Métodos Matemáticos da Física 2013/14

Teste 1 29-03-2014

1.a) Determine as funções próprias $v(x)$ e valores próprios do operador d^2/dx^2 no domínio $x \in [0, \ell]$ que satisfazem as condições fronteira: $v'(0) = 0$, $v'(\ell) = 0$.
b) Encontre a solução geral $u(t, x)$ da seguinte equação diferencial, sujeita às condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = 0 , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, \ell) = 0 .$$

c) Encontre a solução geral $u(x, y)$ da equação de Laplace sujeita às condições fronteira indicadas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 , \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(\ell, y) = 0 , \qquad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = 0 .$$

2.a) Diga qual a definição de operador hermítico num espaço vetorial onde está definido um produto interno.
b) Considere o conjunto de funções $u(x)$ no intervalo $a \leq x \leq b$ onde o produto interno tem função peso $\rho(x) = 1$. Diga a que é igual o produto interno de duas funções $u(x)$, $v(x)$. Demonstre que o operador d^2/dx^2 é hermítico no espaço de funções que obedecem à condição fronteira $u(a) = 0$, $u'(b) = 0$.

3. Sejam as funções $y_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x/\ell}$, $n \in \mathbb{Z}$, definidas no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$.
a) Mostre que as funções $y_n(x)$ são ortogonais para o produto interno de função peso $\rho(x) = 1$. Calcule ainda o produto interno $\langle y_n | y_n \rangle$.
b) Admita que a função definida como

$$u(x) = \begin{cases} 1 , & -a \leq x \leq a \\ 0 , & |x| > a \end{cases} ,$$

pode ser expandida como uma série de Fourier: $u(x) = \sum_n c_n \, y_n(x)$. Calcule os coeficientes c_n da série de Fourier.
c) Obtenha a função $u(x)$ como uma série de senos e cosenos.
d) Diga justificando quais os valores da série de Fourier da função $u(x)$ nos pontos $x = a$, $x = \ell$.