Exercícios de Análise Matemática III/Cálculo Diferencial e Integral III

(DM e DF - 2019/20)

Capítulo I - Equações Diferenciais (2^a parte)

Séries de Fourier e EDPs

1. Usando o método de separação de variáveis, determine a solução $u(t,x)$ do problema
$$\begin{cases} u_t = 3u_{xx}, \quad 0 \le x \le \pi, t \ge 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, \quad t \ge 0 \\ u(0,x) = \sin x + \sin(3x), \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

2. Esboce o gráfico de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódicas de período 2, se possível contínuas, tais que:

   (i) $f(x) = x^2$ em $[0,2[$; (ii) $f(x) = x^2$ em $]-1,1[$; (iii) $f(x) = \sin(\pi x/2)$ em $[0,2[$; (iv) $f(x) = \sin(\pi x/2)$ em $]-1,1[$; (v) $f(x) = \sin(\pi x/4)$ em $]-1,1[$; (vi) $f(x) = x(2-x)$ em $]0,2[$; (v) $f(x) = 0$ em $]-1,0[$, $f(x) = \sin(\pi x)$ em $]0,1[$.

3. Se $f \in SC(\mathbb{R})$, i.e., f é seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$, e periódica de período T, mostre que
$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx, \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$
   (Sugestão. Com $\int_a^{a+T} = \int_a^T + \int_T^{a+T}$, efectue uma mudança de variável na 2ª parcela.)

4. Seja $a(t)$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e T-periódica. Verifique que as soluções da EDO $y' + a(t)y = 0$ são (todas) T-periódicas se e só se $\int_0^T a(t)\,dt = 0$.

5. (a) Determine a série de Fourier de $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$ e indique qual é a sua função soma.

   (b) Determine a série de Fourier de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} 1, & -2 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 2, \end{cases}$ e f é periódica de período 4. Sendo $S(x)$ a soma da série, calcule $S(0), S(-2), S(4), S(3), S(5), S(7/2), S(9/2), S(-15/2), S(100/3)$.

6. A série de Fourier da função x^2 definida em $[-\pi,\pi]$ é $x^2 \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$.

   a) Use esta série para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   b) Sendo P_2 o polinómio de Fourier de ordem 2 de $f(x) = x^2$ em $[-\pi,\pi]$, escreva P_2 e determine o erro quadrático total de P_2 relativo a f no intervalo $[-\pi,\pi]$.

   c) Escreva a série de Fourier de x^2 em $[-1,1]$.

   d) Sendo a_0, a_n, b_n os coeficientes de Fourier de x^2 em $[-\pi,\pi]$, determine a_0, a_5, b_7.

7. Determine as séries de cossenos e de senos das seguintes funções e indique as respectivas funções soma: a) 1 em $[0,1]$; b) x em $[0,1]$; c) $\sin x$ em $[0,\pi]$.

8. Seja $f(x) = 1 + |x-2k|$, $\forall x \in [2k-1, 2k+1[$, $k \in \mathbb{Z}$.

   (a) Prove que $f(x) = \frac{3}{2} - \sum_{n\geq 1} \frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos((2n-1)\pi x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Usando a alínea anterior, calcule: (i) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^2}$; (ii) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)^4}$.

9. Usando a fórmula de D'Alembert, encontre a solução $u = u(t,x)$ em $\mathbb{R}^2$ da **equação das ondas** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $x \in [0,L], t \in \mathbb{R}$ com condições iniciais: (i) $u(0,x) = 0, u_t(0,x) = x$; (ii) $u(0,x) = 1, u_t(0,x) = \cos x$.

10. Considere o rectângulo $R = [0,a]\times[0,b] \subset \mathbb{R}^2\,(a,b>0)$. Pelo método de separação de variáveis, encontre soluções $u(x,y) \not\equiv 0$ da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ da **equação de Laplace** em R com condições de fronteira nulas em três lados de R, expressas pelo sistema
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y)\in R \\ u(x,0) = u(x,b) = 0,\ x\in[0,a], \\ u(0,y) = 0,\ y \in [0,b]. \end{cases}$$

11. Usando separação de variáveis e séries de Fourier, resolva $\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0\leq x\leq 1, t\geq 0 \\ u(t,0) = u(t,1) = 0,\ t\geq 0 \\ u(0,x) = x(1-x),\ 0\leq x\leq 1, \end{cases}$

    apresentando o resultado na forma de série.

Algumas fórmulas úteis

Série de Fourier de $f \in SC([-L,L])$:
$$f(x) \quad\sim\quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

Erro quadrático E: para P_N polinómio de Fourier de ordem N de $f \in SC([-L,L])$:
$$E^2 := \|f-P_N\|^2 = \|f\|^2 - L\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N}(a_k^2+b_k^2)\right).$$

Fórmula de D'Alembert:
$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big[f(x-ct)+f(x+ct)\big] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^2.$$

Algumas soluções: 1.$u(t,x) = e^{-3t}\sin x + e^{-27t}\sin(3x)$. 5.(a) $f \sim \sum_{k\geq 1}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)\pi x)$; 5.(b) $f \sim 1 - \sum_{k\geq 1}\left[\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(\frac{(2k-1)\pi}{2}x) + \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)\right]$; 6. (b) erro: $\left(\frac{8}{45}\pi^5 - 17\pi\right)^{1/2}$; (c) $x^2 \sim \dfrac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos(n\pi x)$ em $[-1,1]$. 8.b)(i) $\pi^2/8$, (ii) $\pi^2/96$. 9. (i) $u(t,x) = \frac{1}{4c}\Big[(x+ct)^2 - (x-ct)^2\Big]$. 10. $u(x,y) = A\sinh(\frac{n\pi x}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})$ com $A\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$.