Transitividade do paralelismo

Axiomas de medida

Aula 4 - 01/03/2019

Sumário

- Transitividade do paralelismo - rectas complanares
- Transitividade do paralelismo - caso geral
- Axiomas de medida
- Noção de razão entre dois pares de pontos

Axiomas de incidência - resumo

R.1 *Axioma da recta.* Por dois pontos passa uma única recta.

R.2 *Axioma do plano.* Por três pontos não colineares passa um único plano.

R.3 *Axioma da dimensão.* Uma recta contém pelo menos dois pontos. Um plano contém pelo menos duas rectas. Existem pelo menos dois planos.

R.4 *Axioma da intersecção recta-plano.* Se dois pontos de uma recta pertencem a um plano, então a recta que os contém está contida no plano.

R.5 *Axioma da intersecção plano-plano.* A intersecção de dois planos não disjuntos é uma recta.

R.6 *Axioma das paralelas.* Dada uma recta r e um ponto P que não lhe pertence, existe uma única recta paralela a r que contém P.

Transitividade do paralelismo - rectas complanares

Daqui em diante consideraremos sempre uma geometria em que todos os axiomas de incidência são válidos. Por uma questão de simplicidade usaremos os axiomas R.1, R.2, R.3, R.4, R.5, R.6.

Uma das consequências do axioma das paralelas é a propriedade transitiva da relação de paralelismo. Vejamos em primeiro lugar o caso de três rectas complanares.

Teorema. Sejam r, s, t três rectas complanares. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.

Dem. Suponhamos, com vista à obtenção de um absurdo, que r e t não são paralelas. Como, por hipótese, r e t são rectas complanares e distintas, a sua intersecção é um ponto P. Assim temos que r e t são ambas rectas paralelas a s passando por P, o que contradiz o axioma das paralelas.

Uma propriedade que não depende do axioma das paralelas

Lema. Sejam α, β, γ três planos, tais que cada um deles intersecta os outros dois. Então ou as três rectas de intersecção são concorrentes ou são paralelas duas a duas.

Dem. Sejam $r = \beta \cap \gamma, s = \alpha \cap \gamma, t = \alpha \cap \beta$.
As rectas r e s são complanares (visto que estão ambas contidas no plano γ), logo ou são concorrentes num ponto P ou são disjuntas. Se $r \cap s = \{P\}$, então $P \in \beta$ (porque $P \in r$) e $P \in \alpha$ (porque $P \in s$). Portanto P pertence a $\alpha \cap \beta$, ou seja $P \in t$, portanto as três rectas são concorrentes em P.
Se as rectas r e s são disjuntas, têm de ser disjuntas de t, porque caso contrário teríamos que as três rectas se intersectariam num ponto. Assim, s e t e são disjuntas e complanares, logo são paralelas. Analogamente se prova que r e t são paralelas.

Transitividade do paralelismo - rectas não complanares

Vejamos agora que a relação de paralelismo é transitiva em geral.

Teorema. (propriedade transitiva do paralelismo - caso geral)
Sejam r, s, t três rectas. Se r é paralela a s e s é paralela a t, então r é paralela a t.

Dem. O caso de três rectas complanares já foi demonstrado.
Consideremos o caso em que as três rectas são não complanares.
Por definição de rectas paralelas, temos que r e s são complanares.
Seja P um ponto da recta t que não pertence ao plano que contém as rectas r e s. Seja π_1 o único plano que contém o ponto P e a recta r e seja π_2 o único plano que contém o ponto P e a recta s. Seja q a intersecção dos planos π_1 e π_2.
Assim, temos que r e s são paralelas e, por construção, a recta q é complanar com r e é complanar com s. Pelo lema anterior, podemos concluir que q é disjunta de r e é disjunta de s. Como $P \in q$ e q é paralela a s, pelo axioma das paralelas, a recta q tem de coincidir com a recta t. Assim, concluímos que r é paralela a t.

Axiomas de medida

Vamos em seguida definir axiomas que nos permitirão construir um modelo para a geometria afim em $\mathbb{R}^n$, partindo do conhecimento que temos dos números reais.

Assumindo que existe uma correspondência bijectiva entre os pontos de uma recta e os números reais, define-se um novo conceito primitivo a que chamamos *régua*.

Definição. Seja r uma recta. Uma régua na recta r é uma bijecção entre a recta e o conjunto dos números reais.

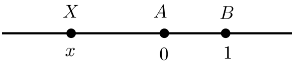
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & r & \to & \mathbb{R} \\ & X & \mapsto & \varphi(X) \end{array}$$

Denotaremos por x o número real $\varphi(X)$ e designamo-lo por coordenada de X associada à régua φ.

Axioma da régua

R.7 *Axioma da régua.* Dados dois pontos A e B, existe uma régua na recta por eles definida tal que $A \mapsto 0$ e $B \mapsto 1$.

Definição. Dados dois pontos A e B, uma régua na recta AB que satisfaz $A \mapsto 0$ e $B \mapsto 1$ diz-se régua com base nos pontos A e B ou régua de base A, B.



Régua de base A, B

Coloca-se agora o problema de comparar várias réguas na mesma recta. Vamos necessitar de um axioma que nos dê informação sobre como é que se relacionam as coordenadas de cada ponto da recta relativamente a duas réguas diferentes.

Axioma da comparação das réguas

Recordando que o objectivo dos axiomas de medida é a construção da geometria afim, vão interessar-nos mudanças de coordenadas que conservem essa estrutura na recta.

Definição. Uma função bijectiva de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$ tal que

$$x \mapsto l\,x + m, \quad \text{com } l, m \in \mathbb{R}, \;\; l \neq 0$$

diz-se transformação afim de $\mathbb{R}$.

R.8 *Axioma da comparação das réguas.* Duas réguas na mesma recta estão relacionadas por meio de uma transformação afim.

Este axioma interpreta-se do seguinte modo:

Sejam dadas duas réguas na mesma recta. Se x e x' forem as coordenadas do mesmo ponto X relativamente a cada uma das duas réguas, então existem $l, m \in \mathbb{R}$, $l \neq 0$, tais que

$$x' = l\,x + m.$$

Razão associada a dois pares de pontos

A noção de régua e os axiomas R.7 e R.8 permitem comparar distâncias entre dois pares de pontos, através da noção abstracta de “razão”, mesmo sem estar definida uma unidade de medida.

Definição. Uma razão $x : y$ é um par de números, satisfazendo as seguintes propriedades:

- $x, y \in \mathbb{R}, \ (x, y) \neq (0, 0)$;
- $x : y = x' : y'$ se e só se $xy' = yx'$.

Nota. Uma razão comporta-se como uma fracção, mas com a particularidade de que tanto o denominador como o numerador podem ser nulos.

Definição. Sejam A, B, C, D pontos de uma recta r, não todos iguais. Definimos razão $AB : CD$ como

$$AB : CD := (a - b) : (c - d)$$

onde a, b, c, d são, respectivamente, as coordenadas dos pontos A, B, C, D em relação a uma régua na recta r.

Exercício. Mostrar que a noção de razão associada a dois pares de pontos está bem definida, isto é, não depende da régua considerada.