Tarea 1: Visión Computacional

Ernesto Antonio Reyes Ramírez
ernesto.reyes@cimat.mx

25 de Enero de 2023

1. Problemas

Problema 1. *Demuestra que dada una matriz A, el vector v que minimiza la norma $||Av||^2$ bajo el supuesto de que $||v|| = 1$ es el vector propio de A^TA asociado al valor propio más pequeño.*

Demostración. Dado que A^TA es una matriz simétrica, existe una base ortonormal $\{v_i\}_{i=1}^n$ de vectores propios de A^TA, con $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ los valores propios ordenados de manera ascendente. Supongamos, bajo un reordenamiento, que v_1 es el vector propio asociado al menor valor propio λ_1. Notemos que,

$$
\begin{aligned}
||Av_1||^2 &= (Av_1)^T(Av_1),\\
&= v_1^T A^T A v_1,\\
&= v_1^T \lambda_1 v_1,\\
&= \lambda_1 v_1^T v_1,\\
&= \lambda_1.
\end{aligned}
$$

Sea w un vector tal que $||w|| = 1$. Como $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base existen $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tales que,

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Como los $\{v_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales, tenemos que por el teorema de pitágoras:

$$
\begin{aligned}
1 &= ||w||^2\\
&= ||\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i||^2\\
&= \sum_{i=1}^n ||\alpha_i v_i||^2\\
&= \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 ||v_i||^2\\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
||Aw||^2 &= w^T A^T A w, \\
&= w^T A^T A(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^T A^T A v_i, \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w^T (\lambda_i v_i), \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i w^T v_i.
\end{aligned}
$$

Notemos que,

$$
\begin{aligned}
w^t v_i &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j^T v_i \\
&= \alpha_i,
\end{aligned}
$$

esto ya que los $\{v_i\}_{i=1}^n$ son ortonormales. Retomando lo anterior,

$$
\begin{aligned}
||Aw||^2 &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_1 \\
&= \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \\
&= \lambda_1 \\
&= ||Av_1||^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto v_1 minimiza $||Av||^2$ en el círculo unitario. ∎

Problema 2. *Considere la siguiente matriz de 3×3:*

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

- *En la base canónica de $\mathbb{R}^3$, da la expresión analítica de la función $a(x, y, z)$ correspondiente a la matriz A.*
- *¿Qué es el $Ker(a)$? ¿Cuál es su dimensión? Da una base de este subespacio.*
- *¿Qué es el $Im(a)$? ¿Cuál es su dimensión? Da una base de este subespacio.*
- *Muestra que la base de vectores de $Im(a)$ son vectores propios de A. ¿Cuáles son sus valores propios?*
- *¿Cuál es el rango de A?*
- *¿Cuál es la matriz asociada a la transformación lineal $a \circ a$?*
- *Representa A en una forma diagonalizable: $A = QDQ^{-1}$. ¿Cuáles deberían ser Q,D?*

Demostración.

- Sea $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ y $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal asociada a A. Entonces,

$$\begin{aligned} a(x,y,z) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \\ &= (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (x+y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (x+y+z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Por definición,

$$\begin{aligned} Ker(a) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a(x,y,z) = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \mathbf{0}\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = -x-y\} \\ &= \{(x,y,-x-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,0,-x) + (0,y,-y) : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1) : x,y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

  Notemos de lo anterior que los vectores $\{(1,0,-1),(0,1-1)\}$ generan a $Ker(a)$. De modo que probemos que son linealmente independientes. Supongamos que $a(1,0,-1) + b(0,1,-1) = \mathbf{0}$, entonces

$$(a,b,-a-b) = \mathbf{0}.$$

  De este modo $a = b = 0$ lo cual implica que los vectores son linealmente independientes y por tanto una base para el $Ker(a)$. Concluimos que $dim(Ker(a)) = 2$.

- Probemos mediante doble contención que $Im(a)$ es igual a $\{p(1,1,1) : p \in \mathbb{R}\}$. Sea $\mathbf{q} \in Im(a)$, de modo que existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\mathbf{q} = a(x,y,z)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= a(x,y,z) \\ &= \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} \\ &= (x+y+z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  Por lo que $Im(a) \subset \{p(1,1,1) : p \in \mathbb{R}\}$. Sea $t(1,1,1) \in \{p(1,1,1) : p \in \mathbb{R}\}$. Notemos que,

$$\begin{aligned} a(p,0,0) &= (p+0+0, p+0+0, p+0+0) \\ &= (p,p,p) \\ &= p(1,1,1). \end{aligned}$$

  Así que se cumple la otra contención y en conclusión $Im(a) = \{p(1,1,1) : p \in \mathbb{R}\}$. De lo anterior se sigue que $(1,1,1)$ es un vector que genera a $Im(a)$, y al ser único, tenemos que $\{(1,1,1)\}$ es precisamente una base de $Im(a)$. En conclusión $dim(Im(a)) = 1$.

- La base de $Im(a)$ es $\{(1,1,1)\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} A(1,1,1)^T &= (1+1+1, 1+1+1, 1+1+1) \\ &= (3,3,3) \\ &= 3(1,1,1) \end{aligned}$$

  Por lo que $(1,1,1)$, base de $Im(a)$, es un vector propio de A asociado al valor propio 3. Para calcular sus valores propios vamos a calcular el polinomio caracteristico de A:

$$\begin{aligned} p(x) &= det(A - xI) \\ &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)[(1-x)^2 - 1] - [1 - x - 1] + [1 - 1 + x] \\ &= (1-x)(1 - 2x + x^2 - 1) + x + x \\ &= (1-x)(x^2 - 2x) + 2x \\ &= x^2 - x^3 - 2x + 2x^2 + 2x \\ &= -x^3 + 3x^2 \\ &= -x^2(x-3) \end{aligned}$$

  Por lo que los valores propios de A son $x = 3$ y $x = 0$.

- El rango de A es la dimensión del espacio imagen de la trnadformación lineal asociada a él. Por lo que $rank(A) = dim(Im(a)) = 1$.

- Para obtener la matriz asociada a $a \circ a$ vamos a considerar la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ y evaluarla en nuestra transformacióñ lineal. De este modo,

$$\begin{aligned} (a \circ a)(e_1) &= a(a(1,0,0)) \\ &= a(1+0+0, 1+0+0, 1+0+0) \\ &= a(1,1,1) \\ &= (1+1+1, 1+1+1, 1+1+1) \\ &= (3,3,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \circ a)(e_2) &= a(a(0,1,0)) \\ &= a(0+1+0, 0+1+0, 0+1+0) \\ &= a(1,1,1) \\ &= (1+1+1, 1+1+1, 1+1+1) \\ &= (3,3,3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \circ a)(e_3) &= a(a(0,0,1)) \\ &= a(0+0+1, 0+0+1, 0+0+1) \\ &= a(1,1,1) \\ &= (1+1+1, 1+1+1, 1+1+1) \\ &= (3,3,3) \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz asociada a $a \circ a$ es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Q y D son las siguientes:

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

las cuales satisfacen que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = QDQ^{-1}$$

∎

Problema 3. *Considera una matriz R de rotación 2D con angulo θ:*

- *¿Cuál es el polinomio característico de R?*
- *¿Cuáles son sus valores propios?*

Demostración.

- Por definición,

$$R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

De modo que su polinomio característico será:

$$\begin{aligned} p(x) &= det(A - xI) \\ &= \begin{vmatrix} cos\theta - x & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta - x \end{vmatrix} \\ &= (cos\theta - x)^2 - (sin\theta)^2 \\ &= cos^2\theta - 2xcos\theta + x^2 + sin^2\theta \\ &= x^2 - 2xcos\theta + 1 \end{aligned}$$

Resolviendo mediante fórmula general obtenemos que las raíces del polinomio son:

$$x = \cos\theta + i\sin\theta \quad y \quad x = \cos\theta - i\sin\theta.$$

Estos serán precisamente los valores propios de R.

∎

Problema 4. *Una transformación afín en el plano 2D es cualquier transformación cuya matriz asociada tiene la siguiente forma:*

$$M = \begin{pmatrix} A & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con A una matriz invertible de 2×2. Demuestra que paralelismo es conservada bajo este tipo de transformaciones.

Demostración. Sean $l_1 : [a, b, c]$ y $l_2 : [d, e, f]$ dos rectas en coordenadas homogéneas que son paralelas. Recordemos que precisamente las transformaciones afines mandan líneas en líneas, por lo que $M(l_1)$ y $M(l_2)$ son nuevamente líneas. Dado que l_1 y l_2 son líneas paralelas tenemos que estas se intersectan en un punto al infinito, digamos $P = (x, y, 0)^T$. Por lo que nos resta probar M envía $(x, y, 0)^T$ también a un punto al infinito. Entonces,

$$\begin{aligned} M \cdot P &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como el punto anterior tiene su tercera coordenada igual a cero tenemos que es un punto al infinito. Por lo que concluimos que las transformaciones afines preservan el paralelismo. ■

Problema 5. *Vimos en clase como los ángulos de Euler pueden ser usados para representar rotaciones 3D. Investiga como los cuaterniones unitarios pueden ser usados para el mismo propósito. En particular investiga:*

- *Cómo se puede transformar un punto* $\mathbf{p}$ *3D con un cuaternión unitario.*
- *Cómo se puede deducir la matriz de rotación 3D R a partir del cuaternión unitario.*
- *¿Cuáles son los beneficios de usar los cuaterniones unitarios?*

Demostración. Los cuaterniones son una extensión de los números reales añadiendo las unidades imaginarias i, j, k las cuales satisfacen que,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Matemáticamente se puede expresar de la siguiente manera:

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

La suma entre cuaterniones se realiza coordenada a coordenada. El producto se realiza multiplicando componente a componente y siguiendo las reglas entre las unidades imaginarias.

Si $q = a + bi + cj + dk$ es un cuaternión su conjugado se define como

$$q^* = a - bi - cj - dk$$

La norma de un cuaternión se define como

$$||q|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Un cuaternión unitario es aquel que tiene norma uno. Estos además satisfacen que se pueden escribir de una forma particular. Sea $q = q_0 + \mathbf{q}$ un cuaternión unitario, donde q_0 es la parte real y $\mathbf{q}$ la parte imaginaria. Entonces,

$$q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{q}/||\mathbf{q}||$ y $\theta \in [0, \pi]$.

- Para aplicarle una rotación de un ángulo θ y en una dirección $\mathbf{u}$ a un punto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ realizamos la siguiente operación utilizando el cuaternión unitario $q = \cos\theta + \mathbf{u}\sin\theta$:

  $$q\mathbf{p}q^* = (q_0^2 - ||\mathbf{q}||^2)\mathbf{p} + 2(\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q}\times\mathbf{p}).$$

  En el producto de la izquierda estamos pensando a $\mathbf{p}$ como un cuaternión con parte real cero y realizamos el producto definido de cuaterniones.

- Si $q = q_r + q_i i + q_j j + q_k k$ es el cuaternión unitario por el cual vamos a realizar la rotación, entonces la matriz de rotación R está dada por:

  $$R = \begin{pmatrix} 1-2(q_j^2+q_k^2) & 2(q_iq_j - q_kq_r) & 2(q_iq_k + q_jq_r) \\ 2(q_iq_j + q_kq_r) & 1-2(q_i^2 - +q_k^2) & 2(q_jq_k - q_iq_r) \\ 2(q_iq_k - q_jq_r) & 2(q_jq_k + q_iq_r) & 1-2(q_i^2+q_j^2) \end{pmatrix}$$

-
  - Para rotar mediante cuaterniones lo hacemos con los que son unitarios, y por ejemplo ver que uno satisface eso es sencillo, solo calcular su norma $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ y ver que sea 1. Mientras que si utilizamos una matriz para que cumpla que es de rotación debemos verificar que es ortogonal, lo cual es más costoso.
  - Para representar un quaternion solo necesitamos 4 variables donde almacenar sus datos. Mientras que para una matriz de rotación R necesitamos 9 variables, una por cada entrada.
  - Es muy sencillo pasar de un cuaternión a una matriz de rotación R, por lo que es mejor trabajar desde un inicio con cuaterniones y si en algún caso necesitaramos utilizar la matriz de rotación R el cambió sería sencillo. Esta sería una estrategia óptima.

■