

Métodos Matemáticos da Física

2011/12

Teste 1

24-03-2012

1.a) Encontre pelo método de separação de variáveis soluções da equação de Schrödinger,

$$i \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

dadas por funções $u(t, x)$ periódicas em x .

b) Determine a solução da equação de Schrödinger sujeita à condição inicial,

$$u(0, x) = a e^{i k x} + b e^{-i k x},$$

onde $k \in \mathbf{R}$, a , b , são constantes.

c) Diga justificando se a solução encontrada na alínea b) é função própria dos operadores $\partial/\partial t$, $\partial/\partial x$, $\partial^2/\partial x^2$, e quais os respetivos valores próprios.

2. Considere a equação de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad y \geq 0.$$

a) Encontre pelo método de separação de variáveis soluções $u(x, y)$ satisfazendo as condições fronteira: $u(0, y) = 0$, $u(\ell, y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0$.

b) Determine a expressão da solução geral satisfazendo as mesmas condições fronteira.

3.a) Diga quais as relações entre os produtos internos de vetores $\langle v|u \rangle$, $\langle cu|v \rangle$, e $\langle u|v \rangle$, onde c é um escalar complexo.

b) Diga como se define o operador adjunto de um operador A .

c) Deduza qual o operador adjunto do produto de operadores AB em termos dos operadores adjuntos de A e de B .

d) Sejam A e B dois operadores hermíticos. Determine as condições necessárias e suficientes para que o produto AB seja também hermítico.