Exame de Cálculo Diferencial e Integral III

29 Janeiro 2019 - duração 3h

Indique a sua versão do exame na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.
Recorde que, por convenção, as circunferências são percorridas uma vez no sentido directo.

Versão A

1. (a) Resolva a EDO $y' + \dfrac{2y}{t} = \dfrac{1}{2+5t^3}$ para $t > 0$.

   (b) Resolva a EDO $y'' - \frac{3}{2}y' - y = 3e^t + 2$.

   (c) Resolva o PVI $y' \sin 2t + y^2 \cos 2t = 0, y(\pi/4) = -1/4$, indicando o intervalo de definição da solução.

   (d) Sabendo que $\begin{bmatrix} e^t \\ -2e^t \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$ são soluções do sistema $x' = Ax$ (com A matriz 2×2 de constantes), determine a solução $x(t)$ do sistema $x' = Ax$ que satisfaz $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) A mudança de variável $u = y/t$ transforma a EDO $y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3\cos(t^2)}{y}$ em:
   A: $u' = \frac{u}{t} + \frac{t\cos(t^2)}{u}$. B: $u' = \frac{t\cos(t^2)}{u}$. C: $u' = \frac{2u}{t} + t^2\cos(t^2)$.

   (b) Para a EDO $y' = \frac{y^2-x^2}{2xy}$, tem-se: A: é exacta. B: o factor integrante $\frac{1}{x}$ transforma-a em exacta. C: o factor integrante $\frac{1}{x^2}$ transforma-a em exacta.

   (c) Para o sistema linear $x' = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x$, todas as soluções $x(t)$ não nulas satisfazem:
   A: são limitadas em $\mathbb{R}$. B: $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = 0$. C: $\lim_{t\to+\infty} \|x(t)\| = +\infty$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

3. (a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que é ímpar, 4-periódica e que no intervalo $]0,2[$ é dada por $f(x) = x + 3$.

   (i) Esboce o gráfico de f no intervalo $]2,10[$.

   (ii) Sendo $\sum_{n\geq 1} b_n \sin(\frac{n\pi}{2}x)$ a série de Fourier de f em $[-2,2]$, calcule b_5.

   (b) Justifique que não existe nenhuma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua e 4-periódica cuja série de Fourier seja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\frac{n\pi}{2}x)$. (Sugestão: Identidade de Parseval.)

4. Considere a *equação de Laplace* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, para (x,y) no rectângulo $R = [0,a] \times [0,b]$ $(a, b > 0)$.

   a) Mostre pelo método de separação de variáveis que, se existem soluções não nulas $u(x,y)$ da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, então as funções $X(x), Y(y)$ devem satisfazer, respectivamente, as EDOs $X'' - \lambda X = 0, Y'' + \lambda Y = 0$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

   b) Para $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$, encontre todas as soluções da EDO $X'' - \lambda X = 0$ que verificam $X(0) = 0$.

   c) Sabendo que as funções $Y(y) = c\sin(\frac{n\pi y}{b})$ com $c \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ e $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ são soluções de $Y'' + \lambda Y = 0$ com $Y(0) = Y(b) = 0$ (não é necessário provar!), dê soluções $u(x,y) \not\equiv 0$ da equação de Laplace em R com condições de fronteira, dadas por

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x,y) \in R \\ u(x,0) = u(x,b) = 0, & x \in [0,a] \\ u(0,y) = 0, & y \in [0,b]. \end{cases}$$

(v.v.)

5. (a) Diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ a função $u(x,y) = x^2 + 10y - ay^2$ é a parte real de uma função holomorfa f em $\mathbb{C}$, e nesse caso determine f.

   (b) Determine a série de Laurent da função $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z+2i)^4}$ num anel $B_r^*(-2i) := B_r(-2i) \setminus \{-2i\}$, indicando o maior valor possível para r. Determine $\operatorname{Res}(g, -2i)$.

6. Faça o esboço da curva, indique o domínio onde a função integranda é holomorfa e calcule o integral $\displaystyle\int_{|z-1|=3} \Big(\frac{2iz-5}{z+2+i} + \frac{e^{3iz/2}-3}{\sin z} \Big) dz$, apresentando o resultado na forma $a+ib$.

7. (a) Calcule, justificando, o valor do integral $I := \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2-4z+1}\, dz$.

   (b) Mostre que para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| = 1$ se tem $z^2 - 4z + 1 = 2z(\operatorname{Re} z - 2)$.

   (c) Usando as alíneas anteriores, calcule $J := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}$. (Se não calculou I, dê J em função de I.)

8. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) O valor do integral $\int_{|z|=2} \frac{\sin z + 3z - 1}{z^2}\, dz$ é: A: 0. B: $-2\pi i$. C: $8\pi i$.

   (b) O conjunto de soluções $z \in \mathbb{C}$ da equação $e^z = e^{iz}$ é:
   A: $\{k\pi - ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. B: $\{x - ix : x \in \mathbb{R}\}$. C: $\{x - i(x + 2k\pi) : x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$.

   (c) Sendo D a imagem do primeiro quadrante fechado do plano complexo pela aplicação $z \mapsto iz^3$, tem-se: A: $1 - i \notin D$. B: $1 + i \in D$. C: $-1 - i \in D$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

9. Seja $f(z)$ uma função holomorfa num aberto $D \subset \mathbb{C}$ que contém uma bola fechada $\overline{B_R(0)}$.

   a) Sendo $a, b \in B_R(0)$, mostre que
   $$f(a) - f(b) = \frac{a-b}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz. \tag{1}$$

   b) Mostre ainda que se $M = \max_{|z|=R} |f(z)|$ e $a, b \in B_{R/2}(0)$, então $\dfrac{|f(a) - f(b)|}{|a-b|} \leq \dfrac{4M}{R}$.

FIM

Cotações propostas: 4,2 + 1,8 + 1,8 + 2,4 + 2 + 2 + 2,5 +1,8 +1,5 = 20.

Algumas fórmulas úteis

Série de Fourier de $f \in SC([-L,L])$: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Identidade de Parseval: para $f \in SC([-L,L])$: $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\Big)$.

Fórmula de D'Alembert: $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Fórmulas Integrais de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad$ com $\quad z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

Fórmula dos Resíduos: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Res}(f, z_i), \qquad$ com $\quad z_i \in \operatorname{int}\gamma, i = 1, \ldots, p$

Algumas séries de Taylor: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$

$\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1; \qquad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad |z| < 1$

$\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}; \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$