Métodos Matemáticos da Física 2013/14

Teste 3 02-06-2014

1.a) Calcule a transformada de Fourier da função $g(x) = \Theta(x)\, e^{-a\,x}$, $a > 0$.
b) Determine a transformada de Fourier da função

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - z)\, f(z)\, dz\,,$$

sabendo que $\tilde{f}(k) = e^{-c\,k^2}$, $c > 0$.
c) Calcule a derivada $g'(x)$ e obtenha uma relação entre $y'(x)$ e $y(x)$.

2. Considere a equação diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+\,.$$

a) Deduza a equação diferencial a que obedece a transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$.
b) Determine $\tilde{u}(t, k)$ em função de t e a solução geral da equação, $u(t, x)$.

3. Considere a equação diferencial não homogénea

$$y''(x) + a^2\, y(x) = -f(x)\,, \qquad x \in [-\ell, +\ell]\,, \qquad a > 0\,.$$

a) Explicite a expressão de uma solução particular $y(x)$ dada em termos de uma função de Green $G(x, z)$.
b) Deduza a equação diferencial a que satisfaz a função de Green $G(x, z)$.
c) Obtenha a forma da dependência em x de $G(x, z)$ para $x < z$.

$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx\,, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk\,,$

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\, \delta(x)\,, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$