Actividades

Laboratorio: Cálculo de raíces de manera iterativa

Objetivos

A través de esta actividad comprender las limitaciones inherentes al cálculo analítico y deducir la necesidad del uso de técnicas de aproximación para la resolución de ecuaciones del ámbito ingenieril. Para realizarla, puedes emplear la calculadora online WIRIS (https://calcme.com/a), Matlab (https://matlab.mathworks.com/) o Microsoft Excel.

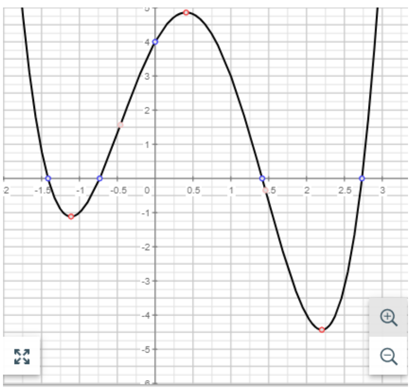
Descripción

En este ejercicio debes encontrar los intervalos de convergencia de los cuatro ceros de una función dada y aplicar los métodos iterativos: bisección, punto fijo y Newton-Raphson para calcular con precisión $5*10^{-3}$ la raíz positiva más pequeña. La función es:
$f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4$

Extensión máxima de la actividad: 5 páginas.

Resolución

Para empezar, representamos nuestra función con Wiris y poder ver en que puntos corta la función al eje de las x:



A continuación, vamos a utilizar los métodos de Bisección, Punto fijo y Newton-Rahpson para hallar los puntos de corte.

Bisección:

Para el intervalo [1, 2], comprobamos que la función cumple el Corolario del Teorema del Valor Intermedio, que nos dice, que si f pertenece a C[a,b] asume valores de signo opuesto en los extremos del intervalo [a,b], es decir, $f(a)f(b)<0$, entonces el intervalo contendrá al menos una raíz de la ecuación $f(x)=0$.

Sustituimos los puntos del intervalo en nuestra f(x):

$$f(1) = 4 \qquad f(2)=-4$$

Efectivamente encontraremos un punto entre los extremos que sea $f(x)=0$. Realizamos la siguiente tabla para encontrarlo:

N=Iteración

a_n = extremo izquierdo

b_n = extremo derecho

P_n = aproximación

$f(P_n)$ = valor de f en la aproximación

N	a_n	b_n	P_n	$f(P_n)$	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1}\rvert}{\lvert P_n\rvert}$
1	1	2	1,5	-0,6875	—
2	1	1,5	1,25	1,2852	0,2
3	1,25	1,5	1,375	0,31274	0,0909091
4	1,375	1,5	1,4375	-0,18651	0,04347
5	1,375	1,4375	1,40625	0,063676	0,0$\overline{2}$
6	1,40625	1,4375	1,421875	-0,0613[illegible]	0,0109890
7	1,40625	1,421875	1,4140625	0,001708	$5,524\cdot10^{-3}$

$$\left|\frac{P_2 - P_1}{P_2}\right| = \left|\frac{1,25-1,5}{1,25}\right|$$

$$\left|\frac{1,375-1,25}{1,375}\right|$$

$$\left|\frac{1,4375-1,375}{1,4375}\right|$$

En la Iteración N=7, obtenemos **P_7 = 1.4140625**

<u>Para el intervalo [2, 3],</u> realizamos las mismas comprobaciones y operaciones que para el punto anterior. Sustituimos los puntos del intervalo en nuestra f(x):

f(2)=-4 f(3)=7

Efectivamente encontraremos un punto entre los extremos que sea f(x)=0. Realizamos la siguiente tabla para encontrarlo:

n	a_n	b_n	P_n	$f(P_n)$	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1}\rvert}{\lvert P_n\rvert}$
1	2	3	2,5	-3,1875	—
2	2,5	3	2,75	0,34766	0,090909091
3	2,5	2,75	2,625	-1,7576	0,0476190
4	2,625	2,75	2,6875	-0,79564	0,0232558
5	2,6875	2,75	2,71875	-0,24747	0,0114942
6	2,71875	2,75	2,734375	0,044179	$5,7 \cdot 10^{-3}$

En la Iteración N=6, obtenemos <u>**P_6 = 2.734375**</u>

<u>Para el intervalo [-1, 0],</u> realizamos las mismas comprobaciones y operaciones que para el punto anterior. Sustituimos los puntos del intervalo en nuestra f(x):

f(-1)=-1 f(0)=4

Efectivamente encontraremos un punto entre los extremos que sea f(x)=0. Realizamos la siguiente tabla para encontrarlo:

n	a_n	b_n	P_n	$f(P_n)$	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1}\rvert}{\lvert P_n\rvert}$
1	-1	0	-0,5	1,3125	—
2	-1	-0,5	-0,75	-0,089844	0,3
3	-0,75	-0,5	-0,625	0,57837	0,2
4	-0,75	-0,625	-0,6875	0,23268	0,090909091
5	-0,75	-0,6875	-0,71875	0,068086	0,04347826
6	-0,75	-0,71875	-0,734375	-0,011768	0,021276595
7	-0,734375	-0,71875	-0,726562	0,027946	0,010753383
8	-0,734375	-0,726562	-0,730468	0,0080942	$5,3 \cdot 10^{-3}$

En la Iteración N=8, obtenemos **P_8 = -0.7304685**

Para el intervalo [-2, -1], realizamos las mismas comprobaciones y operaciones que para el punto anterior. Sustituimos los puntos del intervalo en nuestra f(x):

f(-2)=12 f(-1)=-1

Efectivamente encontraremos un punto entre los extremos que sea f(x)=0. Realizamos la siguiente tabla para encontrarlo:

n	a_n	b_n	P_n	$f(P_n)$	$\frac{\lvert P_n - P_{n-1}\rvert}{\lvert P_n\rvert}$
1	-2	-1	-1,5	0,8125	—
2	-1,5	-1	-1,25	-0,90234	0,2
3	-1,5	-1,25	-1,375	-0,28882	0,0909091
4	-1,5	-1,375	-1,4375	0,19533	0,04347826
5	-1,4375	-1,375	-1,40625	-0,062667	$0,0\overline{2}$
6	-1,4375	-1,40625	-1,421875	0,062763	0,010989010
7	-1,421875	-1,40625	-1,4140625	-0,0012081	$5,5 \cdot 10^{-3}$

En la Iteración N=7, obtenemos **P_7 = -1.4140625**

Punto Fijo:

Para calcular los puntos por el método del punto fijo, primero tenemos que sacar todas las g(x) posibles de nuestra f(x):

$$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - x^2 + 1$$
$$\boxed{g_1(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} - x^2 + 1}$$

$$+4x^2 = x^4 - 2x^3 + 4x + 4$$
$$x^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + x + 1$$
$$\boxed{g_2(x) = \sqrt{\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + x + 1}}$$

$$2x^3 = x^4 - 4x^2 + 4x + 4$$
$$x^3 = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2x + 2$$
$$\boxed{g_3(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2x + 2}}$$

$$x^4 = 2x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$x = \sqrt[4]{2x^3 + 4x^2 - 4x - 4}$$
$$\boxed{g_4(x) = \sqrt[4]{2x^3 + 4x^2 - 4x - 4}}$$

Una vez que tenemos todas las posibles g(x), miramos cual es la más apta. Para ello derivamos cada g(x):

$$g_1'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{1}{2} 3x^2 - 2x = \boxed{x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 2x}$$

$$g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + x + 1}} \cdot \frac{1}{4} 4x^3 - \frac{1}{2} 3x^2 + 1 = \boxed{\frac{-\frac{3}{2}x^2 + 1}{2\sqrt{\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + x + 1}}}$$

$$g_3'(x) = \left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2x + 2\right)^{1/3} = \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2x + 2\right)^{-2/3} \cdot \frac{1}{2} 4x^3 - 4x + 2 = \boxed{\frac{2x^3 - 4x + 2}{3\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{2} - 2x^2 + 2x + 2\right)^2}}}$$

$$g_4'(x) = (2x^3 + 4x^2 - 4x - 4)^{1/4} = \frac{1}{4}(2x^3 + 4x^2 - 4x - 4)^{-\frac{3}{4}} \cdot 6x^2 + 8x - 4 = \boxed{\frac{6x^2 + 8x - 4}{4\sqrt[4]{(2x^3 + 4x^2 - 4x - 4)^3}}}$$

Ahora reemplazamos el punto medio de cada intervalo en nuestras g'(x) y la más apta será -1 ≤ g'(x) ≤ 1.

Para el intervalo de confianza [1, 2], el punto medio es 1.5. Sustituimos:

$g_1'(1,5) = -3$ No apta

$g_2'(1,5) = 0,34684$ Apta

$g_3'(1,5) = 0,43765$ Apta

$g_4'(1,5) = 1,4475$ No Apta.

n	x	G(x)	G(x) − x
1	1,5	1,4416	—
2	1,4416	1,4225	−0,0191
3	1,4225	1,4167	$-5,8 \cdot 10^{-3}$

<u>En la Iteración N=3 -> 1.4167</u>

Para el intervalo de confianza [2, 3], el punto medio es 2.5. Sustituimos:

$g_1'(2,5) = 1,25$ No apta

$g_2'(2,5) = 1,5523$ No apta

$g_3'(2,5) = 1,3322$ No apta

$g_4'(2,5) = 0,80709$ Apta

n	x	G(x)	G(x) − x
1	2,5	2,5495	—
2	2,5495	2,5892	0,0397
3	2,5892	2,6208	0,0316
4	2,6208	2,6457	0,0249
5	2,6457	2,6652	0,0195
6	2,6652	2,6804	0,0152
7	2,6804	2,6922	0,0118
8	2,6922	2,7013	$9,1 \cdot 10^{-3}$
9	2,7013	2,7084	$7,1 \cdot 10^{-3}$
10	2,7084	2,7138	$5,4 \cdot 10^{-3}$
11	2,7138	2,718	$4,2 \cdot 10^{-3}$

<u>En la Iteración N=11 -> 2.718</u>

Para el intervalo de confianza [-1, 0], el punto medio es -0.5. Sustituimos:

$g_1'(-0{,}5) = -0{,}5$ Apta

$g_2'(-0{,}5) = 0{,}3288$ Apta

$g_3'(-0{,}5) = 1{,}9057$ No Apta

$g_4'(-0{,}5) = \cancel{0{,}\ldots}$ ~~Apta~~ No Apta

n	x	G(x)	$G_1(x) - x$
1	-0,5	0,82813	
2	0,82813	0,14782	-0,68031
3	0,14782	0,9766	0,82878
4	0,97669	-0,19218	0,78447
5	-0,19218	0,96696	0,77478
6	0,96696	-0,16891	0,79845

Para el intervalo de confianza [-2, -1], el punto medio es -1.5. Sustituimos:

$g_1'(-1{,}5) = -3{,}75$ No apto

$g_2'(-1{,}5) = -1{,}8356$ No apto

$g_3'(-1{,}5) = 0{,}20172$ Apto

$g_4'(-1{,}5) = -0{,}21115$ Apto

n	x	G(x)	G(x) - x
1	-1,5	-1,4372	
2	-1,4372	-1,4219	0,0157
3	-1,4219	-1,4166	$4{,}9 \cdot 10^{-3}$

<u>En la Iteración N=3 -> -1.4166</u>

Newton-Raphson:

Para averiguar los puntos que hacen 0 la f(x) utilizando este método, primero, tenemos que hallar la f '(x):

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 8x + 4$$

Teniendo la derivada de la función y la siguiente expresión podemos empezar a calcular los puntos:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{si} \quad f'(x_n) \neq 0}$$

Necesitamos una buena aproximación inicial, para el primer punto hemos elegido $x_1 = 1$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{3}{-6} = 1{,}5$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(1{,}5)}{f'(1{,}5)} = 1{,}5 - \frac{-0{,}6875}{-8} = 1{,}4140625$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}4140625 - \frac{0{,}0012085}{-7{,}9999} = \boxed{1{,}414213}$$

El resultado es 1.414213.

Para el segundo punto hemos elegido $x_1 = 2.5$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,5 - \frac{-3,1875}{9} = 2,854166$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 2,85416 - \frac{2,6915}{25,292} = 2,747743$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 2,747743 - \frac{0,30307}{19,7} = \boxed{2,73235}$$

<u>El resultado es 2.732358.</u>

Para el segundo punto hemos elegido $x_1 = -0.5$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0,5 - \frac{1,3125}{6} = -0,71875$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0,71875 - \frac{0,068086}{5,1652} = \boxed{-0,731931}$$

<u>El resultado es -0.731931.</u>

Para el segundo punto hemos elegido $x_1 = -1.5$:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -1,5 - \frac{0,8125}{-11} = -1,426136$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -1,426136 - \frac{0,097736}{-8,3964} = \boxed{-1,414495}$$

<u>El resultado es -1.414495.</u>

¿Qué método es más rápido?

En mi opinión si tenemos un buen punto de partida el método más rápido para aproximar raíces es Newton-Raphson.

Rúbrica

Cálculo de raíces de manera iterativa (valor real: 5 puntos)	Descripción	Puntuación máxima (puntos)	Peso %
Criterio 1	4 intervalos correctos	1	10 %
Criterio 2	Bisección	3	30 %
Criterio 3	Punto fijo	3	30 %
Criterio 4	Newton-Raphson	3	30 %
		10	**100 %**