Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Teste 2 04-05-2013

1. Considere a equação diferencial

$$y''(x) + \cot(x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [0, \pi] \ .$$

a) Coloque a equação sob a forma de Sturm-Liouville.
b) Defina, justificando, o produto interno adequado a este problema.
c) Calcule o produto interno $\langle u|u\rangle$ para a função $u(x) = \cos x$.

2. Considere a equação diferencial

$$(2x - x^2)\, y''(x) + (2 - 2x)\, y'(x) + \lambda\, y(x) = 0 \ , \qquad x \in [0, 2] \ .$$

a) Deduza a relação existente entre os valores da função $y(x)$ e da sua derivada em $x = 0$.
b) Admita que a solução $y(x)$ se pode escrever como uma série de potências de x: $y(x) = \sum_n a_n\, x^n$. Obtenha a relação de recorrência entre os coeficientes a_n.
c) Determine as funções próprias $y_n(x)$ dadas por polinómios de graus $n = 1$ e $n = 4$ respetivamente, e os seus valores próprios, λ_n. Considere $y_n(0) = 1$.

3. As funções harmónicas esféricas $Y_l^m(\theta, \phi)$ são funções próprias dos operadores:

$$A = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\, \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \ , \qquad B = \partial/\partial\phi \ \ .$$

a) Diga quais são os valores próprios de A, B, B^2 associados a $Y_l^m(\theta, \phi)$.
b) Mostre que as funções $u = \sin\theta\, \cos\phi$, $v = \sin\theta\, \sin\phi$, são funções próprias dos operadores A e B^2.
c) Conclua que funções harmónicas esféricas se podem escrever como combinações lineares de $u(\theta, \phi)$, $v(\theta, \phi)$, e obtenha as suas expressões analíticas a menos de constantes multiplicativas.