Cálculo Diferencial e Integral III

Teresa Faria - FCUL 2018/19

Equações Diferenciais Ordinárias

1 Equações diferenciais ordinárias escalares

1.1. Equações diferenciais ordinárias (EDO's): generalidades

Uma equação diferencial é uma relação envolvendo uma função e uma ou mais das suas derivadas.

Com $y = y(t)$ (onde frequentemente a variável independente t é o tempo), são equações diferenciais as relações:

$$y'(t) = 3y^2(t)\sin t, \quad y'(t) = e^{-y(t)} + 1 + y(t) + t, \quad y''(t) + y(t) = \cos 2t, \quad te^{y(t)} = 2y'(t),$$

que podem ser escritas abreviadamente na forma

$$y' = 3y^2 \sin t, \quad y' = e^{-y} + 1 + y + t, \quad y'' + y = \cos 2t, \quad te^y = 2y'.$$

As relações

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = xe^y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

são equações diferenciais envolvendo derivadas parciais de uma função u de mais do que uma variável. Neste capítulo, apenas se consideram **equações diferenciais ordinárias** (com abreviatura EDO), ou seja, equações que envolvem uma função de apenas uma variável real e as suas derivadas.

As equações diferenciais que não envolvem mais do que a primeira derivada são ditas de *primeira ordem*, escritas numa forma geral como $F(t, y(t), y'(t)) = 0$, ou abrevidamente

$$F(t, y, y') = 0, \tag{1}$$

onde t é a variável independente e y a variável dependente. Uma equação diferencial envolvendo derivadas até à ordem n diz-se de *ordem* n, com a forma geral $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$. A maioria das equações diferenciais aqui consideradas serão de primeira ordem, mas serão também estudadas equações diferenciais lineares de ordem n.

Para evitar repetições, no que se segue, sempre que se fala num *intervalo* I pressupõe-se que ele é não degenerado, i.e., $int\, I \neq \emptyset$. Dada uma EDO envolvendo a variável independente t, uma função $y(t)$ e as suas derivadas, o objectivo é descobrir uma função y que satisfaça a relação dada, num certo **intervalo** de interior não vazio.

Definição 1. Dada uma EDO da forma (1), com $F : D \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$, diz-se que $y = y(t)$ é uma **solução** de (1) se:

(i) $y(t)$ está definida e é diferenciável num intervalo I,

(ii) $(t, y(t), y'(t)) \in D$ para $t \in I$,

(iii) $y(t)$ satisfaz em I a equação dada.

De forma análoga se definem soluções de EDO's mais gerais do tipo $F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$: $y(t)$ está definida num intervalo I, tem derivadas até à ordem n em I, $(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)) \in \mathit{dom}\, F$ e $y(t)$ satisfaz em I a equação dada.

Se $n = 1$, i.e., $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, as soluções $y(t)$ têm valores em $\mathbb{R}$: neste caso, (1) diz-se uma EDO **escalar**; se $n > 1$, (1) traduz de facto um <u>sistema</u> de EDOs e as soluções têm valores em $\mathbb{R}^n$. Neste curso introductório, trataremos quase exclusivamente de EDOs escalares; para a situação multi-dimensional, apenas os sistemas <u>lineares</u> de EDOs serão estudados. Por essa razão, o Teorema de Existência e Unicidade é enunciado de seguida apenas para o caso escalar, embora se generalize para sistemas de EDOs – este teorema, na versão multi-dimensional, será provado no final do capítulo.

Por definição, as **soluções** de EDO's são sempre definidas num **intervalo** (não degenerado). Uma solução definida num intervalo I diz-se **maximal** se não pode ser estendida a um intervalo $J \supset_{\neq} I$, de modo a ainda ser solução em J. Na medida do possível, procura-se sempre a chamada **solução geral**, ou seja a expressão geral de todas as soluções maximais.

Uma EDO de 1^a ordem diz-se que tem a **forma normal** se está escrita como

$$y' = f(t, y), \tag{2}$$

e o conjunto $D = \mathit{dom}\, f$ diz-se o **domínio** da equação.

Supondo que f é uma função bastante "regular" num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, podem provar-se resultados de existência de soluções, de unicidade de solução (num intervalo maximal I) de (2) sujeita à condição $y(t_0) = y_0$, para cada ponto $(t_0, y_0) \in D$, de regularidade de soluções, etc. De momento, e ainda sem prova, enunciaremos a seguinte versão do chamado:

Teorema 1 (**Teorema de Existência e Unicidade**). *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (t, y) \mapsto f(t, y)$, uma função contínua num aberto D de $\mathbb{R}^2$, tal que $\partial f/\partial y$ existe e é contínua em D. Então, dada uma condição*

$$y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

onde $(t_0, y_0) \in D$, existe uma e uma só solução de (2) definida num intervalo I que contém t_0 no seu interior; ou seja, existe uma solução definida num intervalo aberto $I \ni t_0$ do sistema

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{4}$$

(Note-se que a solução $y(t)$ de (4) é única, no sentido em que qualquer outra solução de (4) definida num intervalo J contendo t_0 coincide com $y(t)$ em $I \cap J$.)

Para uma EDO de 1^a ordem, (3) chama-se uma **condição inicial** (CI); o sistema (4) é dito um **problema de valores iniciais** (PVI) ou **problema de Cauchy**. Uma consequência importante do teorema acima é que *os gráficos de duas soluções distintas* (maximais) *quaisquer de (2) não se cruzam.*

1.2. Alguns métodos de integração de EDO's de 1^a ordem

Neste capítulo, estudam-se alguns métodos de integração para certos tipos de equações diferenciais. No entanto, convém ter a percepção de que existem poucos métodos de resolução: para a maioria das equações diferenciais, não se consegue encontrar explicitamente as suas soluções, tendo-se apenas informação qualitativa do seu comportamento. Comecemos por estudar alguns modelos simples de equações usadas em *dinâmica de populações*.

Modelo populacional 1. *Equação de Malthus* (Malthus, 1798)

A equação seguinte, conhecida por equação de Malthus, modela o crescimento ou decrescimento de uma população ou de uma quantidade física, química ou biológica em que a taxa de variação é proporcional à quantidade existente:

$$y'(t) = ay(t) \quad \text{ou, abreviadamente,} \quad y' = ay.$$

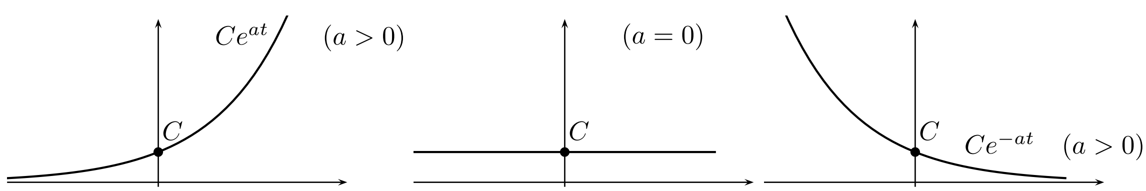
Neste modelo, a = taxa de crescimento = taxa de natalidade−taxa de mortalidade.

Soluções: Devido ao significado biológico, procuram-se apenas soluções $y = y(t) \geq 0$. $y \equiv 0$ é uma solução em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 1, as outras soluções nunca se anulam, donde

$$y' = ay \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a \Rightarrow \int \frac{y'}{y}\,dt = \int a\,dt \Leftrightarrow \log|y(t)| = at + C \Leftrightarrow |y(t)| = e^{at}e^C$$

$$\Leftrightarrow y(t) = C_1 e^{at}, \quad \text{onde } C_1 = e^C$$

é uma constante positiva qualquer. Descobrimos pois todas as soluções de $y'(y) = ay(t)$. Dando uma **condição inicial**, pode determinar-se a constante C_1: se for $y(0) = y_0$, vem $C_1 = y_0$, pelo que $y(t) = y_0 e^{at}$.



Este método de resolução pode ser aplicado a EDO's mais gerais do tipo

$$y' + a(t)y = 0. \tag{5}$$

O processo é escrever $y'/y = -a(t)$ (para $y \neq 0$) e integrar dos dois lados. Dando uma condição inicial $y(t_0) = y_0$, existe uma e uma só solução que satisfaz a relação $y(t_0) = y_0$.

Exemplo 1.1. Resolver $y'(t) + 2ty(t) = 0$, ou, abreviadamente, $y' + 2ty = 0$.

Para $y \not\equiv 0$, $y' + 2ty = 0 \Leftrightarrow y' = -2ty \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -2t$. Primitivando,

$$\int \frac{y'}{y}\,dt = -\int 2t\,dt \Leftrightarrow \log|y(t)| = -t^2 + C \Leftrightarrow |y(t)| = e^{-t^2}e^C \Leftrightarrow y(t) = Ke^{-t^2},\ t \in \mathbb{R},$$

onde $K = \pm\, e^C$. A solução geral é dada por $y(t) = Ke^{-t^2},\ t \in \mathbb{R}$, onde $K \in \mathbb{R}$ é qualquer.

Equações diferenciais de variáveis separáveis

Mais geralmente, aplique-se ainda o mesmo método às equações ditas de *variáveis separáveis*, i.e., equações que se escrevem na forma

$$y' f(y) = g(t) \tag{6}$$

onde $f : J \to \mathbb{R}, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas em intervalos I, J. O *domínio da equação* é $I \times J$, ou mais exactamente, $\{(t, y) : t \in I, y \in J\}$. Se f não se anula em J, (6) escreve-se também na forma normal

$$y' = \frac{g(t)}{f(y)}.$$

Conhecendo uma primitiva F de f em J, primitivando (6) obtém-se $y(t)$ dada numa forma implícita por

$$F(y(t)) = \int g(t)\, dt, \tag{7}$$

desde que se garanta que $y(t) \in J$. Desta igualdade, por vezes é possível *explicitar* as soluções $y(t)$. Embora de aparência simples, problemas de explicitação de soluções e/ou relacionados com o domínio da equação, tornam a resolução de algumas EDO's da forma (6) numa questão bastante delicada, que analisaremos mais adiante. De momento, veremos alguns exemplos simples.

Exemplo 1.2. Encontrar a solução de $y' = \dfrac{t^2}{y^2}$, que satisfaz $y(0) = 1$.

O domínio desta equação é $D = \{(t, y) : y \neq 0\}$. Para $y \neq 0$, tem-se

$$y' = \frac{t^2}{y^2} \Leftrightarrow y'y^2 = t^2 \Leftrightarrow 3y'y^2 = 3t^2.$$

Primitivando vem

$$y^3 = t^3 + C \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{t^3 + C},\ C \in \mathbb{R}.$$

Como $y(0) = 1$, vem $\sqrt[3]{C} = 1 \Leftrightarrow C = 1$, pelo que $y = \sqrt[3]{t^3 + 1},\ t \in]-1, +\infty[$.

Exemplo 1.3. Encontrar a solução geral $y = y(x)$ da equação $e^y \dfrac{dy}{dx} - x - x^3 = 0$.

O domínio desta equação é $D = \mathbb{R}^2$. Vem

$$e^y \frac{dy}{dx} - x - x^3 = 0 \Leftrightarrow y'e^y = x + x^3.$$

Primitivando,

$$\int y'e^y\, dx = \int (x + x^3)\, dx \Leftrightarrow e^{y(t)} = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C \Leftrightarrow y(t) = \log\Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C\Big),$$

(para alguma contante $C \in \mathbb{R}$) definida num intervalo $I \subset \{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} > -C\}$.

Modelo populacional 2. *Equação Logística* (Verhulst, 1837)

Na equação seguinte, conhecida por equação logística, o crescimento de uma população (ou de uma quantidade do mundo físico) é aproximadamente exponencial enquanto a densidade da população é pequena, mas, quando esta aumenta, as limitações do meio impõem-se, reduzindo de forma determinante a taxa de variação:

$$y' = y(a - by)\,, \qquad (a, b > 0) \tag{8}$$

Note-se que há duas soluções constantes: $y(t) = 0, \forall t$ e $y(t) = a/b, \forall t$. A primeira corresponde a não haver população; a segunda tem muita importância biológica, como adiante se verá.

Para além destas, as outras soluções de (8) encontram-se pelo método de separação de variáveis: com efeito, para $y \neq 0$ e $y \neq a/b$,

$$y' = y(a - by) \Leftrightarrow \frac{y'}{y(a - by)} = 1.$$

Pelo método dos coeficientes indeterminados,

$$\frac{1}{y(a - by)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{a - by} \Leftrightarrow A(a - by) + By = 1 \quad (y \neq 0, y \neq a/b).$$

Fazendo $y = a/b$, deduz-se que $B = b/a$; e para $y = 0$, deduz-se que $A = 1/a$. Primitivando, tem-se

$$\int \frac{y'}{y(a - by)}\,dt = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a}\int \frac{y'}{y}\,dt + \frac{b}{a}\int \frac{y'}{a - by}\,dt = t + C \Leftrightarrow \frac{1}{a}\log\frac{|y|}{|a - by|} = t + C.$$

É possível agora explicitar y como função de t. Com a condição inicial $y(0) = y_0$, resolvendo em ordem a y em cima, obtém-se:

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)e^{-at}}$$

num intervalo $I \supset [0, +\infty[$. Se $y_0 \neq 0$, vem

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \frac{a}{b}\,. \tag{9}$$

Ou seja, qualquer solução positiva $y(t)$ de (8) converge para o equilíbrio positivo, quando $t \to +\infty$. O valor $K := \dfrac{a}{b}$ é chamado *capacidade biótica máxima* (tamanho em que cessa o crescimento da população), e corresponde à capacidade máxima que o habitat consegue suportar. Com frequência, usa-se o termo inglês: *carrying capacity*.

Na Lei Logística, tal como em outros modelos populacionais, o quociente $\frac{y'}{y} = a - by$ é ainda designado por *taxa de crescimento*. Quando a (densidade da) população y é muito pequena, o crescimento é do tipo exponencial, porque o modelo (8) está próximo da Lei de

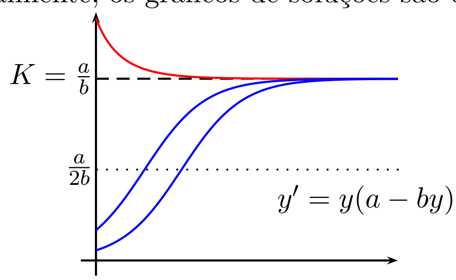
Malthus; à medida que a população aumenta e se aproxima da capacidade máxima para a espécie, as limitações do meio impõem fortes travões ao seu crescimento.

Pretende-se agora desenhar o gráfico das soluções da equação logística, o que poderá ser feito analisando directamente a equação (8). Atendendo ao seu significado biológico, as C.I. $y(0) = y_0$ serão tomadas com $y_0 \geq 0$.

Se $y(t)$ é solução de (8), vem que $y' > 0$ para $0 < y < \frac{a}{b}$ e $y' < 0$ para $y > \frac{a}{b}$. Para estudar agora inflexões e concavidades dos gráficos, observe-se que $y'' = y'(a-by)-byy' = y'(a-2by)$, donde $y'' = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ ou $a - 2by = 0 \Leftrightarrow y' = 0$ ou $y = \frac{a}{2b}$. O estudo dos sinais de y' e y'' estão resumidos no quadro seguinte:

	0		a/(2b)		a/b	
y'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	max	$\searrow$
y''	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	const.	$\cup$	Infl.	$\cap$	const.	$\cup$

Finalmente, os gráficos de soluções são dados na figura abaixo:



Note-se que todas as soluções com condição inicial $y(0) = y_0 < K$ têm um ponto de inflexão quando a população atinge o valor $\frac{a}{2b}$.

Exemplo 1.4. Determinar a capacidade biótica máxima da equação logística $y' = y(1 - 2y)$. Achar ainda a solução desta equação que em $t = 0$ tem o valor 2.

A capacidade biótica máxima é dada pela equação $1 - 2y = 0$, i.e., é $K = 1/2$. Ache-se agora a solução que satisfaz $y(0) = 2$. Para $y \neq 0, y \neq 1/2$, tem-se

$$y' = y(1-2y) \Leftrightarrow y' \frac{1}{y(1-2y)} = 1$$

e pelo método dos coeficientes indeterminados vem

$$y'\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{1-2y}\right) = 1 \Leftrightarrow \log|y| - \log|1-2y| = t + C \Leftrightarrow \left|\frac{y}{1-2y}\right| = e^C e^t \Leftrightarrow \frac{y}{1-2y} = Ke^t,$$

para alguma constante K. Como $y(0) = 2$, vem $K = -\frac{2}{3}$, e portanto

$$\frac{y}{1-2y} = -\frac{2}{3}e^t \Leftrightarrow 3y = 2(-1+2y)e^t \Leftrightarrow y = \frac{2e^t}{4e^t - 3} = \frac{2}{4 - 3e^{-t}}.$$

Exercício. Uma população cresce de acordo com a lei logística. Sabe-se que a sua capacidade biótica máxima é 5×10^8 e que quando a população é 10^2 a taxa de crescimento é de 20%. Escreva a equação diferencial que modela o crescimento da população.

Adenda: População Mundial

O modelo logístico $y' = y(a - by)$ é frequentemente escolhido para modelar o crescimento da população humana mundial, com o tempo t medido em anos. Ecologistas e demógrafos previram que $a = 0.029$. Para determinar a taxa de crescimento populacional, foram usados censos demográficos a partir dos anos 1960s. Em 1965, a população era de 3.34×10^9, com taxa de crescimento populacional $\approx 2\% = 0.02$. Com $y = 3.34 \times 10^9$, vem $0.02 = \frac{y'}{y} = a - by \Leftrightarrow 0.02 = 0.029 - b \times 3.34 \times 10^9$ donde se tira que $b = 2.695 \times 10^{-12}$. Obtém-se a Lei Logística

$$y' = y(0.029 - 2.695 \times 10^{-12} y).$$

A **capacidade biótica máxima** é

$$K = \frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.695 \times 10^{-12}},$$

i.e.,

$$K = 10.76 \times 10^9 = 10.76 \textbf{ mil milhões de pessoas}$$

A solução com condição inicial $y(0) = 3.34 \times 10^9$ ($t = 0$ corresponde ao ano 1965) é dada por

$$y(t) = \frac{(0.029)(3.34)10^9}{9 \times 10^{-3} + (0.029 - 9 \times 10^{-3})e^{-0.029\,t}}.$$

Para 2015 ($t = 50$ anos), viria a previsão

$$y = y(50) \approx 7.08 \times 10^9 \text{ habitantes.}$$

No final de Outubro de 2011, a população mundial atingiu os **7 mil milhões**. Presentemente (Setembro de 2018) é de $\approx$7.65 mil milhões. A população mundial já atingiu largamente o seu ponto de inflexão do crescimento, que é de 5.38 mil milhões de habitantes.

Equações diferenciais lineares de 1ª ordem

Um *equação diferencial linear de 1ª ordem* é uma equação que se escreve na forma

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

ou abreviadamente

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{10}$$

com $a(t), b(t)$ funções contínuas num intervalo I. O domínio da equação é $I \times \mathbb{R}$. Se $b(t) = 0$ em I, a equação diz-se *homogénea*, caso contrário é *não homogénea*. Como já foi observado, a equação homogénea pode resolver-se como uma equação de variáveis separáveis.

Para resolver (10), procura-se uma primitiva $A(t)$ de $a(t)$. A multiplicação de ambos os lados de (10) por $e^{A(t)}$ permite integrar a equação – por isso, $e^{A(t)}$ diz-se um **factor integrante**. Com efeito, em I tem-se

$$y' + a(t)y = b(t) \Leftrightarrow y'(t)e^{A(t)} + a(t)e^{A(t)}y = b(t)e^{A(t)} \Leftrightarrow \left(y(t)e^{A(t)}\right)' = b(t)e^{A(t)}$$

Pimitivando ambos os lados, obtém-se

$$y(t)e^{A(t)} = \int b(t)e^{A(t)}\,dt \Leftrightarrow y(t) = e^{-A(t)}\left(\int b(t)e^{A(t)}\,dt\right),\ t \in I,$$

onde em $\int b(t)e^{A(t)}\,dt$ está envolvida uma constante arbitrária $C \in \mathbb{R}$. A constante C é determinada se for dada uma condição inicial $y(t_0) = y_0$ num ponto $t_0 \in I$.

Exemplo 1.5. Resolver a equação diferencial $y' + 2y = e^{2x}$.

Trata-se de uma equação diferencial linear de primeira ordem. Comparando com (10), onde agora a variável independente é x em vez de t, $a(x) = 2$ e $b(x) = e^{2x}$. Vem que $A(x) = 2x$ é uma primitiva de $a(x)$ e e^{2x} um factor integrante. Multiplicando por e^{2x}, tem-se $(y' + 2y)e^{2x} = e^{4x}$, i.e., $(ye^{2x})' = e^{4x}$. Primitivando, a solução geral da equação é dada por

$$ye^{2x} = \frac{1}{4}e^{4x} + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}e^{2x} + Ce^{-2x}.$$

Exemplo 1.6. Determinar a solução de $y' + y = t$, sujeita à condição inicial $y(0) = 1$.

Integrando $a(t) = 1$, tem-se $A(t) = t$. Multiplicando a equação por e^t, vem

$$y'e^t + e^t y = te^t \Leftrightarrow (ye^t)' = te^t.$$

Primitivando, vem $ye^t = \int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = e^t(t-1) + C$ e portanto $y = t - 1 + Ce^{-t}$. Queremos que $y(0) = 1$, logo $1 = -1 + C$, pelo que $C = 2$. A solução do problema é $y = t - 1 + 2e^{-t}$.

Teorema 2. *(i) Se $y_0(t)$ é uma solução da equação homogénea (5) e $y_1(t)$ é uma solução da equação não homogénea (10) (em I), então $y_0(t) + y_1(t)$ é solução de (10);*
(ii) Se $y_1(t), y_2(t)$ são soluções da equação não homogénea (10) (em I), então $y_1(t) - y_2(t)$ é solução da equação homogénea (5).

A demonstração deste teorema é deixada como exercício. Daqui resulta ainda que a solução geral da equação (10) tem a forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$, $t \in I$, onde $y_H(t)$ é a solução geral da equação homogénea (5) e $y_P(t)$ uma solução particular de (10).

Equações diferenciais exactas

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e $M, N : \Omega \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, e considere-se uma EDO com a forma

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0 \quad \text{ou} \quad M(x,y)\,x' + N(x,y) = 0,$$

onde na primeira equação se procuram soluções $y = y(x)$ e na segunda soluções $x = x(y)$. No aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,

$$\omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \tag{12}$$

é uma forma diferencial de primeira ordem (cf. Cálculo II). Quando se procuram soluções, a escrita $\omega = 0$, ou seja,

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{13}$$

permite considerar em conjunto as duas situações acima. Assim, estas equações são frequentementemente dadas na notação de forma diferencial (13), com a abreviatura

$$M\,dx + N\,dy = 0.$$

Recorde-se que, se M, N são de classe C^1, a forma diferencial ω diz-se *fechada* em Ω se

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Se Ω é um aberto estrelado, então o Teorema de Poincaré garante que ω é fechada em Ω se e só se existe um potencial Φ de (M, N) em Ω, ou seja, uma função $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que $\nabla\Phi = (M, N)$ em Ω. Diz-se que a EDO (13) é **exacta** se existe um potencial Φ de (M, N) em Ω.

Teorema 3. *Sejam M, N de classe C^1 num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se Φ é um potencial de (M, N) em Ω, as soluções $y = y(x)$ da equação diferencial*

$$M(x, y) + N(x, y)\,y' = 0 \tag{14}$$

são dadas implicitamente pela relação

$$\Phi(x, y(x)) = C \quad (C \text{ constante}). \tag{15}$$

Dem. Derivando ambos os membros de (15), pela regra da cadeia obtém-se

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x, y)y'(x) = 0,$$

ou seja, tem-se a relação $M(x, y) + N(x, y)\,y' = 0$.

Contudo, isto não significa que se consiga determinar de forma explícita as soluções $y(x)$ de (14). Mas, se for dada uma CI $y(x_0) = y_0$, com $(x_0, y_0) \in \Omega$ e $N(x_0, y_0) \neq 0$, o Teorema das Funções Implícitas garante que existe $\varepsilon > 0$ tal que a relação (15) define y como função $\varphi(x)$ de x, de classe C^1 pelo menos numa vizinhança $I_\varepsilon =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 e tal que $\varphi(x_0) = y_0$.

De modo análogo, as soluções $x = x(y)$ da equação diferencial $M(x, y)\,x' + N(x, y) = 0$ são dadas *implicitamente* pela relação $\Phi(x(y), y) = C$ (C constante).

Se a EDO (13) é exacta, conclui-se que os gráficos das suas soluções estão contidos nas curvas de nível de um potencial Φ do campo (M, N).

Exemplo 1.7. Resolver a equação diferencial $3(x + 2e^t)\,dt + (3t + \sin x)\,dx = 0$.

Com $M = 3x + 2e^t$ e $N = 3t + \sin x$, vem que $N_t = M_x = 3$ em $\mathbb{R}^2$, pelo que a EDO é exacta. Calculando um potencial de (M, N), conclui-se que as soluções são dadas na forma implícita por

$$3xt + 2e^t - \cos x = C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

No entanto, não é possível explicitar as soluções na forma $x = x(t)$ ou $t = t(x)$.

Exemplo 1.8. Resolver a equação diferencial $y' = -\dfrac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$.

Resol. Esta EDO tem domínio $D = \{(x, y) : 6x^2y+4y^3 \neq 0\} = \{(x, y) : 2y(3x^2+2y^2) \neq 0\} = \{(x, y) : y \neq 0\}$ (que não é um conexo). A equação escreve-se na forma (13), com $M = 3x^2 + 6xy^2, N = 6x^2y + 4y^3$, e $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = 12xy$. Em $D_1 = \{(x, y) : y > 0\}$ e em $D_2 = \{(x, y) : y < 0\}$, as soluções são dada na forma implícita por

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C,$$

com C constante. A equação acima é uma equação biquadrada, pelo que fazendo $z = y^2$ se poderia agora explicitar $y = y(x)$.

Diz-se que uma função $\mu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 é um **factor integrante** para a equação diferencial (13) se a nova equação

$$\mu(x, y)M(x, y)\, dx + \mu(x, y)N(x, y)\, dy = 0,$$

é exacta. Em abertos estrelados, isto acontece se e só se $\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M)$. Há algumas "receitas" para procurar factores integrantes.

Teorema 4. *Sejam M, N de classe $C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aberto estrelado. Para (13) tem-se:*
(i) Se $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = g(x)$, então $\mu(x) = e^{G(x)}$, onde $G(x) = \int g(x)\, dx$, é um factor integrante.
(ii) Se $\frac{1}{M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = h(y)$, então $\mu(y) = e^{-H(y)}$, onde $H(y) = \int h(y)\, dy$, é um factor integrante.
(iii) Se $M = yf(xy)$ e $N = xg(xy)$, então $\mu(x, y) = \frac{1}{xM-yN}$ é um factor integrante.

Exemplo 1.9. Encontrar a solução geral da equação $(e^t + y)y' + \dfrac{y^2}{2} + 2ye^t = 0$.

Resol. A equação tem a forma (13), com $M = M(t, y) = \frac{y^2}{2}+2ye^t$, $N = N(t, y) = e^t+y$, e tem domínio $\mathbb{R}^2$. Tem-se $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} = y + 2e^t - e^t = y + e^t$, logo $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}) = 1$. Pelo Teorema 4.(i), com $g(t) = 1$, vem $G(t) = t$ e $\mu(t) = e^t$ é um factor integrante. Multiplicando a equação por e^t, obtém-se a equação exacta

$$\Big(\frac{y^2e^t}{2} + 2ye^{2t}\Big)\, dt + (e^{2t} + e^ty)\, dy = 0.$$

É agora fácil ver que as soluções são dadas implicitamente por $y^2e^t + 2ye^{2t} = C$, com $C \in \mathbb{R}$. Explicitando $y = y(t)$ vem

$$y(t) = \frac{-e^{2t} \pm \sqrt{e^{4t} + Ce^t}}{e^t} = -\mathrm{e}^t \pm \sqrt{e^{2t} + Ce^{-t}}$$

com $t \in \mathbb{R}$ para $C \geq 0$ e $t \in]\frac{\log(-C)}{3}, +\infty[$ para $C < 0$.

1.3. Integração de algumas equações diferenciais "notáveis"

Há poucas técnicas de integração de EDOs que permitem determinar as suas soluções, explicitamente ou pelo menos numa forma implícita. Basicamente, para EDOs de 1^a ordem, os métodos existentes são os estudados. Todavia, para outras EDOs de certas formas específicas existem mudanças de variáveis conhecidas que as transformam em equações de algum dos tipos estudados, o que permite portanto integrá-las. Alguns exemplos são dados de seguida.

• **Equações incompletas** de ordem $n > 1$:

$$y'' = f(t, y'), \quad \text{ou} \quad y''' = f(t, y''), \quad \text{etc.}$$

A mudança de variável $u = y'$ transforma $y'' = f(t, y')$ numa equação da forma $u' = f(t, u)$.

Nalgumas outras situações, uma EDO é de ordem $n > 1$ e "completa" – e.g., $y'' = f(t, y, y')$ –, mas há um truque particular que permite transformá-la numa EDO de um dos tipos já estudados.

Exemplo 1.10. A equação $y'' = yy'$ é equivalente a $y'' = \frac{1}{2}(y^2)'$. Primitivando de ambos os lados, tem-se $y' = \frac{1}{2}y^2 + C$, que é uma equação de variáveis separáveis.

• **Equações homogéneas**:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right), \tag{16}$$

onde f é uma função contínua definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A mudança de variável $u = \frac{y}{t}$, transforma-se a equação (16) numa equação de variáveis separáveis:

$$u' = \frac{f(u) - u}{t}.$$

Exemplo 1.10. A EDO $y' = (\frac{y}{t} + 1)^2$ tem domínio $D = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Para a integrar, faça-se a mudança de variável $u = y/t$. A equação transformada é $u' = \frac{u^2+u+1}{t} \Leftrightarrow \frac{u'}{u^2+u+1} = \frac{1}{t}$, que pode ser integrada usando primitivação de funções racionais. As soluções da equação original são agora dadas por $y(t) = tu(t)$, em intervalos contidos em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

• **Equações de Bernoulli**:

$$y' + a(t)y = b(t)y^k, \quad (k \in \mathbb{N}_0) \tag{17}$$

onde $a, b \in C(I)$ e I é um intervalo. Com $k = 0$ ou $k = 1$, tem-se uma equação linear de 1^a ordem. Para $k \geq 2$ e $y \not\equiv 0$, com a mudança de variável $u = y^{1-k}$ a equação (17) transforma-se numa equação linear de 1^a ordem:

$$u' + (1 - k)a(t)u = (1 - k)b(t).$$

Exemplo 1.11. Integrar a equação $y' + y - ty^3 = 0$.

A equação escreve-se na forma normal $y' = -y + ty^3 =: f(t, y)$, com $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, pelo que é válido o Teorema de Existência e Unicidade no domínio da equação $D = \mathbb{R}^2$. Como $y \equiv 0$ é uma solução, todas as outras nunca se anulam. Assim, para $y \not\equiv 0$, efectuando a mudança de variável $u = y^{-2}$, tem-se

$$u' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3}(-y + ty^3) = 2y^{-2} - 2t \Leftrightarrow u' = 2u - 2t.$$

Facilmente se integra a EDO linear $u' - 2u = -2t$, vindo $u = t + \frac{1}{2} + ce^{2t} = y^{-2}$, e portanto $y = \pm\left(t + \frac{1}{2} + ce^{2t}\right)^{-1/2}$, com $c \in \mathbb{R}$, em intervalos $I_c = \{t \in \mathbb{R} : t + \frac{1}{2} + ce^{2t} > 0\}$.

• **Equações de Ricatti**:

$$y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t), \tag{18}$$

onde $a, b, c \in C(I)$ e I é um intervalo. Supondo que é já *conhecida uma solução* $y_1(t)$, a mudança de variável $u = \frac{1}{y - y_1}$ transforma-se a equação (18) numa linear de 1^a ordem:

$$u' + (2a(t)y_1(t) + b(t))u + a(t) = 0.$$

1.4 Alguns aspectos geométricos relativos a EDOs

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua no aberto D, e considere-se a EDO na forma normal

$$y' = f(t, y), \tag{19}$$

com o **domínio** da equação dado por $D = dom\, f$. Chama-se **curva integral** de (19) ao gráfico de uma solução de (19). Existindo uma solução dos PVIs (4), $\forall (t_0, y_0) \in D$, as curvas integrais de (19) preenchem todo o domínio D.

Campo de direcções

Para simplificar a interpretação, suponha-se de momento que estão satisfeitas as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade. Para cada $(t_0, y_0) \in D$ fixado, $f(t_0, y_0)$ é o declive da recta tangente à curva integral de (19) que passa por (t_0, y_0). Assim, a equação (19) associa a cada ponto $(t, y) \in D$ o **declive** em (t, y) da curva integral (única) passando por (t, y). Em termos geométricos, resolver a EDO (19) significa determinar as funções cujos gráficos têm precisamente esses declives. Esses declives podem ser assinalados em D, desenhando um certo número de pequenos segmentos de recta centrados em pontos (t, y) de D, precisamente com declive $f(t, y)$. Esta representação dos declives em D chama-se **campo de direcções**. A observação de um campo de direcções de uma EDO na forma normal (19) permite intuir, com mais ou menos precisão, a forma geral das suas curvas integrais.

De uma maneira mais formal, pode definir-se o **campo de direcções** de (19) por

$$(t, y) \mapsto (1, f(t, y)), \quad (t, y) \in D, \tag{20}$$

ou, alternativamente, o campo de direcções *normalizado* dado por

$$(t, y) \mapsto vers(1, f(t, y)), \quad (t, y) \in D.$$

Considere-se agora o caso particular de uma EDO na forma normal (19) em que a variável independente está ausente (estas EDOs são ditas **autónomas**):

$$y' = f(y), \tag{21}$$

onde $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. Neste caso, o domínio de (21) é $\mathbb{R} \times U$. É fácil ver que:

(i) $y_0 \in U$ é um ponto de equilíbrio de (21), i.e., $\varphi(t) \equiv y_0$ é solução de (21), se e só se $f(y_0) = 0$;

(ii) as curvas integrais constituem conjuntos de curvas paralelas, invariantes para translações definidas por vectores $c\,\vec{e}_1,\ c$ constante, como comprovado pelo seguinte teorema:

Teorema 5. Se $y = \varphi(t)$ é solução de (2) num intervalo I, então para qualquer $a \in \mathbb{R}$ a função $y = \varphi(t + a)$ é solução de (2) no intervalo $I - a$.

Para ser válido o T. Existência e Unicidade, suponha-se ainda que U é aberto e f de classe C^1 em U. Para (21), na fórmula (20) tem-se

$$(t, y) \mapsto (1, f(y)), \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times U.$$

Claramente, o Teorema 5 pode ser antecipado observando o campo de direcções de (21): o campo de direcções é composto por vectores, ou pequenos segmentos de recta, idênticos ao longo de rectas horizontais $y =$ constante. A observação de um campo de direcções com esta forma torna ainda mais fácil intuir geometricamente como serão as soluções, pensando nas suas curvas integrais.

Exercício. Desenhar o campo de direcções e as curvas integrais para as equações $y' = ay$ com a constante (lei de Malthus) e $y' = y^2$.

Trajectórias ortogonais

Seja dada uma família de curvas $\mathcal{F}$ constituída por *curvas de nível* de uma certa função $F : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, onde D é um aberto e F de classe C^1; i.e., $\mathcal{F} = \cup_{c \in A} F^c$, onde

$$F^c = \{(x, y) \in D : F(x, y) = c\}.$$

Pretende-se agora resolver o seguinte problema: encontrar a família $\mathcal{G}$ de curvas ortogonais às curvas em $\mathcal{F}$.

Isto significa que as intersecções das curvas de $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{G}$ deverão ser de forma a que as respectivas rectas tangentes em cada ponto de intersecção sejam ortogonais. Diz-se que as curvas de $\mathcal{G}$ são **trajectórias ortogonais** às curvas da família $\mathcal{F}$.

Sabe-se que, em cada ponto P sobre uma curva de nível F^c de F, o gradiente $\nabla F(P)$ é perpendicular à curva F^c em P. Se a curva ortogonal a F^c em $P_0 = (x_0, y_0)$ contiver o gráfico de uma função $y = y(x)$ de classe C^1, o declive de $y(x)$ em x_0 deverá portanto ser igual ao declive do vector $\nabla F(P_0)$. Com $F_x(x_0, y_0) \neq 0$, virá $y'(x_0) = \frac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$.

Assim, a família $\mathcal{G}$ de trajectórias ortogonais à família $\mathcal{F}$, i.e., as curvas intersectando ortogonalmente as curvas de nível da função F, deverão satisfazer a EDO

$$y' = \frac{F_y(x, y)}{F_x(x, y)}, \tag{22}$$

desde que $F_x(x, y) \neq 0$. A resolução da EDO (22) permite agora encontrar a família $\mathcal{G}$. Os pontos para os quais $F_x(x, y) = 0$ deverão ser estudados à parte.

Analogamente, se as trajectórias ortogonais contiverem gráficos de funções $x = x(y)$ e $F_y(x, y) \neq 0$, a família $\mathcal{G}$ é dada por curvas que satisfazem a EDO

$$x' = \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Exemplo 1.12. Calcular as trajectórias ortogonais à família de elipses dadas pelas equações $x^2 + 2y^2 = c, c \geq 0$.

Para $F(x,y) := x^2 + 2y^2$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\nabla F(x,y) = (2x, 4y)$. As curvas ortogonais deverão conter gráficos de funções $y = y(x)$ que satisfazem a EDO $y' = \frac{2y}{x}$ se $x \neq 0$. Esta EDO é de variáveis separáveis. A sua integração conduz a $y = Kx^2$, para $x \in]-\infty, 0[$ e $x \in]0, +\infty[$, com $K \neq 0$ constante. Pode agora observar-se directamente que as rectas $x = 0$ e $y = 0$ são ortogonais às elipses dadas, em cada ponto de intersecção. A família de trajectórias ortogonais pedida é então constituída pelas parábolas de equação $y = Kx^2$, para qualquer $K \in \mathbb{R}$ (incluindo agora a recta de equação $y = 0$) e ainda pela recta vertical dada por $x = 0$.

Exemplos de não-unicidade

Para simplificar, fixemos a nossa atenção em equações autónomas dadas na forma normal (21). Se $U = \mathit{dom}\, f$ não é um aberto ou f não é diferenciável em U, o T. Existência e Unicidade poderá não ser válido, e a unicidade de soluções pode falhar. De seguida daremos alguns exemplos desta perda de unicidade.

Nota: Provar-se-á adiante que, se f é contínua e U aberto, então *existem* sempre soluções dos PVI's $y' = f(y),\ y(t_0) = y_0$ definidas num intervalo que contém t_0 no seu interior.

Exemplo 1.13. Considere-se a EDO $y' = y^{2/3}$. O domínio desta equação é $\mathbb{R}^2$, todavia o T. Existência e Unicidade é válido apenas em $D_1 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, pois a função $f(y) = y^{2/3}$ não tem derivada em 0. Claro que $y \equiv 0$ é uma solução. Para $y \neq 0$, a EDO $y' = y^{2/3}$ integra-se como uma equação de variáveis separáveis e obtêm-se as soluções $y = \left(\frac{t-c}{3}\right)^3$, para $c \in \mathbb{R}$, que são soluções em $]-\infty, c[$ e em $]c, +\infty[$. Mas a função

$$(a) \qquad \varphi(t) := \left(\frac{t-c}{3}\right)^3$$

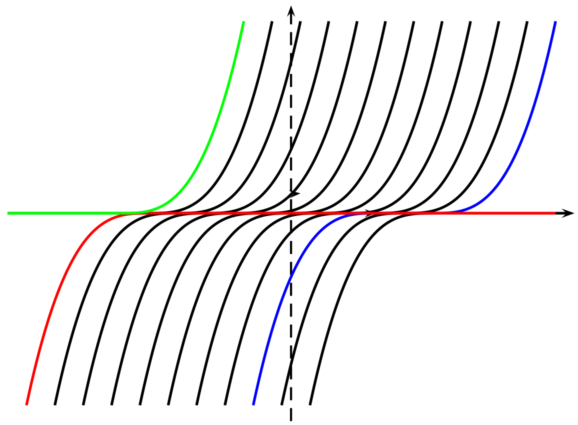
está definida e é diferenciável em $\mathbb{R}$, com $\varphi'(c) = 0$. Para $f(y) := y^{2/3}$, como $f(\varphi(c)) = f(0) = 0$, então $\varphi(t)$ é uma solução em $\mathbb{R}$ da equação dada. No entanto, existem ainda outros tipos de soluções. São soluções as funções dadas por

$$(a) \quad \psi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-c}{3}\right)^3 & \text{se} \quad t \leq c \\ 0 & \text{se} \quad t \geq c \end{cases}, \qquad \text{ou} \qquad (b) \quad \psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \leq c \\ \left(\frac{t-c}{3}\right)^3 & \text{se} \quad t \geq c \end{cases},$$

para quaisquer $c \in \mathbb{R}$, já que em ambos os casos $\psi'(c^+) = \psi'(c^-) = 0 = f(\psi(c))$. Também são soluções as funções

$$(d) \quad \psi(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-c_1}{3}\right)^3 & \text{se} \quad t \leq c_1 \\ 0 & \text{se} \quad c_1 \leq t \leq c_2 \\ \left(\frac{t-c_2}{3}\right)^3 & \text{se} \quad t \geq c_2 \end{cases},$$

para quaisquer $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ com $c_1 < c_2$. Com efeito, tal como acima, vem que $\psi'(c_i^-) = \psi'(c_i^+) = 0 = f(\psi(c_i)), i = 1, 2$, pelo que $\psi(t)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e satisfaz em $\mathbb{R}$ a EDO $y' = y^{2/3}$. Conclui-se em particular que por qualquer $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passam infinitas curvas integrais da equação dada.



Exemplo 1.14. Considere-se a EDO $y' = \sqrt{1-y^2}$. O domínio desta equação é $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, mas o T. Existência e Unicidade é válido apenas em $D_1 = \mathbb{R}\times]-1, 1[$. Tem-se que $y = -1$ e $y = 1$ são pontos de equilíbrio da equação. Para cada $(t_0, y_0) \in D_1$, efectivamente existe uma e uma só solução (maximal) do PVI

$$y' = \sqrt{1-y^2}, \quad y(t_0) = y_0, \tag{23}$$

definida em $\mathbb{R}$, dada por

$$\psi(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad t \leq -\frac{\pi}{2} - c \\ \sin(t+c) & \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} - c \leq t \leq \frac{\pi}{2} - c \\ 1 & \text{se} \quad t \geq \frac{\pi}{2} - c \end{cases}$$

com $c = \arcsin(y_0) - t_0$. No entanto, se $y_0 = \pm 1$, existem infinitas soluções do PVI (23).

Exercício. Desenhe as curvas integrais para a EDO $y' = \sqrt{1-y^2}$, e comprove as asserções acima.

2 Equações lineares de ordem n

2.1. Equações lineares de ordem n: primeiras propriedades

Uma equação diferencial **linear de ordem** $n \in \mathbb{N}$ é uma EDO da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \quad t \in I, \tag{1_n}$$

onde a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e g são funções contínuas num intervalo I (não degenerado). Para (1_n), o domínio da EDO é $D = I \times \mathbb{R}$.

Para (1_n), naturalmente se intui que terão de ser dadas n condições "independentes" para determinar univocamente uma solução em I, já que a EDO deve ser primitivada n vezes. Assim, um **PVI**, também chamado **problema de Cauchy**, tem a forma seguinte:

para $t_0 \in I$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ fixados, encontrar a solução de

$$(1_n) \quad + \quad \begin{cases} y(t_0) = x_1 \\ y'(t_0) = x_2 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = x_n. \end{cases}$$

Com frequência, a equação (1_n) escreve-se de maneira abreviada como

$$Ly = g(t),$$

com $Ly := y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y$.

Em particular, uma EDO linear de segunda ordem ($n = 2$) tem a forma

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t), \quad t \in I, \tag{1_2}$$

com $a, b, g \in C(I),\ I$ intervalo; neste caso, um PVI é dado por

$$(1_2) \quad + \quad \begin{cases} y(t_0) = x_1 \\ y'(t_0) = x_2\,, \end{cases}$$

para $t_0 \in I$ e $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ fixados.

No caso em que $g(t) \equiv 0$, obtém-se a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \tag{H_n}$$

dita **equação linear homogénea** de ordem n. Por oposição, a equação (1_n) é chamada **completa** ou **não-homogénea**.

Da estrutura linear (em y) das equações (1_n), decorre que:

Teorema 2.1. *Considerem-se as equações (1_n) e (H_n), com $n \in \mathbb{N}$, $a_i, g \in C(I), i = 0, 1, \ldots, n-1$, e I intervalo aberto. Tem-se:*

(i) Princípio de sobreposição: Se $y_1(t), y_2(t)$ são soluções de (H_n) e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ é solução de (H_n).

(ii) Se $y_1(t), y_2(t)$ são soluções de (1_n), então $y_1(t) - y_2(t)$ é solução de (H_n);

(iii) Se $y_1(t)$ é solução de (1_n) e $y_2(t)$ é solução de (H_n), então $y_1(t) + y_2(t)$ é solução de (1_n).

Daqui resulta imediatamente que:

Teorema 2.2. *Nas condições acima,*

(i) o conjunto S das soluções de (H_n) é um **espaço vectorial***;*

(ii) o conjunto das soluções de (1_n) é um **espaço afim***, com a forma*

$$y_p + S = \{y_p + \varphi : \varphi \in S\}$$

onde y_p é uma solução particular qualquer de (1_n).

Uma equação linear de ordem $n \in \mathbb{N}$ pode de facto ser escrita na forma vectorial como uma EDO de primeira ordem (com n componentes). Com efeito, faça-se $Y = (y_1, \dots, y_n)$ com

$$y = y_1, y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n.$$

A equação (1_n) é equivalente ao sistema $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_n' = g(t) - a_{n-1}(t)y_n \cdots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1, \end{cases}$ ou seja

$$Y' = f(t, Y)$$

com $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$f(t, y_1, \dots, y_n) = \big(y_2, y_3, \dots, y_{n-1}, g(t) - a_{n-1}(t)y_n - \cdots - a_1(t)y_2 - a_0(t)y_1\big).$$

Note-se ainda que $f(t, Y)$ e $D_Y f(t, Y)$ são contínuas em $I \times \mathbb{R}^n$. Na forma matricial, a equação escreve-se

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix} Y + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ g(t) \end{bmatrix}$$

De facto, adiante serão estudados **sistemas de EDOs lineares** em $\mathbb{R}^n$, dados na forma vectorial por

$$y' = A(t)y + h(t), \tag{SL}$$

onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ de funções contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, $h : I \to \mathbb{R}^n$ é contínua e a variável dependente $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ tem valores em $\mathbb{R}^n$.

Recorde-se o *Teorema de Existência e Unicidade* (TEU) na sua versão escalar enunciada na Secção 1.1. Este teorema pode ser generalizado a funções vectoriais com a seguinte redacção (será provado neste capítulo, no final do estudo de EDOs):

Teorema 2.3. (T. de Existência e Unicidade - versão n-dimensional)
Considere-se uma EDO vectorial na forma normal,

$$Y' = f(t, Y) \tag{2}$$

onde $f : D \subset \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}^n, (t, Y) \mapsto f(t, Y)$ é uma função contínua num aberto $D \subset \mathbb{R}^{1+n}$, tal que $\dfrac{\partial f}{\partial y_i}, 1 \le i \le n$, existem e são contínuas em D. Dada uma condição inicial $Y(t_0) = x$, para $(t_0, x) \in D$, i.e., $y_1(t_0) = x_1, \dots, y_n(t_0) = x_n$, então existe uma solução única (maximal) do PVI de

$$Y' = f(t, Y), \quad Y(t_0) = x. \tag{3}$$

A aplicação do TEU a sistemas da forma (SL) dá-nos o seguinte resultado:

Teorema 2.4. *Considere-se a sistema de EDOs lineares* (SL) *com* $A = [a_{ij}(t)]$ *matriz* $n \times n$ *e* $a_{ij} : I \to \mathbb{R}, i, j = 1, \dots, n$, $h : I \to \mathbb{R}^n$ *funções contínuas em* I *intervalo aberto de* $\mathbb{R}$. *Então, para quaisquer* $t_0 \in I, y_0 \in \mathbb{R}^n$, **existe uma e uma só** *solução de* (SL) *definida em* **todo** *o intervalo* I *que satisfaz condição inicial* $y(t_0) = y_0$.

Daqui, obtém-se de forma trivial o resultado de existência e unicidade para EDOs lineares de ordem n:

Teorema 2.5. *Considere-se a equação* (1_n) *com* $a_i, g \in C(I), i = 0, 1, \dots, n-1$, *e* I *intervalo aberto. Então, para quaisquer* $t_0 \in I, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, **existe uma e uma só** *solução de* (1_n) *definida em* **todo** *o intervalo* I *que satisfaz condição inicial*

$$y(t_0) = x_1, y'(t_0) = x_2, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = x_n.$$

Do TEU decorre naturalmente que o espaço S de soluções da equação homogénea $Ly = 0$, $S := \{\varphi \in C^n(I) : L\varphi = 0\}$, é de dimensão finita.

Teorema 2.6. S *é um espaço vectorial de* **dimensão** n.

Dem. Seja $t_0 \in I$ fixo *qualquer*, e considere-se a aplicação

$$T : S \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi \mapsto (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)).$$

É claro que T é uma aplicação linear. Por outro lado, do Teorema 2.5, tem-se que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, existe uma e uma só função $\varphi \in S$ tal que $T\varphi = x$. Logo, S é isomorfo a $\mathbb{R}^n$. $\square$

Se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ forem n soluções da equação $Ly = 0$, da demonstração acima decorre que $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ é uma base de S se e só se os vectores

$$T\varphi_1, T\varphi_2, \dots, T\varphi_n$$

constituem uma **base** de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\det M(t_0) \neq 0$, onde $M(t_0)$ é a matriz $M(t_0) = [T\varphi_1 \; T\varphi_2 \; \dots, T\varphi_n]$; neste caso, $S = < \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n >$. O $\det M(t_0)$ é chamado *wronskiano* em t_0. Mais precisamente:

Definição. Dadas n soluções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ de (H_n), o **wronskiano** de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ em $t_0 \in I$ é definido por

$$W(t_0) = W(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)(t_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' \\ & \cdots & \cdots & \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} (t_0)$$

A observação acima pode agora ser escrita de forma sucinta:

Teorema 2.7. *Para* $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ *soluções de* $Ly = 0$, *tem-se que* $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ *é uma base do espaço de soluções* S *se e só se existe* $t_0 \in I$ *tal que* $W(t_0) \neq 0$. *Neste caso,* $W(t) \neq 0, \forall t \in I$.

Seja então $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ uma base de soluções de $Ly = 0$. A solução geral de $Ly = 0$ é dada por $y = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$ $(t \in I)$, com $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. A solução do problema de Cauchy $Ly = 0$ com C.I. dada por

$$\begin{cases} y(t_0) = x_1 \\ y'(t_0) = x_2 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(t_0) = x_n \end{cases}$$

satisfaz o sistema $\begin{cases} y(t_0) = c_1\varphi_1(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n(t_0) \\ \cdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{cases}$, que se escreve na forma matricial como

$$M(t_0)\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = M(t_0)^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(Note-se que $W(t_0) = \det M(t_0) \neq 0$, pelo que $M(t_0)$ é invertível.) Ou seja, as constantes $c_1, \ldots, c_n$ são determinadas univocamente.

Infelizmente, não é de um modo geral possível determinar uma base de soluções de uma equação linear homogénea de ordem n genérica (H_n). Todavia, no caso em que os coeficientes $a_i(t)$ são constantes, existe um método para tal, que é descrito na secção seguinte. Surpreendentemente, supondo conhecida uma base de soluções de (H_n), existe também um método geral para determinar uma solução particular da equação não homogénea (1_n), que será estudado na Secção 2.7.

2.2. Eq. Lineares de ordem n de coeficientes constantes

Uma EDO linear de ordem n homogénea de coeficientes constantes é uma EDO da forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{4}$$

com $a_i \in \mathbb{R}$; a EDO linear de ordem n completa ou não-homogénea escreve-se como

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = g(t), \tag{5}$$

com $t \in I,\ g \in C(I)$.

Antes de darmos o método geral de resolução de (4), i.e., a "receita", comecemos por analisar o caso particular de equação linear de 2ª ordem e deduzir o método em causa. Para a equação homogénea

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad (a, b \in \mathbb{R}), \tag{6}$$

põe-se a seguinte questão: será possível encontrar constantes $p, q \in \mathbb{R}$ tais que

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(y' - py) - q(y' - py) = 0\ ?$$

Se assim for, com a mudança de variável

$$w = y' - py \tag{7_a}$$

obtém-se

$$w' - qw = 0. \tag{7_b}$$

Bastará então integrar sucessivamente (7_b) e (7_a), que são equações lineares de 1ª ordem. Ora $\frac{d}{dt}(y'-py)-q(y'-py) = y''-(p+q)y'+pqy$, pelo que $\frac{d}{dt}(y'-py)-q(y'-py) = y''+ay'+by$ é equivalente a

$$p + q = -a, \quad pq = b\,;$$

ou seja, p, q deverão ser as raízes da chamada **equação característica**:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{8}$$

Ponha-se $p = \lambda_1$, $q = \lambda_2$, onde $\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, e reescreva-se

$$w = y' - \lambda_1 y, \quad w' - \lambda_2 w = 0. \tag{7_a) $-$ (7_b}$$

Teremos de distinguir três casos:

- ⋆ Caso 1: λ_1, λ_2 são reais e distintas
- ⋆ Caso 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ (raiz dupla real)
- ⋆ Caso 3: λ_1, λ_2 são complexas

Caso 1: λ_1, λ_2 **reais e distintas**:

Integrando (7_b), obtém-se $w = ce^{\lambda_2 t}$, e de (7_a) vem

$$y' - \lambda_1 y = ce^{\lambda_2 t} \tag{9}$$

que é linear de 1ª ordem. Integrando (...), vem agora

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

pelo que o espaço de soluções de (6) é $S =< e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t} >$.

Caso 2: $\lambda_1 = \lambda_2$ (**raiz real dupla**)

De (9) com $\lambda_1 = \lambda_2$, tem-se $y' - \lambda_1 y = ce^{\lambda_1 t}$ com factor integrante $e^{-\lambda_1 t}$:

$$y'e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} y = c \Leftrightarrow (ye^{-\lambda_1 t})' = c \Leftrightarrow ye^{-\lambda_1 t} = ct + d$$

donde

$$y = d\, e^{\lambda_1 t} + c\, te^{\lambda_1 t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c, d \in \mathbb{R})$$

Neste caso, $S =< e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t} >$.

Caso 3: λ_1, λ_2 **complexas**

Neste caso, as raízes complexas são conjugadas, $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ (com $\beta \neq 0$). O procedimento é como no Caso 1, mas é agora conveniente usar exponenciais complexas.

Recorde-se de exercício já resolvido que a **função exponencial complexa** e^z é dada por

$$e^z = e^\alpha(\cos\beta + i\sin\beta), \quad \text{para } z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}.$$

Com $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, viu-se também que

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda_1 t}) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}.$$

Do Caso 1, agora com $y(t)$ função com valores complexos, vem a solução geral

$$y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \text{ constantes em } \mathbb{C}).$$

Mas estamos apenas interessados em soluções **reais**, pelo que deveremos extrair daqui duas soluções reais linearmente independentes (l.i.). Com $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, ponha-se

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t),$$

Todas as soluções (em $\mathbb{C}$) são então combinações lineares de y_1, y_2. Assim, são também soluções as funções

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}(y_1(t) + y_2(t)) = e^{\alpha t}\cos\beta t \quad \text{e}$$

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2i}(y_1(t) - y_2(t)) = e^{\alpha t}\sin\beta t$$

mas estas funções são **reais**. Além disso, ψ_1, ψ_2 são l.i., já que

$$W(e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t) = \beta e^{2\alpha t} \neq 0$$

Concluímos que a solução geral da equação (6) em $\mathbb{R}$ é

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2 e^{\alpha t}\sin\beta t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

Por outras palavras, $S =< e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t >$.

Exemplo 2.1. Resolver $y'' + 3y' + 2y = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, com raízes $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$. A solução geral da EDO é $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Exemplo 2.2. Resolver $x'' + 2x' + x = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, com uma raiz $\lambda_1 = -1$ (dupla). A solução geral da EDO é $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Exemplo 2.3. Resolver $u'' + 4u = 0$.

A equação característica é $\lambda^2 + 4 = 0$, com raízes $\lambda = \pm 2i$. Duas soluções complexas l.i. são $e^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t, e^{-2it} = \cos 2t - i\sin 2t$. A solução geral da EDO (em $\mathbb{R}$) é $x(t) = c_1\cos 2t + c_2\sin 2t, t \in \mathbb{R} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$.

Considere-se agora o caso geral de equações lineares homogéneas de ordem n de coeficientes constantes, Eq. (4).

Motivados pelo caso $n = 2$, procurem-se soluções de (4) da forma exponencial $\varphi(t) = e^{\lambda t}$. Como

$$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}, (e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}, \ldots, (e^{\lambda t})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda t},$$

$\varphi(t)$ é solução se e só se

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0,$$

i.e, λ é solução da **equação característica**:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{10}$$

As raízes λ de (10) poderão ser reais ou complexas, simples ou múltiplas. O tratamento das raízes simples é feito como no caso $n = 2$. Para raízes múltiplas do polinómio característico $p(\lambda)$, onde

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

tem-se o seguinte resultado:

Teorema 2.8. Se λ é raiz do polinómio característico $p(\lambda)$ com multiplicidade k $(1 \leq k \leq n)$, são soluções linearmente independentes (em $\mathbb{C}$) de $Ly = 0$ as funções $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$.

Dem. Escreva-se (4) na forma $Ly = 0$. O caso $k = 1$ foi já visto acima. Se $k = 2$, i.e., λ é uma raiz dupla, então $p(\lambda) = 0, p'(\lambda) = 0$. Por outro lado, vimos que

$$L(e^{\lambda t}) = p(\lambda)\, e^{\lambda t}\,,$$

o que implica que $\frac{\partial}{\partial\lambda}[L(e^{\lambda t})] = p'(\lambda)e^{\lambda t} + tp(\lambda)e^{\lambda t} = 0$. Mas, $\frac{\partial}{\partial\lambda}[L(e^{\lambda t})] = L(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda t}) = L(te^{\lambda t})$ Logo, $L(te^{\lambda t}) = 0$, i.e., $te^{\lambda t}$ é solução. Para $k \geq 2$ a prova é análoga e pode ser feita por indução (exercício). $\square$

Distingam-se então os vários casos possíveis para raízes λ da equação característica:

$\star$ se λ é raiz real simples, obtém-se a solução $e^{\lambda t}$

$\star$ se λ é raiz real de multiplicidade k, obtêm-se as soluções l.i. $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$

$\star$ se $\lambda = \alpha + i\beta$ é raiz complexa simples (neste caso, $\bar\lambda$ é também raiz característica), ao par de raízes $(\lambda, \bar\lambda)$ correspondem as soluções $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$

$\star$ se $\lambda = \alpha + i\beta$ é raiz complexa dupla (neste caso, $\bar\lambda$ é também raiz dupla), ao par de raízes $(\lambda, \bar\lambda)$ correspondem as soluções $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t, te^{\alpha t}\cos\beta t, te^{\alpha t}\sin\beta t$

etc.

Como o espaço S de soluções é um *espaço vectorial de dimensão* n, e o polinómio $p(\lambda)$ tem exactamente n raízes, contando as suas multiplicidades, por este processo são obtidas exactamente n soluções, que se prova serem linearmente independentes. Logo, constituem uma base de S.

Exemplo 2.4. Resolver $y''' - 2y'' + y' = 0$. Tem-se:
Eq. Característica: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)^2 = 0$
Raízes Características: $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ (dupla)
Base de soluções : $1,\ e^t, te^t$
Solução geral: $y(t) = c_1 + c_2e^t + c_3te^t \qquad (c_i \in \mathbb{R})$.
(Outro modo: com $u = y'$, vem $u'' - 2u' + u = 0$, que é linear de 2^a ordem.)

Exemplo 2.5. Resolver $y''' + y'' - 2y = 0$. Tem-se:
Eq. Característica: $\lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$
Raízes Características: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1 + i, \lambda_3 = -1 - i$
Note-se que $e^{(-1+i)t} = e^{-t}e^{it} = e^{-t}\cos t + ie^{-t}\sin t$
Base de soluções : $e^t, e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t$
Solução geral: $y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}\cos t + c_3e^{-t}\sin t \qquad (c_i \in \mathbb{R})$.

2.3. Resolução da equação completa

Considere-se novamente a equação (1_n), linear de ordem n com coeficientes variáveis, e a equação homogénea associada (H_n), escritas na forma abreviada como $Ly = g(t)$, $Ly = 0$, respectivamente.

Suponha-se que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ é uma base do espaço S de soluções de (H_n). O **método de variação das constantes** (MVC), devido a Lagrange (1736–1813), permite descobrir uma solução particular $y(t)$ de (1_n) a partir do conhecimento de uma base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de S.

A ideia principal do MVC é a seguinte: a solução geral de (H_n) é dada por

$$y = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \qquad (t \in I), \tag{11}$$

com c_i constantes; suponha-se agora que os c_i *variam* como funções de t, e procure-se uma solução $y(t)$ de $Ly = g(t)$ dada por (11) onde $c_i = c_i(t)$ $(1 \leq i \leq n)$.

Teorema 2.9. *(Lagrange)* Com as notações acima, existe uma solução de (1_n) da forma (11) com $c_i = c_i(t)$ funções de classe C^1 em I $(1 \leq i \leq n)$, que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1 + \cdots + c_n'\varphi_n = 0 \\ c_1'\varphi_1' + \cdots + c_n'\varphi_n' = 0 \\ \quad \cdots \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'\varphi_n^{(n-1)} = g. \end{cases} \tag{12}$$

Dem. Com $C(t) = (c_1(t), \ldots, c_n(t)), \Phi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, a função y definida por (11) tem a forma $y(t) = C(t) \cdot \Phi(t)$, e supõe-se que $C(t)$ satisfaz (12). Omitindo a variável independente t, (12) traduz-se por

$$C' \cdot \Phi = 0,\ C' \cdot \Phi' = 0, \ldots,\ C' \cdot \Phi^{(n-2)} = 0,\ C' \cdot \Phi^{(n-1)} = g. \tag{13}$$

Derivando sucessivamente y e usando (13), é fácil ver que

$$Ly = C' \cdot \Phi^{(n-1)} + C \cdot (L\varphi_1, \ldots, L\varphi_n) = C' \cdot \Phi^{(n-1)} = g,$$

pelo que y é solução. Com as notações da Secção 2.5, note-se que o sistema (12) tem a escrita na forma matricial (com a variável independente t agora explicitada) dada por

$$M(t)\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_{n-1}'(t) \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = M(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix},$$

onde $\det M(t) = W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$. Assim, existe $C(t)$ tal que $C'(t)$ satisfaz (12). $\square$

Supondo então conhecida uma base $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de S, pelo MVC pode obter-se uma solução particular de (1_n).

Exemplo 2.6. Considere-se a EDO $x'' - 5x' + 6x = 6t$. A equação característica da equação homogénea associada é $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, com raízes $3, 2$. A solução geral do sistema homogéneo é $x = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$ $(t \in \mathbb{R})$ com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aplique-se agora o MVC: procuram-se $c_1 = c_1(t), c_2 = c_2(t)$ tais que

$$\begin{cases} c_1' e^{3t} + c_2' e^{2t} = 0 \\ 3c_1' e^{3t} + 2c_2' e^{2t} = 6t. \end{cases}$$

Facilmente se verifica que $c_1' = 6te^{-3t}$, logo $c_1(t) = -2e^{-3t}(t + 1/3) + k_1$ com $k_1 \in \mathbb{R}$, e $c_2' = -6te^{-2t}$, logo $c_2(t) = 3e^{-2t}(t + 1/2) + k_2$ com $k_2 \in \mathbb{R}$. A solução geral da EDO dada é então

$$\begin{aligned} x(t) &= [-2e^{-3t}(t + 1/3) + k_1]e^{3t} + [3e^{-2t}(t + 1/2) + k_2]e^{2t} \\ &= -2(t + 1/3) + 3(t + 1/2) + k_1 e^{3t} + k_2 e^{2t} \\ &= t + 5/6 + k_1 e^{3t} + k_2 e^{2t}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obviamente $x_p(t) = t + 5/6$ terá de ser uma solução particular da equação dada, como se pode verificar facilmente.

Exercício. Resolver a EDO $y'' + y = \sec t$ em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

O método de variação das constantes de Lagrange aplica-se a qualquer EDO linear de ordem n. De facto, aplica-se à situação mais geral de sistemas lineares de EDOs dados na forma $Y' = A(t)Y + b(t)$, onde $A(t)$ é uma matriz $n \times n$ e $b(t)$ uma matriz $n \times 1$ de funções contínuas num intervalo I, e a variável dependente $Y(t)$ tem n componentes. Além disso, o Teorema 2.9 pode ser aplicado sem se ter o conhecimento efectivo de uma base de S.

O **método dos coeficientes indeterminados** (MCI) é um outro método para achar uma solução particular de $Ly = g$, mas a sua aplicação é muito mais restritiva: aplica-se apenas a equações lineares de coeficientes constantes (5) com a função $g(t)$ de uma forma muito especial. A ideia principal do MCI – também chamado em inglês de *"method of judicious guessing"* (cf. Braun, p. 157) é *adivinhar* a forma de uma solução particular de (5), que deverá ter uma forma específica com base em $g(t)$ e nas raízes da equação característica (10). Como se disse, o MCI é de aplicação restrita, no entanto é muito eficaz.

O MCI é resumido de seguida. Em primeiro lugar, aplica-se a EDOs (5) com $g(t)$ forçosamente de uma das formas seguintes:

(I) $g(t) = p_m(t)$ polinómio de grau $m = 0, 1, \ldots$;
(II) $g(t) = p_m(t)\, e^{\alpha t}$, com $p_m(t)$ como acima e $\alpha \in \mathbb{R}$;
(III) $g(t) = p_m(t)\, e^{\alpha t} \sin \beta t$ ou $g(t) = p_m(t)\, e^{\alpha t} \cos \beta t$, com $p_m(t)$ como acima e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dada a estrutura linear da EDO, é óbvio que combinações lineares dos casos acima podem ser consideradas. Use-se a notação $\mathcal{P}_m$ para o espaço dos polinómios de grau $\leq m$.

Caso (I)

Se $P_m \in \mathcal{P}_m$ com grau m, observe-se que $L(P_m) = Q_m$ com $Q_m \in \mathcal{P}_m$ de grau m se $a_0 \neq 0$, Q_m de grau $m-1$ se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$, etc. Assim, se $a_0 \neq 0$, da igualdade $Q_m = p_m$, que é uma igualdade entre polinómios *do mesmo grau*, haverá $m+1$ constantes a determinar. Deve-se então procurar uma solução da forma $P_m \in \mathcal{P}_m$ com grau m. Se $a_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$, de $L(P_m) = p_m$ tiram-se apenas m equações para $m+1$ constantes a determinar (pois vem grau $Q_m = m-1$), pelo que P_m deverá ser substituído por tP_m. Procede-se de forma análoga para o caso em que $\lambda = 0$ é raiz dupla, tripla, etc., da equação característica. Assim:

$\star$ Se $\lambda = 0$ *não é* raiz característica, procura-se uma solução da forma $P_m(t)$, com $P_m(t)$ polinómio de grau m;

$\star$ Se $\lambda = 0$ é raiz característica *simples*, procura-se uma solução da forma $tP_m(t)$, com $P_m(t)$ polinómio de grau m;

$\star$ Se $\lambda = 0$ é raiz característica *dupla*, procura-se uma solução da forma $t^2P_m(t)$, com $P_m(t)$ polinómio de grau m; etc.

Caso (II)

Seja $h(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ o polinómio característico da EDO homogénea associada. Se $P_m \in \mathcal{P}_m$, então $L(P_m e^{\alpha t}) = Q_m e^{\alpha t}$ com $Q_m \in \mathcal{P}_m$ se $h(\alpha) \neq 0$; se $h(\alpha) = 0$ e $h'(\alpha) \neq 0$, vem $Q_m \in \mathcal{P}_{m-1}$; etc. A observação atenta do tratamento do Caso (I), conduz às seguintes conclusões:

$\star$ Se $\lambda = \alpha$ *não é* raiz característica, procura-se uma solução da forma $P_m(t)\, e^{\alpha t}$, com $P_m(t)$ polinómio de grau m;

$\star$ Se $\lambda = \alpha$ é raiz característica *simples*, procura-se uma solução da forma $tP_m(t)\, e^{\alpha t}$, com $P_m(t)$ polinómio de grau m; etc.

Caso (III)

Este caso é análogo ao Caso (II), devendo ser observado se $\lambda = \alpha + i\beta$ é raiz ou não da eq. característica e qual a sua multiplicidade. Assim:

$\star$ Se $\lambda = \alpha + i\beta$ *não é* raiz característica, procura-se uma solução da forma $y(t) = P_m^1(t)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + P_m^2(t)\, e^{\alpha t} \sin \beta t$, com $P_m^1(t), P_m^2(t)$ polinómios de grau m;

$\star$ Se $\lambda = \alpha + i\beta$ é uma raiz característica *simples*, procura-se uma solução da forma $y(t) = tP_m^1(t)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + tP_m^2(t)\, e^{\alpha t} \sin \beta t$, com $P_m^1(t), P_m^2(t)$ polinómios de grau m; etc.

Exemplo 2.7. Para a EDO do Exemplo 2.6, procure-se uma solução da forma $x(t) = At + B$ onde $A, B \in \mathbb{R}$. Tem-se $x'(t) = A, x''(t) = 0$; inserindo na equação, vem $-5A + 6(At + B) = 6t$, donde com $A = 1, B = 5/6$ se obtém a solução $x(t) = t + 5/6$.

Exemplo 2.8. Para as EDO (i) $x'' - 5x' + 6x = e^t$, (ii) $x'' - 5x' + 6x = te^t$ e (iii) $x'' - 5x' + 6x = te^{2t}$, procure-se uma solução da forma $x_p(t) = Ae^t$, $x_p(t) = (At + B)e^t$ e $x_p(t) = t(At + B)e^{2t}$, respectivamente, com $A, B \in \mathbb{R}$. Facilmente se verifica que $x_p(t) = \frac{1}{2}e^t$ uma solução de (i), a resolução das restantes é deixado como exercício.

Exemplo 2.9. Considere-se a EDO $y'' + y = 2t$. A equação característica da equação homogénea associada tem raízes $\pm i$. Deve ser procurada uma solução particular da forma $y(t) = At + B$. Derivando, e inserindo na EDO, vem $At + B = 2t$, pelo que terá de ser

$A = 2, B = 0$. Obtém-se que $y(t) = 2t$ é uma solução. A solução geral é então $y(t) = 2t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.10. Considere-se a EDO $y'' + y = \sin t$. Deve ser procurada uma solução particular da forma $y_p(t) = t(A \cos t + B \sin t)$. Derivando, facilmente se verifica que terá de ser $A = -1/2, B = 0$, pelo que se obtém que $y(t) = -\frac{1}{2} t \cos t$ é uma solução. A solução geral é então $y(t) = -\frac{1}{2} t \cos t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$ $(t \in \mathbb{R})$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

3 Sistemas lineares de equações diferenciais ordinárias

3.1. Sistemas lineares de EDOs: propriedades gerais

Nesta secção, serão tratados sistemas lineares de EDO's, escritos na forma vectorial

$$x'(t) = A(t)x + h(t) \tag{SL}$$

onde $A(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ é uma matriz de funções contínuas num intervalo I e $h(t) = (h_1(t), \ldots, h_n(t))$ é um vector de funções contínuas em I. Procura-se uma solução $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ definida no intervalo I.

Da versão vectorial do Teorema de Existência e Unicidade (Teorema 2.3), sabemos que, dados $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, existe uma e uma só solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x + h(t) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

que, como veremos, está definida em todo o intervalo I.

Considere-se agora o sistema homogéneo associado a (SL), dado por

$$x'(t) = A(t)x(t). \tag{SH}$$

As propriedades fundamentais que aqui serão dadas referem-se a matrizes fundamentais de soluções para sistemas homogéneos (SH) e à fórmula de variação das constantes para resolver (SL).

Comecemos por estabelecer a estrutura dos conjuntos de soluções de (SH) e (SL). Com demonstração análoga à dos Teoremas 2.2, 2.6 e 2.7, tem-se:

Teorema 3.1. *Nas condições acima, tem-se:*

(i) O conjunto S das soluções de (SH) é um **espaço vectorial** *de dimensão n.*

(ii) Se $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ são n soluções de (SH), elas são linearmente independentes se e só se, para qualquer $t \in I$ fixado, se tem $\det X(t) \neq 0$, onde

$$X(t) = \Big[X_1(t) \ X_2(t) \ \cdots \ X_n(t) \Big]. \tag{3.2}$$

(iii) O conjunto das soluções de (SL) é um **espaço afim**, *com a forma*

$$x_p + S = \{x_p + \varphi : \varphi \in S\}$$

onde x_p é uma solução particular qualquer de (SL).

Dem. Exercício.

Se $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ é uma base de soluções de (SH), a matriz em (3.2) chama-se uma **matriz fundamental de soluções (m.f.s)**. Se assim for, qualquer solução $x(t)$ de (SL) é dada na forma matricial por

$$x(t) = X(t)C, \tag{3.3}$$

onde $C \in \mathbb{R}^n$ é um vector de constantes.

Tal como para equações escalares de ordem n, conhecida uma base de soluções de (SH), o **método de variação das constantes** de Lagrange permite determinar a solução do sistema completo (SL).

Teorema 3.2. Sendo $X(t)$ é uma matriz fundamental de soluções de (SH) e $t_0 \in I, x_0 \in \mathbb{R}^n$, a solução do PVI (3.1) está definida em I e é dada por

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)\,ds, \quad t \in I. \tag{3.4}$$

onde é usada a notação $X^{-1}(t) = (X(t))^{-1}$.

A fórmula (3.4) é conhecida por **Fórmula de Variação das Constantes**; a sua prova permite perceber a designação.

Dem. Procure-se uma solução de (SL) da forma (3.3) mas com o vector constante $C \in \mathbb{R}^n$ substituído por $C = C(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$,

$$x(t) = X(t)C(t), \tag{3.5}$$

com $C = C(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))$ e $c_i(t)$ funções de classe C^1 em I $(1 \leq i \leq n)$, que satisfaz

$$X(t)C'(t) = h(t).$$

Como $X(t)$ é uma m.f.s., tem-se $X'(t) = A(t)X(t)$ e $\det X(t) \neq 0$ para $\forall t \in I$. Em particular, a equação vectorial $X(t)C'(t) = h(t)$ determina $C'(t) = X(t)^{-1}h(t)$.

Por outro lado, derivando $x(t) = X(t)C(t)$ obtém-se $x'(t) = X'(t)C(t) + X(t)C'(t) = A(t)X(t)C(t) + h(t) = A(t)x(t) + h(t)$, pelo que $x(t)$ é solução de (SL). Com a C.I. $x_0 = x(t_0) = X(t_0)C(t_0)$, vem

$$x(t) = X(t)\left(C(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)\,ds\right) = X(t)\left(X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)h(s)\,ds\right),$$

o que prova (3.4). □

Exemplo 3.1. (i) Dado o sistema $x' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x$, verifique que

$$X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} & -2e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

é uma matriz fundamental de soluções.

(ii) Resolva o sistema $x' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$.

Esboço de resolução. É fácil verificar que as funções $X_1(t) = (2e^{3t}, e^{3t})$ e $X_2(t) = (-2e^{-t}, e^{-t})$ são soluções em $\mathbb{R}$ do sistema homogéneo dado. Por outro dado, para $X(t)$ como acima, $\det X(t) = 4e^{2t} \neq 0$, pelo que $X(t)$ é m.f.s.

Resolva-se agora o sistema completo em (ii). Em vez de usar a FVC (3.4), utilize-se o método descrito na prova. As soluções são dadas por (3.5), onde $C'(t)$ é determinado pela condição $X(t)C'(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$. Invertendo $X(t)$, obtém-se (...)

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8}e^{-2t} + k_1 \\ \frac{1}{8}e^{2t} + k_2 \end{bmatrix} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

De (3.5), vem agora (...)

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = X(t) \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e^t \\ -\frac{1}{4}e^t \end{bmatrix} \qquad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

Deduz-se pois que $x(t) = \begin{bmatrix} -e^t \\ -\frac{1}{4}e^t \end{bmatrix}$ é uma solução particular do sistema dado em (ii).

Exercícios. a) Para o sistema homogéneo do exemplo anterior, calcule a matriz fundamental de soluções Φ que satisfaz $\Phi(0) = I$.

b) Prove o MVC para equações lineares escalares de ordem n a partir da *Fórmula de Variação das Constantes.*

3.2. Sistemas lineares homogéneos de coeficientes constantes

Seja $A \in \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e., A é uma matriz $n \times n$ de <u>constantes</u> reais, e considere-se o sistema

$$x' = Ax. \tag{3.6}$$

Inspirados pelo caso de EDOs lineares escalares de ordem n (que, como vimos, são um caso particular de sistemas), procurem-se soluções da forma

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v, \qquad \text{com } v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

tem-se que φ é solução de (3.6) se e só se $\varphi'(t) = A\varphi(t) \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} Av \Leftrightarrow \boxed{(A - \lambda I)v = 0}$. Ou seja, $\varphi \neq 0$ da forma (3.7) é solução do sistema $x' = Ax$ se e só se λ é um **valor próprio** de A e v é **vector próprio associado** a λ.

Obviamente, o tratamento de sistemas deverá agora ser feito considerando valores e vectores próprios complexos (apesar de A ser uma matriz real).

Por este processo, quando a matriz A é <u>diagonalizável</u>, existe uma base de $\mathbb{C}^n$ constituída por vectores próprios. Mais exactamente, se T é uma matriz invertível tal que $D := T^{-1}AT = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $e_1, \ldots, e_n$ são os vectores da base canónica de $\mathbb{C}^n$, então vectores $v_i = T(e_i)$, $i = 1, \ldots, n$, são linearmente independentes (l.i.). Obtém-se uma m.f.s de $x' = Ax$ dada por

$$X(t) = \left[e^{\lambda_1 t} v_1 \; e^{\lambda_2 t} v_2 \; \ldots \; e^{\lambda_n t} v_n \right]. \tag{3.8}$$

Exemplo 3.2. Resolver os sistemas $x' = Ax$, com:

(i) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (iii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Soluções. M.f.s. dadas por:

(i) $X(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{bmatrix}$ (ii) $X(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} & -2e^{-t} \\ e^{3t} & e^{-t} \end{bmatrix}$ (conf. explo 8.1);

(iii) $X(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

Exemplo 3.3. Resolver o PVI $x' = Ax,\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: $x(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t(-\sin t + \cos t) \\ e^t(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}$.

Nos exemplos acima, os valores próprios (reais ou complexos) têm sempre multiplicidade 1, pelo que a matriz A é necessariamente diagonalizável. No entanto, no caso de valores próprios λ com multiplicidade (algébrica) m maior do que 1, pode acontecer que $\dim Ker\,(A-\lambda I) < m$. Neste caso, não existe uma base de vectores próprios associados a valores próprios de A, pelo que **não é possível** encontrar uma m.f.s da forma (3.8). Esta situação é ilustrada no exemplo abaixo.

Exemplo 3.4. Resolver o sistema $x' = Ax$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Com A é uma matriz triangular superior, observamos imediatamente que $\lambda_1 = 1$ é um valor próprio duplo e que $\lambda_2 = 2$ é um valor próprio simples. Tem-se que $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ são os únicos (a menos de multiplicação por constante) vectores próprios associados a 1 e a 2, respectivamente. Por este processo, obtemos duas soluções l.i. de $x' = Ax$, dadas por $X_1(t) = e^t V_1$ e $X_3(t) = e^{2t} V_2$. Precisamos de um método para encontrar uma terceira solução l.i..

Ainda motivados pelo estudo de equações lineares de ordem n, somos tentados a procurar uma terceira solução l.i. da forma

$$X_2(t) = e^t(u + tv)$$

com $u, v \in \mathbb{R}^3$. Para X_2 acima, tem-se $X_2' = e^t(u + v + tv)$ e $AX_2 = e^t(Au + tAv)$, pelo que X_2 é uma solução se

$$\begin{cases} Au = u + v \\ Av = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - I)u = v \\ (A - I)v = 0 \end{cases}.$$

Basta então escolher $v = V_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ e u tal que $(A-I)u = V_1$, donde se obtém u da forma $u = (u_1, 1, 0)$. Escolhendo $u = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, vem $X_2 = e^t \begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}$. Finalmente, podemos escrever a solução geral dada por $x(t) = c_1X_1(t) + c_2X_2(t) + c_3X_3(t)$ $(c_i \in \mathbb{R})$ ou, na forma matricial, por $x(t) = X(t)C$, com

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Resumindo: No exemplo acima, em que se havia um valor próprio λ com multiplicidade 2 e $\dim Ker(A-\lambda I) = 1$, associadas a λ escolheram-se duas soluções X_1, X_2 l.i., dadas por

$$X_1 = e^{\lambda t}v, \quad X_2 = e^{\lambda t}(u + tv), \tag{3.9}$$

onde $v \neq 0$ e

$$(A-\lambda I)v = 0,\ (A-\lambda I)u = v\,. \tag{3.10}$$

Para multiplicidade $m = 3$ e $\dim Ker(A-\lambda I) = 1$, este método pode ser prosseguido, escolhendo

$$X_1 = e^{\lambda t}U_1, \quad X_2 = e^{\lambda t}(U_2 + tU_1), \quad X_3 = e^{\lambda t}(U_3 + tU_2 + \frac{t^2}{2}U_1) \tag{3.10}$$

onde $U_1 \neq 0$ e

$$(A-\lambda I)U_1 = 0,\ (A-\lambda I)U_2 = U_1,\ (A-\lambda I)U_3 = U_2\,. \tag{3.11}$$

O vector U_1 é um vector próprio e os vectores U_2, U_3 são *vectores próprios generalizados*, pois satisfazem $(A-\lambda I)^k U = 0$, para algum $k > 1$. De um modo geral, para qualquer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}^n)$ pode provar-se que existe sempre uma base de $\mathbb{C}^n$ formada por *vectores próprios simples ou generalizados* de A (ver Nota 3.1, sobre *forma canónica de Jordan* de uma matriz). Pelo processo acima descrito, é sempre possível construir uma tal base.

3.3. Exponencial de matrizes [1]

A situação geral pode ser tratada de forma sistemática, introduzindo o conceito de exponencial de uma matriz. Para isso, comece-se por definir norma de uma matriz.

Definição. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, define-se **norma** de A por

$$\|A\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Facilmente se verifica que:

Teorema 3.3. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$ e $c \in \mathbb{R}$, tem-se:
(i) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e só se $A = 0$;
(ii) $\|cA\| = |c|\|A\|$;

[1] Esta subsecção não será leccionada no ano lectivo de 2017/18.

(iii) $\|A+B\| \leq \|A\|+\|B\|$;
(iv) $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
(v) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Definição. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, chama-se **exponencial** de A à matriz $n \times n$

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

Esta definição é consistente, pois:

Teorema 3.4. Dada $A \in \mathcal{M}_n$, existe $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $B = e^A$.

Dem. Considerem-se as somas parciais $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!}$. Do Teorema 3.3, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$, pelo que

$$\|S_N\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!} \to e^{\|A\|} \quad \text{quando} \quad N \to \infty.$$

Por outro lado, com $A = [a_{ij}]$, é fácil ver que $|a_{ij}| \leq \|A\|$. Escrevendo $S_N = [s_{ij}^N]$, conclui-se que $\left|s_{ij}^N\right| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{\|A\|^k}{k!}$, para qualquer entrada s_{ij}^N de S_N, logo a série converge. $\square$

Exemplo 3.5. Cálculo de exponenciais de matrizes em casos simples:

1. $e^0 = I$.
2. Com $A = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, tem-se $e^A = diag\,(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$. Em particular,

$$e^{\lambda I} = e^{\lambda} I.$$

3. Se A é *diagonalizável*, existe T matriz invertível tal que $D = T^{-1}AT$ é uma matriz diagonal. Com $D = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, vem agora $e^D = diag\,(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ e $e^A = Te^DT^{-1}$ (exercício).

4. Com $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (note-se que $\lambda = 0$ é valor próprio duplo), tem-se $A^2 = 0$. Logo $e^A = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A importância da exponencial de matrizes resulta do seguinte:

Teorema 3.5. Se $A \in \mathcal{M}_n$, para a função

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_n \\ t & \mapsto & e^{At} \end{array}$$

tem-se $(e^{At})' = Ae^{At}$. Por outras palavras, a matriz $X(t) = e^{At}$ é uma matriz de soluções do sistema $x' = Ax$.

Dem. Para $t \in \mathbb{R}$, tem-se

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Recordando que as séries de potências se podem derivar termo a termo, vem que

$$(e^{At})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right) = Ae^{At}.$$

$\square$

Da definição e deste teorema, decorrem as propriedades básicas de exponenciais de matrizes.

Proposição 3.6. Se $A, B \in \mathcal{M}_n$ e $AB = BA$, tem-se:

(i) $Be^A = e^A B$; (ii) $e^{A+B} = e^A e^B$;

(iii) e^A é invertível e $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Dem. Prove-se (ii) usando (i) e o Teorema 3.5 (o resto é deixado como exercício). Como A e B comutam, e por (i), $(e^{At}e^{Bt})' = (e^{At})'e^{Bt} + e^{At}(e^{Bt})' = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt} = (A+B)e^{At}e^{Bt}$. Isto significa que $X(t) = e^{At}e^{Bt}$ é matriz de soluções do sistema $x' = (A+B)x$. Além disso, para $t = 0$, vem $e^{(A+B)0} = I$ e $e^{A0}e^{B0} = I\,I = I$. Logo, $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ para $t \in \mathbb{R}$. Em particular para $t = 1$ tem-se (ii). $\square$

Dos resultados anteriores, conclui-se:

Teorema 3.7. Se $A \in \mathcal{M}_n$, a exponencial $X(t) = e^{At}$ é a matriz fundamental de soluções de $x' = Ax$ que satisfaz $X(0) = I$.

Exemplo 3.5. (cont.) 5. Da Proposição 3.6, vem agora $e^{(\lambda I+B)} = e^{\lambda}e^B$.

Por exemplo, para $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, tem-se $At = (\lambda I + B)t$ com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Viu-se já que $B^2 = 0$. Logo $e^{At} = e^{\lambda(I+B)t} = e^{\lambda t}e^{Bt} = e^{\lambda t}(I + Bt) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$ é uma m.f.s. de $x' = Ax$.

De forma análoga, se $A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, escrevendo At na forma $At = (\lambda I + B)t$ com $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, vem $B^3 = 0$; então $e^{At} = e^{\lambda t}e^{Bt} = e^{\lambda t}(I + Bt + \frac{1}{2}B^2t^2) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$ é uma m.f.s. de $x' = Ax$.

Exercício. Resolver o exemplo 3.4, usando e^{At}.

Nota 3.1. Pode provar-se que a exponencial e^A de uma matriz $A \in \mathcal{M}_n$ é na prática calculada com uma soma finita de termos.

Com efeito, prova-se que existe uma matriz de mudança de base T para a qual

$$T^{-1}AT = diag\,(C_1, \ldots, C_k), \tag{3.12}$$

onde as submatrizes C_j são de dimensão $n_j \times n_j$ (com $n_1 + \cdots + n_k = n$) e têm a forma $C_j = \lambda_j I + R_j$, com R_j uma matriz nilpontente em que todos as entradas são nulas excepto na sub-diagonal superior, em que são todas 1. Claramente, como $T^{-1}AT$ é uma matriz triangular superior com $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ na diagonal principal, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ são os valores próprios de A, cada um deles com multiplicidade igual ao número de vezes que aparece nessa diagonal. Poderá haver mais do que um bloco C_j correspondente ao mesmo valor próprio λ_j. De facto, existem tantos blocos correspondentes ao mesmo valor próprio λ_j quanto a dimensão do espaço próprio $Ker\,(A-\lambda_j I)$. A multiplicidade de cada valor próprio λ de A será igual à soma das dimensões n_j para as quais as matrizes C_j são correspondentes a este λ, i.e., são da forma $C_j = \lambda I + R_j$. A forma (3.12) é chamada **forma canónica de Jordan** de A.

Para cada j, tem-se $R_j^{n_j} = 0$, pelo que

$$T^{-1} e^{At} T = diag(e^{C_1 t}, \dots, e^{C_k t}),$$

onde

$$e^{C_j t} = e^{\lambda_j t}\left(I + tR_j + \frac{t^2}{2}R_j^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}R_j^{n_j-1}\right).$$

De forma mais explícita,

$$e^{C_j t} = e^{\lambda_j t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Para uma matriz na forma canónica de Jordan, é então fácil calcular a sua exponencial. Para $A \in \mathcal{M}_n$, se $T^{-1}AT$ está em forma canónica de Jordan vem agora

$$e^{At} = T\,diag(e^{C_1 t}, \dots, e^{C_k t})\,T^{-1}.$$

Exemplo 3.6. Calcular e^{At}, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Resolução: A matriz A tem dois blocos diagonais: $A = \begin{bmatrix} 2I+B & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\,I + B \end{bmatrix}$, onde $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como $e^{(2I+B)t} = e^{2t}(I + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$ e $e^{(\sqrt{2}I+B)t} = e^{\sqrt{2}t}(I + \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix})$, vem

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{(2I+B)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sqrt{2}I+B)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{2t}t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{\sqrt{2}\,t} & e^{\sqrt{2}\,t}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{\sqrt{2}\,t} \end{bmatrix}.$$

Exercício. Sendo A a matriz do exemplo acima, resolver o sistema $x' = AX$ sem usar a exponencial de A.

Exemplo 3.7. Calcule $e^A e^B, e^B e^A$ e $e^{(A+B)}$ com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e verifique que as três matrizes são diferentes.

Resolução: É fácil verificar que $A^2 = A$ e $B^2 = B$, donde resulta $A^k = A$ e $B^k = B, \forall k \in \mathbb{N}$. Assim, $e^A = \sum_{k\geq 0} \frac{A}{k!} = \left(\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\right) A = eA = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. De modo análogo, $e^B = \sum_{k\geq 0} \frac{B}{k!} = eB = \begin{bmatrix} e & -e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Efectuando os produtos destas matrizes, vem agora $e^A e^B = \begin{bmatrix} e^2 & -e^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $e^B e^A = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Por outro lado $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pelo que $e^{(A+B)} = \begin{bmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Conclui-se que as tês matrizes $e^A e^B, e^B e^A$ e $e^{(A+B)}$ são distintas.

4 Existência e unicidade de soluções de EDOs

Nesta secção, apresenta-se a demonstração do Teorema de Existência e Unicidade (TEU), se bem que algumas passagens não sejam provadas na íntegra. Comece-se com alguns conceitos e resultados auxiliares.

Definição 4.1. Dada $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diz-se que f é uma **função lipschitziana** (ou **função de Lipschitz**) em D se existe uma constante (dita *de Lipschitz*) $c > 0$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

Dados $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}^m$, diz-se que $f = f(t, y)$ é uma **função lipschitziana** (em D) **em relação à variável** $y \in \mathbb{R}^n$ se existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D;$$

e diz-se que f é uma **função localmente lipschitziana em relação à variável** y se, para qualquer $(t_0, y_0) \in D$ e qualquer vizinhança $I_\delta(t_0) \times \bar{B}_r(y_0)$[2] de (t_0, y_0) contida em D, a função $f(t, y)$ é lipschitziana, em $I_\delta(t_0) \times \bar{B}_r(y_0)$, em relação à variável y.

Se $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é localmente lipschitziana em relação à variável $y \in \mathbb{R}^n$, prova-se que $f(t, y)$ é uma função lipschitziana em relação à variável y, em qualquer conjunto **compacto**[3] $K \subset D$; i.e., para qualquer subconjunto compacto $K \subset D$, existe uma constante $L > 0$ tal que

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in K. \tag{4.1}$$

Lema 4.1. *Sejam D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ com $f(t, y)$ contínua e tal que as derivadas parciais $\frac{\partial f_j}{\partial y_i}(t, y)$ existem e são contínuas em D, $1 \leq i, j \leq n$. Então f é localmente lipschitziana em relação à variável y.*

Dem. A demonstração apresentada de seguida é para o caso $n = 1$ e baseia-se no Teorema (do Valor Médio) de Lagrange. Para quaisquer $(t_0, y_0) \in D$ e uma sua vizinhança

[2] Com a notação: $I_\delta(t_0) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \bar{B}_r(y_0) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \leq r\}$, para $\delta, r > 0$.

[3] Recorde que em $\mathbb{R}^n$ um conjunto diz-se compacto se é fechado e limitado.

$I_\delta(t_0) \times \bar{B}_r(y_0) \subset D$, sejam dados $(t, y_1), (t, y_2) \in I_\delta(t_0) \times \bar{B}_r(y_0)$, e.g., com $y_1 < y_2$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in (y_1, y_2)$ tal que

$$f(t, y_2) - f(t, y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, c)(y_2 - y_1). \tag{4.2}$$

Por outro lado, pelo Teorema de Weierstrass, a função *contínua* $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ é limitada no compacto $K := I_\delta(t_0) \times \bar{B}_r(y_0)$, pelo que existe $L > 0$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)\right| \le L$ em K. De (4.2) resulta que $|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \le L|y_2 - y_1|$, pelo que $f(t, y)$ é localmente lipschitziana em relação a y.

Para $n > 1$ a demonstração é análoga, onde agora o Teorema do Valor Médio aliado ao Teorema de Weierstrass tem a seguinte versão: Se $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função de classe C^1 num aberto Ω, então para qualquer conjunto compacto convexo $K \subset \Omega$ existe $L > 0$ tal que $\|g(x) - g(y)\| \le L\|x - y\|$, $\forall x, y \in K$. $\square$

No que se segue, sejam D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ com $f(t, y)$ contínua. Para $(t_0, y_0) \in D$, considerem os PVIs

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \tag{4.3}$$

Lema 4.2. *Uma função $y(t)$ é solução de* (4.3) *num intervalo J (aberto e não degenerado) com $t_0 \in J$ se e só se*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in J. \tag{4.4}$$

Dem. Observando que $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} y'(s)\, ds$, a conclusão segue. $\square$

Para provar o TEU, a ideia agora é encontrar uma solução do PVI (4.3) como um **ponto fixo** do operador

$$\begin{aligned} &y \mapsto Ty \qquad \text{onde} \\ &(Ty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha(t_0) := [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \end{aligned} \tag{4.5}$$

para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno. Por outras palavras, queremos encontrar y definida num intervalo $I_\alpha(t_0)$ tal que $Ty = y$.

A prova que se segue é devida a Picard (1856-1941) e fornece não só a existência e unicidade de solução como também um método de cálculo aproximado dessa solução (conhecido como *processo iterativo de Picard*).

Teorema 4.3.*(TEU - Teorema de Picard ou Picard-Lindelöf) Sejam D um conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}^n$ com $f(t, y)$ contínua e localmente lipschitziana em relação à variável y. Para qualquer $(t_0, y_0) \in D$, existe uma e uma só solução $y(t)$ do PVI* (4.3) *definida num intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.*

Dem. Ponha-se $I_\alpha = I_\alpha(t_0) = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Como D é aberto, existem $\alpha, \beta > 0$ com $K := I_\alpha \times \bar{B}_\beta(y_0) \subset D$. No compacto K, existem constantes $L, M > 0$ tais que se tem (4.1) e

$$\|f(t, y)\| \le M, \quad \forall (t, y) \in K. \tag{4.6}$$

Passo 1. Para Ty definido em (4.5), tem-se

$$\|(Ty)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s))\|\, ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha.$$

'Encolhendo' se necessário α, podemos supor que α é suficientemente pequeno tal que $M\alpha \leq \beta$ (i.e., passando a considerar $\alpha_1 > 0$ com $\alpha_1 \leq \min\{\alpha, \beta/M\}$). Conclui-se pois que $(Ty)(t) \in \bar{B}_\beta(y_0)$. Seja $X = C(I_\alpha; \bar{B}_\beta(y_0))$ o espaço das funções contínuas definidas em I_α e com valores em $\bar{B}_\beta(y_0)$. Acabámos de mostrar que $T(X) \subset X$.

Além disso, α pode ainda ser escolhido mais pequeno, de forma a que o operador T "encolha as distâncias" em X. Com efeito, se y, z são funções de X, por (4.1) tem-se

$$\begin{aligned} \|(Ty)(t) - (Tz)(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^{t} \Big(f(s, y(s)) - f(t, z(s)) \Big)\, ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(s, y(s)) - f(t, z(s))\|\, ds \right| \\ &\leq L\|y - z\|_\infty |t - t_0| \\ &\leq L\alpha \|y - z\|_\infty, \end{aligned} \tag{4.7}$$

onde foi usada a notação

$$\|y\|_\infty := \max_{s \in I_\alpha} \|y(s)\|.$$

Escolha-se então $\alpha > 0$, de modo a ser

$$r := L\alpha < 1.$$

De (4.7) vem que

$$\|Ty - Tz\|_\infty \leq r\|y - z\|_\infty, \qquad \forall y, z \in X. \tag{4.8}$$

(De (4.8), T é uma função de Lipschitz com constante $r < 1$, pelo que se diz uma *contracção.*)

Passo 2. Construa-se por recorrência a seguinte sucessão de funções (y_n):

$$\begin{cases} y_0(t) \equiv y_0 \\ y_{n+1}(t) = (Ty_n)(t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Do Passo 1, deduz-se que

$$\begin{aligned} \|y_2 - y_1\|_\infty &= \|Ty_1 - Ty_0\|_\infty \leq r\|y_1 - y_0\|_\infty \\ \|y_3 - y_2\|_\infty &= \|Ty_2 - Ty_1\|_\infty \leq r\|y_2 - y_1\|_\infty \leq r^2 \|y_1 - y_0\|_\infty \\ &\cdots \\ \|y_{n+1} - y_n\|_\infty &\leq r^n \|y_1 - y_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Daqui vem ainda que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|y_{n+p} - y_n\|_\infty &\leq \|y_{n+p} - y_{n+p-1}\|_\infty + \cdots + \|y_{n+1} - y_n\|_\infty \\ &\leq (r^{n+p-1} + \cdots + r^n)\|y_1 - y_0\|_\infty \\ &\leq r^n(1 + r + \cdots + r^{p-1})\|y_1 - y_0\|_\infty. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{k\geq 0} r^k$ converge e tem soma $\frac{1}{1-r}$, pelo que de (4.9) resulta que

$$\|y_{n+p} - y_n\|_\infty \leq r^n \frac{1}{1-r} \|y_1 - y_0\|_\infty \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{4.10}$$

Em particular, para qualquer $t \in I_\alpha$, tem-se que a sucessão $(y_n(t))$ é uma *sucessão de Cauchy*, logo é convergente. Defina-se

$$y(t) = \lim_n y_n(t), \quad \forall t \in I_\alpha.$$

Passo 3. Verifique-se agora que a função $y(t)$ assim construída é a solução única do PVI (4.3) em I_α.

Nas condições acima, tem-se que a operação de limite ($\lim_n$) *comuta* com a operação de integral. A prova deste facto está fora do âmbito deste capítulo, e voltará a ser abordada quando se estudarem séries de Fourier. Assim, da igualdade

$$y_{n+1}(t) = (Ty_n)(t), \qquad t \in I_\alpha,$$

i.e.,

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha,$$

passando ao limite em ambos os lados obtém-se

$$y(t) = y_0 + \lim_n \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} \lim_n f(s, y_n(s))\, ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Ou seja, $y = Ty$. Pelo Lema 4.2, vem que $y(t)$ é uma solução de (4.3) em I_α.

Para terminar a demonstração, prove-se a unicidade de soluções. Supondo agora que $y(t), z(t)$ são duas soluções do PVI (4.3) em I_α, novamente pelo Lema 4.2 tem-se

$$y = Ty \quad \text{e} \quad z = Tz.$$

Mas, de (4.8) resulta que

$$\|y - z\|_\infty = \|Ty - Tz\|_\infty \leq r\|y - z\|_\infty.$$

Como $r < 1$, isto implica que $\|y - z\|_\infty = 0$, ou seja, $y(t) = z(t)$ em I_α. □

A demonstração fornece ainda um método, designado por método de Picard, de construir aproximações das soluções (locais) com controlo do erro. Com efeito, a sucessão (y_n) construída iterativamente no Passo 2 converge para a solução $y = y(t)$ e, fixando n e fazendo $p \to \infty$, da estimativa (4.10) obtém-se

$$\|y_n - y\|_\infty \leq \frac{r^n}{1-r} \|y_1 - y_0\|_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 4.1. Usando o método de Picard, calcular a solução do PVI

$$y' = 2t(1 + y), \quad y(0) = 0.$$

Resolução: Seguindo o Passo 2 acima, construa-se a sucessão (y_n), com

$$\begin{cases} y_0(t) \equiv 0 \\ y_{n+1}(t) = \int_0^t 2s(1+y_n(s))\,ds, \quad n = 0,1,2,\dots. \end{cases}$$

Vem

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \int_0^t 2s\,ds = t^2 \\ y_2(t) &= \int_0^t 2s(1+s^2)\,ds = t^2 + \frac{t^4}{2} \\ &\vdots \\ y_n(t) &= t^2 + \frac{t^4}{2} + \cdots + \frac{t^{2n}}{n!} \end{aligned}$$

(prove por indução a expressão para y_n). Claramente y_n converge em $\mathbb{R}$ para a função y dada por $y(t) = e^{t^2} - 1$. Resta agora verificar directamente que esta função é solução do PVI dado em **toda** a recta real.

O Teorema 4.3 dá a existência e unicidade local de solução do PVI (4.3), no sentido em que esta solução está definida numa vizinhança $I_\alpha(t_0)$ de t_0. Seria importante obter resultados de existência global de soluções. O resultado seguinte dá uma condição para a existência de soluções globais.

Teorema 4.4. *Sejam I intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua satisfazendo*

$$\|f(t,y)\| \le a(t)\|y\| + b(t), \quad \forall t \in I, y \in \mathbb{R}^n,$$

com $a(t), b(t)$ funções contínuas e não negativas em I. Então as soluções da EDO $y' = f(t,y)$ estão definidas em I.

Dem. Ver [5], p. 76.

Exemplo 4.2. As soluções de sistemas lineares (SL), onde $A = [a_{ij}(t)]$ é uma matriz $n \times n$ e $a_{ij} : I \to \mathbb{R}, i,j = 1,\dots,n$, $h : I \to \mathbb{R}^n$ são funções contínuas num intervalo aberto I de $\mathbb{R}$, estão definidas em todo o intervalo I.

Bibliografia

1. L. Barreira, *Análise Complexa e Equações Diferenciais*, IST Press, Lisboa, 2009.
2. R. Bellman, K.L. Cooke, *Modern Elementary Differential Equations*, 2nd Ed., Dover Publications Inc., New York, 1971.
3. M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 4^{th}Ed., Springer, New York, 1993.
4. F.R. Dias Agudo, *Análise Real*, Vol III, Escolar Editora, Lisboa, 1992.
5. M. Ramos, *Curso Elementar de Equações Diferenciais*, 2ª Ed., Textos de Matemática, Dep. Matemática da FCUL, Lisboa, 2002.
6. J. Stewart, *Cálculo*, Vol. II, 5^a Ed., Thomson, S. Paulo, 2006.