Axioma da semelhança

Teorema de Tales

Aula 5 - 08/03/2019

Sumário

- Segmento de recta e ponto médio
- Axioma da semelhança
- Teorema de Tales
- Paralelogramos

Pontos colineares e razões

Dados dois pontos A e C, é possível identificar qualquer ponto B da recta AC através da razão $AB : BC$.

Proposição. Sejam A e C dois pontos. Então para qualquer razão $x : y \neq 1 : -1$ existe um único ponto B na recta AC tal que $AB : BC = x : y$ e não existe nenhum ponto B na recta AC satisfazendo $AB : BC = 1 : -1$.

Dem. Consideremos uma régua em que $A \mapsto 0$ e $C \mapsto 1$ e seja $B \mapsto \lambda$ um ponto distinto de A e de C. Então, por definição de razão, temos

$$AB : BC = -\lambda : (\lambda - 1) = \lambda : (1 - \lambda).$$

Assim, se $x : y = \lambda : 1 - \lambda$ obtemos $\lambda = x/(x + y)$ e portanto $x + y \neq 0$, ou seja, $x : y \neq 1 : -1$.

Exemplo. Sejam $A \mapsto 0, C \mapsto 1$. Sejam B, B', B'' tais que

$$AB : BC = 3 : 4, \ AB' : B'C = -3 : 4, \ AB'' : B''C = 2 : -1.$$

Temos que $B \mapsto 3/7, \ B' \mapsto -3, \ B'' \mapsto 2.$

Segmento de recta e ponto médio

Já vimos que se

$$A \mapsto 0, \;\; C \mapsto 1 \;\; \text{e} \;\; AB : BC = x : y,$$

então

$$B \mapsto \frac{x}{x+y}.$$

Portanto, quando x e y são não negativos, a coordenada de B nesta régua é um número entre 0 e 1.

Definição. Sejam A e C dois pontos. O segmento de recta $[AC]$ é definido como o conjunto de todos os pontos B tais que

$$AB : BC = x : y, \;\text{com}\; x, y \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dizemos que B está entre A e C se $B \in [AC]$.

Definição. Sejam A e C dois pontos. O ponto médio do segmento de recta $[AC]$ é o único ponto B tal que

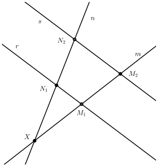
$$AB : BC = 1 : 1.$$

Nota. Se $A = C$, convenciona-se que o segmento de recta $[AC]$ coincide com o ponto A e também com o seu ponto médio.

O axioma da semelhança

Os axiomas R.7 e R.8 permitem utilizar as razões para comparar distâncias entre pontos colineares. O próximo axioma vai permitir comparar distâncias entre pontos de rectas distintas.

R.9 *Axioma da semelhança.* Sejam r e s duas rectas paralelas e m e n duas rectas concorrentes num ponto X. Se $M_1 = r \cap m,\ M_2 = s \cap m,\ N_1 = r \cap n,\ N_2 = s \cap n$ então $XM_1 : XM_2 = XN_1 : XN_2$.



Proposição.(*Recíproco do axioma de semelhança*) Sejam m e n rectas concorrentes num ponto X. Sejam $M_1, M_2 \in m \setminus \{X\}$, $N_1, N_2 \in n \setminus \{X\}$ pontos satisfazendo $XM_1 : XM_2 = XN_1 : XN_2$. Então as rectas M_1N_1 e M_2N_2 são paralelas.

Teorema de Tales ($\sim$ 600 A.C.)

Tales de Mileto é o matemático grego mais antigo de que há conhecimento. Sabe-se que era mercador e viajante, que utilizou a matemática nas suas viagens para calcular distâncias entre navios. Observou ainda fenómenos eléctricos e magnéticos, tendo estudado as propriedades do âmbar e da magnetite.

Teorema. (Tales) Sejam r, s, t três rectas complanares tais que r é paralela a s. Sejam m e n duas rectas complanares com r, s, t, mas não paralelas a nenhuma das rectas r, s, t.
Suponhamos que

$$m \cap r = M_1, \ m \cap s = M_2, \ m \cap t = M_3$$

e que

$$n \cap r = N_1, \ n \cap s = N_2, \ n \cap t = N_3.$$

Tem-se que

a recta t é paralela às rectas r e s

se e só se

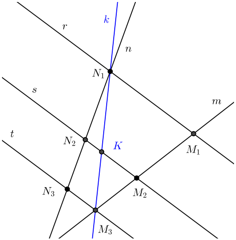
$$M_1M_2 : M_2M_3 = N_1N_2 : N_2N_3.$$

Demostração do teorema de Tales (I)

Observemos que se A, B, C são três pontos colineares, com $AB : AC = x : y$, então $AB : BC = x : y - x$. Assim, se $A', B' C'$ forem também três pontos colineares, temos

$$AB : AC = A'B' : A'C' \Leftrightarrow AB : BC = A'B' : B'C'.$$

Dem. Seja k a recta $N_1 M_3$. A recta k não é paralela a r porque a intersecta em N_1, logo também não é paralela a s, pela propriedade transitiva do paralelismo. Por construção, temos $r \cap K = N_1$ e $t \cap k = M_3$. Seja $K = s \cap k$.



Demostração do teorema de Tales (II)

($\Rightarrow$) Suponhamos que as rectas r, s, t são paralelas. Aplicando o axioma da semelhança e a definição de razão, obtemos

$$M_1M_2 : M_1M_3 = N_1K : N_1M_3 = N_1N_2 : N_1N_3.$$

Utilizando as propriedades das razões, obtemos

$$M_1M_2 : M_2M_3 = N_1K : KM_3 = N_1N_2 : N_2N_3.$$

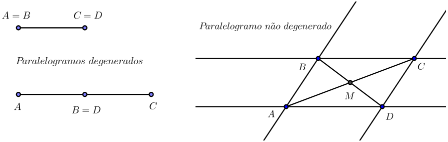
($\Leftarrow$) Como r e s são paralelas, $M_3 \notin r \cup s$ e $M_3 = m \cap k$, pelo axioma da semelhança e pela hipótese, temos que

$$N_1K : N_1M_3 = M_1M_2 : M_1M_3 = N_1N_2 : N_1N_3.$$

Utilizando o recíproco do axioma de semelhança, obtemos que a recta KN_2 é paralela à recta M_3N_3. Como $s = KN_2$ e $t = M_3N_3$, temos que s é paralela a t e, pela propriedade transitiva do paralelismo, obtemos que t é paralela a r e a s.

Definição de paralelogramo

Sejam A, B, C, D quatro pontos não todos iguais. Dizemos que $[ABCD]$ é um paralelogramo se o ponto médio do segmento de recta $[AC]$ é igual ao ponto médio do segmento de recta $[BD]$. Os pontos A, B, C, D são designados vértices do paralelogramo. Se dois ou mais vértices coincidirem, dizemos que o paralelogramo é degenerado. Se os quatro vértices forem todos distintos, então as rectas AB, BC, CD, DA são distintas e são os lados do paralelogramo. Os segmentos de recta $[AC]$ e $[BD]$ são designados diagonais do paralelogramo e o seu ponto de intersecção é chamado centro do paralelogramo.



Nota. Permutações cíclicas ou inversões completas da ordem dos quatro pontos A, B, C, D dão origem ao mesmo paralelogramo. Por exemplo $[ABCD] = [BCDA] = [CDAB] = [DABC] = [DCBA] = \dots$
Outras permutações como $[ACBD]$ podem não ser paralelogramos.