Geometria / Geometria I - Ano lectivo 2018/2019
Folha 1 - Axiomas de incidência

1. Mostre que o seguinte sistema de axiomas é equivalente ao sistema de axiomas de incidência de Hilbert.

   R.1 *Axioma da recta.* Por dois pontos passa uma única recta.

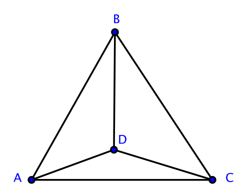
   R.2 *Axioma do plano.* Por três pontos não colineares passa um único plano.

   R.3 *Axioma da dimensão.* Uma recta contém pelo menos dois pontos. Um plano contém pelo menos duas rectas. Existem pelo menos dois planos.

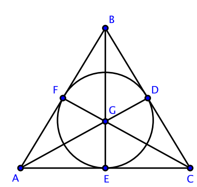
   R.4 *Axioma da intersecção recta-plano.* Se dois pontos de uma recta pertencem a um plano, então a recta que os contém está contida no plano.

   R.5 *Axioma da intersecção plano-plano.* A intersecção de dois planos não disjuntos é uma recta.

2. Mostre que os axiomas de incidência $R.1, R.2, R.3, R.4$ e $R.5$ são válidos no "modelo do tetraedro".



3. Investigue se a "geometria dos 7 pontos e 7 rectas"satisfaz os axiomas de incidência de Hilbert do plano (axiomas I.1, I.2, I.3).



4. Considere uma geometria onde são válidos todos os axiomas de incidência e demonstre as seguintes afirmações.

   (a) Uma recta e um plano que não a contém ou são disjuntos ou têm um único ponto em comum.

   (b) Dada uma recta e um ponto que não lhe pertence, existe um único plano que os contém.

   (c) Dadas duas rectas concorrentes, existe um único plano que as contém.

5. Considere uma geometria onde são válidos todos os axiomas de incidência e diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas.

   (a) Sejam r_1 e r_2 rectas e α um plano. Seja $P = r_1 \cap \alpha$. Se $r_2 \subset \alpha$ e $P \notin r_2$, então $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

   (b) Se α e β forem planos e contiverem três pontos em comum, então $\alpha = \beta$.

6. Seja $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Consideremos uma geometria em $\mathcal{A}$ interpretando os conceitos primitivos da seguinte forma:

   - pontos - todos os elementos do conjunto $\mathcal{A}$;
   - rectas - todos os subconjuntos de $\mathcal{A}$ com precisamente dois elementos;
   - planos - todos os subconjuntos de $\mathcal{A}$ com quatro elementos a, b, c, d, tais que a sua "soma-nim" $a \oplus b \oplus c \oplus d$ é igual a 0.
   - incidir - pertencer a.

   Mostre que esta geometria satisfaz os axiomas de incidência R.1, R.2, R.3, R.4 e R.5.

Nota 1. A soma-nim de números naturais é o número que corresponde à representação binária da soma da representação desses números na base 2 efectuada coordenada a coordenada. Por exemplo, $1 \oplus 2 \oplus 4 \oplus 5 = 2$. De facto, tem-se

$$\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \textit{soma} & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Logo, nesta geometria, o conjunto $\{1, 2, 4, 5\}$ não é um plano.

Mas fazendo $4 \oplus 5 \oplus 6 \oplus 7$, obtemos 0, logo, nesta geometria, o conjunto $\{4, 5, 6, 7\}$ é um plano.

$$\begin{array}{r|ccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \textit{soma} & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Nota 2. Observe-se que, para quaisquer $a, b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, se tem

$$a \oplus b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad \text{e} \quad a \oplus b = 0 \text{ se e só se } a = b.$$