Combinação afim

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$ e sejam $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{R}^2$. Uma combinação afim dos pontos $A_1, \ldots, A_k$ é uma expressão do tipo

$$\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k \ \text{ onde } \ \alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1.$$

Exemplo

- Se $A = A_1 = \ldots = A_k \in \mathbb{R}^2$, então $\left\{\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k : \ \alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \alpha_1 + \ldots \alpha_k = 1\right\} = \left\{A\right\}$

Exemplo

- Se $A, B \in \mathbb{R}^2$ são pontos distintos, então
  1. $\{\lambda A + \mu B : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \lambda + \mu = 1\}$ é a recta AB.
     Se $\lambda + \mu = 1$, então
     $P = \lambda A + \mu B \ \Leftrightarrow \ P = (1 - \mu)A + \mu B = A + \mu \overrightarrow{AB}$.
  2. $\{\lambda A + \mu B : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \lambda + \mu = 1 \text{ e } \mu > 0\}$ é a semi-recta aberta de origem A e que contém B, que se denota por $\dot{A}B$.
     Se $\lambda + \mu = 1, \ \mu > 0$, então
     $P = \lambda A + \mu B \ \Leftrightarrow \ P = (1 - \mu)A + \mu B = A + \mu \overrightarrow{AB}$, sendo $\mu > 0$.
  3. $\{\lambda A + \mu B : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \lambda + \mu = 1 \text{ e } \mu < 0\}$ é a semi-recta aberta oposta a $\dot{A}B$.
     Se $\lambda + \mu = 1, \ \mu < 0$, então
     $P = \lambda A + \mu B \ \Leftrightarrow \ P = (1 - \mu)A + \mu B = A + \mu \overrightarrow{AB}$, sendo $\mu < 0$.
  4. $\left\{\lambda A + \mu B : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_0^+ \ \text{ e } \ \lambda + \mu = 1\right\}$ é o segmento de recta $[AB]$.
     Se $\lambda + \mu = 1, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}_0^+$, então
     $P = \lambda A + \mu B \ \Leftrightarrow \ P = (1 - \mu)A + \mu B = A + \mu \overrightarrow{AB}$, sendo $0 \leq \mu \leq 1$.

Pontos não colineares

Definição

Diz-se que três pontos A, B, C do plano são não colineares *se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente independentes.*

Proposição

Sejam A, B, C pontos do plano, não colineares. Então, para cada ponto P do plano existem e são únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C \text{ e } \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Corolário

Sejam A, B, C pontos do plano, não colineares. Então

$$\mathbb{R}^2 = \{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

Base afim

Definição

Se A, B, C são pontos do plano, não colineares, (A, B, C) diz-se uma base afim *do plano.*

Exemplo

Sejam A, B, C pontos do plano, não colineares.

- *Fixado $\gamma_0 \in \mathbb{R}$, $\{\alpha A + \beta B + \gamma_0 C : \alpha + \beta + \gamma_0 = 1\}$ é uma reta paralela à reta AB, que passa pelo ponto $Q = A + \gamma_0 \overrightarrow{AC}$*
- *Fixado um dos escalares α_0 (ou β_0) obtém-se a reta BC (ou AC)*

Exemplo

Sejam A, B, C pontos do plano, não colineares.

O conjunto $\{\alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha > 0\}$ é o semi-plano definido pela reta BC que contém o ponto A.