

# Estudio del comportamiento caótico en el sistema Hyperion-Saturno

Universidad de Sonora

MEDINA CAMPUZANO José Alberto  
MEDINA LEÓN Miguel Ernesto  
PORTILLO VAZQUEZ Manuel Roberto  
SANTANA BEJARANO Dupret Alberto

10/09/19

# Glosario

- 1 Introducción
- 2 Modelo
- 3 Método numérico
- 4 Resultados
- 5 Lo que sigue
- 6 Conclusión

# Sistemas lunares

Los sistemas lunares en general cuentan con unas características muy interesantes, siendo una de ellas (al menos, las observadas en el sistema solar) el hecho de que la rotación de la luna y el movimiento rotacional que ésta tiene respecto a su planeta están sincronizados. Aunque hay una que no cumple dicha característica, y tal satélite es una luna de Saturno : Hyperion.

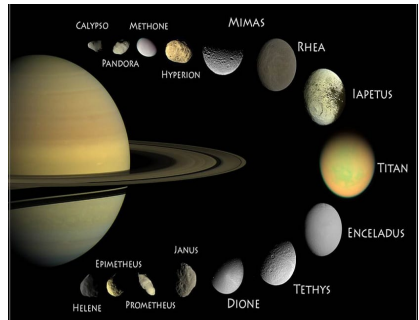


FIGURE – Lunas de Saturno

# Sistema Hyperion-Saturno

## Características particulares

Enlistando

algunas características :

Masa :  $5,686 \times 10^{18}$  kg.

Dimensiones :

$360,2 \times 266 \times 205,4$  km.

Período

de rotación : caótico.

Período

orbital : 21,27661 días.

Excentricidad : 0,1230061.



FIGURE – Hyperion

# Comportamiento caótico del sistema Hyperion-Saturno

## Caos

Las razones de por qué Hyperion muestre un comportamiento tan errático es debido a su distribución no homogénea de la masa, su inusual forma, y a la órbita tan elíptica que posee. Algunas consecuencias de ello son :

- (i) El giro de Hyperion no está sincronizado con su movimiento orbital.
- (ii) Tambalea caóticamente.

## Modelo simplificado

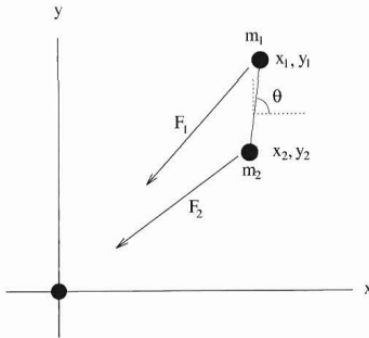


FIGURE – Modelo simplificado de Hyperion en órbita alrededor de Saturno.

## Movimiento traslacional

La ecuación que modelaría eso sería :

$$m_{Hyp}\ddot{\vec{r}}_{cm} = -G\frac{m_{Sat}m_{Hyp}\vec{r}_{cm}}{||\vec{r}_{cm}||^3}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}_{cm}}{dt^2} = -G \frac{m_{Sat} \vec{r}_{cm}}{\|\vec{r}_{cm}\|^3}$$

## Movimiento rotacional

Para describir el movimiento rotacional se necesita considerar la torca que genera la atracción gravitacional sobre cada masa

$$I\ddot{\theta} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{[(x_1 - x_c)\hat{\mathbf{i}} + (y_1 - y_c)\hat{\mathbf{j}}] \times \vec{F}_1 + [(x_2 - x_c)\hat{\mathbf{i}} + (y_1 - y_c)\hat{\mathbf{j}}] \times \vec{F}_2}{m_1 \|\vec{r}_1\|^2 + m_2 \|\vec{r}_2\|^2}$$



## Movimiento rotacional

Reescribiendo en función de los centros de masas  $x_{cm}$ ,  $y_{cm}$ , y asumiendo que las distancias del centro de masa a las masas es despreciable comparado a la distancia de Saturno a Hyperion

$$||\vec{r}_1||, ||\vec{r}_2||, ||\vec{r}_{cm}|| \gg (x_1 - x_{cm}), (y_1 - y_{cm}), (x_2 - x_{cm}), (y_2 - y_{cm})$$

queda simplificado de la siguiente manera

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{3Gm_{Sat}}{\|\vec{r}_{cm}\|^5}(x_{cm}\sin\theta - y_{cm}\cos\theta)(x_{cm}\cos\theta + y_{cm}\sin\theta)$$

## Preparando el código

Partiendo como base de la distancia media de Saturno a Hyperion y del año promedio, se generan las demás unidades

Unidades naturales	Valor
$l_0$	$1481 \times 10^6 m$
$t_0$	$1838299,104 \text{ s}$
$v_0$	$805,6360343 \frac{m}{s}$
$m_0$	$1,240617724 \times 10^{19} kg$
$\omega_0$	$5,43981117 \times 10^{-10} \text{ rad}_s$
$E_0$	$7,857507 \times 10^{24} J$

Además, cabe aclarar que bajo estas unidades

$$Gm_{Sat} = 4\pi^2$$

## Disminución del orden

$$\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = v_{cm}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡

# Sistema de ecuaciones diferenciales

## Disminución del orden

Aplicando lo mismo para el movimiento rotacional, queda de esta manera

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\frac{d\omega}{dt} \approx -\frac{12\pi^2}{||\vec{r}_{cm}||^5} (x_{cm} \sin \theta - y_{cm} \cos \theta) (x_{cm} \cos \theta + y_{cm} \sin \theta)$$

## Separación vectorial

En el caso del movimiento orbital al ser una ecuación vectorial, esta debe ser separada en sus componentes, generando así un sistema de ecuaciones diferenciales de cuatro ecuaciones de primer orden

$$\frac{dx_{cm}}{dt} = v_{xcm}$$

$$\frac{dy_{cm}}{dt} = v_{y_{cm}}$$

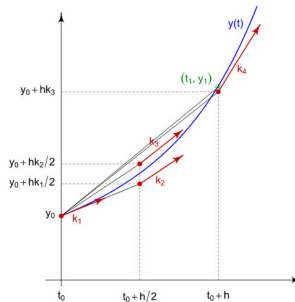
$$\frac{dv_{xcm}}{dt} = -\frac{4\pi^2 x_{cm}}{(x_{cm}^2 + y_{cm}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dv_{ycm}}{dt} = -\frac{4\pi^2 y_{cm}}{(x_{cm}^2 + y_{cm}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

# Integrador

## Runge Kutta de orden cuatro

Los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos iterativos (implícitos y explícitos) para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente, del problema de valor inicial. En este caso, se utilizó Runge-Kutta de cuarto orden.



**FIGURE** – Pendientes usadas por el método de orden cuatro.

### Runge Kutta de orden cuatro

El valor  $y_{i+1}$  es determinado por el valor de  $y_i$  más el producto del tamaño del intervalo por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes.

$$pendiente = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$

Esta forma del método de Runge-Kutta, es un método de cuarto orden, lo cual significa que el error por paso es del orden de  $\mathcal{O}(h^5)$ , mientras que el error total acumulado tiene el orden  $\mathcal{O}(h^4)$ . Por lo tanto, la convergencia del método es del orden de  $\mathcal{O}(h^4)$ , razón por la cual es usado en los métodos computacionales.

# Runge Kutta de orden cuatro

## Movimiento orbital

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, y) \quad x(t_0) = x_0 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} = v_{0x}$$

$\frac{dx}{dt} = v_x$	$\frac{dv_x}{dt} = f(x, y)$
$k_1 = h v_{0x}$	$l_1 = h f(x_0, y_0)$
$k_2 = h(v_{0x} + \frac{1}{2}l_1)$	$l_2 = h f(x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}q_1)$
$k_3 = h(v_{0x} + \frac{1}{2}l_2)$	$l_3 = h f(x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}q_2)$
$k_4 = h(v_{0x} + l_3)$	$l_4 = h f(x_0 + k_3, y_0 + q_3)$
$x = x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	$v_x = v_{0x} + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$



# Runge Kutta de orden cuatro

## Movimiento orbital

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u(x, y) \quad y(t_0) = y_0 \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} = v_{0y}$$

$\frac{dy}{dt} = v_y$	$\frac{dv_y}{dt} = u(x, y)$
$q_1 = hv_{0y}$	$m_1 = hu(x_0, y_0)$
$q_2 = h(v_{0y} + \frac{1}{2}m_1)$	$m_2 = hu(x_0 + \frac{1}{2}k_1, y_0 + \frac{1}{2}q_1)$
$q_3 = h(v_{0y} + \frac{1}{2}m_2)$	$m_3 = hu(x_0 + \frac{1}{2}k_2, y_0 + \frac{1}{2}q_2)$
$q_4 = h(v_{0y} + m_3)$	$m_4 = hu(x_0 + k_3, y_0 + q_3)$
$y = y_0 + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$	$v_y = v_{0y} + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$

## Movimiento rotacional

$$\frac{d^2\theta}{dt} = g(\theta, x_{cm}, y_{cm}, r_{cm}) \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0} = \omega_0$$

$\frac{d\theta}{dt} = \omega$	$\frac{d\omega}{dt} = g(\theta, x_{cm}, y_{cm}, r_{cm})$
$k_1 = h\omega_0$	$l_1 = hg(\theta_0, x_{0cm}, y_{0cm}, r_{0cm})$
$k_2 = h(\omega_0 + \frac{1}{2}l_1)$	$l_2 = hg(\theta_0 + \frac{1}{2}k_1, x_{0cm}, y_{0cm}, r_{0cm})$
$k_3 = h(\omega_0 + \frac{1}{2}l_2)$	$l_3 = hg(\theta_0 + \frac{1}{2}k_2, x_{0cm}, y_{0cm}, r_{0cm})$
$k_4 = h(\omega_0 + l_3)$	$l_4 = hg(\theta_0 + k_3, x_{0cm}, y_{0cm}, r_{0cm})$
$\theta = \theta_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$	$\omega = \omega_0 + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4)$

# Resultados

## Analizando las gráficas

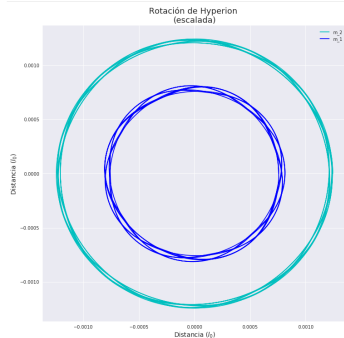
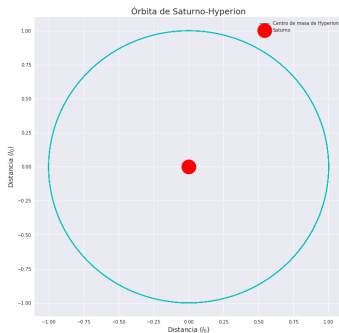


FIGURE –  $x_{10} = l_0, y_{10} = 0, \theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0, v_{x0} = 0, v_{y0} = 2\pi$

# Resultados

## Analizando las gráficas

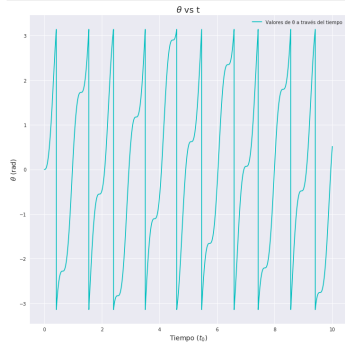
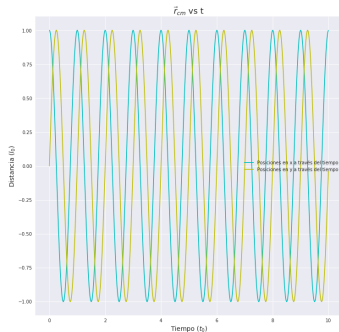


FIGURE –  $x_{10} = l_0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 2\pi$

# Resultados

## Analizando las gráficas

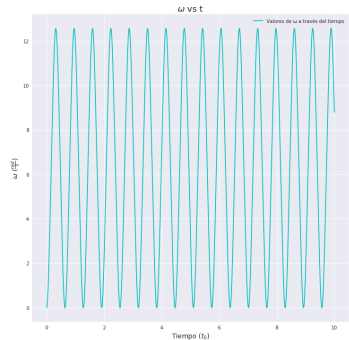
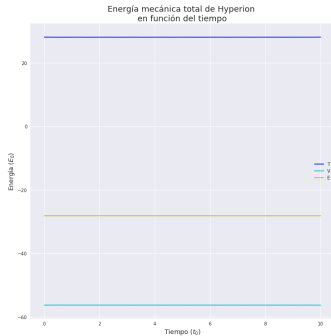


FIGURE –  $x_{10} = l_0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 2\pi$

# Resultados

## Analizando las gráficas

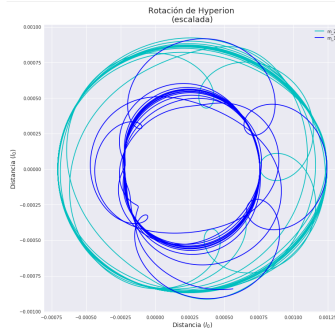
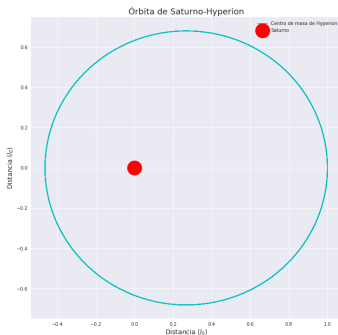


FIGURE –  $x_{10} = l_0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 5 v_0$

# Resultados

## Analizando las gráficas

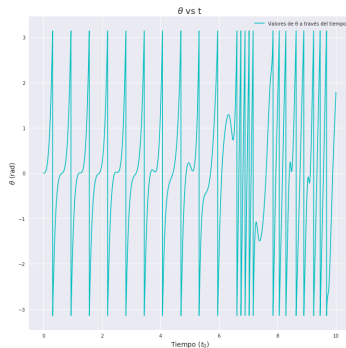
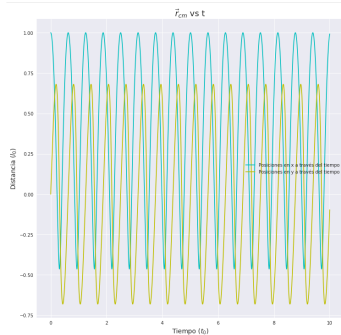


FIGURE –  $x_{10} = l_0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 5 v_0$

# Resultados

## Analizando las gráficas

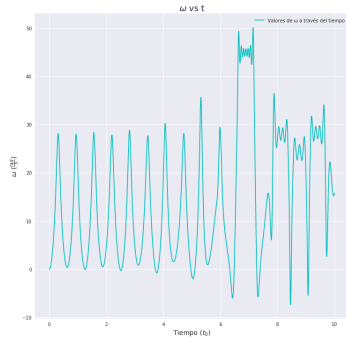
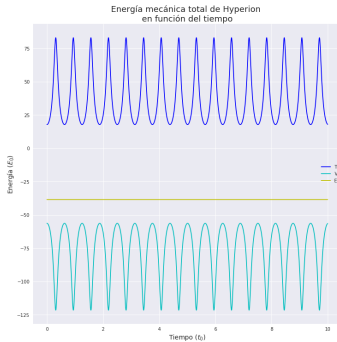


FIGURE –  $x_{10} = l_0$ ,  $y_{10} = 0$ ,  $\theta_0 = 0$   
 $\omega_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$ ,  $v_{y0} = 5 v_0$



# Objetivos a conseguir

## Cuantificando el caos

Hay algunas metas que aún se planea alcanzar para la finalización de este proyecto ; las cuales son :

- 1) Generar resultados a partir de variaciones mínimas en las condiciones iniciales, y graficar su diferencia respecto al tiempo ( $\Delta\theta$  vs  $t$ ).
- 2) A partir de dichas graficas hacer ajustes de datos, de tal forma que la ecuación representativa sea de tipo exponencial ( $\Delta\theta \approx e^{\lambda t}$ ), con el propósito de conseguir el parámetro  $\lambda$  ; que es conocido como el *exponente de Lyapunov*.
- 3) Dar con las ecuaciones de las elipses para conseguir su excentricidad, y así graficar la excentricidad respecto a *Lyapunov* ( $\xi$  vs  $\lambda$ ).

## Conclusión

Los resultados obtenidos concuerdan con los mostrados en simulaciones hechas por otros investigadores ; entre ellos los que se usaron de bibliografía, así que se puede confiar en la veracidad de los resultados y se puede inferir que el comportamiento es caótico.

La forma del satélite, así como su distribución irregular de la masa, está fuertemente influenciado con la alta sensibilidad a las condiciones iniciales del sistema. Sin embargo, faltan obtener algunos datos para cuantificar el caos y así poder asegurar tal tendencia.

## Bibliografía

- [1] Nicholas J. Giordano, Hisao Nakanishi ; "Computational physics". Pearson Education, Inc. 2006.
- [2] J. B. Marion and S. T. Thornton, "Classical Dynamics of Particles and Systems", Brooks-Cole, Belmont. 1995.
- [3] J. Wisdom, "Chaotic Dynamics in the Solar System". Icarus. 1987.
- [4] J. J. Klavetter, "Rotation of Hyperion. I. Observations.", Astronomical Journal, 1989.
- [5] J. J. Klavetter, "Rotation of Hyperion. II. Dynamics.", Astronomical Journal, 1989.