Tarea 2: Visión Computacional

Ernesto Antonio Reyes Ramírez
ernesto.reyes@cimat.mx

5 de Febrero de 2023

1. Problemas

Problema 1. *Vimos en clase que el básico operador de proyección en visión es el modelo de la cámara estenopeica:*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Cuál es la proección de los puntos 3D:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y a qué corresponden esos puntos, geométricamente hablando?

- *Muestra a través de un ejemplo de tu elección que la imagen por $\boldsymbol{P}$ de dos líneas paralelas no son en general paralelas.*
- *Por el contrario muestra un caso donde las imágenes de lineas paralelas si son paralelas.*

Demostración. La proyección de los puntos dados bajo $\mathbf{P}$ es la siguiente:

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xf' \\ yf' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Geométricamente, los puntos a los que está mapeando $\mathbf{P}$ son puntos al infinito. Además, si $f' \neq 0$, entonces se estará mapeando a toda la recta al infinito.

-
- Un ejemplo sería considerar una recta l consigo misma. Esta es claramente paralela consigo misma y cuando la proyectamos bajo $\mathbf{P}$ obtenemos la misma recta imagen, las cuales nuevamente serían paralelas.

∎

Problema 2. *Supongamos que tenemos un conjunto de N puntos $\{\boldsymbol{P}_i\}_{i=1}^n$ en el plano relacionados con otro conjunto de puntos $\{\boldsymbol{P}'_i\}_{i=1}^n$ a través de una matriz de homografía de 3×3 H, tal que para todo i:*

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{p}_i \propto \boldsymbol{p}'_i$$

Demuestra que las entradas de H, cuando las reorganizamos en un vector de $\boldsymbol{h}$ de 9×1, satisface el siguiente sistema:

$$\boldsymbol{Dh} = 0$$

donde D es una matriz de $2N \times 9$ ¿Cómo caracterizarías el vector $\boldsymbol{h}$ con respecto a $\boldsymbol{D}$? ¿Cuándo $N = 4$ es posible encontrar una solución $\boldsymbol{h}$? ¿Por qué?

Demostración. Definimos

$$p_i' = (x_i', y_i', w_i')^T.$$

La condición de que $\mathbf{Hp}_i \propto \mathbf{p}_i'$ quiere decir que los vectores tienen la misma dirección pero posiblemente no la misma magnitud, es decir, son paralelos. Por lo que aplicando la condición de paralelismo del producto cruz la condición anterior es equivalente a:

$$\mathbf{p}_i' \times \mathbf{Hp}_i = \mathbf{0}$$

Escribiendo H mediante sus filas tenemos,

$$H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{p}_i' \times \mathbf{Hp}_i \\ &= \begin{pmatrix} y_i' H_3 p_i - w_i' H_2 p_i \\ w_i' H_1 p_i - x_i' H_3 p_i \\ x_i' H_2 p_i - y_i' H_1 p_i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esto nos da tres ecuaciones sobre las entrada de H. Podemos reordenar el sistema de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i' p_i^T & y_i' p_i^T \\ w_i' p_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i' p_i^T \\ -y_i' p_i^T & x_i' p_i^T & \mathbf{0}^T \end{pmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Notemos que la tercer fila se obtiene a partir de la primera y la segunda por lo que solo estas son linealmente independientes y podemos quedarnos solo con estas dos ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i' p_i^T & y_i' p_i^T \\ w_i' p_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i' p_i^T \end{pmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{0}$$

Todo lo anterior fue para un par de puntos p_i, p_i' por lo que considerando los N pares de puntos obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}^T & -w_1' p_1^T & y_1' p_1^T \\ w_1' p_1^T & \mathbf{0}^T & -x_1' p_1^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0}^T & -w_N' p_N^T & y_N' p_N^T \\ w_N' p_N^T & \mathbf{0}^T & -x_N' p_N^T \end{pmatrix} \mathbf{h} = \mathbf{Dh} = \mathbf{0}.$$

donde precisamente $\mathbf{D}$ es una matriz de tamaño $2N \times 9$, ya que tenemos dos ecuaciones por cada par de puntos y que satisface lo pedido. Por lo que resolviendo dicho sistema de ecuaciones podríamos encontrar una homografía entre los dos conjuntos de puntos.

Notemos que nuestro sistema tiene más ecuaciones que incógnitas por lo que está sobre determinado. Una solución $\mathbf{h}$ de nuestro sistema de ecuaciones pertenece al espacio nulo de $\mathbf{D}$, por lo que podemos utilizar descomposición en valores singulares para encontrar alguna de, posiblemente, muchas de ellas.

Si $N = 4$, entonces nuestra matriz $\mathbf{D}$ es de tamaño 8×9, y tiene rango 8, por lo que su espacio nulo tiene dimensión 1, por lo que existe una solución no cero de $\mathbf{h}$.

■

Problema 3. *Una cónica en el plano puede ser descrita a través de una ecuación de la forma:*

$$p^T Q p = 0,$$

donde p es un vector de coordenadas homogéneas para un punto ($\in \mathbb{R}^3$) y Q simétrica:

1. *¿Qué forma tiene la matriz Q para la elipse $x^2 - x + 4y^2 = 1$ ¿es única?*
2. *La ecuación de la línea al infinito es $w = 0$. Hemos visto que una hipérbola intersecta la linea al infinito en dos puntos puntos reales distintos. Deduce una condición que Q deba satisfacer para que su cónica asociada sea una hipŕbola.*
3. *Demuestra que la imagen de la ecuación de una cónica Q a través de una transformación proyectiva H es también una cónica y que su ecuación puede ser reescrita como:*

$$Q' = H^{-T} Q H^{-1}$$

Demostración. 1. Notemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(x, y, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= (x, y, 1)\begin{pmatrix} x - 1/2 \\ 4y \\ -x/2 - 1 \end{pmatrix} \\
&= x^2 - x/2 + 4y^2 - x/2 - 1 \\
&= x^2 - x + 4y^2 - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz por la cual representamos dicha elipse. No es única ya que al satisfacer la ecuación $p^T Q p = 0$, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por un escalar no cero λ y así:

$$0 = \lambda \dot{0} = \lambda(p^T Q p) = p^T (\lambda Q) p,$$

obteniendo que λQ también cumple ser una matriz que representa la cónica.

2. Sea Q_{33} la matriz de 2×2 que consiste en remover la tercer columna y tercer fila de Q. Entonces, la cónica Q es una hipérbola si, y solo si, $det(Q_{33}) < 0$.

3. Recordemos que una transformación proyectiva es una matriz no singular, de 3×3 en este caso. Sea p un punto en la cónica y consideremos su imagen bajo H que es $x = Hp$. De lo anterior se sigue que $H^{-1}x = p$. Entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= p^T Q p \\
&= (H^{-1}x)^T Q (H^{-1}x) \\
&= x^T H^{-T} Q H^{-1} x \\
&= x^T Q' x
\end{aligned}$$

donde $Q' = H^{-T} Q H^{-1}$. Concluimos que una cónica Q bajo una transformación proyectiva sigue siendo una cónica, con la matriz asociada $H^{-T} Q H^{-1}$.

∎

Problema 4. *Sean l_1 y l_2 las representaciones en coordenadas homogéneas de dos líneas en el plano. ¿Cómo podrías expresar el hecho de que estas dos líneas son ortogonales?*

Deduce que, en general, las imágenes por medio de una homografía de dos líneas ortogonales no son ortogonales.

Demostración. Sean $l_1 = [a_1, b_1, c_1]$ y $l_2 = [a_2, b_2, c_2]$ las dos líneas en coordenadas homogéneas. Recordemos que un punto x está sobre una linea l si satisface que $l^T x = 0$. Esto describe las ecuaciones de las rectas en coordenadas homogéneas como $a_1x + b_1y + c_1z = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2z = 0$, respectivamente para l_1 y l_2. Estas líneas representan planos en $\mathbb{R}^3$, por lo que dichas líneas son ortogonales si, y solo si, dichos planos son ortogonales.

Tenemos que los vectores (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) son normales a los planos definidos por l_1 y l_2, respectivamente. Dos vectores son ortogonales si, y solo si, su producto interior es 0. Por lo tanto, las líneas l_1 y l_2 son ortogonales si, y solo si, se cumple que:

$$0 =< (a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) >= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Consideremos la siguiente homografía:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideremos las líneas $x = 0$ y $y = 0$, las cuales tienen vectores asociados $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ respectivamente. Estos cumplen que:

$$< (1, 0, 0), (0, 1, 0) >= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

De modo que por lo anterior las rectas son ortogonales. Notemos que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De modo que las nuevas líneas tienen por ecuaciones $x = 0$ y $x + y = 0$. Pero estas no son ortogonales ya que,

$$< (1, 0, 0), (1, 1, 0) >= 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 \neq 0.$$

■