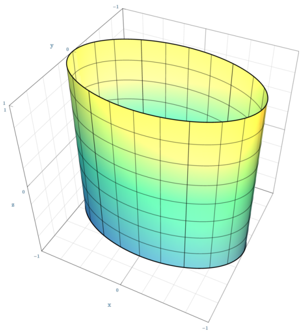
Superfícies de tipo cilíndrico

Exemplo

Qual a quádrica definida pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ *?*

A variável z está omissa na equação.

É uma $\boxed{\textit{superfície cilíndrica elítica}}$ *ou* $\boxed{\textit{cilindro elítico}}$.



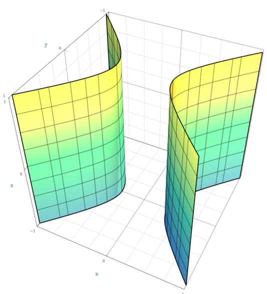
Sempre que na equação reduzida de uma quádrica não aparece uma das variáveis, a superfície é de *tipo cilíndrico.*

Exemplo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A interseção com o plano de equação $z = 0$ *é uma hipérbole.*

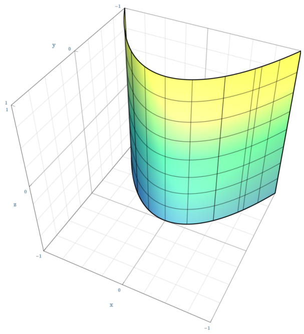
Esta equação define uma $\boxed{\textit{superfície cilíndrica hiperbólica}}$ *ou* $\boxed{\textit{cilindro hiperbólico}}$.



Exemplo

$$y = ax^2, \quad a \neq 0$$

A interseção com o plano de equação $z = 0$ *é uma parábola. Esta equação define uma* $\boxed{\textit{superfície cilíndrica parabólica}}$ *ou* $\boxed{\textit{cilindro parabólico}}$.



Caso especial

No estudo das quádricas, é possível obter uma equação reduzida da forma

$$x^2 - ay - bz = 0, \quad a, b \neq 0 \tag{1}$$

No plano YOZ (com equação $x = 0$) a equação (1) representa uma reta que passa na origem.

Para eliminar um dos termos lineares, em y ou em z, devemos fazer uma rotação neste plano, de modo a que a aquela reta passe a ser um dos eixos coordenados.

Precisamos de determinar uma matriz $Q' \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, ortogonal, tal que $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} Q' = \begin{bmatrix} q & 0 \end{bmatrix}$ para algum $q \neq 0$.

Determinada Q', considere-se $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\raisebox{1ex}{Q'}} \end{bmatrix}$.

$Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é ortogonal e

$$ay + bz = \begin{bmatrix} 0 & a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \end{bmatrix} QQ^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & q & 0 \end{bmatrix} Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Fazendo a mudança de variável $X' = Q^T X$, vem $x' = x$ e obtém-se a equação reduzida

$$x'^2 = qy'$$

que representa uma $\boxed{\text{superfície cilíndrica parabólica}}$.

Como determinar Q'?

Tome-se $q = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $Q' = \begin{bmatrix} \frac{a}{q} & -\frac{b}{q} \\ \\ \frac{b}{q} & \frac{a}{q} \end{bmatrix}$.

As colunas de Q' são vetores unitários, ortogonais entre si e $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} Q' = \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2}{q} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \end{bmatrix}$

Apresentamos agora uma lista das equações reduzidas das quádricas.

Omitimos as equações que conduzem ao conjunto vazio e as equações que podem ser obtidas a partir destas por troca dos papéis de x, y, z.

Classificação

- $r(A) = 3$
  - 3 valores próprios com o mesmo sinal

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Elipsóide

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ Um ponto

  - 2 valores próprios > 0, 1 valor próprio < 0

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hiperbolóide de uma folha

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Superfície cónica

  - 1 valor próprio > 0, 2 valores próprios < 0

    $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Hiperbolóide de duas folhas

    $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ Superfície cónica

- $r(A) = 2$
  - 2 valores próprios com o mesmo sinal

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p \neq 0)$ Parabolóide elítico

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Cilindro elítico

    $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ Uma reta

  - 2 valores próprios de sinais contrários

    $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Cilindro hiperbólico

    $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ Dois planos concorrentes

    $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \quad (p \neq 0)$ Parabolóide hiperbólico [ou sela de cavalo]

- $r(A) = 1$

  $x^2 = 2pz \quad (p \neq 0)$ Cilindro parabólico

  $\frac{x^2}{a^2} = 1$ Dois planos paralelos

  $x^2 = 0$ Um plano (dois planos coincidentes)

Exemplo

Seja a quádrica de equação $-5y^2 + 2xy - 8xz + 2yz = 0$.

Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $c = 0$,

a equação matricial é $X^T AX = 0$.

Os valores próprios de A são $4, -3, -6$.

Existe $Q \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *ortogonal, diagonalizadora de A, tal que*

$D = Q^T AQ = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

Como não há termos lineares na equação, não é necessário determinar Q.

Fazendo $X' = Q^T X$ *obtemos*

$$X^T AX = 0 \Leftrightarrow X'^T DX'$$
$$\Leftrightarrow 4x'^2 - 3y'^2 - 6z'^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow -4x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 = 0$$

Trata-se de uma superfície cónica.