DM - Ciências ULisboa 2018/2019

ÁLGEBRA LINEAR E GEOMETRIA ANALÍTICA II

EXERCÍCIOS – Folha 1

Matemática e Matemática Aplicada

Geometria Analítica

1. Considere o vetor $u = (5, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Escreva, se possível, o vetor u como combinação de linear de
   (a) $(1, 1)$ e $(-1, 2)$;
   (b) $(1, 1)$ e um vetor ortogonal ao vetor $(1, 1)$;
   (c) $(-1, 2)$ e um vetor ortogonal ao vetor $(4, 2)$.
2. Em $\mathbb{R}^2$, seja r a reta cuja equação cartesiana é $ax + by + c = 0$, em que a, b, c são números reais e a, b são não simultaneamente nulos. Seja $P = (p_1, p_2)$ um ponto do plano.
   (a) Determine (em função de a, b, c, p_1, p_2) as coordenadas do pé da perpendicular de P sobre r.
   (b) Determine a distância de P a r.
3. Sejam s e r retas paralelas de $\mathbb{R}^2$ com equações $ax + by + c = 0$ e $ax + by + c' = 0$ respetivamente. Determine a distância entre s e r em função de a, b, c, c'.
4. Em $\mathbb{R}^2$, determine uma equação
   (a) da reta que passa pelos pontos $(4, 5)$ e $(3, 1)$;
   (b) da mediatriz do segmento de reta de extremos $(4, 5)$ e $(3, 1)$;
   (c) da reta que passa por $(3, 4)$ e é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(4, 5)$ e $(3, 1)$.
5. Em $\mathbb{R}^2$, mostre que as retas $3x - 4y = 12$ e $-6x + 8y = 48$ são paralelas e calcule a distância entre essas retas.
6. Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ três pontos não colineares. Determine, em função das coordenadas de A, B e C, as coordenadas do ponto D de modo que os pontos A, B, C, D sejam pontos consecutivos de um paralelogramo.
7. Sejam $u = (3, 1), v = (1, -2)$ vetores de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calcule o seno e o cosseno do ângulo $\angle(u, v)$.
   (b) Determine a projeção ortogonal de u sobre $\langle\, v \,\rangle$.
8. Sejam $A = (3, 4), B = (1, 5), C = (0, 3)$.
   (a) Mostre que A, B, C são três pontos não colineares e calcule a área de $\triangle ABC$.
   (b) Calcule a distância de A à reta BC.

(c) Determine uma equação de cada uma das retas
(i) AB; (ii) BC; (iii) paralela a AB que passa por C; (iv) perpendicular a AB que passa por C.

(d) Determine as coordenadas do ponto D tal que os pontos A, B, C, D são vértices consecutivos de um paralelogramo. Determine a área desse paralelogramo e indique, justificando, se esse paralelogramo é um retângulo.

9. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

   (a) $|u \cdot v| \leq \|u\|\|v\|$;

   (b) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

10. (a) Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$. Mostre que

    i. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2$;

    ii. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2$;

    (b) Num paralelogramo, a soma dos quadrados das medidas das diagonais é igual à soma dos quadrados das medidas dos quatro lados.

11. Dado $\triangle ABC$ e designando por a, b, c os comprimentos dos lados de $\triangle ABC$ opostos aos vértices A, B, C respetivamente, mostre

    (a) a lei dos cossenos:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos(\angle A)$$

    (b) a lei dos senos:
$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}.$$

12. Sejam A, B, C pontos de $\mathbb{R}^2$. Mostre que são equivalentes:

    (a) A, B, C são pontos colineares;

    (b) sendo $\overrightarrow{AB} = (u_1, u_2)$ e $\overrightarrow{AC} = (v_1, v_2)$, tem-se $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$.

13. Sejam $\triangle ABC$ o triângulo cujos vértices são $A = (5,7), B = (1,4), C = (3,3)$ e $P = (2,0)$.

    (a) Escreva P como combinação afim dos pontos A, B, C.

    (b) Indique, justificando, se:

    i. P e A estão no mesmo semiplano definido pela reta BC;

    ii. P e B estão no mesmo semiplano definido pela reta AC;

    iii. P e C estão no mesmo semiplano definido pela reta AB;

    iv. P pertence ao interior de $\triangle ABC$.

14. Seja $\triangle ABC$ um triângulo de $\mathbb{R}^2$. Sejam $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 1$$

e

$$P_1 = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C,\ P_2 = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C,\ P_3 = \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C.$$

Pode garantir que os pontos P_1, P_2, P_3 são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0\,?$$

15. Indique, justificando, quais dos conjuntos seguintes são subespaços afins de $\mathbb{R}^2$:
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ (b) $\{(8,9)\}$ (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}$
(d) $\mathbb{R}^2$ (e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 9\}$ (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 9\}$.

16. Suponha que se fez a translação do referencial $\mathcal{R}$ para o referencial $\mathcal{R}'$ cuja origem é o ponto O', de coordenadas $(2,-3)$ no referencial $\mathcal{R}$.

 (a) Determine as coordenadas no referencial $\mathcal{R}'$ do ponto P, cujas coordenadas no referencial $\mathcal{R}$ são $(7,5)$.
 (b) Determine as coordenadas no referencial $\mathcal{R}$ do ponto Q, cujas coordenadas no referencial $\mathcal{R}'$ são $(-3,6)$.
 (c) Esboce os referenciais $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ e determine o lugar geométrico dos pontos P e Q.

17. Em $\mathbb{R}^3$, considere o ponto $P = (-1,3,-5)$ e o vetor $v = (6,7,-3)$. Encontre um ponto Q de modo a que o vetor $\overrightarrow{PQ}$

 (a) tenha a mesma direcção e sentido que v;
 (b) tenha a mesma direcção e sentido oposto a v.

18. Considere os vetores $u = (-3,1,2)$, $v = (4,0,-8)$, $w = (6,-1,-4)$.

 (a) Determine as coordenadas dos vetores $v - w$, $6u + 2v$ e $(2u - 7w) - (8v + u)$.
 (b) Calcule, caso existam, escalares α, β, γ tais que $\alpha\, u + \beta\, v + \gamma\, w = (2,0,4)$.

19. Considere os pontos $A = (3,5,-4), B = (1,0,1), C = (3,2,2), D = (1,0,2)$ de $\mathbb{R}^3$.

 (a) Mostre que A, B, C são não colineares e determine uma equação do plano ABC.
 (b) Calcule a área do $\triangle ABC$.
 (c) Mostre que A, B, C, D são não complanares e calcule o volume do paralelipípedo que tem $[AB], [AC], [AD]$ como arestas.

20. Em $\mathbb{R}^3$ determine uma equação do plano que:

    (a) contém o ponto $(3, 1, 4)$ e é perpendicular ao vetor $(2, 3, -1)$;

    (b) contém os pontos $(3, 2, 1), (0, 2, -1), (1, 1, 1)$;

    (c) contém as retas $r = \{(3t + 1, 4t - 2, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ e $s = \{(t - 1, t - 1, 6) : t \in \mathbb{R}\}$.

21. Considere os pontos $A = (2, 3, 5), B = (4, 3, 2), C = (1, -2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.

    (a) Mostre que esses pontos são vértices de um triângulo T.

    (b) Calcule a área de T e determine uma equação do plano ABC que contém T.

    (c) Determine a distância do ponto $P = (0, 1, 3)$ ao plano ABC.

22. Considere os pontos $P = (2, 3, -2)$ e $Q = (7, -4, 1)$.

    (a) Encontre o ponto médio do segmento de recta $[PQ]$.

    (b) Encontre o ponto R, do segmento de recta $[PQ]$, cuja distância a P é $\frac{3}{4}$ da distância de P a Q.

23. Determine o ângulo entre os pares de vetores:

    (a) $(2, 3)$ e $(-3, 5)$

    (b) $(6, 1, 4)$ e $(2, 0, -3)$

    (c) $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

24. Mostre que o triângulo cujos vértices são $P(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2})$, $Q(1, -\sqrt{2}, 1)$ e $R(-1, \sqrt{2}, -1)$ é retângulo e isósceles.

25. Diga, justificando, se existe um plano em $\mathbb{R}^3$ que contenha os pontos $A = (2, 1, 3)$, $B = (0, 3, 9)$, $C = (3, 3, 4)$ e $D = (7, 5, 0)$.

26. Considere o plano $\pi = (1, 0, 0) + \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

    (a) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que π contenha o ponto $P_\alpha = (1, 2, \alpha)$.

    (b) Seja $P_4 = (1, 2, 4)$. Determine uma reta r perpendicular a π que contenha P_4. Mostre que r interseta π. Qual a distância entre P_4 e π?

    (c) Determine um plano γ paralelo a π que contenha P_4.

    (d) Indique duas retas perpendiculares s_1, s_2 contidas em π. Justifique a sua resposta.

27. Considere as retas $r_1 = (1, 0, 1) + \langle (1, 1, 0) \rangle, r_2 = (0, 1, 0) + \langle (0, 1, 1) \rangle$.

    (a) Verifique que $r_1 \cap r_2 = \emptyset$.

    (b) Determine uma reta s perpendicular a r_1 e a r_2 que interseta ambas.

    (c) Calcule a distância entre r_1 e r_2.

    (d) Seja o ponto $P = (2, 1, 1)$. Mostre que P não pertence a r_2. Determine o plano π que contém P e r_2.

    (e) Determine um plano τ que contenha P tal que r_1 é perpendicular a τ.