

Geometria Analítica - cónicas e quádricas

32. Uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ tem valores próprios 3 e 5, e a eles estão associados, respetivamente, os vetores próprios $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Prove que A é simétrica;
(b) Determine A .

33. Mostre que uma matriz $Q \in M_2(\mathbb{R})$ é ortogonal se e só se for de uma das formas seguintes:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

34. Seja $Q \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal. Mostre que $\det(Q) = 1$ ou $\det(Q) = -1$.

35. Para cada uma das seguintes matrizes simétricas reais A , determine uma matriz ortogonal Q tal que $Q^T A Q$ seja diagonal:

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

36. Obtenha uma equação reduzida e classifique a cónica dada por cada uma das seguintes equações:

- (a) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + x + y - 1 = 0$;
(b) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + x + y + 1 = 0$;
(c) $-7x^2 - 12xy + 2y^2 + x + 2y - 1 = 0$;
(d) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + y - 1 = 0$;
(e) $x^2 + 4xy + 4y^2 + x + 2y - 1 = 0$;

37. Classifique e esboce a cónica do plano real \mathbb{R}^2 dada por cada uma das seguintes equações:

- (a) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - \sqrt{2}x = 0$;
(b) $4x^2 + 4xy + y^2 - x = 0$;
(c) $xy + x + y = 0$;
(d) $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$;
(e) $4xy + 3y^2 + 2\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$;
(f) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + xy = 0$;

- (g) $xy - 2x - 4 = 0$;
 - (h) $x^2 - 2x + 1 = 0$;
 - (i) $x^2 + y^2 - xy - 3 = 0$.
38. Para cada matriz A das alíneas (b) a (d) do exercício 35 descreva a figura geométrica formada pelos pontos $X^T = [x \ y \ z]$ de \mathbb{R}^3 que satisfazem a equação:
- (a) $X^T A X = 0$;
 - (b) $X^T A X = 5$.
39. Classifique e esboce a quádrlica do espaço real \mathbb{R}^3 dada por cada uma das seguintes equações:
- (a) $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$;
 - (b) $y^2 + 2z^2 + 2\sqrt{3}yz = 0$;
 - (c) $x^2 + y^2 - 1 = 0$;
 - (d) $x^2 + y^2 + z^2 = -1$;
 - (e) $9x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 24xy - 40x + 30y = 0$;
 - (f) $3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz = 2$;
 - (g) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$;
 - (h) $x^2 + 2xy + y^2 = 16$;
 - (i) $y^2 + 3y + 2 = 0$.