AM3/CDI3

Resolução do Exame de 4 Janeiro de 2018

Parte I

1\. (a) C ; (b) A ; (c) C.

2\. (a) PVI $\begin{cases} y' + \frac{2y}{t} = (2+t^3)^2 & (1) \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

Dom da EDO: $\{(t,y) : t \neq 0, y \in \mathbb{R}\}$

A EDO é uma eq. linear de 1ª ordem. Procura-se um factor integrante:

$a(t) = \frac{2}{t}$, $A(t) = 2\log t$ (para $t>0$), Factor Integ: $e^{A(t)} = t^2$.

Multiplicando a EDO (1) por t^2, obtém-se

$$(yt^2)' = t^2(2+t^3)^2 \Leftrightarrow yt^2 = \frac{1}{9}(2+t^3)^3 + C \Leftrightarrow y = \frac{(2+t^3)^3}{9t^2} + \frac{C}{t^2}$$

C.I: $y(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{9}3^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = 3 + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$

Solução do PVI: $y = \frac{1}{9t^2}(2+t^3)^3 - \frac{5}{2t^2}$ em $]0,+\infty[$.

(b) PVI $\begin{cases} \frac{x^2 y'}{\sqrt{1+y}} = 4 & (2) \\ y(1) = 0 \end{cases}$ dom da EDO (2): $\{(x,y) : y > -1\}$

A EDO (2) implica que $x \neq 0$. Dividindo por x^2, obtém-se

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y}} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{1+y} = -\frac{4}{x} + C$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y} = -\frac{2}{x} + C_1,$$ C_1 constante, para x tal que $-\frac{2}{x} + C_1 > 0$.

Introduzindo a C.I. $y(1)=0$, tem-se $1 = -2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 3$.

Assim, $\sqrt{1+y} = 3 - \frac{2}{x} \Leftrightarrow y = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 - 1$, para x tal que $\begin{cases} 3 - \frac{2}{x} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > \frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > 0 \end{cases}$. Assim, a sol. do PVI dado é

$$y(x) = \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2 - 1 \quad \text{em } \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[.$$

(c) $y'' + 2y' = \dfrac{2e^{-4t}}{1+e^{-4t}}$. (3)

A eq. caract. da eq. homogénea associada $y''+2y'=0$ é $\lambda^2+2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda+2)=0$, com raízes 0 e -2.

Base de sol. da eq. homog.: $\{1, e^{-2t}\}$.

Procuram-se as soluções de (3) pelo MVC: com $c_1=c_1(t)$, $c_2=c_2(t)$ e $y=c_1+c_2e^{-2t}$, resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} c_1'\cdot 1 + c_2' e^{-2t} = 0 \\ 0 \cancel{+}\cancel{2} c_2' e^{-2t} = \dfrac{\cancel{2} e^{-4t}}{1+e^{-4t}} \end{cases}$$

Daqui tem-se:

$$c_2' = -\frac{e^{-2t}}{1+e^{-4t}} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2t}) + k_2, \quad k_2\in\mathbb{R}$$

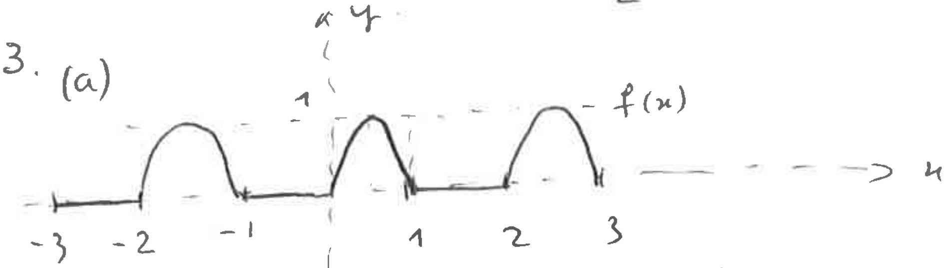
$$c_1' = -c_2' e^{-2t} = \frac{+e^{-4t}}{1+e^{-4t}} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}\log(1+e^{-4t}) + k_1, \quad k_1\in\mathbb{R}.$$

Finalmente, obtêm-se as soluções de (3) dadas por

$$y = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2t}) + k_2\right)e^{-2t} + \frac{1}{4}\log(1+e^{-4t}) + k_1$$

$$= k_1 + k_2 e^{-2t} + \frac{e^{-2t}}{2}\,\mathrm{arctg}\,(e^{-2t}) + \frac{1}{4}\log(1+e^{-4t}), \quad k_1,k_2\in\mathbb{R} \quad (t\in\mathbb{R})$$

3. (a)



Polin. de Fourier de f de ordem 4:

$$P_4(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos(2\pi x) + \frac{1}{15}\cos(4\pi x)\right)$$

(b) A função $f(x)$ é contínua, pelo que $f(x)$ coincide com a soma da sua série de Fourier em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(\pi x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\cos(2n\pi x), \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

fazendo $x=\frac{1}{2}$, obtém-se

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\overbrace{\cos(\pi n)}^{=(-1)^n}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)} = \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \times \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{4}$$

(c) Tem-se $f'(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0 \\ \pi \cos(\pi x), & 0 < x < 1 \end{cases}$, e f' 2-periódica.

Como $f' \in SC(\mathbb{R})$, pelo Teorema de Fourier a soma $S(0)$ da sua série de Fourier em $x=0$ é

$$S(0) = \frac{f'(0^-) + f'(0^+)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

[outro modo: Como f é contínua, a série de Fourier de f' é obtida da de f derivando-se termo-a-termo. Assim,

$$f' \sim \frac{\pi}{2} \cos(\pi x) + \frac{2}{\cancel{\pi}} \sum_{n\geq 1} \frac{2n\cancel{\pi}}{(2n-1)(2n+1)} \sin(2n\pi x)$$

Com $x=0$, obtém-se a soma

$$S(0) = \frac{\pi}{2} \cos(0) + 4 \sum_{n\geq 1} \frac{n}{(2n-1)(2n+1)} \underbrace{\sin(0)}_{=0} = \frac{\pi}{2}.]$$

Parte II.

5. Usando a fórmula de D'Alembert, ~~tem-se~~ com $c=2$, $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$, tem-se

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left[(x-2t)^2 + (x+2t)^2\right] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \cos s \, ds$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2 - \cancel{4xt} + 4t^2 + x^2 + \cancel{4xt} + 4t^2\right] + \frac{1}{4}\left[\sin s\right]_{x-2t}^{x+2t}$$

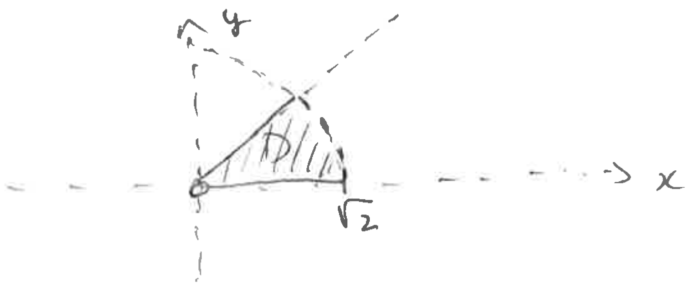
$$= x^2 + 4t^2 + \frac{1}{4}\left[\sin(x+2t) - \sin(x-2t)\right].$$

Em particular,

$$u\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} + 4\frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}\left[\underbrace{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1} - \underbrace{\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right)}_{=-1}\right]$$

$$= \frac{5\pi^2}{4}.$$

6. (a) D



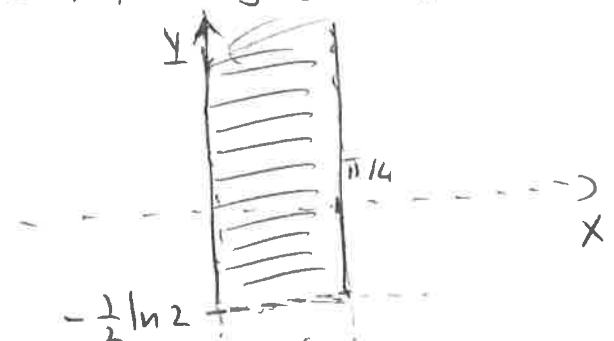
Na forma polar, os pontos $z \in D$ são caracterizados por

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 < r < \sqrt{2}$$
$$0 \leq \theta \leq \pi/4$$

Tem-se

$$-i\log z = -i\log(re^{i\theta}) = -i[\ln r + i\theta] = +\theta - i\ln r$$
$$\stackrel{\text{def.}}{=} X + iY, \quad \text{com } X = +\theta \in [0, \tfrac{\pi}{4}]$$
$$-Y = \ln r \in]-\infty, \tfrac{1}{2}\ln 2[\Leftrightarrow$$
$$Y = -\ln r \in]-\tfrac{1}{2}\ln 2, +\infty[$$

A imagem de D pela aplicação $z \mapsto -i\log z$ tem a seguinte representação geométrica: Im(D)



(b) $u(x,y) = e^{ax}\cos(3y)$.

Comece-se por encontrar $a > 0$ tal que u é harmónica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a e^{ax}\cos(3y) \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{ax}\sin(3y) \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax}\cos(3y) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -9e^{ax}\cos(3y).$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (a^2 - 9)e^{ax}\cos(3y) \equiv 0 \Rightarrow a^2 = 9 \underset{(a>0)}{\Rightarrow} \boxed{a=3}.$$

Com $a=3$, $u(x,y) = e^{3x}\cos(3y)$. Sendo $v = v(x,y)$ uma harmónica conjugada (em $\mathbb{R}^2$) de u, deverão ser satisfeitas as eq. de Cauchy-Riemann, pelo que

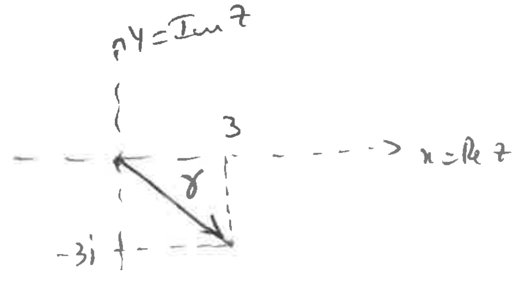
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 3e^{3x}\cos(3y) = \dfrac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v = e^{3x}\sin(3y) + \varphi(x) \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} = 3e^{3x}\sin(3y) = \dfrac{\partial v}{\partial x} \ (*) \qquad \Downarrow \\ \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 3e^{3x}\sin(3y) + \varphi'(x) \ (**) \end{cases}$$

Igualando (*) e (**), obtém-se $\varphi'(x) = 0$.

Assim, as harmónicas conjugadas de u são

$$v = e^{3x}\sin(3y) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

7.(a) Parametrize-se a curva γ:

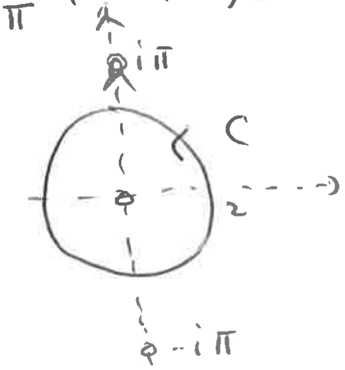


$$\gamma(t) = (1-i)t, \quad 0 \leq t \leq 3$$
$$\gamma'(t) = 1-i.$$

Assim, $\displaystyle\int_\gamma e^{\pi \bar{z}}\, dz = \int_0^3 e^{\pi(1+i)t}(1-i)\,dt = \frac{1-i}{(1+i)\pi}\left[e^{\pi(1+i)t}\right]_0^3 =$

$\displaystyle = \frac{(1-i)^2}{2\pi}\left[e^{3\pi(1+i)} - 1\right] = \frac{-2i}{2\pi}\left[e^{3\pi}\cdot \underbrace{e^{3\pi i}}_{=-1} - 1\right] = \frac{i}{\pi}\left(e^{3\pi}+1\right).$

b) Seja C a circunferência de eq. $|z|=2$:



Tem-se $\sin(iz)=0 \Leftrightarrow iz = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = ik\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

A função $f(z) = \dfrac{e^{2(z-i)}}{\sin(iz)}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{ik\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.

A única singularidade de f no interior da curva C é $z=0$. Pelo Teorema dos Resíduos,

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0). \quad (*)$$

Verifique-se que $z=0$ é um pólo simples de f:

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(iz)}\cdot e^{2(z-i)} = -i \underbrace{\lim_{z\to 0}\frac{iz}{\sin(iz)}}_{=1}\cdot e^{-2i}$$

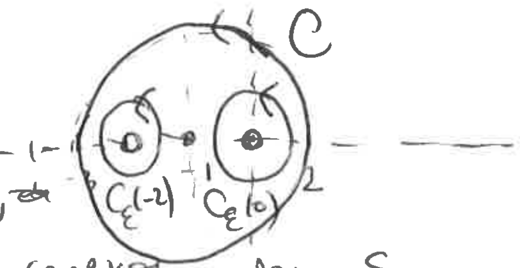
$= -i e^{-2i} \neq 0$ [Alternativamente poder-se-ia usar R. Cauchy para calcular este limite.]

Assim, $a_{-1} = -ie^{-2i}$ e de $(*)$

$$\int_{|z|=2} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot(-ie^{-2i}) = 2\pi e^{-2i} = 2\pi(\cos 2 - i\sin 2).$$

c) $f(z) = \dfrac{z+6}{(z+2)z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$.

Seja C dada pela eq. $|z+1|=2$. As singularidades $0,2$ estão ambas no interior de C.



Escolhendo $\varepsilon>0$ pequeno, de forma a isolar cada uma das singularidades, pelo T. Cauchy para multiplamente conexos, tem-se

$$I := \int_C \frac{z+6}{(z+2)z^2}\,dz = \int_{C_\varepsilon(-2)} \frac{\frac{z+6}{z^2}}{z+2}\,dz + \int_{C_\varepsilon(0)} \frac{\frac{z+6}{z+2}}{z^2}\,dz.$$

Pelo FIC (com $n=0$ e com $n=1$), vem que

$$I = 2\pi i \left(\frac{z+6}{z^2}\right)\Big|_{z=-2} + 2\pi i \left(\frac{z+6}{z+2}\right)'\Big|_{z=0} =$$

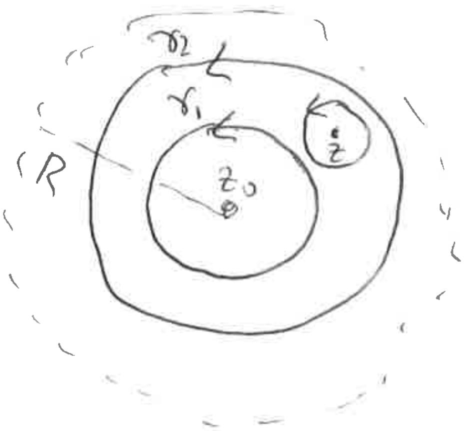
$$= 2\pi i \,\frac{4}{4} + 2\pi i \left[\frac{(z+2)-(z+6)}{(z+2)^2}\right]\Big|_{z=0} = 2\pi i - 2\pi i = 0.$$

8. (a) A ; (b) B ; (c) B ; (d) B.

9. Sejam f holomorfa em $B_R^*(z_0)$, $\gamma_1 = C_{r_1}(z_0)$

$\gamma_2 = C_{r_2}(z_0)$

$(0 < r_1 < r_2 < R)$



Considere-se z fixado, tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

A função $g(w) = \dfrac{f(w)}{w-z}$ é holomorfa em $B_R(z_0) \setminus \{z_0, z\}$.

Pelo T. Cauchy para multiplamente conexos, para $\varepsilon > 0$ pequeno,

(1) $$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Como z é a única singularidade no interior de $C_\varepsilon(z)$ (para ε pequeno), pelo FIC tem-se

(2) $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = f(z).$$

De (1) e (2), $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw + f(z).$$

[Outro modo: Para a f. $g(w)$ atrás definida, pelo Teorema dos Resíduos, vem:

(3) $$\int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_2} g(w)\,dw = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(g, z_0) + \operatorname{Res}(g, z)\right),$$

pois $z_0, z \in \operatorname{int} \gamma_2$, e $\operatorname{Res}(g,z) = \lim_{w\to z} (w-z)\dfrac{f(w)}{w-z} = f(z)$;

(4) $$\int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \int_{\gamma_1} g(w)\,dw \underset{\substack{z_0 \in \operatorname{int}\gamma_1 \\ z \notin \operatorname{int}\gamma_1}}{=} 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_0).$$

O resultado segue de (3) e (4).]