Exame de Análise Matemática III/Cálculo Diferencial e Integral III

23 Janeiro 2018 - duração: 3 horas

Indique a sua versão do exame/teste na folha de rosto do caderno de exame.
Justifique convenientemente as respostas às questões que não são de escolha múltipla.
Recorde que, por convenção, as circunferências são percorridas uma vez no sentido directo.

Versão A

1. (a) Resolva o PVI $y' + (\sin t - \frac{1}{t})y - 6t\sin t = 0$, $y(\pi) = 3\pi$.

   (b) Resolva a EDO $y' = 16 - y^2$, indicando os intervalos de definição das soluções.

   (c) Sendo $u(x,y) = 2xy^2 - 2xy, v(x,y) = 2x^2y + 2y - x^2$, resolva a EDO $u(x,y) + v(x,y)y'(x) = 0$ com condição inicial $y(0) = -1$, explicitando $y = y(x)$ e indicando o intervalo de definição da solução ou soluções. (Note que a EDO é exacta.)

2. Resolva o sistema de EDOs $x' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} x$.

3. Para a função 2π-periódica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi[$, é sabido que a sua série de Fourier é dada por $f(x) \sim \dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$.

   (a) Faça o gráfico da função $1 + f'$ no intervalo $]-3\pi, 3\pi[$ e calcule a soma da série de Fourier de f' para $x = -15\pi$ e $x = 5\pi/2$.

   (b) Usando a identidade de Parseval, determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

4. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) Para a equação (dita do oscilador harmónico forçado) $y'' + b^2y = \cos t$ (onde $b > 1$),
   A: existe uma solução da forma $y(t) = A\cos(bt)$ $(A \in \mathbb{R})$.
   B: existe uma solução da forma $y(t) = Ae^{-bt} + Be^{bt} + C\cos t$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$.
   C: existe uma solução da forma $y(t) = A\cos t + B\sin t + C\cos(bt)$ $(A, B, C \in \mathbb{R})$.

   (b) Todas as soluções não nulas da EDO $y''' + y'' - 2y' = 0$ satisfazem:
   A: $\lim\limits_{t\to-\infty} |y(t)|e^{-t} = +\infty$. B: $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)|e^{-3t} = 0$. C: $\lim\limits_{t\to+\infty} |y(t)|e^{2t} = +\infty$.

   (c) Para a equação do calor $u_t = 2u_{xx}$ para $t \geq 0, x \in [0,1]$, com condições de fronteira $u(t,0) = u(t,1) = 0, t \geq 0$, existem soluções da forma (com $a \in \mathbb{R}$ qualquer):
   A. $u(t,x) = ae^{-2\pi^2 t}\sin(2\pi x)$. B: $u(t,x) = ae^{-2\pi^2 t}\sin(\pi x)$. C: $u(t,x) = ae^{-2\pi^2 t}\cos(\pi x)$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

5. Fazendo o esboço das curvas e justificando convenientemente o domínio onde as funções integrandas são holomorfas, calcule os integrais seguintes:

   (i) $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\log(z+i)}{z^2+9}\, dz$ (log representa o ramo principal do logaritmo);

   (ii) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{3e^{z^2}+i}{z^2+2}\, dz$; (iii) $\displaystyle\int_{|z|=2} z^3 \cos\Big(\frac{2i}{z}\Big)\, dz$.

6. Para cada uma das questões seguintes, indique sem justificar, qual é a resposta correcta (escreva apenas A,B,C ou opte por não responder):

   (a) O valor do integral $\displaystyle\int_\gamma \frac{\operatorname{Im} z}{z-1}\,dz$, onde γ é a curva parametrizada por $\gamma(t) = 1+e^{it}, 0 \le t \le \pi/2$, é: A: i. B: 1. C: $2i$.

   (b) A parte real dos números complexos $i\log(-2i)$ (sem ramo fixado do logaritmo) é:
   A: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. B: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. C: $\ln 2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

   (c) O conjunto de soluções da equação $e^{i\bar{z}} = \overline{\cos z}$ em $\mathbb{C}$ é:
   A. $\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. B: $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. C: $\{k\pi + ik\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

   (Nota: cada resposta correcta $= 0,6$ val., cada resposta errada $= -0,2$ val.)

7. (a) Escreva a série de Taylor de $f(z) = e^{iz/2}$ em torno de $z = -\pi$, indicando onde é válido o desenvolvimento.

   (b) Determine a série de Laurent de $\frac{1}{(z-2)^2 z}$, válida numa vizinhança de 2 privada de 2, indicando o maior anel de convergência.

8. Seja $f(z)$ uma função holomorfa num aberto conexo $D \subset \mathbb{C}$, e designe $f = u + iv$ com $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z), v = \operatorname{Im} f(z)$ para $z = x+iy \in D$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

   (a) Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que:
   (i) se u é constante em D, então v é constante em D (e portanto, também f é constante);
   (ii) se $U = e^u \cos v$ é constante em D, então f é constante em D.

   (b) Mostre que se $D = \mathbb{C}$ e u é limitada em $\mathbb{C}$, então f é constante em $\mathbb{C}$.

FIM

Cotações propostas: 5 + 2 + 1,9 + 1,8 + 3,2 + 1,8 + 1,8 + 2,5 = 20.

Algumas fórmulas úteis

Série de Fourier de $f \in SC([-L,L])$: $f(x) \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$.

Identidade de Parseval: para $f \in SC([-L,L])$: $\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)^2\,dx = L\Big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)\Big)$.

Fórmula de D'Alembert: $u(t,x) = \dfrac{1}{2}\big[f(x-ct) + f(x+ct)\big] + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Fórmulas Integrais de Cauchy: $f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n = 0,1,2,\ldots, \quad \text{com} \quad z_0 \in \operatorname{int}\gamma$

Fórmula dos Resíduos: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Res}(f, z_i), \qquad \text{com} \quad z_i \in \operatorname{int}\gamma, i = 1,\ldots,p$

Algumas séries de Taylor: $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots, \quad |z| < 1$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}$$