Métodos Matemáticos da Física 2017/18

Exame 2 07-07-2018

1. Considere a expansão em série de Fourier em termos das funções $y_n(x) = e^{i\,2\pi\,n\,x/L}$, $n \in \mathbb{Z}$, no intervalo $0 \leq x \leq L$.
a) Calcule o produto interno de funções $\langle y_n | y_m \rangle$ para $n \neq m$ e para $n = m$.
b) Demonstre como obter os coeficientes c_n da série de Fourier, $\sum_n c_n\, y_n(x) = u(x)$, a partir de uma função $u(x)$ arbitrária.
c) Determine a série de Fourier da função $u(x) = \cosh x$.

2. Seja o problema de Sturm-Liouville

$$(2x - x^2)\, y''(x) + (2 - 2\,x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \;, \qquad x \in [0, 2] \;.$$

a) Verifique que as funções $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - x$, são funções próprias e determine os respectivos valores próprios.
b) Defina, justificando, o produto interno de funções adequado a este problema.
c) Calcule os produtos internos $\langle y_0 |\, y_2 \rangle$, $\langle y_1 |\, y_2 \rangle$, onde $y_2(x) = 1 + a_1\, x + a_2\, x^2$, com coeficientes a_1, a_2 arbitrários.
d) Determine os coeficientes a_1, a_2 que anulam os dois produtos internos $\langle y_0 |\, y_2 \rangle$, $\langle y_1 |\, y_2 \rangle$. Verifique que a função $y_2(x)$ é nesse caso também uma função própria.

3.a) Represente graficamente as funções

$$f(x) = -x + (2\,x + 2)\,\Theta(x) \;, \qquad g(x) = -x + 2\,x\,\Theta(x) \;.$$

b) Obtenha as expressões simplificadas das funções generalizadas $f'(x)$, $g'(x)$. Diga que diferença qualitativa existe entre as funções $f(x)$, $g(x)$ que justifica a diferença entre $f'(x)$ e $g'(x)$.
c) Calcule o integral $\int_{-1}^{+2} f'(x)\, dx$ usando por um lado, a expressão de $f'(x)$ obtida na alínea b), e por outro lado, a sua relação com a função $f(x)$. Compare os dois resultados.

4. Considere a equação de difusão definida no domínio $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;.$$

a) Escreva a função $u(t, x)$ em termos da sua transformada de Fourier $\tilde{u}(t, k)$ e deduza a equação diferencial a que obedece $\tilde{u}(t, k)$.
b) Determine $\tilde{u}(t, k)$ em função do tempo e do seu valor inicial em $t = 0$ e encontre a expressão da solução geral, $u(t, x)$.
c) Dada a condição inicial $u(0, x) = \delta(x)$, obtenha $u(t, x)$ e a sua expressão explícita em função de x e de t para $t > 0$, sabendo que a transformada de Fourier da função gaussiana $f(x) = e^{-a^2\, x^2}$ é igual a $\tilde{f}(k) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-a^{-2}\, k^2/4}$.

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,k\,x}\, dx \;, \qquad f(x) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)\, e^{i\,k\,x}\, dk \;,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\,k\,x} dk = 2\pi\, \delta(x) \;, \qquad 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k)^*\, \tilde{g}(k)\, dk$$