



DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

CURSO DE FÍSICA COMPUTACIONAL

## REPORTE

# LA ECUACIÓN DE DUFFING

ACTIVIDAD 10

*Autor:*

Miguel Ernesto MEDINA LEÓN

*Profesor:*

Carlos LIZÁRRAGA CELAYA

AÑO ACADÉMICO 2018-2019

# 1 Introducción

En esta actividad se nos pide resolver numéricamente la ecuación de Duffing por medio de la función *ode* de *SciPy* con los siguientes valores establecidos:

- $\alpha = 1.0$
- $\gamma = 1.0$
- $\delta = 0.1$

Lo más interesante es resolverla usando un método de integración de Runge-Kutta de cuarto orden.

El objetivo final es reproducir esta gráfica de a continuación:

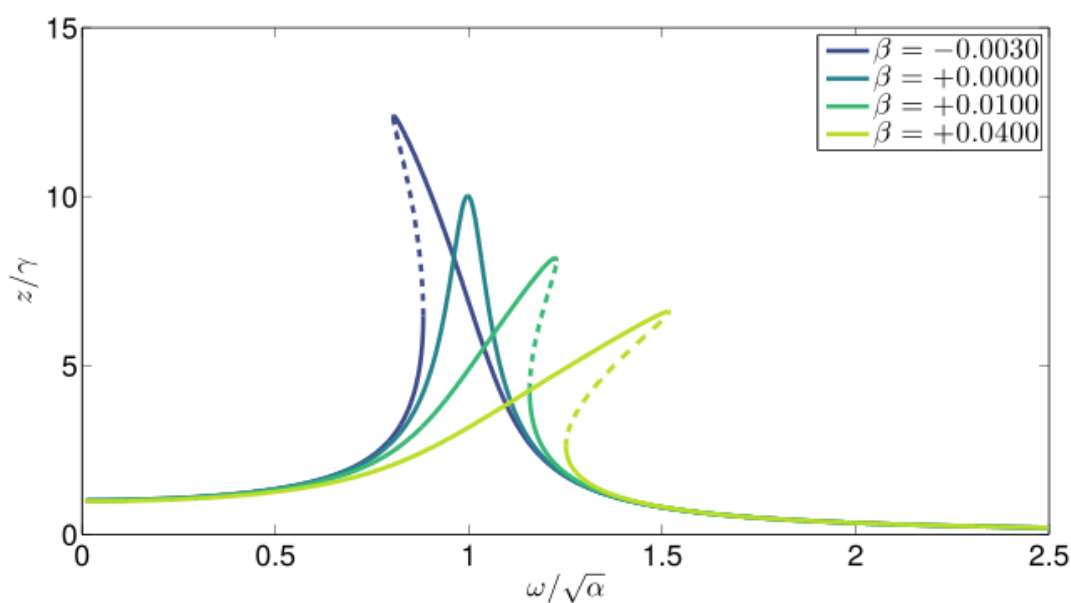


Figura 1: Esta sistema muestra un comportamiento muy peculiar. La solución presenta una discontinuidad siguiendo rutas distintas, incrementando el valor de  $\omega$  y luego disminuyéndolo.

Utilizando los mismos valores de  $\beta$

## 2 Desarrollo

### 2.1 Marco teórico

#### 2.1.1 Ecuación de Duffing

[2] La ecuación de Duffing (u oscilador de Duffing) es una ecuación diferencial no-lineal de segundo orden usada para modelar osciladores amortiguados y conducidos. La ecuación es

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + ax + \beta x^3 = \gamma \cos \omega t$$

donde

- $t$  es el tiempo.
- La función  $x = x(t)$  es el desplazamiento en el tiempo  $t$ .
- $\dot{x}$  es la velocidad.
- $\ddot{x}$  es la aceleración.
- $\delta, a, \beta, \gamma$  y  $\omega$  son constantes dadas.

La ecuación de Duffing es un ejemplo de un sistema dinámico que exhibe un comportamiento caótico. Además, el sistema presenta en la respuesta de frecuencia el fenómeno de salto de resonancia que es un tipo de comportamiento de histéresis de frecuencia.

#### 2.1.2 Histeresa

[7] La histeresa es la tendencia de un sistema de conservar sus propiedades en ausencia de un estímulo que las generó, o todavía, es la capacidad de preservar una deformación efectuada por un estímulo.

#### 2.1.3 Runge-Kutta de orden cuatro

[8] En análisis numérico, los métodos de Runge-Kutta son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

Un miembro de la familia de los métodos Runge-Kutta usado ampliamente es el de cuarto orden. Es usado tanto que a menudo es referenciado como "RK4" o como "el método Runge-Kutta".

Definiendo un problema de valor inicial como:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

donde

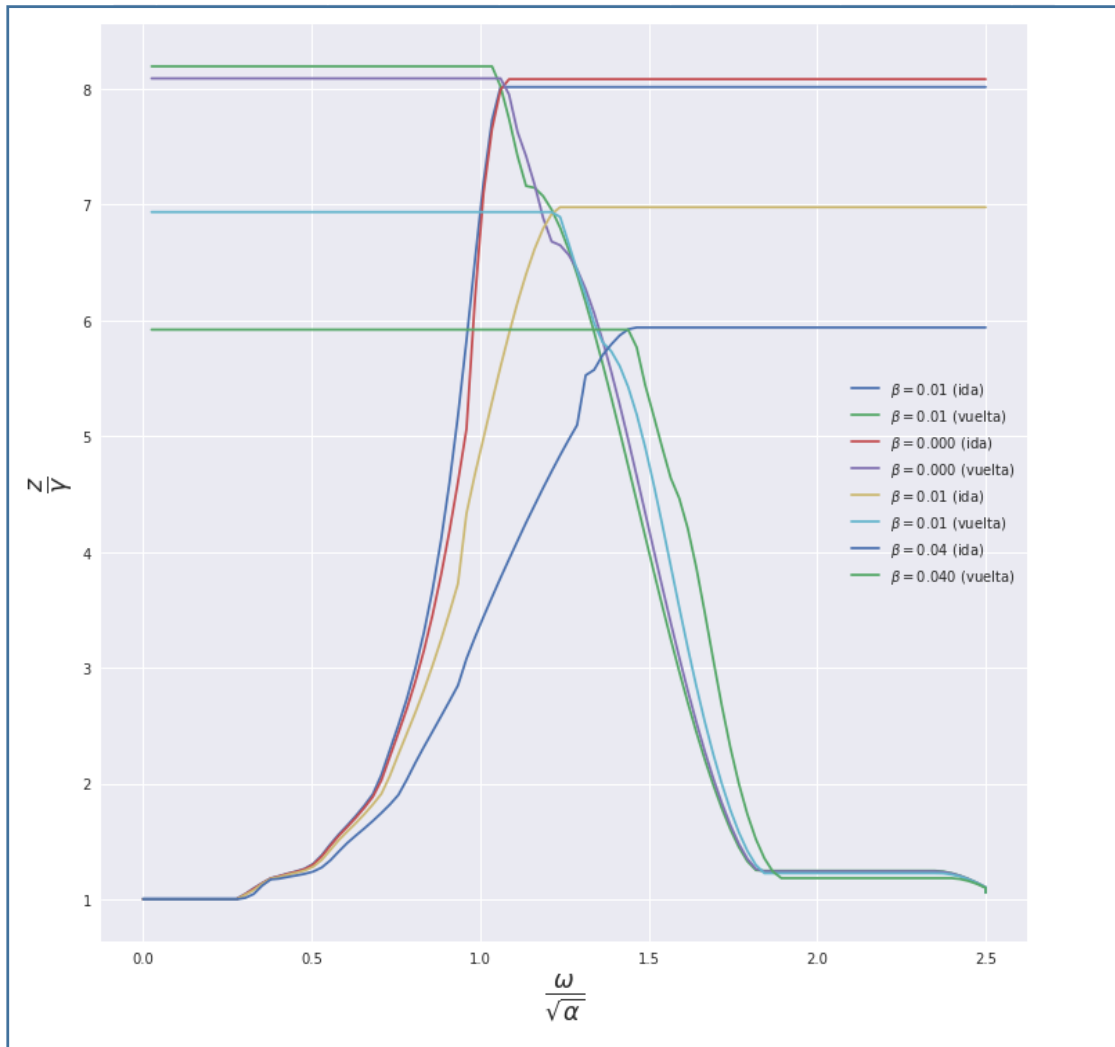
- $k_1 = f(x_i, y_i)$
- $k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h)$
- $k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h)$
- $k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$

## 2.2 Metodología

Primero se importaron las bibliotecas. Tras eso, se definió la ecuación diferencial. Después, se creó un solucionador en base a *ode*. Luego, definiendo los parámetros del problema, se crearon arreglos para llenarlos de los puntos de cada curva que generaría cada valor de  $\beta$  con *for* para pasar por cada valor, haciendo cuatro veces el [1] código adaptado. Finalmente, se hizo la gráfica.

## 2.3 Resultados

A continuación la gráfica generada:



## 3 Conclusión

Sigue sorprendiendo las facilidades que brinda *Python*. Con librerías como *SciPy* y funciones como *Ode*, problemas que podían llegar a costar mucho y tardarse bastante tiempo en escribir el código y refinar errores, se reduce a una o dos tardes de trabajo.

Como comentario personal, me sirvió mucho la actividad, porque precisamente el proyecto de congreso que estoy haciendo será modelado con Runge-Kutta de orden cuatro, y será hecho en *Python*. Ahora tengo una mayor noción de cómo hacerlo.

## Riferimenti bibliografici

- [1] Warren Weckeser, "How to use dorpi5 or dop853", 27/04/2013.  
<https://stackoverflow.com/questions/16239678/how-to-use-dorpi5-or-dop853-in-python#16240484>
- [2] Wikipedia, "Duffing equation". [https://en.wikipedia.org/wiki/Duffing\\_equation](https://en.wikipedia.org/wiki/Duffing_equation)
- [3] T.E. Simos & Jesus Vigo Aguiar, University of Thrace, "A modified phase-fitted Runge–Kutta method for the numerical solution of the Schrödinger equation", Julio 2001.  
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1023/A:1013185619370.pdf>
- [4] Boost, "Class template runge\_kutta\_dopri5". [https://www.boost.org/doc/libs/1\\_56\\_0/libs/numeric/odeint/doc/html/boost/numeric/odeint/runge\\_kutta\\_dopri5.html](https://www.boost.org/doc/libs/1_56_0/libs/numeric/odeint/doc/html/boost/numeric/odeint/runge_kutta_dopri5.html)
- [5] Matplotlib, "Writing mathematical expressions". <https://matplotlib.org/users/mathtext.html>
- [6] John Zwinck, "Matplotlib: set labels size". <https://stackoverflow.com/questions/10404759/matplotlib-set-yaxis-label-size>
- [7] Wikipedia, "Histerese". <https://pt.wikipedia.org/wiki/Histerese>
- [8] Wikipedia, "Método de Runge-Kutta". [https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo\\_de\\_Runge-Kutta#M%C3%A9todos\\_de\\_Runge-Kutta\\_de\\_cuarto\\_orden](https://es.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9todo_de_Runge-Kutta#M%C3%A9todos_de_Runge-Kutta_de_cuarto_orden)