ТРР 1 з вищої математики - 1
студента групи ІП-01
Єлісєєва Даніла
Варіант №24

1. а) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \sim$ IV р · (-1); I р ↔ IV р. $\sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \sim$

$\sim$ I р − I р ⇒ II р; II р − I р ⇒ III р; IV р + I р ⇒ IV р. $\sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \sim$ III р − $\frac{5}{3}$ II р ⇒ III р. $\sim$

$$\sim \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44} = 1 \cdot 3 \cdot \frac{8}{3} \cdot 3 = \underline{24}$$

б) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{41} + 2 \cdot A_{42} + 0 \cdot A_{43} + 0 \cdot A_{44} =$

$= (-1) \cdot (-32) + 2 \cdot (-4) = 32 - 8 = \underline{24}$

$A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} = -1 \cdot (-16 + 0 + 18 - 18 + 48 + 0) =$

$= -32$

$A_{42} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 18 - 6 - 24 + 0 = 26 - 30 =$

$= -4$

2. Довести, що A задов $f(x)=0$

$$A=\begin{vmatrix}12 & 5\\ -5 & -2\end{vmatrix};\quad f(x)=x^2-10x+1.$$

$$f(A)=A^2-10A+1^{E}=\begin{vmatrix}119 & 50\\ -50 & -21\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}120 & 50\\ -50 & -20\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$A^2=\begin{vmatrix}12 & 5\\ -5 & -2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}12 & 5\\ -5 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}119 & 50\\ -50 & -21\end{vmatrix}$$

$$10A=\begin{vmatrix}120 & 50\\ -50 & -20\end{vmatrix}$$

Доведено. $f(A)=0$.

3. Для матриці A знайти A^{-1}, рез. перевірити

а) $A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}$ $\det A=8-9=-1$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det}\cdot A^*=-1\cdot A^*=-1\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

$A_{11}=4$ $A^*=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}4 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}$

$A_{12}=-3$

$A_{21}=-3$ Перевірка $A\cdot A^{-1}\overset{?}{=}E$

$A_{22}=2$ $\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Перевірено

б) $A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ $\det A = 3 + 12 + 8 - 6 - 4 - 12 =$

$= 11 - 10 = 1 \neq 0$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(-6+6) = 0$

$A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(-6+4) = 2$

$A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4$

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 2 = -2$

$A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2$

$A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3$

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Перевірка $A \cdot A^{-1} \stackrel{?}{=} E$

$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 - 2\cdot 0 + 2\cdot 1 & -1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 2\cdot 4 & -1\cdot(-2) - 2\cdot(-2) + 2\cdot(-3) \\ -2\cdot 1 - 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & -2\cdot 2 - 1\cdot 3 + 2\cdot 4 & -2\cdot(-2) - 1\cdot(-2) + 2\cdot(-3) \\ -3\cdot 1 - 2\cdot 0 + 3\cdot 1 & -3\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 & -3\cdot(-2) - 2\cdot(-2) + 3\cdot(-3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перевірено.

4. Розв'язати систему рівнянь

а) за формулами Крамера

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ 2x - 3y + 2z = 2, \\ 3x - y - z = 6. \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det A = 3 + 6 + 8 - 36 + 2 + 2 = 21 - 36 = \underline{-15}$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 6 & -1 \end{matrix} =$$

$$= 3 + 12 + 8 - 72 + 2 + 2 = 27 - 72 = -45$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{matrix} = -2 + 6 - 48 + 24 - 12 + 2 =$$

$$= 6 - 36 = -30$$

$$\Delta 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \\ 3 & -1 \end{matrix} = -18 + 6 - 2 + 9 + 2 - 12 =$$

$$= -30 + 15 = -15$$

$$x = \frac{\Delta 1}{\Delta} = \frac{-45}{-15} = 3$$

$$y = \frac{\Delta 2}{\Delta} = \frac{-10}{-15} = 2$$

$$z = \frac{\Delta 3}{\Delta} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

б) методом Гауса.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \text{II}p - 2\text{I}p \\ \text{III}p - 3\text{I}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & -4 & 11 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} \text{III}p - \frac{4}{5}\text{II}p \Rightarrow \text{III}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \text{I}p + \frac{4}{3}\text{III}p \Rightarrow \text{I}p \\ \text{II}p + \frac{10}{3}\text{III}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{l} \text{I}p \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \text{II}p \\ \text{III}p \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \text{III}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \text{I}p - \text{II}p \Rightarrow \text{I}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$X$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5. Досл. на сумісність, знайти ФСР

Знайти $X_{зн} = X_{30} + X_{чн}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 14 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \text{II}p - 2\text{I}p \\ \text{III}p - 2\text{I}p \\ \text{IV}p - \text{I}p \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{l} \text{III}p + \text{II}p \to \text{III}p \\ \text{IV}p - 2\,\text{II}p \to \text{IV}p \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{2} & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \textcircled{-4} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4$

$r(A) = r(A|B) = 2$, система сумісна

$n = 4$

x_1, x_2 - базисні x_3, x_4 - вільні невідомі

$(2p)$: $-4x_2 + x_3 - x_4 = 0$

$$x_2 = -\frac{x_4 - x_3}{4} = -\frac{x_4}{4} + \frac{x_3}{4} = \frac{x_3}{4} - \frac{x_4}{4}$$

(НР): $2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2$

$2x_1 + 5 \cdot \left(\frac{x_3}{4} - \frac{x_4}{4}\right) + x_3 + 3x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{5}{4} \cdot x_3 - \frac{5}{4} x_4 + x_3 + 3x_4 = 2$

$2x_1 + \frac{9}{4} x_3 + \frac{7}{4} x_4 = 2$

$x_1 = \frac{2 - \frac{9}{4} x_3 - \frac{7}{4} x_4}{2} = 1 - \frac{9}{8} x_3 - \frac{7}{8} x_4$

$$\underset{3н}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{9}{8} x_3 - \frac{7}{8} x_4 \\ \frac{x_3}{4} - \frac{x_4}{4} \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_{4н}} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\times 30} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $e_1 = \begin{pmatrix} -1\frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{8} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$