Aplicações de trigonometria e do teorema da razão

Baricentro, ortocentro e circuncentro de um triângulo

Aula 15 - 12/04/2019

Sumário

- Vector bissector
- Diagonal de um pentágono e razão de ouro
- Lei dos senos e circunferência circunscrita
- Baricentro, ortocentro e circuncentro de um triângulo
- Recta de Euler

Vector bissector

Definição. Sejam u e v vectores não nulos. Um vector não nulo w diz-se um vector bissector de u e v se o ângulo entre u e w for igual ao ângulo entre w e v.

Proposição. Sejam u, v vectores linearmente independentes. Então

$$w = \frac{u}{|u|} + \frac{v}{|v|}$$

é um vector bissector de u e v.

Dem. Temos que

$$\left(\frac{u}{|u|} + \frac{v}{|v|}\right) \cdot \left(\frac{u}{|u|} - \frac{v}{|v|}\right) = 0.$$

Temos assim que

$$w \cdot \frac{u}{|u|} - w \cdot \frac{v}{|v|} = \frac{w \cdot u}{|u|} - \frac{w \cdot v}{|v|} = 0.$$

Dividindo esta igualdade por $|w|$, obtemos

$$\frac{w \cdot u}{|w|\,|u|} = \frac{w \cdot v}{|w|\,|v|}.$$

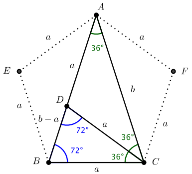
Portanto o ângulo entre u e w é igual ao ângulo entre w e v.

Nota. Se o ângulo entre u e v for igual a π, um vector bissector terá de ser perpendicular a u e a v. Se o ângulo entre u e v for igual a 0, qualquer múltiplo de u ou de v por um escalar positivo é um vector bissector de u e v.

A diagonal de um pentágono e o número de ouro

Dado um pentágono regular de lado a e diagonal b, seja $[ABC]$ um triângulo formado um dos seus lados e duas das suas diagonais, com ângulos $A = \pi/5, B = C = 2\pi/5$. Seja CD a bissectriz do ângulo C. Como $\widehat{DCB} = \pi/5$ e $\widehat{CBD} = 2\pi/5$, então $\widehat{BDC} = 2\pi/5$ e portanto $\triangle(ABC) \simeq \triangle(CBD)$. Como têm dois ângulos iguais, os triângulos $[ABC], [CBD]$ e $[ACD]$ são isósceles, logo $b = \overline{AB} = \overline{AC}$ e $a = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AD}$. Portanto $\overline{BD} = b - a$. Assim, como a razão entre $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ é igual à razão entre $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$, podemos concluir $\dfrac{b}{a} = \dfrac{a}{b-a}$.

Temos então que $(b/a)^2 = 1 + b/a$.



Fazendo $a = 1$, obtemos $b^2 = b + 1$, ou seja, $b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, o número de ouro. Pela lei dos cossenos, conclui-se que $\cos(\pi/5) = \phi/2$.

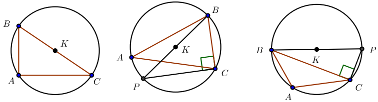
Nota. Utilizando a lei dos senos e a lei dos cossenos pode demonstrar-se que, num triângulo, a ângulos iguais se opõem lados iguais e viceversa.

A lei dos senos e a circunferência circunscrita

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo e seja r o raio da circunferência circunscrita a $\triangle(ABC)$. Então

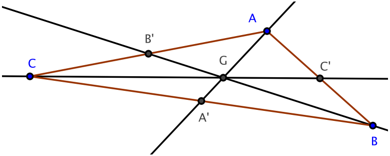
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r.$$

Dem. Seja K o centro da circunferência circunscrita. Temos que $\triangle(ABC)$ está inscrito numa semicircunferência se e só se for rectângulo. Suponhamos, sem perda de generalidade que A é o ângulo recto. Então $\sin A = 1$ e $a = 2r$. Se $\triangle(ABC)$ não for rectângulo, então K não pertence a nenhum dos lados do triângulo. Seja P a intersecção da recta BK com a circunferência. Então $\triangle(BPC)$ é rectângulo e $\sin P = a/2r$. Se K é interior ao triângulo, os ângulos A e P estão inscritos no mesmo arco, logo são iguais. Portanto $\sin A = \sin P = a/2r$. Se K não é interior ao triângulo, suponhamos, sem perda de generalidade, que K está no semiplano oposto ao vértice A relativamente à recta BC. Então A e P estão inscritos em arcos complementares, logo $A + P = \pi$, portanto $\sin A = \sin P = a/2r$.



Baricentro de um triângulo

Sejam A, B, C três pontos não colineares. O baricentro ou centro de massa do triângulo $[ABC]$ é o ponto de intersecção das suas medianas, ou seja, o ponto de intersecção das rectas que unem cada vértice ao ponto médio do lado oposto.
Denotamos o baricentro por G.



Teorema. Seja O a origem e sejam G o baricentro de $\triangle(ABC)$ e A', B', C' os pontos médios dos lados opostos aos vértices A, B, C, respectivamente. Têm-se as seguintes igualdades:

- $AG : GA' = BG : GB' = CG : GC' = 2 : 1.$
- $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}.$

Dem. Exercício.

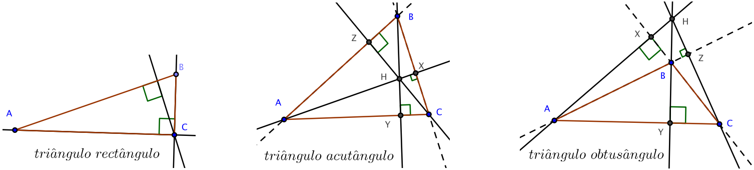
Alturas de um triângulo

Sejam A, B, C três pontos não colineares do plano. As alturas de um triângulo são as rectas que contêm cada vértice do triângulo e são perpendiculares ao lado oposto ao mesmo.
Se $\triangle(ABC)$ é rectângulo, então, por definição, as três alturas contêm o vértice que corresponde ao ângulo recto, logo são concorrentes.

Lema. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo. Sejam X, Y, Z os pés das perpendiculares por cada um dos vértices de $\triangle(ABC)$ sobre o lado oposto. Então

$$BX : XC = \tan C : \tan B; \;\; CY : YA = \tan A : \tan C; \;\; AZ : ZB = \tan B : \tan A.$$

Dem. Exercício.



triângulo rectângulo *triângulo acutângulo* *triângulo obtusângulo*

Pelo teorema de Ceva, concluimos que as três alturas de um triângulo não rectângulo também são concorrentes.

Ortocentro de um triângulo não rectângulo

O ponto de concorrência das três alturas de $\triangle(ABC)$ é designado por ortocentro e é denotado por H.

Teorema. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo e seja H o seu ortocentro. Se O for a origem, então

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB} + \tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Dem. Pelo lema anterior e pela nota ao teorema de Ceva, temos

$$CH : HZ = \tan A \tan C + \tan B \tan C : \tan^2 C = \tan A + \tan B : \tan C.$$

Pelo teorema da razão,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan C\,\overrightarrow{OC} + (\tan A + \tan B)\,\overrightarrow{OZ}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Pelo lema anterior e pelo teorema da razão, temos ainda

$$\overrightarrow{OZ} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB}}{\tan A + \tan B}.$$

Concluimos assim que

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\tan A\,\overrightarrow{OA} + \tan B\,\overrightarrow{OB} + \tan C\,\overrightarrow{OC}}{\tan A + \tan B + \tan C}.$$

Circuncentro de um triângulo - teorema de Euler

Proposição. Sejam A, B, C três pontos não colineares. O centro da circunferência circunscrita a $\triangle(ABC)$ incide nas três mediatrizes dos lados de $\triangle(ABC)$.

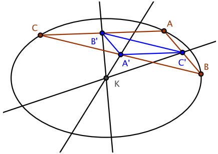
Dem. Exercício.

Este ponto é designado circuncentro de $\triangle(ABC)$ e é denotado K.

Definição. Seja $[ABC]$ um triângulo e sejam A' o ponto médio de $[BC]$, B' o ponto médio de $[AC]$ e C' o ponto médio de $[AB]$. O triângulo $[A'B'C']$ diz-se triângulo medial de $\triangle(ABC)$.

Teorema. (Teorema de Euler) Sejam A, B, C três pontos não colineares. O circuncentro do triângulo $[ABC]$ coincide com o ortocentro do triângulo medial $[A'B'C']$

Dem. As alturas de $\triangle(A'B'C')$ são as rectas perpendiculares a cada lado, que incidem no vértice oposto, portanto são as mediatrizes dos lados de $\triangle(ABC)$.



Vector posição do circuncentro de um triângulo

Pelo teorema de Euler, sabemos que o circuncentro de $\triangle(A, B, C)$ é o ortocentro do triângulo medial de $\triangle(A, B, C)$. Assim, temos que se $\triangle(ABC)$ é rectângulo, o seu circuncentro K é o ponto médio da hipotenusa.

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo não rectângulo e seja K o seu circuncentro. Se O for a origem, então

$$\overrightarrow{OK} = \frac{(\tan B + \tan C)\overrightarrow{OA} + (\tan A + \tan C)\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B)\overrightarrow{OC}}{2(\tan A + \tan B + \tan C)}.$$

Dem. Seja $\triangle(A'B'C')$ o triângulo medial de $\triangle(ABC)$. Pelo teorema de Euler, temos

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\tan A' \, \overrightarrow{OA'} + \tan B' \, \overrightarrow{OB'} + \tan C' \, \overrightarrow{OC'}}{\tan A' + \tan B' + \tan C'}.$$

Como $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, temos que $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$,logo

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\tan A \, \overrightarrow{OA'} + \tan B \, \overrightarrow{OB'} + \tan C \, \overrightarrow{OC'}}{\tan A + \tan B + \tan C}$$

$$= \frac{(\tan B + \tan C)\overrightarrow{OA} + (\tan A + \tan C)\overrightarrow{OB} + (\tan A + \tan B)\overrightarrow{OC}}{2(\tan A + \tan B + \tan C)}.$$

Recta de Euler

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero. Então o baricentro, o ortocentro e o circuncentro coincidem.

Dem. Num triângulo equilátero, todos os ângulos internos são iguais a $\pi/3$, portanto $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OK}$, ou seja os pontos G, H, K coincidem.

Proposição. Seja $[ABC]$ um triângulo não equilátero.
Então G, H, K são pontos colineares e tem-se $KG : GH = 1 : 2$.

Dem. Tem-se que G, H, K são pontos colineares se e só se os vectores $\overrightarrow{KG}$, $\overrightarrow{GH}$ forem linearmente dependentes, ou seja se $\overrightarrow{KG} = \lambda\overrightarrow{GH}$, $\lambda \neq 0$. Fazendo alguns cálculos, prova-se que $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{KG}$, o que é equivalente a $KG : GH = 1 : 2$.

Definição. A recta de Euler é a recta que contém o baricentro, o ortocentro e o circuncentro de um triângulo não equilátero.