Métodos Matemáticos da Física 2019/20

Série 2

1. Obtenha a relação entre as componentes u_i de um vector $u = \sum_i u_i\, e_i$ numa base $\{e_i\}$ e os produtos internos $\langle e_i | u \rangle$:
a) numa base genérica com produto interno dado por $G_{ik} = \langle e_i | e_k \rangle$;
b) numa base ortogonal;
c) numa base ortonormada.

2. Obtenha a relação entre os elementos da matriz A_{ik} associada ao operador $\hat{A}$ definido por, $\hat{A}\, e_k = \sum_i A_{ik}\, e_i$, e os elementos da matriz $a_{ik} = \langle e_i | \hat{A}\, e_k \rangle$:
a) numa base genérica com produto interno dado por $G_{ik} = \langle e_i | e_k \rangle$;
b) numa base ortogonal;
c) numa base ortonormada.

3. Seja A uma matriz quadrada diagonal de elementos $A_{ii} = a_i$. Determine as condições a que obedecem os elementos de uma matriz quadrada B que comute com A, $A\,B = B\,A$:
a) no caso de matrizes de dimensão 2×2;
b) para matrizes de dimensão arbitrária.

4. Seja A um operador normal decomposto em termos de dois operadores hermíticos B, C tal que: $A = B + i\,C$.
a) Prove que $B\,C = C\,B$.
b) Estabeleça as relações válidas entre os vectores e valores próprios dos operadores A, B, C.

5. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a) Verfique se A é uma matriz normal.
b) Decomponha A em termos de duas matrizes hermíticas B, C: $A = B + i\,C$. Verifique se B, C comutam entre si.
c) Determine os valores próprios e vectores próprios de A, B, C.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

a) Verfique se A é uma matriz normal.
b) Determine os seus valores próprios e vectores próprios.
c) Calcule A^2 e determine os seus valores próprios.
d) Decomponha A em termos de duas matrizes hermíticas B, C: $A = B + i\,C$. Verifique se B, C comutam entre si.