbb{N}$ (na base 10) $=\lfloor log_{10}(N)\rfloor+1$. Como $ln(10)=2,3$ vem:

$log_{10}(50^{100})=\frac{1}{2.3}ln(50^{100})\sim\frac{391,2}{2.3}=122,25$; $\mathbf{50^{100}}$ **tem 123 algarismos**.

$log_{10}(100!)=\frac{363,7}{2.3}=113,65$; **100! tem 114 algarismos**.

2. limite inferior para $p(n)$ e fórmula assintótica de Hardy-Ramanujan

$p(n):=n^o$ de partições do inteiro n (entrada 12 da tabela das 12 entradas, $p_n(n)$). Como cresce $p(n)$, quando $n\to\infty$? A lista seguinte apresenta alguns valores:

1, 1, 2, 3, 5, . . . ,

p(100) = 190569292, . . . ,

p(1000) = 24061467864032622473692149727991, ...

O Teorema de Stirling + relação de recorrência para $p_k(n):=n^o$ de partições do inteiro n em, quando muito, k parcelas, permitem deduzir, de forma bastante elementar, os seguintes limites inferiores (ver A. Slomson, *An introduction to Combinatorics*) :

$$p_k(n) \geq \frac{n^k}{k!(k-1)!}$$

$$p(n) \geq \frac{1}{2\pi C^2 e^2}\left(\frac{e^{2\sqrt{n}}}{n}\right) \quad C = 1,1$$

Com métodos mais sofisticados obtem-se a expressão assintótica de Hardy e Ramanujan para $p(n)$:

Teorema de Hardy-Ramanujan *Seja* $p(n) :=$ *n*^{o} *de partições do inteiro* n*. O comportamento assintótico de* $p(n)$ *é dado por:*

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}}{n}\right).$$

Há resultados recentes J.H. Bruinier e K.Ono (2011) relativas a **fórmulas exactas** para $p(n)$ ver J.H. Bruinier, K. Ono, Algebraic formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak Maass forms,*Advances in Maths* **246** (2013).

3. Complexidade de algoritmos e crescimento de funções

Algoritmos usam **espaço (memória)** e gastam **tempo**.

A memória e o tempo necesários para executar um algoritmo são uma função $f(n)$, do "tamanho n " dos dados que se introduzem, e estimam o número de operações "elementares" que o computador terá de executar a partir dos dados até produzir a resposta, com o algoritmo em causa.

Não interessa o valor exacto de $f(n)$ mas a forma como cresce quando $n \to \infty$: algoritmos que podem ser executados em *tempo polinomial* são rápidos e os que são *exponenciais no tempo* são lentos.

Neste contexto é particulamente importante a matemática do estudo e classificação do crescimento assintótico de funções.

As aproximações de Stirling e de Hardy-Ramanujan que vimos usam a noção de sucessões assintóticamente iguais. A eficiência de algoritmos é medida a menos de multiplicação por constantes, e muitas vezes basta estimar um limite superior para o crescimento da funação que conta o nḿero de passos elementares em função dos dados. Utiliza-se para isso as noções de $O-grande$ (notação de Landau).

Definições (O- grande e o-pequeno) Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, uma função/sucessão que toma valores não negativos. Diz-se que:

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ **é um O-grande de f (quando $n \to \infty$)** e escreve-se $\mathbf{g = O(f)}$ se existe uma ordem $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante positiva $C \in \mathbb{R}^+$ tal que $|g(n)| \leq C.f(n)$ para $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$. O que significa que o crescimento assintótico de $|g|$ é dominado pelo de uma constante positiva vezes f.

$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ **é um o-pequeno de** f (qdo $n \to \infty$) e escreve-se $\mathbf{g = o(f)}$, se $lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$, o que significa que $|g|$ cresce muito mais devagar do que qualquer constante positiva vezes f.

Observe que:

Proposição 1. *(1) Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ e $g = o(f)$ então $g = O(f)$.*

(2) Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ e $g = O(f)$, $h = O(f)$ e $a, b \in \mathbb{R}^+$ então $ag+bh = O(f)$.

(3) Se $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ e $g = o(f)$, $h = o(f)$ e $a, b \in \mathbb{R}$ então $ag + bh = o(f)$

Dem. (1) $lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$, por definição de limite de uma sucessão, significa que $\forall \delta > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, $|\frac{g(n)}{f(n)}| < \delta$. Como f tem valores positivos, esta desigualdade é equivalente a : $-\delta.f(n) < g(n) < \delta.f(n)$ para $n \geq n_0$ e portanto $g = O(f(n)$.

(2) e (3) Exercícios.

Exemplos. $n^2 - 3n = O(n^2)$, $n^2 = o(n^5)$, $log(n) = o(n)$, $n = o(2^n)$.

Definição. Duas funções/sucessões $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ são **assintóticamente equivalentes** (qdo $n \to \infty$), e escreve-se $\mathbf{f} \approx \mathbf{g}$, se $\mathbf{g} = \mathbf{O}(\mathbf{f})$ e $\mathbf{f} = \mathbf{O}(\mathbf{g})$.

Funções assintóticamente equivalentes têm o mesmo crescimento (qdo $n \to \infty$) a menos de multiplicação por constante positiva.

Proposição 2.

1) A relação de equivalência assintótica é reflexiva, simétrica e transitiva e portanto uma relação de equivalência no conjunto das funções/sucessões com valores não negativos .

2) Sejam $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ duas funções, se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C, \quad C \in \mathbb{R}^+$ então $f \approx g$.

Dem. 1) Exercício.

2) Sejam $f, g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$, isto é, $\forall \delta > 0$ *existe uma ordem* n_0 tal que *para* $n > n_0$, $C - \delta < \frac{f(n)}{g(n)} < C + \delta$.

Tomemos $\delta > 0$ tal que $A := C - \delta > 0$. Sejam $B := C + \delta$ e n_0 a ordem a partir da qual $A \leq \frac{f(n)}{g(n)} \leq B \Longleftrightarrow A.g(n) \leq f(n) \leq B.g(n)$.

Para $n \geq n_0$ da desigualdade $Ag(n) \leq f(n) \Longleftrightarrow g(n) \leq \frac{1}{A} f(n)$, concluímos (porque $A > 0$) que $g = O(f)$, e da desigualdade $f(n) \leq Bg(n)$, vem que $f = O(n)$. Portanto $f \approx g$.

Nota. 1 A recíproca da Proposição 2.2 não é verdadeira (dê um contra-exemplo)).

2) Repare que um caso particular de funções assintóticamente equivalentes são as funções assintóticamente iguais que aparecem nos eneunciados do teoremas de Stirling a Hardy-Ramanujan.

Exemplos 1. Considerar a sucessão $g = 2n^2 + 5n + 2$ e verificar se:

(i) g(n) é um $O(n^2)$. (ii) $g(n) \approx n^2$.

(i) Tem-se $g(n) = 2n^2 + o(n^2)$, pela Proposição o 1-2) e 3) concluímos de imediato que $g(n) = O(n^2)$.

(ii) Usamos o facto de que $lim_n \frac{g(n)}{f(n)} = 2$ e a Proposição 2-2) que garante que $f \approx g$ (e que portanto também resolve (i)).

Exemplo 2. Estudo da complexidade de um algoritmo de ordenação.

Estudamos a complexidade (temporal) do seguinte algoritmo que ordena por ordem crescente uma lista de n números $a_1 \ldots a_n$:

O algoritmo constroi para cada $k = 1, \ldots, n$ a lista ordenada $b_1 < \ldots < b_k$ dos k primeiros $a_i's$ da seguinte maneira:

1. $b_1 = a_1$

2. Se $b_1 < \ldots < b_k$ é a lista ordenada dos elementos $a_1 \ldots a_k$ para construir $b_1 < \ldots < b_{k+1}$ compara a_{k+1} <u>sucessivamente</u> com b_1, b_2,..., b_k, até encontrar o intervalo $]-\infty, b_1]$, $[b_i, b_{i+1}]$ ou $[b_k + \infty[$ onde encaixar o elemento a_{k+1} de modo a obter a lista crescente $b_1 < \ldots < b_{k+1}$. Acaba quando encaixa a_n.

A complexidade (temporal) deste algoritmo é a função $\mathbf{f(n)}$ que estima *o número de comparações de dois inteiros necessárias para, seja qual for a sequência dada, conseguir obter a lista ordenada.*

Experimentemos um pouco:
caso 1) Se a sequência inicial for : $\mathbf{5, 4, 3, 2, 1}$.
O número de comparações que o algoritmo tem de fazer até ordenar a sequência é : **5.**

caso 2) Se a sequência inicial for $\mathbf{2, 4, 1, 3, 5}$ o n^o de comparações que tem de fazer é: **9.**

pior caso para $n = 5$ é a sequência inicial que exige mais comparações para $n = 5$ e que é a sequência: $\mathbf{1, 2, 3, 4, 5}$ que requer $1 + 2 + 3 + 4 = \mathbf{10}$ comparações.

Seja qual for o n, a sequência inicial $\mathbf{1, 2, \ldots, n}$ é a que requer o número máximo de comparações que é:
$f(n) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{(n-1)n}{2}$ comparações.
Como $\frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$ dizemos que a complexidade(temporal) do algoritmo é um $O(n^2)$ (O-grande de n^2 ou que *é da ordem de* n^2.

Os melhores algoritmos para **ordenar uma lista de comprimento** n **números/palavras** têm complexidade $O(nlogn)$. E prova-se, o que é raro conseguir, que não se pode melhorar a ordem da complexidade (em computadores como os actuais - máquinas de Turing).

Tabela das 12 entradas

Podemos olhar para os problemas básicos de contagem como problemas de contagem de distribuições de bolas por caixas, em que as bolas e as caixas podem ou não ser diferentes e em que o tipo de distribuições também varia. Ou queremos todas as distribuições possíveis, ou apenas aquelas em que não se coloca mais do que uma bola em cada caixa (distribuições injectivas) ou ainda apenas as distribuições que não deixam caixas vazias (distribuições sobrejectivas).

Sistematizamos estes problemas na tabela de 12 entradas que está no fim da página.

Numerámos as entradas pela ordem pela qual preencheremos as entradas.

Das entradas (1) a (8) deve tentar preencher directamente. Atenção, para obter uma expressão para os números T(n,k) da entrada (3) deve usar o principio de inclusão exclusão para contar as distribuições que NÃO interessam.

A entrada (9) está directamente relacionada com a entrada (3) e pode obter uma expressão geral para ela a partir da expressão obtida para (3).

A entrada (11) vai ser definida por uma relação de recorrência, não obteremos o seu termo geral.

As entradas (10) e (12) relacionam-se facilmente com a (9) e (11) , respectivamente.

Nºs de distribuições n bolas k caixas	n bolas diferentes k caixas diferentes	n bolas iguais k caixas diferentes	n bolas diferentes k caixas iguais	n bolas iguais k caixas iguais
Nº de distribuições sem restrição	(1)	(4)	(10) B(n,k) Nºs de Bell	(12) $p_k(n)$ Nº de partições do inteiro n em k ou menos parcelas.
Nº de distribuições Injectivas (no máximo uma bola por caixa)	(2)	(5)	(7)	(8)
Nº de distribuições sobrejectivas (nenhuma caixa vazia)	(3) T(n,k)	(6)	(9) S(n,k) Nºs de Stirling de 2ª espécie	(11) p(n,k) Nº de partições de n em k parcelas