Cálculo Diferencial e Integral III

Teresa Faria - FCUL 2018/19

Séries de Fourier e Introdução às Equações com Derivadas Parciais

1. Motivação: a equação do calor

Uma equação com derivadas parciais (EDP) é uma equação envolvendo uma função de várias variáveis – a incógnita, que se pretende encontrar – e algumas das suas derivadas parciais. São exemplos importantes os seguintes:

Equação do calor (a uma dimensão espacial):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, x \in [0, L] \tag{1.1}$$

Equação das ondas (a uma dimensão espacial; e.g. equação de uma corda vibrante):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, x \in [0, L] \tag{1.2}$$

Equação de Laplace (no plano):

$$\Delta u = 0, \quad \text{i.e. } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in [0, a] \times [0, b]. \tag{1.3}$$

Para as equações (1.1) e (1.2), procuram-se funções $u = u(t, x)$ que satisfaçam a equação em $\mathbb{R}_0^+ \times [0, L]$; no caso de (1.3), procuram-se funções $u = u(x, y)$ *harmónicas* em $[0, a] \times [0, b]$.

Método de separação de variáveis

Este método foi usado por D'Alembert e D. Bernoulli, mas foi posteriormente desenvolvido de forma muito eficaz por Fourier (1768–1830). Vamos exemplificá-lo com a equação do calor (1.1), que modela a distribuição da temperatura $u(t, x)$ no instante t na posição x de uma barra rectilínea de comprimento L.

Imponha-se a uma solução $u = u(t, x)$ de (1.1) que satisfaça as condições de "fronteira"

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \ t \geq 0, \tag{1.4}$$

ou seja, supõe-se que as extremidades da barra são mantidas a uma temperatura constante, que, por normalização, se supõe ser zero.

No método de separação de variáveis procuram-se soluções não identicamente nulas da forma

$$u(t, x) = T(t) X(x). \tag{1.5}$$

De (1.4), tem-se agora $X(0) = X(L) = 0$. Substituindo (1.5) em (1.1), vem

$$T'(t)X(t) = c^2 T(t)X''(x),$$

ou ainda (omitindo as variáveis independentes e para $TX \neq 0$)

$$\frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X}.$$

Como a função do lado esquerdo depende apenas de t e a do lado direito apenas de x, terá de existir uma **constante** $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{T'}{c^2 T} = \frac{X''}{X} = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} T' = c^2 \lambda T \\ X'' = \lambda X. \end{cases} \tag{1.6}$$

A resolução da primeira equação em (1.6) conduz a

$$T(t) = c_0 e^{c^2 \lambda t}, \quad c_0 \in \mathbb{R}. \tag{1.7}$$

A equação característica para $X'' - \lambda X = 0$ é $h(z) := z^2 - \lambda = 0$. Recorde-se que se procuram soluções não identicamente nulas satisfazendo $X(0) = X(L) = 0$. É fácil verificar que tais soluções não existem se $\lambda \geq 0$ e que, se $\lambda < 0$, a solução geral de $X'' - \lambda X = 0$ é

$$X(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

onde $\omega = \sqrt{-\lambda}$ (exercício). Para se ter $X(0) = X(L) = 0$, vem $a = 0$ e $b\sin(\omega L) = 0$, pelo que $b \neq 0$ (pois procuram-se soluções $\not\equiv 0$) e $\omega = \omega_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}. \tag{1.8}$$

De (1.6),(1.7) e com $c_0 b = b_n$, obtêm-se soluções dadas por

$$u(t,x) = b_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Da estrutura linear do problema (1.1)-(1.4), é imediato verificar que combinações lineares de soluções são ainda soluções, pelo que são também soluções as funções do tipo

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \quad (b_n \in \mathbb{R}). \tag{1.9}$$

Repare-se agora que é natural impor uma condição adicional

$$u(0,x) = f(x), \quad x \in [0, L]; \tag{1.10}$$

por outras palavras, é dada a distribuição da temperatura no instante inicial $t = 0$. A priori, as únicas condições a impor a f é que deverá ser contínua e satisfazer $f(0) = f(L) = 0$, em virtude de (1.4). Mas, de (1.9), teríamos de obrigar a nossa função f em (1.10) a satisfazer

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x),$$

para algum $N \in \mathbb{N}$, o que é muito pouco natural. Somos levados a pensar na **série**

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x), \tag{1.11}$$

e a estudar que funções poderão ser dadas por séries deste tipo e qual o tipo de convergência da série. Numa fase posterior, põe-se a questão de verificar se a consideração de "somas infinitas" (dadas por séries) em (1.9) nos conduz ainda a soluções da equação do calor. Mas, numa fase preliminar, estamos interessados em estudar qual o universo das funções contínuas num intervalo $[0, L]$ e com iguais valores nos extremos que poderão ser representadas por uma série de senos, ou de cossenos, ou de senos e cossenos. Desta forma, somos conduzidos ao estudo das chamadas **séries de Fourier**.

2. Funções periódicas: definições e generalidades

No que se segue, para um intervalo $[a, b]$ $(a < b)$ considere-se o espaço vectorial $SC([a, b])$ das funções *seccionalmente contínuas* em $[a, b]$, i.e., das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que são contínuas em $[a, b]$ excepto para um número finito de pontos x para os quais a descontinuidade é de tipo salto, havendo portanto os limites laterais $f(x^-), f(x^+) \in \mathbb{R}$. Designe-se ainda por $SC(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são *seccionalmente contínuas* em qualquer intervalo compacto $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Para $f \in SC(\mathbb{R})$, f diz-se *periódica* de período $T > 0$, ou abreviadamente T-periódica, se para qualquer x ponto de continuidade de f se tem $x \pm T$ ponto de continuidade de f e

$$f(x + T) = f(x). \tag{2.1}$$

Se $T > 0$ é o menor número real positivo para o qual (2.1) é satisfeito (no caso de existir), T é designado por período mínimo de f. Como habitualmente, $C(\mathbb{R})$ é o espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas. É fácil verificar as seguintes propriedades:

1. Se $f \in SC(\mathbb{R})$ é T-periódica, então f é nT-periódica, $\forall n \in \mathbb{N}$;

2. Se $f, g \in C(\mathbb{R})$ são T-periódicas, são também T-periódicas as funções $f + g$, fg;

3. Se $f, g \in C(\mathbb{R})$, f é p-periódica, g é q-periódica e existem naturais n, m tais que $mp = nq =: T$, então as funções $f + g$ e fg são T-periódicas;

4. Se $f \in SC(\mathbb{R})$ é T-periódica e diferenciável excepto num número finito ou numerável de pontos com derivada $f' \in SC(\mathbb{R})$, então f' é T-periódica;

5. Se $f \in SC(\mathbb{R})$ é T-periódica, então

   $$\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx, \qquad \forall a \in \mathbb{R};$$

   além disso, com f contínua, qualquer primitiva de f é T-periódica se e só se $\int_0^T f(x)\,dx = 0$.

Exemplo 2.1. As funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas com período mínimo 2π. Sendo $L > 0$, as funções $\sin(\frac{\pi}{L}x)$ e $\cos(\frac{\pi}{L}x)$ são periódicas com período mínimo $2L$. Assim, para $\forall n \in \mathbb{N}$, são $2L$-periódicas as funções $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ e $\cos(\frac{n\pi}{L}x)$.

Exemplo 2.2. Dada uma função $f \in SC([-L, L])$ $(L > 0)$, podemos pensar no prolongamento $2L$-periódico de $f|_{(-L,L)}$ a $\mathbb{R}$, definindo $f(x + 2kL) = f(x)$ para $k \in \mathbb{Z}$, e $x \in (-L, L)$ ou $x \in [-L, L)$ ou $x \in (-L, L]$, obtendo-se uma função em $SC(\mathbb{R})$ $2L$-periódica. Note-se que com a primeira opção, $x \in (-L, L)$, ficam por definir os valores de f nos pontos da forma $L + 2kL,\ k \in \mathbb{Z}$, o que é irrelevante, uma vez que se lhe forem atribuídos quaisquer valores reais ficamos ainda com uma função em $SC(\mathbb{R})$.

Seja $L > 0$ e considerem-se os espaços $C([-L, L])$ e $SC([-L, L])$ das funções contínuas e seccionalmente contínuas em $[-L, L]$, respectivamente. Em $C([-L, L])$ é fácil verificar que a operação definida por

$$f \cdot g = \int_{-L}^{L} f(x)g(x)\,dx \tag{2.2}$$

é um produto interno, ao qual está associada a norma (por vezes designada por $\|\cdot\|_2$) dada por $(f \cdot f)^{1/2}$:

$$\|f\| = \left(\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Claramente, para funções f, g em $SC([-L, L])$ pode ainda definir-se $f \cdot g$ por (2.2), e $\|f\|$ por (2.3) – no entanto, $\cdot$ é apenas um semi-produto interno e $\|\cdot\|$ é apenas uma semi-norma em $SC([-L, L])$. (Com efeito, se $\|f\| = 0$ pode apenas inferir-se que $f \equiv 0$ em $[-L, L]$ com possível excepção de um número finito de pontos.) A operação em (2.2) define ainda um produto interno no espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}$ e $2L$-periódicas.

Teorema 1. *Em $C([-L, L])$ munido do produto interno em (2.2), o conjunto de funções*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{1}{\sqrt{L}}\cos(\frac{n\pi}{L}x), \frac{1}{\sqrt{L}}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{2.4}$$

constitui um sistema ortonormado (o.n.).

Dem. Definam-se as funções

$$u_n = \cos(\frac{n\pi}{L}x), \quad v_n = \sin(\frac{n\pi}{L}x),\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Para $m, n \in \mathbb{N}$, é necessário mostrar as igualdades

$$\begin{aligned}
&u_n \cdot 1 = v_n \cdot 1 = 0,\\
&u_m \cdot v_n = 0,\\
&u_m \cdot u_n = v_m \cdot v_n = 0, \quad \text{se} \quad m \neq n,\\
&1 \cdot 1 = 2L, \quad u_n \cdot u_n = v_n \cdot v_n = L,
\end{aligned}$$

ou, mais explicitamente,

$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \int_{-L}^{L} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = 0,$$
$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = 0,$$
$$\int_{-L}^{L} dx = 2L,$$
$$\int_{-L}^{L} \cos(\frac{m\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \int_{-L}^{L} \sin(\frac{m\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ L, & m = n \end{cases},$$

o que é deixado como exercício. □

Nota. No caso em que $L = \pi$, o conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

constitui um sistema ortonormado do espaço $SC([-\pi,\pi])$.

Gostaríamos agora de saber em que medida o conjunto (2.5) constitui uma "base" de $SC([-L,L])$, no sentido em que pretendemos exprimir qualquer função de $SC([-L,L])$ por uma combinação linear "infinita" (i.e., uma série) de funções do sistema o.n. (2.4). Teremos ainda de precisar o que se entende por convergência da série. De momento, considerem-se **polinómios trigonométricos de ordem** n e período $2L$, dados por

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) \right),$$

onde $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.3. Para P_n acima definido, tem-se $P_n \cdot P_n = L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right)$. Com efeito, usando as propriedades do produto interno, obtém-se

$$\begin{aligned} P_n \cdot P_n &= \frac{a_0^2}{4} 1 \cdot 1 + 2\frac{a_0}{2} 1 \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k u_k + b_k v_k) \right) + \sum_{k,j=1}^{n} (a_k u_k + b_k v_k) \cdot (a_j u_j + b_j v_j) \\ &= \frac{a_0^2}{4} 2L + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 L + b_k^2 L \right) = L \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right). \end{aligned}$$

3. Séries de Fourier

Comecemos com algumas definições. Suponha-se de momento que a **série** dada por $\lim_n P_n(x)$ é convergente em $[-L,L]$, tendo por soma uma função $f \in SC([-L,L])$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) \right), \quad x \in [-L.L].$$

Suponha-se ainda que é possível <u>primitivar a série termo-a-termo</u>. Vem:

$$\begin{aligned}
f\cdot 1 &= \frac{a_0}{2}1\cdot 1+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k u_k\cdot 1+b_k v_k\cdot 1)=a_0L\\
f\cdot u_n &= \frac{a_0}{2}1\cdot u_n+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k u_k\cdot u_n+b_k v_k\cdot u_n)=a_nL\\
f\cdot v_n &= \frac{a_0}{2}1\cdot v_n+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k u_k\cdot v_n+b_k v_k\cdot v_n)=b_nL,
\end{aligned}$$

fórmulas estas que permitem determinar os coeficientes a_0, a_n, b_n na série acima. Tem então sentido a definição seguinte.

Para $f \in SC([-L, L])$, definem-se os **coeficientes de Fourier** de f pelas expressões abaixo (conhecidas por **fórmulas de Euler** (1707-1783)):

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_0(f)=\frac{1}{L}(f\cdot 1)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\,dx\\
a_n &= a_n(f)=\frac{1}{L}(f\cdot u_n)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx\\
b_n &= b_n(f)=\frac{1}{L}(f\cdot v_n)=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \qquad (n\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Define-se ainda a **série de Fourier** de f por

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)+b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big),$$

onde os coeficientes a_0, a_n, b_n são os coeficientes de Fourier de f acima definidos. Os parênteses na série podem ser ainda omitidos. Por enquanto, não sabemos ainda se a série converge – e, se sim, qual será a sua soma. Paar evitar más interpretações, escreve-se simbolicamente

$$f(x) \quad\sim\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x)+b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x), \tag{3.1}$$

para designar que a série no lado direito é a série de Fourier de f em $[-L, L]$.

Note-se que se $f \in SC(\mathbb{R})$ é uma função $2L$-periódica, a restrição de f ao intervalo $(-L, L)$ descreve completamente a função, com possível excepção dos valores de f nos pontos da forma $x = L + 2kL, k \in \mathbb{Z}$. Assim, a série de Fourier de $f|_{[-L,L]} \in SC([-L, L])$ em (3.1) pode agora ser considerada em $\mathbb{R}$. No caso em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua e 2π-periódica, então $L = \pi$, e vem simplesmente

$$f(x) \quad\sim\quad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx).$$

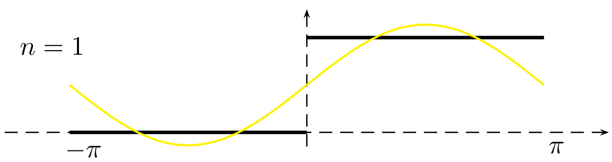
Trataremos adiante do problema da convergência da série de Fourier de f, e em que medida é que ela representa a função f. Para já, calculemos algumas séries de Fourier.

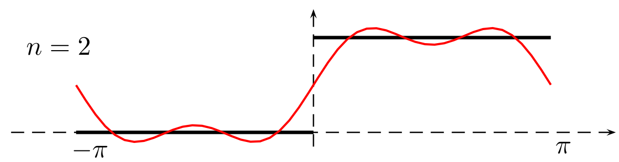
Exercício 3.1. Se as funções f são <u>contínuas</u>, prova-se que os coeficientes de Fourier dados pelas fórmulas de Euler determinam univocamente f. Ver e.g. [1, p.208].

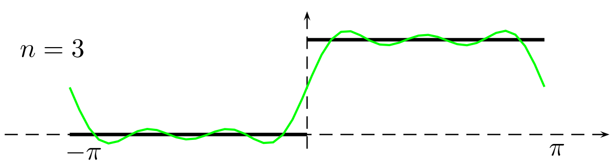
Exemplo 3.1. Considere-se a função $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \end{cases}$; atribua-se ainda um valor qualquer $a \in \mathbb{R}$ a $f(0)$. Tem-se $f \in SC([-\pi, \pi])$. Calculando os coeficientes de Fourier de f, obtém-se $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = 0, b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$ e portanto

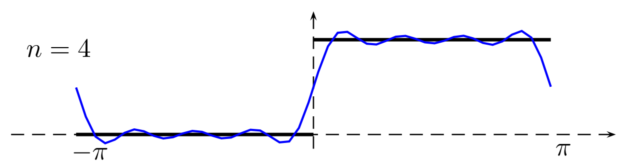
$$\begin{aligned} f(x) \quad &\sim \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots \end{aligned}$$

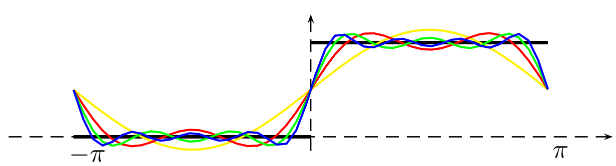
Com $n = 1, 2, 3, 4$, obtêm-se os polinómios de Fourier de f de ordens 1,3,5,7, respectivamente, com os gráficos:











Exemplo 3.2. Para a função $g(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$, é $L = 1$. Note-se que $g(x) = f(\pi x)$, onde f é a função no exemplo anterior. Assim, sem cálculos adicionais obtém-se a série de Fourier de g:

$$\begin{aligned} g(x) \quad &\sim \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)\pi x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi x) + \frac{2}{3\pi}\sin(3\pi x) + \frac{2}{5\pi}\sin(5\pi x) + \cdots \end{aligned}$$

Exemplo 3.3. Para a função $f(x) = |x|$ em $[-1, 1]$, é $L = 1$. Calculando os coeficientes de Fourier de f (exercício), obtém-se a série de Fourier

$$\begin{aligned} f(x) \quad &\sim \quad \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos(\pi x) + \frac{1}{3^2} \cos(3\pi x) + \cdots \right). \end{aligned}$$

Obviamento, obtém-se a mesma série de Fourier para o prolongamento $\tilde{f}$ 2-periódico de f a $\mathbb{R}$, dado por $\tilde{f}(x+2k) = f(x)$ para $k \in \mathbb{Z}$ e $x \in [-1,1]$.

Exemplo 3.4. Se $f \in SC([-L,L])$ é um função *par*, respectivamente *ímpar*, a sua série de Fourier tem a forma $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$, respectivamente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Teorema 2. *Sejam $f \in SC([-L,L])$ e a_0, a_k, b_k ($k \in \mathbb{N}$) os seus coeficientes de Fourier. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e P_n o polinómio trigonométrico dado por*

$$P_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) + b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x) \right),$$

tem-se

$$\|f - P_n\|^2 = \|f\|^2 - \|P_n\|^2 = \|f\|^2 - L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right). \tag{3.2}$$

Em particular, a série $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$ é convergente e tem-se a desigualdade (conhecida por **desigualdade de Bessel***)*

$$L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \|f\|^2; \tag{3.3}$$

ou seja,

$$L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right) \leq \int_{-L}^{L} f(x)^2 \, dx.$$

Dem. Tem-se

$$\|f - P_n\|^2 = (f - P_n) \cdot (f - P_n) = \|f\|^2 - 2f \cdot P_n + P_n \cdot P_n.$$

Por outro lado, $f \cdot P_n = \frac{a_0}{2} f \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k f \cdot u_k + b_k f \cdot v_k) = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Big)$. O resultado (3.2) é agora consequência do Exemplo 2.3. Como $\|f - P_n\|^2 \geq 0$, de (3.2) obtém-se $L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \Big) \leq \|f\|^2$, e fazendo $n \to \infty$ deduz-se (3.3). □

O polinómio trigonométrico P_n com coeficientes de Fourier de f (até à ordem n) é designado por **polinómio de Fourier de f de ordem** n. Pode concluir-se ainda o resultado enunciado de seguida. (Note a semelhança com polinómios de Taylor.)

Corolário 1. *Para $f \in SC([-L,L])$, o polinómio de Fourier P_n de f de ordem n ($n \in \mathbb{N}$) é o polinómio trigonométrico de ordem n em $C([-L,L])$ que melhor "aproxima" f relativamente a $\|\cdot\|$; i.e., para qualquer $Q_n = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos(\frac{k\pi}{L}x) + d_k \sin(\frac{k\pi}{L}x))$ com constantes $c_0, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ ($1 \leq k \leq n$), tem-se $\|f - P_n\| \leq \|f - Q_n\|$.*

Dem. Raciocinando como acima, para $X = (c_0, c_1, \ldots, c_n, d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ vem

$$F(X) := \|f - Q_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\Big(\frac{c_0}{2}\, f \cdot 1 + \sum_{k=1}^{n}(c_k\, f \cdot u_k + d_k\, f \cdot v_k)\Big) + L\Big(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2)\Big),$$

ou ainda $F(X) = \|f\|^2 - 2L\Big(\frac{c_0}{2}\, a_o + \sum_{k=1}^{n}(c_k\, a_k + d_k\, b_k)\Big) + L\Big(\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(c_k^2 + d_k^2)\Big)$. A função F tem um único ponto crítico no ponto $X_0 = (a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)$ cujas componentes são os coeficientes de Fourier de f, que é um mínimo global (exercício). $\square$

Do Teorema 2 não se pode concluir que a série de Fourier de f é convergente em pontos. Pode no entanto provar-se (omitimos a prova; ver adiante Teorema 7) que há **convergência em média quadrática**, no sentido em que se tem:

Proposição 1. *Seja $f \in SC([-L, L])$ e $a_0, a_n, b_n\,(n \in \mathbb{N})$ os seus coeficientes de Fourier. Tem-se:*

$$\|f - P_N\| = \left(\int_{-L}^{L}\Big[f(x) - L\Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big)\Big]^2 dx\right)^{1/2} \to 0 \text{ quando } N \to \infty.$$

Por outros palavras, estamos a afirmar que em (3.2) se tem $\|f - P_N\| \to 0$, pelo que em (3.3) é válida a igualdade, conhecida por **identidade de Parseval**:

$$\|f\|^2 = \int_{-L}^{L} f(x)^2\, dx = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\Big).$$

Chama-se erro quadrático (total) de P_N relativo a f (no intervalo em causa) ao valor

$$\|f - P_N\| = \Big[\|f\|^2 - L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2)\Big)\Big]^{1/2}.$$

Exemplo 3.5. Para a função do Exemplo 3.3, tem-se $\|f\|^2 = 2\int_0^1 x^2\, dx = \frac{2}{3}$, $P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\big(\cos(\pi x) + \frac{1}{9}\cos(3\pi x)\big)$ com $\|P_3\|^2 = \frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}(1 + \frac{1}{9^2})$. O erro quadrático de P_3 relativo a f no intervalo $[-1, 1]$ é dado por $\|f - P_3\| = \Big[\frac{2}{3} - \big(\frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4}(1 + \frac{1}{9^2})\big)\Big]^{1/2} = \Big[\frac{1}{6} - \big(\frac{1312}{81\pi^4}\big)\Big]^{1/2}$.

A convergência pontual da série de Fourier (i.e., convergência em cada ponto x fixado) para $f(x)$ nos *pontos de continuidade* de f é obtida se se exigir um pouco mais de regularidade à função. A demontração do **Teorema de Fourier**, enunciado de seguida, pode ser encontrada em [1, 2].

Teorema 3. *(de Fourier) Seja $f \in SC([-L, L])$ com derivada $f' \in SC([-L, L])$, e definam-se $f(-L^-) = f(L^-), f(L^+) = f(-L^+)$. Então a série de Fourier de f converge pontualmente em $[-L, L]$ e a sua soma é dada por*

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Em particular, nos pontos $x \in (-L, L)$ de continuidade de f tem-se $f(x) = F(x)$. Resultado análogo é válido para o prolongamento $\tilde{f}$ $2L$-periódico de f a $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.6. (i) Para a função f do Exemplo 3.1, a sua série de Fourier tem soma $F(x)$ dada por $F(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 < x < \pi \\ 1/2, & x = -\pi, 0, \pi. \end{cases}$

(ii) Para f como no Exemplo 3.2, usando a sua série de Fourier em $x = 1/2$ conclui-se que $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{3\pi} + \frac{2}{5\pi} + \cdots$, donde $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots$.

No que segue, iremos exigir um pouco mais de regularidade às funções consideradas.

Teorema 4. *(derivação e integração de séries de Fourier) Seja $f \in SC(\mathbb{R})$, $2L$-periódica e com coeficientes de Fourier a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbb{N})$.*
(i) Se f é **contínua** *e com derivada f' em $SC(\mathbb{R})$, tem-se o desenvolvimento de Fourier para f'*

$$f'(x) \quad \sim \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} b_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) - \frac{n\pi}{L} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x). \tag{3.4}$$

(ii) Em qualquer intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{a_0(b-a)}{2} + \sum_{n\geq 1} \int_a^b \Big(a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\Big)\,dx.$$

Dem. (i) Considere-se primeiro o caso em que f é de <u>classe C^1</u>, e use-se primitivação por partes para determinar os coeficientes de Fourier de f':

$$\begin{aligned}
a_0(f') &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\,dx = \frac{1}{L}(f(L) - f(-L)) = 0 \\
a_n(f') &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{L}\Big[f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\Big]_{-L}^{L} + \frac{n\pi}{L^2}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \\
&= \frac{n\pi}{L} b_n \\
b_n(f') &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \frac{1}{L}\Big[f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big]_{-L}^{L} - \frac{n\pi}{L^2}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx \\
&= -\frac{n\pi}{L} a_n.
\end{aligned}$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **contínua**, $2L$-periódica e com derivada f' em $SC(\mathbb{R})$, obtêm-se ainda os mesmos coeficientes de Fourier para f'. Com efeito, sejam $-L = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = L$ os possíveis pontos de descontinuidade de f' em $[-L, L]$. Tem-se $a_0(f') = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(x)\,dx = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{p}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\,dx = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{p}\Big(f(x_i^-) - f(x_{i-1}^+)\Big) = 0$, pois f é **contínua**. De modo análogo se mostra que os coeficientes $a_n(f'), b_n(f')$ são ainda dados pelas expressões acima. A prova de (ii) resulta de (i) e é deixada como exercício. $\square$

Por esta razão, diz-se que a série de Fourier de <u>funções contínuas</u> com derivada em $SC(\mathbb{R})$ é *derivável termo a termo.* No entanto, para escrever a série de Fourier de f' usando a série de Fourier de f, é mesmo essencial que a função f seja contínua, como se pode comprovar pelo seguinte exemplo.

Exemplo 3.7. Com $f(x) = x$ em $]-\pi,\pi[$ e considerada definida e 2π-periódica em $\mathbb{R}$, a série de Fourier de f é $f(x) \sim 2\sum_{k\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$. Contudo, os coeficientes da série de Fourier da função seccionalmente constante $g \equiv 1$ em $]-\pi,\pi[$, com prolongamento 2π-periódico em $\mathbb{R}$, são $a_0 = 2, a_k = b_k = 0,\ k \in \mathbb{N}$. Não há qualquer contradição com a fórmula obtida em (3.4), pois o prolongamento 2π-periódico de f não é contínuo.

Quanto mais regularidade f tiver, melhor é o tipo de convergência da série de Fourier e melhor é a aproximação de $f(x)$ através da sua série de Fourier. De seguida, daremos outro tipo de convergência.

Definição 1. *Dada uma série de funções $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ definidas num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, diz-se que a série* **converge uniformemente** *em D se*

$$\sup_{x\in D}\Big|\sum_{k\geq n} f_k(x)\Big| \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Claramente a *convergência uniforme* de uma série de funções implica que há *convergência pontual*, em cada ponto $x \in D$; além disso, sendo $F(x)$ a função soma, tem-se

$$\|F - S_n\|_\infty := \sup_{x\in D}|F(x) - \sum_{0\leq k\leq n} f_k(x)| \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

A importância da *convergência uniforme* de uma série de funções é comprovada pelos seguintes resultados:

(i) se as funções $f_n(x)$ são contínuas em D e $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ **converge uniformemente** em D para a função $F(x)$, então $F(x)$ é contínua em D; além disso, a série integra-se termo-a-termo;

(ii) se as funções $f_n(x)$ são de classe C^1 em D e $\sum_{n\geq 0} f'_n(x)$ **converge uniformemente** em D, então $\big(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\big)' = \sum_{n\geq 0} f'_n(x)$.

O seguinte critério é muito útil na prática. A sua prova é deixada como exercício (ou ver e.g. [2]).

Teorema 5. *(Critério de Weierstrass) Sendo $f_n : D \to \mathbb{R}$ com $\sup_{x\in D}|f_n(x)| \leq a_n$ para $n \in \mathbb{N}_0$, se a série numérica $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, então a série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformemente em D.*

Teorema 6. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* **contínua**, *$2L$-periódica e com derivada f' em $SC(\mathbb{R})$, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para $f(x)$; i.e., se a_0, a_n, b_n são os coeficientes de Fourier de f,*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

e a série **converge uniformemente** *em $\mathbb{R}$ para $f(x)$, no sentido em que*

$$\|f - P_N\|_\infty := \max_{x\in\mathbb{R}}\Big|f(x) - \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\Big)\Big| \to 0 \text{ quando } N\to\infty.$$

Dem. Da desigualdade de Bessel (3.3) aplicada à função f', vem que

$$\frac{\pi^2}{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2+k^2b_k^2)\right)\le \|f'\|^2, \tag{3.5}$$

e portanto é convergente a série $\sum_{k=1}^{\infty}(k^2a_k^2+k^2b_k^2)$. Mas, $|ab|\le (a^2+b^2)/2, \forall a,b\in\mathbb{R}$, pelo que

$$|a_k|\le \frac{1}{2}(\frac{1}{k^2}+k^2a_k^2),\quad |b_k|\le \frac{1}{2}(\frac{1}{k^2}+k^2b_k^2).$$

Pelos critérios de convergência de séries numéricas, resulta que as séries $\sum_k |a_k|, \sum_k |b_k|$ são convergentes. A série de Fourier de f tem termo geral $a_k\cos(\frac{k\pi}{L}x)+b_k\sin(\frac{k\pi}{L}x)$, e $|a_k\cos(\frac{k\pi}{L}x)+b_k\sin(\frac{k\pi}{L}x)|\le |a_k|+|b_k|$. Logo, pelo critério de Weierstrass, a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$, com soma igual a $f(x)$ pelo Teorema de Fourier. □

Corolário 2. *Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é de classe C^1 e $2L$-periódica (ou $f:[-L,L]\to\mathbb{R}$ é de classe C^1 e $f(-L)=f(L)$), a série de Fourier de f converge uniformemente em $\mathbb{R}$ para $f(x)$.*

Resumindo, podemos observar que:

(i) Se f é seccionalmente contínua e $2L$-periódica, a sua série de Fourier (3.1) converge em média quadrática para $f(x)$;

(ii) Se f é seccionalmente contínua, $2L$-periódica e com derivada f' seccionalmente contínua, a sua série de Fourier (3.1) converge pontualmente para $\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$;

(iii) Se f é contínua, $2L$-periódica e com derivada f' seccionalmente contínua, a sua série de Fourier (3.1) converge uniformemente para $f(x)$.

Exemplo 3.8. (i) Para f dada no Exemplo 3.1, a convergência da série de Fourier de f não é uniforme em $[-\pi,\pi]$. Com efeito, se o fosse, a função soma $F(x)$ seria contínua em $[-\pi,\pi]$, pois o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua. Mas F é descontínua em $x=0,-\pi,\pi$ (cf. Explo. 3.5).

(ii) A função $f(x)=|x|$ em $[-1,1]$ é *secc* C^1 em $[-1,1]$, i.e., é contínua com $f'\in SC([-1,1])$. Usando os cálculos no Exemplo 3.3, vem que $f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)\pi x)$, sendo a convergência uniforme em $[-1,1]$.

Nota: Usando a convergência uniforme, é agora fácil provar a identidade de Parseval para funções nas condições do Teorema 6:

Teorema 7. *Para f nas condições do Teorema 6, é válida a* **identidade de Parseval***:*

$$\|f\|^2=\int_{-L}^{L}f(x)^2\,dx=L\left(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\right).$$

Dem. Sejam $P_n(x)$ as somas parciais de ordem n da série de Fourier de $f(x)$. Tem-se que P_n converge uniformente para $f(x)$ em $[-L,L]$, logo $\max_{[-L,L]}|f(x)-P_n(x)|\to 0$ quando $n\to\infty$. Por outro lado,

$$\|f-P_n\|^2=\int_{-L}^{L}(f(x)-P_n(x))^2\,dx\le 2L\max_{[-L,L]}(f(x)-P_n(x))^2\to 0,\ \text{quando } n\to\infty.$$

A identidade de Parseval é agora consequência de (3.2). □

Seja $f \in SC(\mathbb{R})$ e $2L$-periódica. No Exemplo 3.4, notámos que se f é par, então a série de Fourier de f tem apenas cossenos, e se f é ímpar a série de Fourier de f tem apenas senos. Mais concretamente, se f é par

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x), \tag{3.6}$$

com

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N};$$

e se f é ímpar,

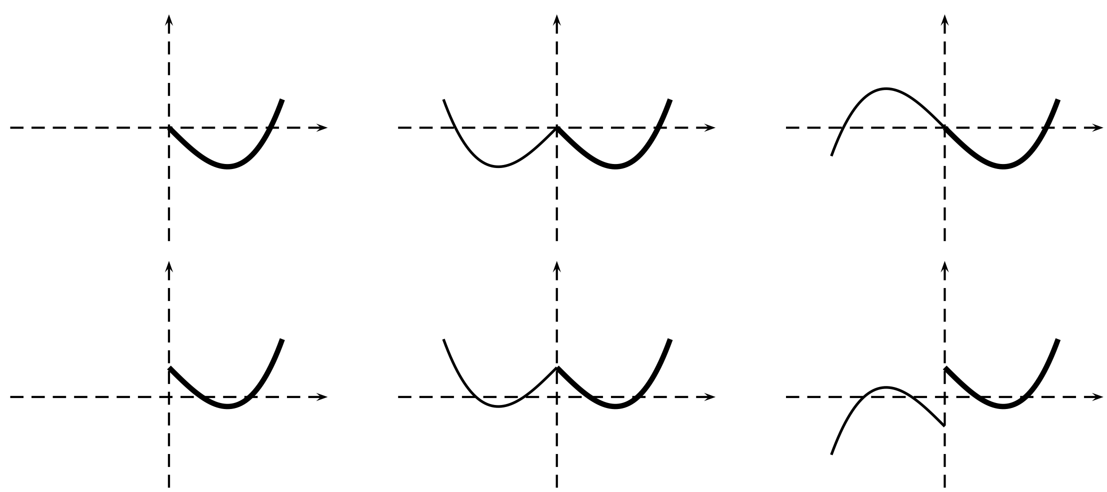
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x), \tag{3.7}$$

com

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Sendo agora $f \in SC([0,L])$, pretende-se representar f por uma série de Fourier em que aparecem apenas cossenos, ou apenas senos. Para isso, bastará obviamente prolongar $f|_{]0,L[}$ ao intervalo $]-L,L[$ por paridade, ou imparidade, respectivamente, e aplicar a teoria de séries de Fourier descrita nesta secção. Estes prolongamentos poderão ser também considerados em $\mathbb{R}$ como prolongamentos $2L$-periódicos. Como atrás, para calcular a série de Fourier desta nova função $\tilde{f}$ é irrelevante o valor que a função assume em $x = 0, -L, L$. As séries (3.6) e (3.7) dizem-se **série de cossenos** e **série de senos** de f, respectivamente.

As figuras abaixo mostram *prolongamentos por paridade e imparidade* de uma função f definida num intervalo $[0,L]$.



Exemplo 3.9. Considere-se a função $f \equiv 1$ em $[0,\pi]$, e escreva-se a sua série de senos. Para $n \in \mathbb{N}$, vem $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$, pelo que

$$1 = F(x) := \frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x),\ x \in]0,\pi[.$$

Note-se que para $x = 0$ se tem $\tilde{f}(0^-) = -1, \tilde{f}(0^+) = 1$, e $F(0) = 0 = (\tilde{f}(0^-) + \tilde{f}(0^+))/2$, onde $\tilde{f}$ é prolongamento por imparidade de f a $[-\pi, \pi]$. (Claramente, a convergência da série acima não é uniforme.)

Para $f \in SC([-\pi, \pi])$, mostre-se agora que a escrita da sua série de Fourier (3.1) como uma série de Fourier complexa é efectivamente mais "natural". Para simplificação de exposição, considere-se primeiro $L = \pi$. Observando que

$$\cos(nx) = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

de (3.1) vem que

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \right)$$

pelo que a série de Fourier de f toma a forma de uma série de exponenciais complexas,

$$f \quad \sim \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{inx} \tag{3.8}$$

com $\alpha_n \in \mathbb{C}$ dados por $\alpha_0 = \frac{a_0}{2}$, $\alpha_{-n} = \overline{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$, e

$$\alpha_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\big(\cos(nx) - i\sin(nx)\big)\, dx.$$

Assim, os coeficientes de Fourier $\alpha_n \in \mathbb{C}$ são obtidos pelas fórmulas de Euler seguintes:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

De modo análogo, se escreve a forma complexa da série de Fourier de uma função $f \in SC([-L, L])$: fazendo a mudança de variável $x \mapsto y := \frac{\pi x}{L}$, vem que a função $g(x) := f(\frac{\pi x}{L})$ está em $SC([-\pi, \pi])$ e tem série de Fourier complexa dada por (3.8), onde, de (3.9),

$$\alpha_n = \alpha_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.)$$

Retornando à variável original x, vem que

$$f \quad \sim \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

com

$$\beta_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)e^{-\frac{in\pi x}{L}}\, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Aplicação das séries de Fourier à resolução de EDP's

Como primeiro exemplo de aplicação das séries de Fourier, considere-se ainda a equação do calor da Secção 3.1. O seguinte teorema é consequência dos resultados dados na Secção 3.3.

Teorema 8. *Considere-se o problema*

$$(4.1)\qquad \begin{cases} u_t = c^2 u_{xx},\ \ 0 \le x \le L, t \ge 0 & (4.1_a) \\ u(t,0) = u(t,L) = 0,\ \ t \ge 0 & (4.1_b) \\ u(0,x) = f(x),\ \ 0 \le x \le L, & (4.1_c) \end{cases}$$

onde $c \neq 0, L > 0$ e $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ é contínua, com derivada $f' \in SC([0,L])$ e $f(0) = f(L) = 0$. A função $u(t,x)$ dada por

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x), \quad t \ge 0, x \in [0,L], \tag{4.2}$$

onde b_n são os coeficientes de Fourier da série de senos de f em $[0,L]$, i.e.,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(\frac{n\pi}{L} x)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

é solução do problema (4.1).

Dem. Pelo Teorema 6 e sua demonstração, a série $\sum |b_n|$ é convergente. Como

$$\left| b_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin(\frac{n\pi}{L} x) \right| \le |b_n|, \qquad t \in [0,T], x \in [0,L],$$

a série converge uniformemente em qualquer intervalo $[0,T] \times [0,L]$ $(T > 0)$. Em particular, a soma da série define uma função $u(t,x)$ contínua. Usando os Teoremas 4 e 6, pode verificar-se que se pode derivar termo-a-termo a série, em ordem a t e a x, obtendo-se ainda séries que são uniformemente convergentes nos intervalos de $\mathbb{R}^2$ acima considerados. Os detalhes são aqui omitidos. As contas na Secção 3.1 comprovam agora o resultado. □

De facto, tem-se unicidade de solução do problema (4.1).

Teorema 9. *A função $u(t,x)$ em (4.2) é a única solução do problema (4.1).*

Dem. Suponha-se que $u_1(t,x), u_2(t,x)$ são duas soluções do problema (4.1), e defina-se

$$v(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x).$$

Como a EDP (4.1_a) é linear e as *condições de fronteira* (ditas **de tipo Dirichlet**) são homogéneas, obviamente $v(t,x)$ é agora solução do problema (4.1) com $f \equiv 0$.

Considere-se a função

$$F(t) := \int_0^L v^2(t,x)\, dx, \qquad t \ge 0.$$

Da derivação do integral paramétrico, tem-se

$$F'(t) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\big(v^2(t,x)\big)\, dx = 2 \int_0^L v(t,x) \frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\, dx \qquad t \ge 0.$$

De (4.1_a), integrando por partes e usando (4.1_b), vem

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F'(t) &= \int_0^L v(t,x)\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)\,dx = \int_0^L v(t,x)c^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\,dx \\
&= \Big[v(t,x)c^2\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\Big]_0^L - c^2\int_0^L \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\Big)^2\,dx \\
&= c^2\Big[v(t,L)\frac{\partial v}{\partial x}(t,L) - v(t,0)\frac{\partial v}{\partial x}(t,0)\Big] - c^2\int_0^L \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\Big)^2\,dx \\
&= -c^2\int_0^L \Big(\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)\Big)^2\,dx \leq 0, \qquad t \geq 0.
\end{aligned}$$

Então F é decrescente, $F(t) \geq 0$ e $F(0) = \int_0^L v^2(0,x)\,dx = 0$, pois v satisfaz (4.1_c) com $f \equiv 0$, i.e., $v(0,x) \equiv 0$. Conclui-se pois que terá de ser $F(t) = 0, \forall t \geq 0$, o que implica que $v^2(t,x) \equiv 0$, ou ainda $v(t,x) \equiv 0$. $\square$

Exemplo 4.1. Determine-se a solução do problema $\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0 \leq x \leq 1, t \geq 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0,\ t \geq 0 \\ u(0,x) = x(1-x),\ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$

A função $f(x) = x(1-x)$ é de classe C^1 em $[0,1]$ e satisfaz $f(0) = f(1) = 0$. Pelo Teorema 9, a solução tem a forma (4.2), onde $L = 1, c = 1$, i.e.,

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x), \quad t \geq 0, x \in [0,1],$$

e b_n são os coeficientes da série de senos de f. Primitivando por partes, verifica-se que $b_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{8}{n^3\pi^3} & \text{se } n \text{ impar} \end{cases}$. Assim, a solução é dada na forma de série:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^3\pi^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t}\sin((2n-1)\pi x), \quad t \geq 0, x \in [0,1].$$

Considere-se agora a equação do calor com condições de fronteira (ainda de tipo Dirichlet) constantes mas não homogéneas:

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx},\ 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ u(t,0) = T_1, u(t,L) = T_2,\ t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x),\ 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $c, T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ e $L > 0$. Um pequeno truque permite reduzir esta situação ao caso (4.1). Considere-se a função

$$v(x) = T_1 + (T_2 - T_1)x/L.$$

Note-se que $v_t = v_{xx} = 0$, pelo que (4.1_a) é satisfeita. Tem-se também $v(0) = T_1, v(L) = T_2$. Então, com

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x)$$

e $w(t,x)$ solução de

$$\begin{cases} w_t = c^2 w_{xx}, \ 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ w(t,0) = w(t,L) = 0, \ t \geq 0 \\ w(0,x) = f(x) - v(x), \ 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{4.4}$$

vem que $u(t,x)$ é a solução de (4.3). Como (4.4) tem a forma (4.1), a sua solução é dada pelo processo acima descrito e estabelecido no Teorema 9.

Obviamente, mais difícil será considerar condições da forma $u(t,0) = a(t), u(t,L) = b(t)$, com $a(t), b(t)$ funções contínuas arbitrárias. O tratamento desta situação está fora do âmbito deste curso.

Exercício 4.1. Usando o método de separação de variáveis e séries de Fourier, resolver a equação do calor com condição inicial contínua e condições de fronteira homogéneas mas de **tipo Neumann**,

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx}, \ 0 \leq x \leq L, t \geq 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,L) = 0, \ t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x), \ 0 \leq x \leq L, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $L > 0$ e $f \in C^1([0,L])$.

Solução: $u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos(\frac{n\pi}{L}x)$, onde a_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ são os coeficientes da série de Fourier de cossenos de f.

O método de separação de variáveis (de Fourier) introduzido na Secção 3.1 pode ser explorado na resolução de outras EDP's, como por exemplo na resolução da **equação das ondas unidimensional**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, x \in [0,L]. \tag{4.6}$$

Esta equação pode ser usada para modelar o movimento de uma corda vibrante, com extremidades fixas: supondo que em repouso a corda ocupa o intervalo $[0,L]$ do eixo real, $u(t,x)$ representa o <u>deslocamento vertical</u> da corda na posição $x \in [0,L]$, em cada instante t. Procurando soluções $u(t,x) \not\equiv 0$ de (4.6) da forma

$$u(t,x) = T(t)X(x)$$

com condições de Dirichlet homogéneas

$$u(t,0) = u(t,L) = 0, \ t \geq 0, \tag{4.7}$$

facilmente se verifica que somos conduzidos a soluções

$$u_n(t,x) = \sin(\frac{n\pi}{L}x) \left(a_n \cos(\frac{cn\pi}{L}t) + b_n \sin(\frac{cn\pi}{L}t) \right), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.8}$$

onde $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, pelo que a *sobreposição* (i.e., a soma) de soluções em (4.8) é ainda uma solução de (4.6)-(4.7). Devido à convergência uniforme da série envolvida e das séries das suas derivadas parciais de segunda ordem, é ainda uma solução a função

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x) \left(a_n \cos(\frac{cn\pi}{L}t) + b_n \sin(\frac{cn\pi}{L}t) \right). \tag{4.9}$$

Supondo agora que $f, g : [0, L] \to \mathbb{R}$ são de classe C^2, C^1, respectivamente, e que f, g são zero para $x = 0, L$, procure-se a solução $u = u(t, x)$ dada na forma de série de Fourier que satisfaz ainda as *condições iniciais*

$$u(0, x) = f(x),\ u_t(0, x) = g(x), \quad x \in [0, L]. \tag{4.10}$$

Terá de ser

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L} x) = f(x),$$

pelo que em (4.9) as constantes a_n são os coeficientes da série de senos de f; analogamente, vem

$$u_t(0, x) = \frac{cn\pi}{L} b_n \sin(\frac{n\pi}{L} x) = g(x),$$

pelo que $\frac{cn\pi}{L} b_n$ são os coeficientes da série de senos de g.

Antes de Fourier, D'Alembert (1717-1783) havia já resolvido a equação das ondas por um processo alternativo, mais intuitivo e simples, conhecido como *método de D'Alembert*.

Este processo parte de duas observações, uma de cariz matemático e a outra físico. Primeiramente, note-se que em (4.6) as variáveis x e ct (ou $-ct$) têm um papel semelhante. Por outro lado, o movimento "ondulatório" mais simples é o de uma onda que se desloca no tempo por translação dum perfil inicial $f(x)$: se a onda tiver **velocidade** c (movimentando-se para trás ou para diante), o perfil obtido no instante t deverá ser $u(t, x) = f(x \pm ct)$. Estas ondas são denominadas de *ondas viajantes* (usando-se muitas vezes a terminologia inglesa de *travelling waves*).

É de facto simples mostrar que as funções da forma $u(t, x) = f(x \pm ct)$ com $x, t \in \mathbb{R}$ (idealização de uma corda de comprimento infinito, num tempo passado e futuro infinito) com f de classe C^2 são efectivamente soluções de (4.6).

Seguindo a metodologia de D'Alembert, considere-se a equação das ondas em $\mathbb{R}^2$,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \tag{4.11}$$

com condições iniciais

$$u(0, x) = f(x),\ u_t(0, x) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

onde se supõe que $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$; procurem-se agora soluções gerais $u(t, x)$ escritas na forma

$$u(t, x) = v(x - ct, x + ct)$$

com v de classe C^2. Introduzindo as variáveis auxiliares $r = x - ct, s = x + ct$, derivando duas vezes em ordem a t e a x pela regra da cadeia, é simples ver que $u(t, x)$ é solução de (4.11) se e só se

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s}(r, s) = 0.$$

Primitivando sucessivamente em ordem a s e a r, obtém-se

$$v(r, s) = p(r) + q(s), \qquad r, s \in \mathbb{R}.$$

Somos conduzidos a soluções

$$u(t,x) = p(x-ct) + q(x+ct), \quad x,t \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Introduzam-se agora as condições iniciais (4.12) em $\mathbb{R}$: do sistema

$$\begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ -cp'(x) + cq'(x) = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(x) + q(x) = f(x) \\ (-p(x) + q(x))' = \frac{1}{c} g(x) \end{cases}$$

e com $G(x)$ uma primitiva de g, vem

$$\begin{cases} q = \frac{1}{2}(f + \frac{1}{c}G) \\ p = \frac{1}{2}(f - \frac{1}{c}G) \end{cases}. \tag{4.14}$$

De (4.13)-(4.14), tem-se

$$\begin{aligned} u(t,x) = & \frac{1}{2}\big[f(x-ct) - \frac{1}{c}G(x-ct)\big] \\ & + \frac{1}{2}\big[f(x+ct) + \frac{1}{c}G(x+ct)\big], \end{aligned}$$

ou ainda a chamada **fórmula de D'Alembert**

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.15}$$

As soluções dadas pela fórmula de D'Alembert são soluções em $\mathbb{R}^2$, pelo que não há condições de fronteira do tipo (4.7). Se quisermos considerar soluções definidas para $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,L]$, podemos ainda usar a fórmula (4.15), mas, para o problema estar bem-posto, claramente as funções f, g em (4.10) terão de satisfazer também as condições de fronteira

$$f(0) = g(0) = 0, \;\; f(L) = g(L) = 0. \tag{4.16}$$

Além disso, a aplicação de (4.15) exige que as funções f, g estejam definidas em $\mathbb{R}$, para o que se consideram os prolongamentos por imparidade de f, g a $[-L, 0]$ e $2L$-periódicos em $\mathbb{R}$. Em resumo, para os problemas da forma

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, \;\; 0 \le x \le L, t \ge 0 \\ u(t,0) = u(t,L) = 0, \;\; t \ge 0 \\ u(0,x) = f(x), \;\; u_t(0,x) = g(x), \;\; 0 \le x \le L, \end{cases} \tag{4.17}$$

onde $f \in C^2([0,L]), g \in C^1([0,L])$ satisfazem (4.16), as soluções podem ser encontradas pelo método de separação de variáveis, obtendo-se (4.8), ou ainda (se também se tiver $f''(0) = f''(L) = 0$) através da fórmula de D'Alembert restringida a $\mathbb{R}_+ \times [0,L]$, com f, g substituídas respectivamente por $\tilde{f}, \tilde{g}$, onde

$$\tilde{f}(-x) = -f(x), \;\; \tilde{g}(-x) = -g(x), \quad x \in [L, 0],$$

e $\tilde{f}(x) = f(x+2L), \tilde{g}(x) = g(x+2L), x \in \mathbb{R}$ (ver [3]).

Exemplo 4.2. Usando a fórmula de D'Alembert, a solução do problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t \geq 0, x \in [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = x(\pi - x), u_t(0,x) = \sin x & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\big[\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)\big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin s \, ds \\ &= \frac{1}{2}\big[\tilde{f}(x-t) + \tilde{f}(x+t)\big] + \frac{1}{2}\big[\cos(x-t) - \cos(x+t)\big], \quad t \geq 0, x \in [0,\pi]\,, \end{aligned}$$

onde $\tilde{f}$ é o prolongamento 2π-periódico da função $f(x) = \begin{cases} x(\pi - x) & x \in [0,\pi] \\ x(\pi + x) & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$. Por exemplo, para $t = 1$ e $x = 2$, o valor da solução é

$$u(1,2) = \frac{1}{2}\big[\tilde{f}(1) + \tilde{f}(3)\big] + \frac{1}{2}\big[\cos 1 - \cos 3\big] = 2\pi - 5 + \frac{\cos 1 - \cos 3}{2} \approx 2.04833.$$

Bibliografia

1. L. Barreira, Análise Complexa e Equações Diferenciais, IST Press, Lisboa, 2009.

2. M. Figueira, Fundamentos de Análise Infinitesimal, Textos de Matemática, DM-FCUL, Lisboa, 1996.

3. M. Ramos, *Curso Elementar de Equações Diferenciais*, 2ª Ed., Textos de Matemática, Dep. Matemática da FCUL, Lisboa, 2002.

4. L. Sanchez, Tópicos sobre Séries de Fourier, texto de apoio ao curso de *Análise Infinitesimal IV*, Lisboa, 1999.