Departamento de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa

Métodos Matemáticos da Física 2011/12

Exame 2ª época 27-06-2012

1. A função $u(\rho,\phi)$ satisfaz a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \lambda\, u = 0 \;, \qquad u(\rho,0) = u(\rho,2\pi) \;.$$

a) Aplique o método de separação de variáveis a esta equação e encontre as equações diferenciais a que devem obedecer as funções de ρ e de ϕ utilizadas nesse método.
b) Concretize esses resultados aplicando a condição fronteira $u(\rho,0) = u(\rho,2\pi)$, determinando a dependência explícita de $u(\rho,\phi)$ em ϕ.

2. As funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $[-\ell,\ell]$, são funções próprias do operador d/dx.
a) Calcule os produtos internos de funções $\langle y_n|y_m\rangle$.
b) Seja $u(t,x)$ uma função escrita como combinação linear das funções y_n: $u(t,x) = \sum_n c_n(t)\, y_n(x)$.
Demonstre como se determinam os coeficientes $c_n(t)$ a partir da expressão de $u(t,x)$.
c) Admita que $u(t,x)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;.$$

Encontre as equações diferenciais a que devem satisfazer os coeficientes $c_n(t)$ e as respetivas soluções em termos dos valores iniciais $c_n(0)$. Escreva a solução $u(t,x)$ em termos dos coeficientes $c_n(0)$.

3. Considere a equação diferencial

$$x\,y''(x) + (2-x)\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0 \;, \qquad x \in [0,+\infty[\;.$$

Os valores próprios desta equação são os números inteiros, $\lambda_n = n \in \mathbb{N}_0$, sendo as respetivas funções próprias $y_n(x)$ normalizadas de modo a que $\langle y_n|y_n\rangle = n+1$.
a) Coloque a equação acima na forma de Sturm-Liouville.
b) Escreva, justificando, a expressão do produto interno de funções adequado ao problema.
c) Calcule o produto interno $\langle y_n|u\rangle$ para a função $u(x) = \delta(x-z)$, e determine os coeficientes $c_n(z)$ da expansão da função delta: $\delta(x-z) = \sum_n c_n(z)\,y_n(x)$.

4.a) Calcule as transformadas de Fourier das funções

$$f(x) = \begin{cases} x/|x| & ,\, 0<|x|<a \\ 0 & ,\, |x|\geq a \end{cases} \;, \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi\,x}{a}\right) & ,\, |x|<a \\ 0 & ,\, |x|\geq a \end{cases} \;.$$

b) Aplique o teorema de Parseval à função $f(x)$ e utilize o resultado obtido para calcular o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^{-2}\,\sin^4 x\; dx$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx \;, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\,dk = 2\pi\,\delta(x) \;, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\,\tilde{g}(k)\,dk$$