Métodos Matemáticos da Física 2014/15

Exame época especial 23-07-2015

1. Considere a base de funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, no intervalo $-\ell \le x \le \ell$.
a) Mostre que $y_n(x)$ são funções próprias do operador d/dx. Explicite os respectivos valores próprios.
b) Diga justificando com base nos resultados anteriores se d/dx é um operador hermítico ou anti-hermítico.
c) Os coeficientes da expansão de uma função $f(x)$ como uma série de Fourier, $f(x) = \sum_n c_n\, y_n(x)$, são determinados por: $c_n = \langle y_n|f\rangle / \langle y_n|y_n\rangle$. Obtenha a expansão em série de Fourier das funções $u(x) = x/|x|$, $\; v(x) = \delta(x-a)$.

2.a) Verifique se a equação diferencial

$$x\,y''(x) + (1-x)\,y'(x) + \lambda\,y(x) = 0\;, \qquad x \in [0, +\infty[\;,$$

está na forma de Sturm-Liouville. Coloque-a nessa forma caso não esteja.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado ao problema.
c) Dadas as funções $y(x) = 1$, $\; z(x) = 1-x$, calcule os produtos internos $\langle y\,|\,y\rangle$, $\langle y\,|\,z\rangle$, $\langle z\,|\,z\rangle$.
d) Utilizando os resultados da alínea c), calcule o produto interno $\langle u\,|\,v\rangle$ das funções $u(x) = -y(x) + i\,z(x)$, $\; v(x) = y(x) + c\,z(x)$. Determine a constante c para a qual $u(x)$ e $v(x)$ são funções ortogonais.

3. Seja a equação diferencial definida no domínio $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\;, \qquad \beta \in \mathbb{R}_+\;.$$

a) Escreva $u(t,x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t,k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t,k)$.
b) Determine $\tilde{u}(t,k)$ em função do tempo e encontre a expressão da solução geral, $u(t,x)$.
c) Calcule $\tilde{u}(0,k)$ e obtenha as expressões de $u(t,x)$ para as seguintes condições iniciais: 1) $u(0,x) = e^{-a\,|x|}$; 2) $u(0,x) = \cos a\,x \;\; (a > 0)$.

4. Considere a seguinte equação diferencial não homogénea e sua condição fronteira:

$$i\,y'(x) + a\,y(x) = -f(x)\;, \quad y(-\ell) = 0\;, \qquad x \in [-\ell, \ell]\;, \quad (a \in \mathbb{R})\;.$$

a) Explicite a expressão da solução $y(x)$ em termos da função de Green $G(x,z)$, e escreva a equação diferencial e condição fronteira a que satisfaz $G(x,z)$.
b) Admitindo que a função de Green é da forma

$$G(x,z) = y_1(x;z) + y_2(x;z)\,\Theta(x-z)\;,$$

onde $y_1(x;z)$, $y_2(x;z)$ são soluções da equação homogénea, encontre a expressão explícita de $G(x,z)$.
c) Obtenha a solução $y(x)$ da equação não homogénea para $f(x) = 1$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\,k\,x}\,dx\;, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\,e^{i\,k\,x}\,dk$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\,k\,x}\,dk = 2\pi\,\delta(x)\;, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\,g(x)\,dx = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\,\tilde{g}(k)\,dk$$