Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Teste 3 28-05-2013

1.a) Determine a expressão da função $f(x)$ definida por:

$$f(x) = \int_{-a}^{x} g(z)\, dz \; , \qquad g(x) = 1 + c\,\delta(x-a) \; ,$$

onde $a > 0$, c são constantes numéricas reais.
b) Represente graficamente as funções $f(x)$, $g(x)$, para $c = a = 1$.
c) Calcule a derivada da função $F(x) = G(x) + H(x)\,\Theta(x)$, onde $G(x)$, $H(x)$ são funções contínuas de derivada contínua, e $\Theta(x)$ é a função de Heaviside.

2.a) Calcule a transformada de Fourier da função:

$$g(x) = \begin{cases} 1/(2\,a) & , \quad -a \le x \le a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases} \; .$$

b) Obtenha as funções no limite $a \to 0$: $g_0(x) = \lim_{a\to 0} g(x)$, $\tilde{g}_0(k) = \lim_{a\to 0} \tilde{g}(k)$.
c) Encontre a expressão da transformada de Fourier de

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-z)\, f(z)\, dz$$

em termos da transformada de Fourier da função $f(x)$. Interprete o resultado no limite $a \to 0$.

3. Considere a equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\,\alpha\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; , \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+ \; .$$

a) Deduza a equação diferencial a que obedece a transformada de Fourier $\tilde{u}(t,k)$.
b) Determine a solução $\tilde{u}(t,k)$ e a solução geral da equação, $u(t,x)$.
c) Obtenha a expressão de $u(t,x)$ dada a condição inicial:

$$\tilde{u}(0,k) = e^{-a\,k^2} \; , \qquad u(0,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\,a}}\, e^{-x^2/(4a)} \; .$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \; , \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \; ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\,\delta(x) \; , \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$