Exemplo

Sejam as retas de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} r &= (1,0,0) + \langle (1,0,0) \rangle \\ s &= (0,1,0) + \langle (0,1,0) \rangle \\ t &= (0,0,1) + \langle (1,0,0) \rangle \end{aligned}$$

Tem-se

- $r \cap s = \{(0,0,0)\}$
- $r \cap t = \varnothing$ *e* $r // t$
- $s \cap t = \varnothing$ *e as retas* s *e* t *são enviesadas.*

Definição

Seja $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ *uma família não-vazia de subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$*. Seja* $\mathcal{A}$ *a coleção de todos os subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$ *que contêm cada* $\mathcal{F}_i,\ i \in I$*. Designa-se por* subespaço afim gerado por $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ *o subespaço afim*

$$\bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{A}} \mathcal{F}$$

que se denota por $\langle \mathcal{F}_i : i \in I \rangle$.

Observação

Resulta da definição que $\langle \mathcal{F}_i : i \in I \rangle$ *é o menor subespaço afim que contém* $\mathcal{F}_i,\ i \in I$.

Exemplo

Sejam $A = (1, 2)$, $B = (1, -1)$ *pontos de* $\mathbb{R}^2$

Temos $\overrightarrow{AB} = B - A = (0, -3)$

Observe-se que $A, B \in (1, -1) + \langle\overrightarrow{AB}\rangle = (1, -1) + \langle(0, -3)\rangle$

$(1, 2) + \langle\overrightarrow{AB}\rangle$ *é um subespaço afim que contem ambos os pontos*

Por outro lado, se $\mathcal{F}$ *é um subespaço afim que contem ambos os pontos*

podemos escrever $\mathcal{F} = A + F$ *para algum* $F \leq \mathbb{R}^3$

Como $A, B \in \mathcal{F}$ *tem-se* $\overrightarrow{AB} \in F$ *e portanto*

$\langle\overrightarrow{AB}\rangle \subseteq F$ *e* $\quad A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle \subseteq A + F = \mathcal{F}$

Assim $A + \langle\overrightarrow{AB}\rangle$ *é o subespaço afim gerado por* A, B

que é a reta definida por A, B*.*

Exemplo

Sejam as retas de $\mathbb{R}^3$ *de um exemplo anterior*

$$s = (0, 1, 0) + \langle(0, 1, 0)\rangle$$
$$t = (0, 0, 1) + \langle(1, 0, 0)\rangle$$

Já vimos que $s \cap t = \varnothing$*.*
Os pontos $A = (0, 1, 0) \in s$ *e* $B = (0, 0, 1) \in t$ *pertencem ao menor subespaço afim que contém ambas as retas,* $\mathcal{F} = \langle s, t\rangle$*.*
Assim, o vetor $\overrightarrow{BA} = A - B = (0, 1, 0) - (0, 0, 1) = (0, 1, -1)$ *pertence ao subespaço vetorial* F *definido por* $\mathcal{F}$*, tal com os vetores* $v = (0, 1, 0)$, $w = (1, 0, 0)$.
$\mathbb{R}^3 = \langle(0, 1, -1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\rangle \leq F$ *e portanto* $\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$*.*

Teorema

Sejam $\mathcal{F}_1 = A + F_1$ *e* $\mathcal{F}_2 = B + F_2$ *subespaços afins de* $\mathbb{R}^n$*.*
Então

$$\langle \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \rangle = A + \langle \overrightarrow{AB} \rangle + F_1 + F_2.$$