Challenge 1

João Cordeiro 53688
José Lopes 52878
João Olívia 52875
Ernesto González 52857

2019-2020

1 Problema 1

Considere-se uma expansão adiabática reversível do gás ideal entre um estado inicial 1 e um estado final 2. Mostre que:

a) $W_{1\to 2} = -\frac{3}{2}NK_B(T_1 - T_2)$

Demonstração. Tem-se que, para um processo adiabático

$$dQ = 0,$$

então pela 1ª Lei da Termodinâmica vem

$$dU = dQ + dW = dW.$$

Por outro lado, para o gás ideal,

$$dU = C_V dT,$$

com $C_V = \frac{3}{2}NK_B$.
Então obtemos que

$$dW = C_V dT = \frac{3}{2}NK_B dT.$$

Integrando, entre 1 e 2

$$W_{1\to 2} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{3}{2}NK_B dT = \frac{3}{2}NK_B \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$W_{1\to 2} = \frac{3}{2}NK_B(T_2 - T_1) = -\frac{3}{2}NK_B(T_1 - T_2) \tag{1}$$

$\square$

b) $W_{1\to 2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1}$

Demonstração. De (1)

$$W_{1\to 2} = -\frac{3}{2}NK_BT_1 + \frac{3}{2}NK_BT_2$$

Recordando que para o gás ideal, $pV = NK_BT$ vem

$$W_{1\to 2} = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\frac{2}{3}} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\frac{5}{3} - 1}.$$

Sabendo que o índice adiabático é $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$ e fácil ver que

$$W_{1\to 2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{\gamma - 1}. \tag{2}$$

$\square$

c) $W_{1\to 2} = \frac{p_2V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$

Demonstração. Para uma expansão adiabática do gás ideal reversível obteve-se em aula o seguinte resultado:

$$\frac{p_2V_2}{p_1V_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1} \tag{3}$$

De (3) vem

$$p_1V_1 = p_2V_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}.$$

Substituindo em (2),

$$W_{1\to 2} = \frac{p_2V_2 - p_2V_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}}{\gamma - 1} = \frac{p_2V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}\right]. \tag{4}$$

Mais uma vez, de (3) vem

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} \iff \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \iff \frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Substituindo em (4), ficamos com

$$W_{1\to 2} = \frac{p_2 V_2}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

□

2 Problema 2

Partindo de $U = U(V, p)$, mostre que:

$$C_p = \left[p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p\right].$$

Demonstração. Como $U = U(V, p)$, pela regra da cadeia surge

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp. \tag{5}$$

Pela 1ª Lei da Termodinâmica, sabemos que $dU = dQ + dW$ e $dQ = CdT$. Tratando-se de trabalho reversível, vem $dW = -pdV$. Substituíndo em (5) vem

$$dU = CdT - pdV. \tag{6}$$

Por (5) e (6),

$$CdT - pdV = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp$$

Tomando $V = V(T, p)$, da regra da cadeia surge

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp. \tag{7}$$

$$CdT - p\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T + dp\right] = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_V dp$$

$$CdT - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT - p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV + \left(\frac{\partial U}{\partial p}\right)_v dp$$

Se p for constante, vem $dp = 0$, e portanto,

$$CdT - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p dV.$$

Por (7) vem,

$$CdT - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT.$$

Pela regra da cadeia,

$$CdT - p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_p dT$$

$$C_p = \left[p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)\right]$$

em que C_p é a capacidade calorífica a pressão constante. $\square$

3 Problema 3

Numa canção de paródia à ciência Flanders e Swan sumarizam a primeira lei da termodinâmica dizendo que *heat is work and work is heat*. Comente.
Tendo em conta que tanto trabalho ("work") como calor ("heat") são entidades energéticas, então podemos afirmar que são "interchangeable"pelo que são manifestações diferentes da mesma entidade - energia. Segundo Einstein, até massa podia entrar na letra da paródia.