Métodos Matemáticos da Física 2012/13

Teste 1 22-03-2013

1. Considere a equação de onda no intervalo $0 \leq x \leq \ell$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \ .$$

a) Encontre pelo método de separação de variáveis soluções $u(t,x)$ satisfazendo as condições fronteira, $u(t,0) = 0$, $u(t,\ell) = 0$, e escreva a expressão da solução geral obtida por esse método.
b) Restrinja a solução geral anteriormente obtida ao conjunto de funções que satisfazem a condição inicial: $u(0,x) = 0$.
c) Encontre a solução da equação de onda que obedece às seguintes condições iniciais: $u(0,x) = 0$, $\partial u/\partial t(0,x) = \sin(2\pi\, x/\ell)$.

2.a) Diga como se define o operador adjunto de um operador A.
b) Considere o produto interno de funções $u(x), \ x \in [a,b]$, definido com uma função peso $\rho(x) = 1$. Mostre que o operador d/dx é anti-hermítico no espaço de funções $u(x)$ que obedecem à condição fronteira $u(b) = -u(a)$.

3. Admita que a função $u(x)$ definida no intervalo $-\ell \leq x \leq \ell$ pode ser escrita como uma série de Fourier,

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, y_n(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{i\, n\, \pi\, x/\ell} \ .$$

a) Calcule o produto interno de duas funções arbitrárias $\langle y_n | y_m \rangle$.
b) Demonstre como se determinam os coeficientes c_n.
c) Determine os coeficientes c_n da série de Fourier da função $u(x) = e^{-a\,|x|}$, onde $a > 0$.
d) Obtenha a função $u(x)$ como uma série de senos e cosenos.