

Mecânica Analítica

Série 2: Problema de dois corpos

1. [2] Uma partícula de massa m move-se numa órbita espiral logarítmica, dada por $r = ke^{\alpha\theta}$, onde k e α são constantes.

- (a) Calcule a força que origina essa órbita;
- (b) Determine $r(t)$ e $\theta(t)$;
- (c) Calcule a energia da órbita, considerando que o potencial é zero no infinito.

2. Obtenha a lei dos gases ideais ($PV = Nk_B T$) a partir do teorema do virial. Lembre-se que a energia cinética média pode ser obtida do teorema da equipartição de energia e que para um gás ideal não há interação entre partículas, ou seja, só há interação com as paredes do recipiente.

3. Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força central $g(r) = -F(r)/m$, tal que a equação de movimento é

$$\ddot{r} - \frac{l^2}{m^2 r^3} = -g(r) \quad . \quad (1)$$

- (a) Mostre que se x_0 é o raio da órbita circular e x uma perturbação a esse raio, então

$$\ddot{x} - \frac{l^2}{m^2 x_0^3 [1 + (x/x_0)]^3} = -g(x_0 + x) \quad ; \quad (2)$$

- (b) Fazendo uma expansão em série de Taylor, mostre que para $x \ll x_0$

$$\ddot{x} + \left[\frac{3g(x_0)}{x_0} + g'(x_0) \right] x \approx 0 \quad ; \quad (3)$$

- (c) Mostre que, como $g(x_0)$ é positivo, a órbita circular é estável quando

$$\frac{F'(x_0)}{F(x_0)} + \frac{3}{x_0} > 0 \quad . \quad (4)$$

4. [2] Investigue a estabilidade de órbitas circulares, num campo central de potencial,

$$U(r) = -\frac{k}{r} e^{-(r/a)}, \quad (5)$$

onde $k > 0$ e $a > 0$. Este potencial corresponde ao potencial de Coulomb blindado (potencial de Yukawa).

5. [2] Uma partícula move-se numa órbita circular sujeita a uma força $F(r) = -k/r^2$. Mostre que, se k for reduzido a metade instantaneamente, a órbita passa a ser parabólica.

6. A equação diferencial para a órbita de uma partícula de massa m e momento angular l , sujeita a um potencial central $V(r) = -k/r$ é

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{k}{r^2} \quad . \quad (6)$$

- (a) Definindo $u \equiv 1/r$, mostre que

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{km}{l^2} \quad ; \quad (7)$$

- (b) Determine o valor de u_0 para o qual a órbita é circular;
 (c) Mostre que pequenos desvios à órbita circular (por alteração da distância ao centro) resultam num movimento harmónico em torno da posição de equilíbrio u_0 , onde

$$u = u_0 + a \cos(\beta\theta) \quad . \quad (8)$$

Determine a e β .

7. [1] Duas partículas movem-se com uma órbita circular em torno uma da outra, sobre influência da interação gravítica entre elas, com um período de τ . O seu movimento é parado instantaneamente e são libertadas do repouso. Mostre que elas colidem ao fim de um tempo $\tau/4\sqrt{2}$.
 8. [1] (a) Mostre que, para uma órbita circular e outra parabólica, num potencial atrativo $1/r$, terem o mesmo momento angular, a distância ao centro no periélio da órbita parabólica é metade do raio da órbita circular. (b) Mostre também, que para o mesmo potencial central, a velocidade da partícula em qualquer ponto da órbita parabólica é $\sqrt{2}$ vezes a velocidade da partícula numa órbita circular a passar no mesmo ponto.
 9. [1] Mostre que a trajetória de uma partícula no campo de forças

$$F = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{C}{r^3} \quad (9)$$

é dada pela fórmula

$$r = \frac{l^2/(\alpha m \beta^2)}{1 + e \cos(\beta\theta)}, \quad (10)$$

que corresponde a uma elipse se $\beta = 1$ e uma elipse com precessão se $\beta \neq 1$. Determine β .

10. [2] Mostre que a secção eficaz para uma força central $F(r) = -k/r^3$, para uma partícula com velocidade inicial v_0 é dada por,

$$\sigma(\theta) = \frac{k\pi^2(\pi - \theta)}{mv_0^2\theta^2(2\pi - \theta)^2 \sin \theta} \quad . \quad (11)$$

onde θ é o ângulo com a direção de incidência.

Referências

- [1] GOLDSTEIN, H., POOL, C., AND SAFKO, J. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Boston, MA, USA, 2002.
 [2] MARION, J. B., AND THORNTON, S. T. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Thomson Learning, Stamford, CT, USA, 1995.