Métodos Matemáticos da Física — 2018/19

Exame época especial — 23-07-2019

1.a) Encontre pelo método de separação de variáveis soluções $u(t,x)$ da equação de Schrödinger que obedecem às condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i\,\hbar}{2\,m}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad u(t,0)=0\;, \quad u(t,\ell)=0\;.$$

b) Indique o conjunto de todas as soluções obtidas por esse método. Diga se essas soluções são funções próprias do operador $\partial^2/\partial x^2$ e, caso sejam, se os respectivos valores próprios são ou não degenerados e porquê.

2. As funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $-\ell \le x \le \ell$, servem como base para a expansão de funções em série de Fourier.
a) Mostre que as funções $y_n(x)$ são ortogonais. Calcule ainda os produtos internos $\langle y_n|y_n\rangle$.
b) Diga como se calculam os coeficientes de uma série de Fourier de uma função $u(x)$ arbitrária.
c) Determine a série de Fourier de $f(x) = \delta(x-z)$. Desenvolva a expressão obtida numa série de senos e cosenos.

3. Considere a equação diferencial

$$(1-x^2)\,y''(x) - 3x\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\;, \qquad x\in[-1,1]\;.$$

a) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x. Deduza a relação de recorrência entre os seus coeficientes e escreva a expressão da solução encontrada até à ordem x^5 para um valor de λ arbitrário.
b) Determine, justificando, os valores próprios associados a funções próprias, $P_n(x)$, dadas por polinómios de grau n bem definido.
c) Obtenha as funções próprias $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ admitindo que $P_n(1) = n+1$.

4.a) Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(x) = \begin{cases} e^{i\,x} & , -a \le x \le a \\ 0 & , |x| > a \end{cases}\;.$$

b) Aplique o teorema de Parseval para determinar o valor do integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx\,.$$

$$\tilde f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\;, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk\;,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x}dk = 2\pi\,\delta(x)\;, \qquad 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\tilde f(k)^*\,\tilde g(k)\,dk$$