MJEN

MANAS Journal of Engineering

Volume 4 (Issue 1) (2016) Pages 38-51

$x_{n+1}=\left\{\frac{1}{x_{n-1}},\frac{y_n}{x_n}\right\};\quad y_{n+1}=\left\{\frac{1}{y_{n-1}},\frac{x_n}{y_n}\right\}$ Maksimumlu Fark Denklem Sisteminin Çözümleri

Dağıstan ŞİMŞEK
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi, Bişkek, Kırgızistan; Selçuk Üniversitesi, Konya, Türkiye
dagistan.simsek@manas.edu.kg
Mustafa ERÖZ
Sakarya Üniversitesi, Sakarya, Türkiye
mustafaeroz@gmail.com
Burak OĞUL
Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi, Bişkek, Kırgızistan
burak_1745@hotmail.com

Received: 15.04.2016; Accepted: 26.05.2016

Öz: *Aşağıdaki fark denklem sisteminin çözümlerinin periyodikliği ve davranışları incelenmiştir.*

$$x_{n+1}=\left\{\frac{1}{x_{n-1}},\frac{y_n}{x_n}\right\};\quad y_{n+1}=\left\{\frac{1}{y_{n-1}},\frac{x_n}{y_n}\right\} \qquad (1)$$

Başlangıç şartları pozitif reel sayılardır.

Anahtar Kelimeler: *Fark Denklemi, Maksimum Operatörü, Yarı Dönmeler, Periyodiklik*

$x_{n+1}=\left\{\frac{1}{x_{n-1}},\frac{y_n}{x_n}\right\};\quad y_{n+1}=\left\{\frac{1}{y_{n-1}},\frac{x_n}{y_n}\right\}$ Solutions Of The System Of Maximum Difference Equations

Abstract: *The behaviour and periodicity of the solutions of the following system of difference equations is examined*

$$x_{n+1}=\left\{\frac{1}{x_{n-1}},\frac{y_n}{x_n}\right\};\quad y_{n+1}=\left\{\frac{1}{y_{n-1}},\frac{x_n}{y_n}\right\} \qquad (1)$$

where the initial conditions are positive real numbers.

Keywords: *Difference Equation, Maximum Operations, Semicycle, Periodicity*

GİRİŞ

Son zamanlarda, lineer olmayan fark denklemlerinin periyodikliği ile ilgili ilginç çalışmalar yapılmaktadır. Özellikle fark denklem sisteminin periyodikliği, pozitif ve negatif yarı dönmeleri gibi çözümlerin davranışları incelenmektedir. Birçok araştırmacı, son yıllarda özellikle maksimumlu fark denklemleri ve maksimumlu fark denklem sistemleri ile ilgili araştırma yapmışlardır. Örneğin [1-29].

Tanım 1 :

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-s}) \quad n = 0,1,2, \dots \text{ için} \tag{2}$$

fark denkleminde $\bar{x} = f(\bar{x}, ..., \bar{x})$ oluyorsa $\bar{x}$ ye denge noktası denir.

Tanım 2 : $\bar{x}$, (2) denkleminin pozitif bir denge noktası olsun. (2) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir pozitif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi $\bar{x}$ denge noktasına eşit veya büyük bütün terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $\mathrm{m} \leq \infty$ olur ve burada ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} < \bar{x}$; ve, ya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ ve $x_{m+1} < \bar{x}$ dir.

Tanım 3: $\bar{x}$, (2) denkleminin negatif bir denge noktası olsun. (2) denkleminin bir $\{x_n\}$ çözümünün bir negatif yarı dönmesi $\{x_l, x_{l+1}, ..., x_m\}$ terimlerinin bir dizisinden oluşur ve bunların hepsi $\bar{x}$ denge noktasından daha küçük terimlerdir. Öyle ki $l \geq 0$ ve $\mathrm{m} \leq \infty$ olur ve burada ya $l = 0$ ya da $l > 0$ ve $x_{l-1} \geq \bar{x}$ veya $m = \infty$ ya da $m < \infty$ ve $x_{m+1} \geq \bar{x}$ dir.

Tanım 4 : Eğer $\{x_n\}$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise, $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır.

ANA SONUÇLAR

$$x_{n+1} = \left\{\frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_n}\right\}; \quad y_{n+1} = \left\{\frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_n}\right\} \tag{1}$$

Şimdi (1) denkleminin pozitif denge noktasını bulalım.

$\bar{x} = \max\left\{\frac{1}{\bar{x}}, \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right\}; \bar{y} = \max\left\{\frac{1}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}}\right\}$ olur. Buradan

$\bar{x} = \frac{1}{\bar{x}}$ veya $\bar{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}; \bar{y} = \frac{1}{\bar{y}}$ veya $\bar{y} = \frac{\bar{x}}{\bar{y}}$ elde edilir. $(\bar{x})^2 = 1$ ve $(\bar{y})^2 = 1$ bulunur. Buradan da $\bar{x} = 1$ ve $\bar{y} = 1$ elde edilir.

Lemma 1 :

$$1<x_{-1}<x_0<y_{-1}<y_0, 1<x_0<x_{-1}<y_{-1}<y_0, 1<x_0<y_{-1}<y_0<x_{-1}, 1<x_0<y_{-1}<x_{-1}<y_0, 1<x_{-1}<x_0<y_{-1}<y_0,$$
$$1<x_{-1}<y_{-1}<x_0<y_0, 1<x_{-1}<x_0<y_0<y_{-1}, 1<y_{-1}<x_0<x_{-1}<y_0, 1<y_{-1}<x_{-1}<x_0<y_0, 1<x_0<y_{-1}<x_{-1}<y_0,$$
$$1<x_0<x_{-1}<y_{-1}<y_0, 1<x_{-1}<x_0<y_{-1}<y_0, 1<x_{-1}<y_{-1}<x_0<y_0, 1<y_{-1}<x_0<x_{-1}<y_0, 1<y_{-1}<x_0<y_0<x_{-1},$$
$$1<y_{-1}<x_{-1}<x_0<y_0, 1<x_0<x_{-1}<y_{-1}<y_0, 1<x_0<y_{-1}<y_0<x_{-1}, 1<x_0<y_{-1}<x_{-1}<y_0,$$

Yukarıdaki başlangıç şartları için aşağıdakiler doğrudur : $n\geq 2$ için x_n çözümleri ve $n\geq 1$ için y_n çözümlerinde

a) Her negatif yarı dönme bir terimden oluşur.
b) Her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur.
c) Bir uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.
d) Üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi bir uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.

İspat : x_N, y_N çözümü $N\geq 0$ ve $1<x_0<y_{-1}<y_0<x_{-1}$ için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_1=\max\left\{\frac{1}{x_{-1}},\frac{y_0}{x_0}\right\}=\frac{y_0}{x_0}>\overline{x}$$
$$y_1=\max\left\{\frac{1}{y_{-1}},\frac{x_0}{y_0}\right\}=\frac{x_0}{y_0}<\overline{y}$$
$$x_2=\max\left\{\frac{1}{x_0},\frac{y_1}{x_1}\right\}=\max\left\{\frac{1}{x_0},\frac{x_0^2}{y_0^2}\right\}=\frac{x_0^2}{y_0^2}<\overline{x}$$
$$y_2=\max\left\{\frac{1}{y_0},\frac{x_1}{y_1}\right\}=\max\left\{\frac{1}{y_0},\frac{y_0^2}{x_0^2}\right\}=\frac{y_0^2}{x_0^2}>\overline{y}$$
$$x_3=\max\left\{\frac{1}{x_1},\frac{y_2}{x_2}\right\}=\max\left\{\frac{x_0}{y_0},\frac{y_0^4}{x_0^4}\right\}=\frac{y_0^4}{x_0^4}>\overline{x}$$
$$y_3=\max\left\{\frac{1}{y_1},\frac{x_2}{y_2}\right\}=\max\left\{\frac{y_0}{x_0},\frac{x_0^4}{y_0^4}\right\}=\frac{y_0}{x_0}>\overline{y}$$
$$x_4=\max\left\{\frac{1}{x_2},\frac{y_3}{x_3}\right\}=\max\left\{\frac{y_0^2}{x_0^2},\frac{x_0^3}{y_0^3}\right\}=\frac{y_0^2}{x_0^2}>\overline{x}$$
$$y_4=\max\left\{\frac{1}{y_2},\frac{x_3}{y_3}\right\}=\max\left\{\frac{x_0^2}{y_0^2},\frac{y_0^3}{x_0^3}\right\}=\frac{y_0^3}{x_0^3}>\overline{y}$$
$$\vdots$$

$$x_1>\overline{x},\ x_2<\overline{x},\ x_3>\overline{x},\ x_4>\overline{x},\ x_5>\overline{x},\ x_6<\overline{x},\ x_7>\overline{x},\ x_8>\overline{x},$$
$$x_9>\overline{x},\ x_{10}<\overline{x},\ \ldots$$

görüldüğü gibi x_n çözümleri PNPPPNPPPNPPPNPPPN… şeklinde devam eder.

$$y_1 < \bar{y},\ y_2 > \bar{y},\ y_3 > \bar{y},\ y_4 > \bar{y},\ y_5 < \bar{y},\ y_6 > \bar{y},\ y_7 > \bar{y},\ y_8 > \bar{y},\ y_9 < \bar{y},\ y_{10} > \bar{y}$$

Buradan görüldüğü gibi y_n çözümleri NPPPNPPPNPPP… şeklinde devam eder.

Görüldüğü üzere $n \geq 2$ için x_n çözümleri ve $n \geq 1$ için y_n çözümlerinde; her negatif yarı dönme bir terimden oluşur. Her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur. Bir uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder. Üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi bir uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.

Lemma 2:

$1< y_{-1} < y_0 < x_{-1} < x_0, 1< y_{-1} < x_{-1} < y_0 < x_0, 1< y_{-1} < y_0 < x_0 < x_{-1}, 1< x_{-1} < y_{-1} < y_0 < x_0, 1< x_{-1} < y_0 < y_{-1} < x_0,$
$1< x_{-1} < y_0 < x_0 < y_{-1}, 1< y_0 < x_0 < y_{-1} < x_{-1}, 1< y_0 < x_0 < x_{-1} < y_{-1}, 1< y_0 < x_{-1} < x_0 < y_{-1}, 1< y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0,$
$1< y_0 < x_{-1} < y_{-1} < x_0, 1< y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0, 1< y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0, 1< y_0 < y_{-1} < x_0 < x_{-1}, 1< y_{-1} < y_0 < x_{-1} < x_0,$
$1< y_{-1} < x_{-1} < y_0 < x_0, 1< x_{-1} < y_{-1} < y_0 < x_0, 1< x_{-1} < y_0 < y_{-1} < x_0, 1< x_{-1} < y_0 < x_0 < y_{-1}, 1< y_0 < y_{-1} < x_0 < x_{-1}$
$1< y_0 < x_{-1} < y_{-1} < x_0, 1< y_0 < y_{-1} < x_{-1} < x_0, 1< y_0 < y_{-1} < x_0 < x_{-1}, 1< y_{-1} < y_0 < x_{-1} < x_0, 1< y_0 < x_{-1} < x_0 < y_{-1},$
$1< y_0 < x_{-1} < y_{-1} < x_0,$

Yukarıdaki başlangıç şartları için aşağıdakiler doğrudur : $n \geq 1$ için x_n çözümleri ve $n \geq 2$ için y_n çözümlerinde

a) Her negatif yarı dönme bir terimden oluşur.
b) Her pozitif yarı dönme üç terimden oluşur.
c) Bir uzunluğundaki her negatif yarı dönmeyi üç uzunluğundaki pozitif yarı dönme takip eder.
d) Üç uzunluğundaki her pozitif yarı dönmeyi bir uzunluğundaki negatif yarı dönme takip eder.

İspat : Lemma 2 nin ispatı Lemma 1 in ispatına benzer şekilde elde edilir.

Teorem 1:

$$1< x_{-1} < x_0 < y_{-1} < y_0, 1< x_{-1} < y_{-1} < x_0 < y_0, 1< x_{-1} < x_0 < y_0 < y_{-1}, 1< y_{-1} < x_0 < x_{-1} < y_0,$$
$$1< y_{-1} < x_0 < y_0 < x_{-1}, 1< y_{-1} < x_{-1} < x_0 < y_0, 1< x_0 < x_{-1} < y_0 < y_{-1}, 1< x_0 < y_0 < x_{-1} < y_{-1},$$
$$1< x_0 < y_0 < y_{-1} < x_{-1}, 1< x_0 < y_{-1} < y_0 < x_{-1}, 1< x_0 < y_{-1} < x_{-1} < y_0, 1< x_0 < x_{-1} < y_{-1} < y_0$$

Yukarıdaki başlangıç şartları için

$$x_n = \left\{ \frac{y_0}{x_0}, \frac{1}{x_0}, \frac{y_0^2}{x_0}, x_0, \ldots \right\}; \quad y_n = \left\{ \frac{x_0}{y_0}, \frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{y_0}{x_0}, y_0, \ldots \right\}$$

veya

$$x_n = \left\{ \frac{y_0}{x_0}, \frac{x_0^2}{y_0^2}, \frac{y_0^4}{x_0^4}, \frac{y_0^2}{x_0^2}, \ldots \right\}; \quad y_n = \left\{ \frac{x_0}{y_0}, \frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{y_0}{x_0}, \frac{y_0^3}{x_0^3}, \ldots \right\}$$

çözümleri elde edilir.

İspat :

$$x_1 = \max\left\{\frac{1}{x_{-1}}, \frac{y_0}{x_0}\right\} = \frac{y_0}{x_0}$$

$$y_1 = \max\left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{x_0}{y_0}\right\} = \frac{x_0}{y_0}$$

$$x_2 = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{y_1}{x_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{x_0}, \frac{x_0^2}{y_0^2}\right\} = \frac{1}{x_0}$$

$$y_2 = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}\right\} = \max\left\{\frac{1}{y_0}, \frac{y_0^2}{x_0^2}\right\} = \frac{y_0^2}{x_0^2}$$

$$x_3 = \max\left\{\frac{1}{x_1}, \frac{y_2}{x_2}\right\} = \max\left\{\frac{x_0}{y_0}, \frac{y_0^2}{x_0}\right\} = \frac{y_0^2}{x_0}$$

$$y_3 = \max\left\{\frac{1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}\right\} = \max\left\{\frac{y_0}{x_0}, \frac{x_0}{y_0^2}\right\} = \frac{y_0}{x_0}$$

$$x_4 = \max\left\{\frac{1}{x_2}, \frac{y_3}{x_3}\right\} = \max\left\{x_0, \frac{1}{y_0}\right\} = x_0$$

$$y_4 = \max\left\{\frac{1}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}\right\} = \max\left\{\frac{x_0^2}{y_0^2}, y_0\right\} = y_0$$

.

.

.

İterasyon işlemine devam edilirse

$$x_n = \left\{\frac{y_0}{x_0}, \frac{1}{x_0}, \frac{y_0^2}{x_0}, x_0, \ldots\right\}; \quad y_n = \left\{\frac{x_0}{y_0}, \frac{y_0^2}{x_0^2}, \frac{y_0}{x_0}, y_0, \ldots\right\}$$

çözümleri elde edilir. İkinci çözümde benzer şekilde elde edilir.

Teorem2:

$$1 < x_{-1} < x_0 < y_{-1} < y_0, 1 < x_{-1} < y_{-1} < x_0 < y_0, 1 < y_{-1} < x_0 < x_{-1} < y_0, 1 < y_{-1} < x_0 < y_0 < x_{-1},$$

$$1 < y_{-1} < x_{-1} < x_0 < y_0, 1 < x_0 < x_{-1} < y_{-1} < y_0, 1 < x_0 < y_{-1} < y_0 < x_{-1}, 1 < x_0 < y_{-1} < x_{-1} < y_0$$

Yukarıdaki başlangıç şartları için

$$x_n = \left\{\frac{y_0}{x_0}, \frac{1}{x_0}, y_0 y_{-1}, x_0, \ldots\right\}; \quad y_n = \left\{\frac{1}{y_{-1}}, \frac{y_0 y_{-1}}{x_0}, y_{-1}, y_0, \ldots\right\}$$

çözümleri elde edilir.

İspat: Teorem 2 nin ispatı Teorem 1 e benzer şekilde elde edilir.

Teorem 3:

$$1<y_{-1}<y_0<x_{-1}<x_0, 1<y_{-1}<x_{-1}<y_0<x_0, 1<y_{-1}<y_0<x_0<x_{-1}, 1<x_{-1}<y_{-1}<y_0<x_0,$$
$$1<x_{-1}<y_0<y_{-1}<x_0, 1<x_{-1}<y_0<x_0<y_{-1}, 1<y_0<x_0<y_{-1}<x_{-1}, 1<y_0<x_0<x_{-1}<y_{-1},$$
$$1<y_0<x_{-1}<x_0<y_{-1}, 1<y_0<y_{-1}<x_{-1}<x_0, 1<y_0<x_{-1}<y_{-1}<x_0, 1<y_0<y_{-1}<x_0<x_{-1}$$

Yukarıdaki başlangıç şartları için

$$x_n=\left\{\frac{y_0}{x_0},\frac{x_0^2}{y_0^2},\frac{x_0}{y_0},x_0,\ldots\right\};\quad y_n=\left\{\frac{x_0}{y_0},\frac{1}{y_0},\frac{x_0^2}{y_0},y_0,\ldots\right\}$$

veya

$$x_n=\left\{\frac{y_0}{x_0},\frac{x_0^2}{y_0^2},\frac{x_0}{y_0},\frac{x_0^3}{y_0^3},\ldots\right\};\quad y_n=\left\{\frac{x_0}{y_0},\frac{y_0^2}{x_0^2},\frac{x_0^4}{y_0^4},\frac{x_0^2}{y_0^2},\ldots\right\}$$

çözümleri elde edilir.

İspat: Teorem 3 ün ispatı Teorem 1 e benzer şekilde elde edilir.

Teorem 4:

$$1<y_{-1}<y_0<x_{-1}<x_0, 1<y_{-1}<x_{-1}<y_0<x_0, 1<x_{-1}<y_{-1}<y_0<x_0, 1<x_{-1}<y_0<y_{-1}<x_0,$$
$$1<x_{-1}<y_0<x_0<y_{-1}, 1<y_0<x_{-1}<x_0<y_{-1}, 1<y_0<x_{-1}<y_{-1}<x_0, 1<y_0<y_{-1}<x_{-1}<x_0$$

Yukarıdaki başlangıç şartları için

$$x_n=\left\{\frac{1}{x_{-1}},\frac{x_{-1}x_0}{y_0},x_{-1},x_0,\ldots\right\};\quad y_n=\left\{\frac{x_0}{y_0},\frac{1}{y_0},x_{-1}x_0,y_0,\ldots\right\}$$

çözümleri elde edilir.

İspat: Teorem 4 ün ispatı Teorem 1 e benzer şekilde elde edilir.

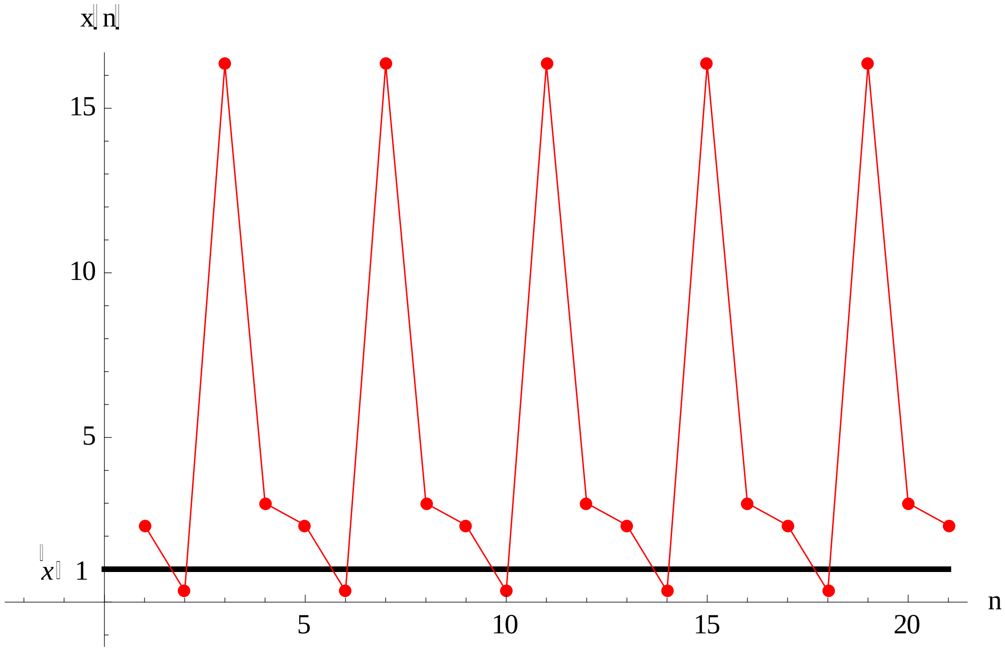
ÖRNEKLER

Örnek 1: Başlangıç şartları Teorem 1 dekine uygun bir şekilde seçilirse

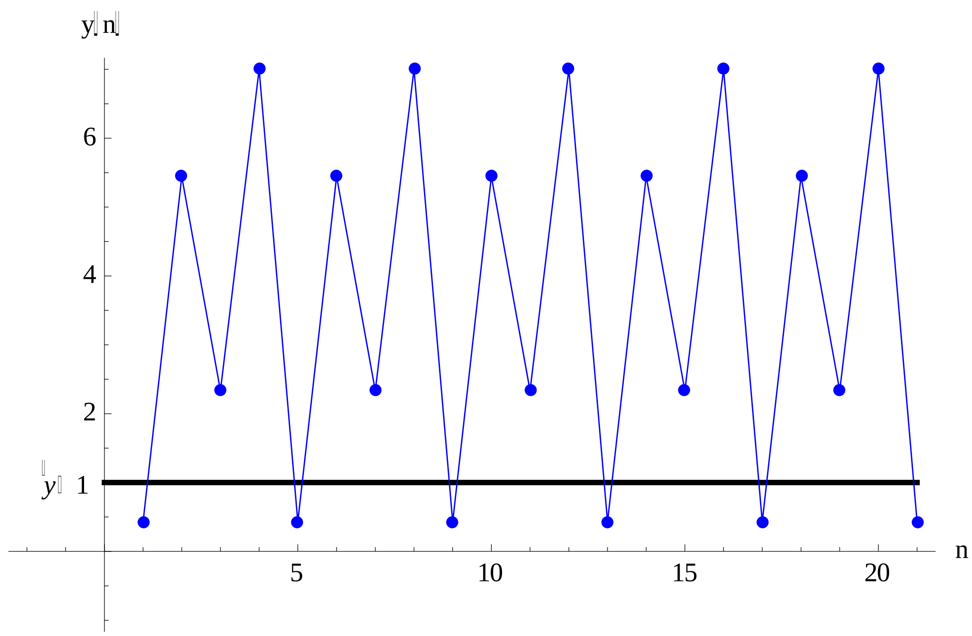
$$x[-1]=2;\ x[0]=3;\ y[-1]=4;\ y[0]=7$$

x(n)= {2.33333,0.333333,16.3333,3 , 2.33333,0.333333,16.3333,3 , 2.33333,0.333333,16.3333,3 , …}

y(n)= {0.428571,5.44444,2.33333,7, 0.428571,5.44444,2.33333,7, 0.428571,5.44444,2.33333,7,…}
çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 1. x(n) çözümlerinin grafiği.

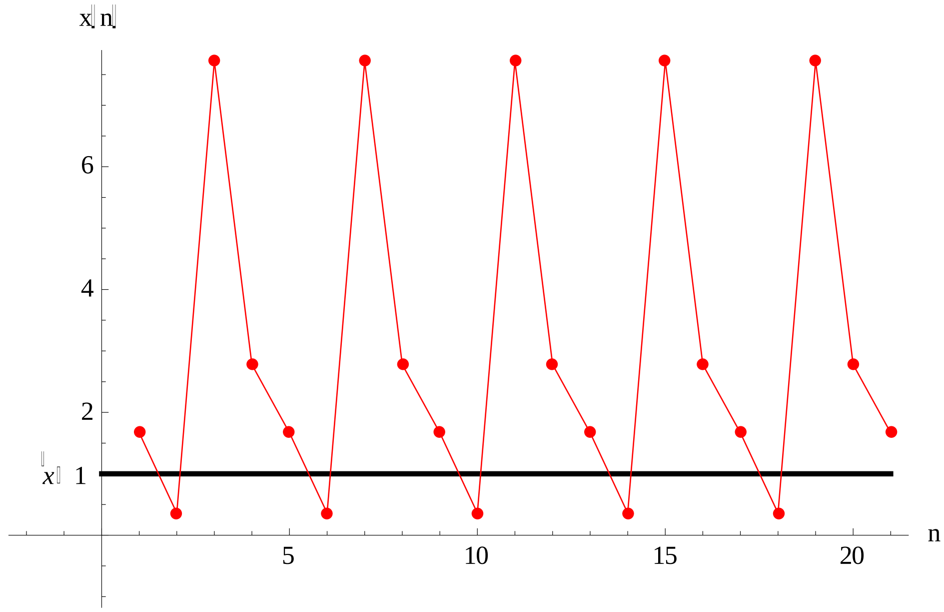


Şekil 2. y(n) çözümlerinin grafiği.

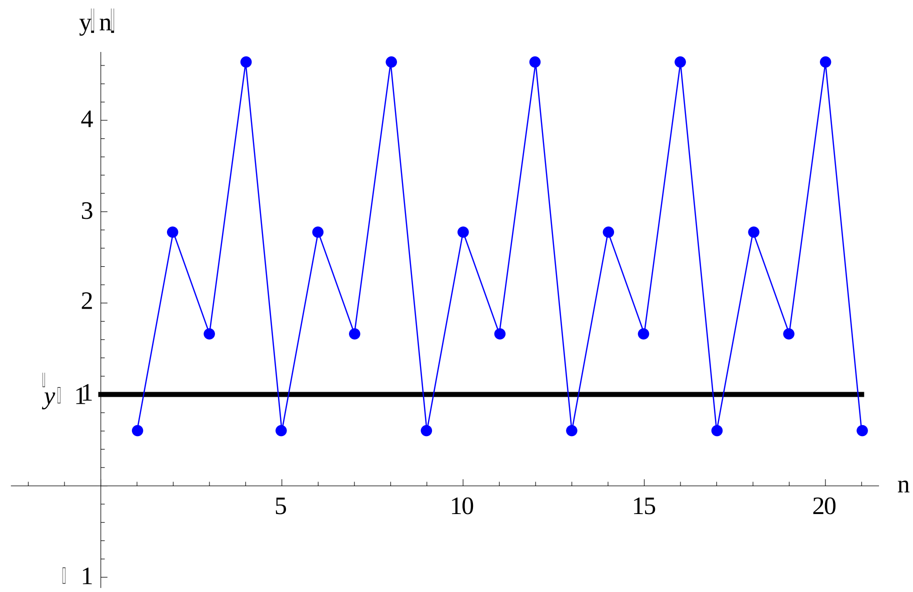
Örnek 2: Başlangıç şartları Teorem 1 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 2;\ x[0] = 3;\ y[-1] = 4;\ y[0] = 5$$

x(n) = {1.66667,0.36,7.71605,2.77778, 1.66667,0.36,7.71605,2.77778, 1.66667,0.36,7.71605,2.77778, …}
y(n) = {0.6,2.77778,1.66667,4.62963, 0.6,2.77778,1.66667,4.62963, 0.6,2.77778,1.66667,4.62963, …}
çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3. x(n) çözümlerinin grafiği.



Şekil 4 y(n) çözümlerinin grafiği.

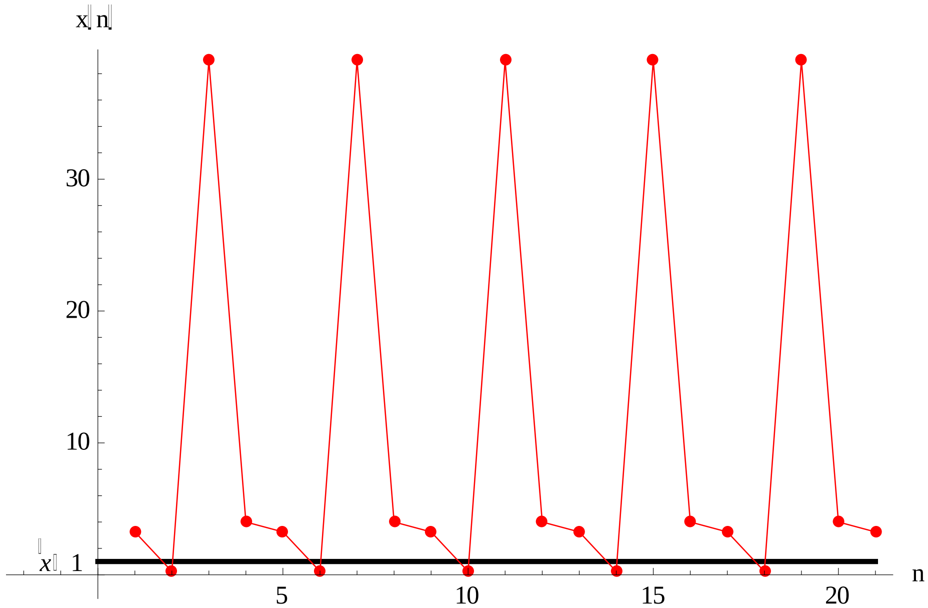
Örnek 3: Başlangıç şartları Teorem 2 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$x[-1] = 2;\ x[0] = 4;\ y[-1] = 3;\ y[0] = 13$

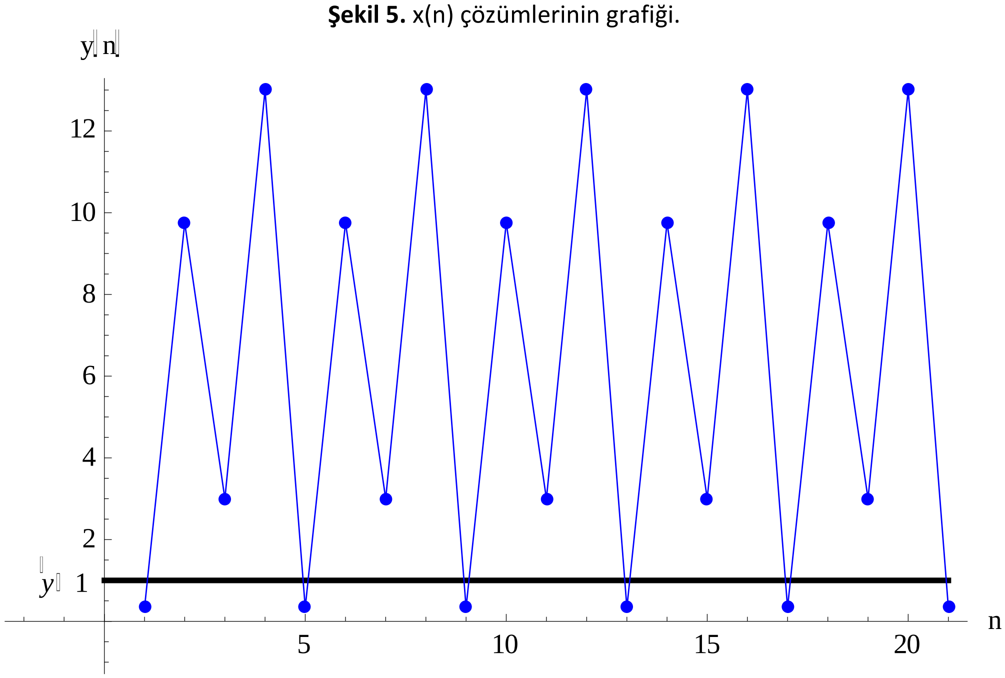
x(n)= {3.25,0.25,39,4, 3.25,0.25,39,4, 3.25,0.25,39,4, 3.25,0.25,39,4, …}

y(n)= { 0.333333,9.75,3,13, 0.333333,9.75,3,13, 0.333333,9.75,3,13, …}

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 5. x(n) çözümlerinin grafiği.



Şekil 6. y(n) çözümlerinin grafiği.

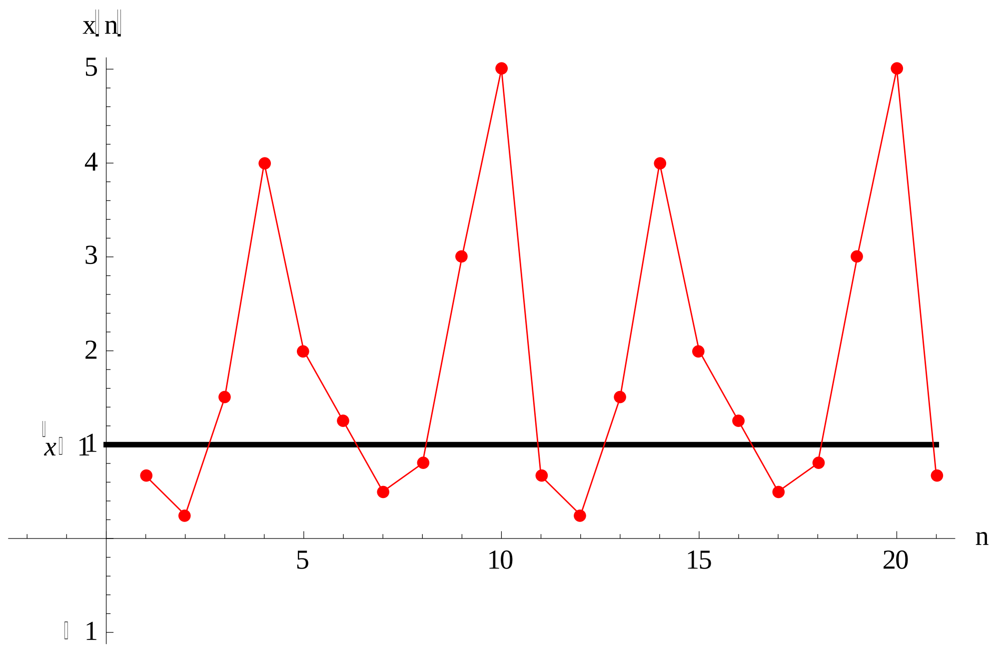
Örnek 4: Başlangıç şartları Teorem 3 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$x[-1] = 4;\ x[0] = 3;\ y[-1] = 5;\ y[0] = 2$

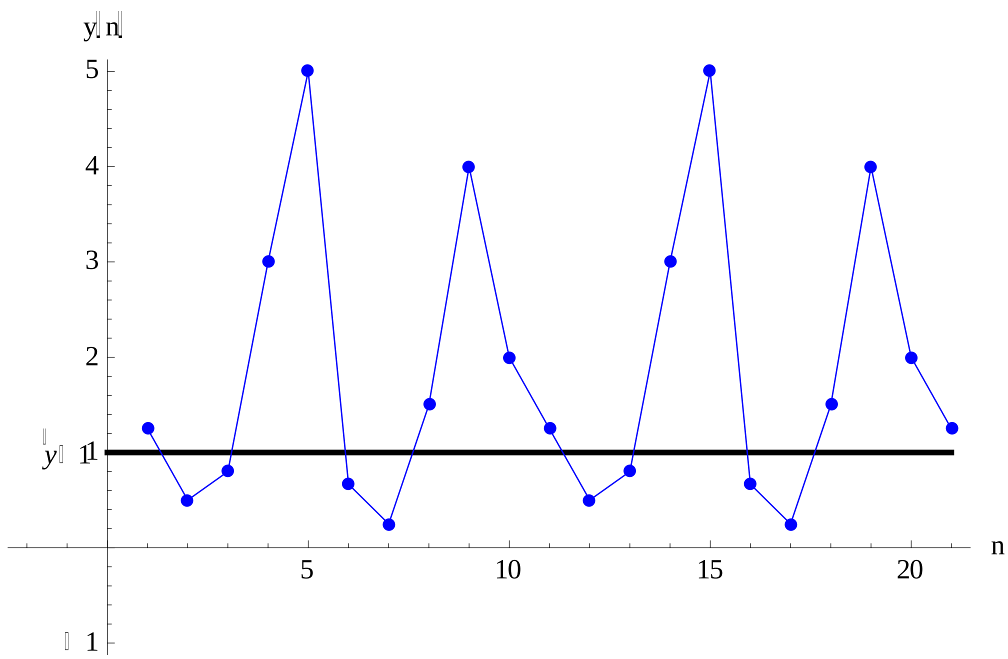
x(n)= {0.666667,2.25,1.5,3, 0.666667,2.25,1.5,3, 0.666667,2.25,1.5,3, …}

y(n)= {1.5,0.5,4.5,2, 1.5,0.5,4.5,2, 1.5,0.5,4.5,2, 1.5,0.5,4.5,2, …}

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 7. x(n) çözümlerinin grafiği



Şekil 8. y(n) çözümlerinin grafiği.

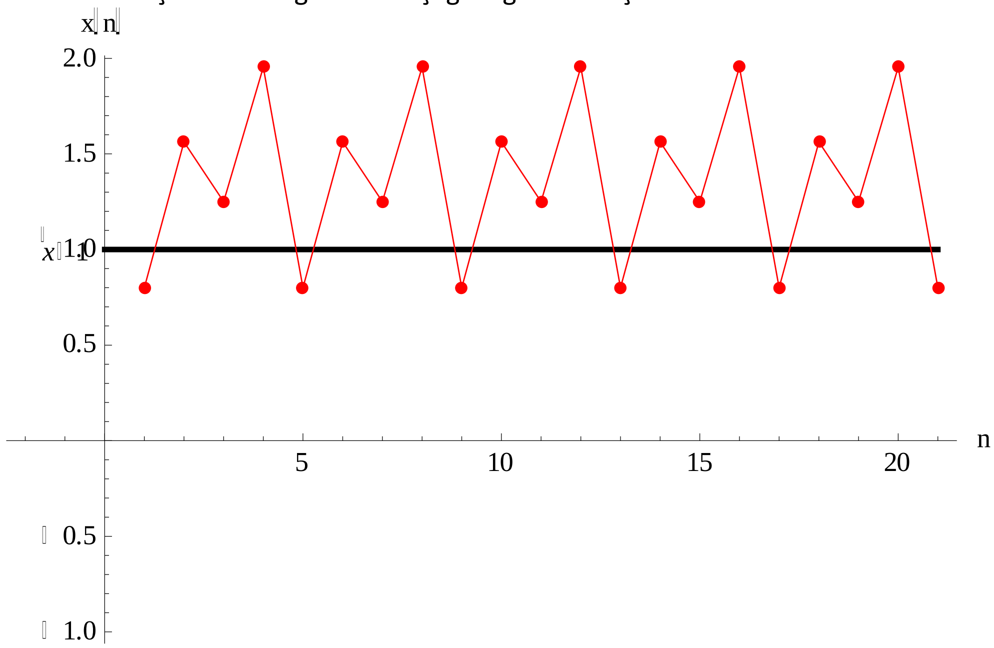
Örnek 5: Başlangıç şartları Teorem 3 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$$x[-1] = 6;\ x[0] = 5;\ y[-1] = 7;\ y[0] = 4$$

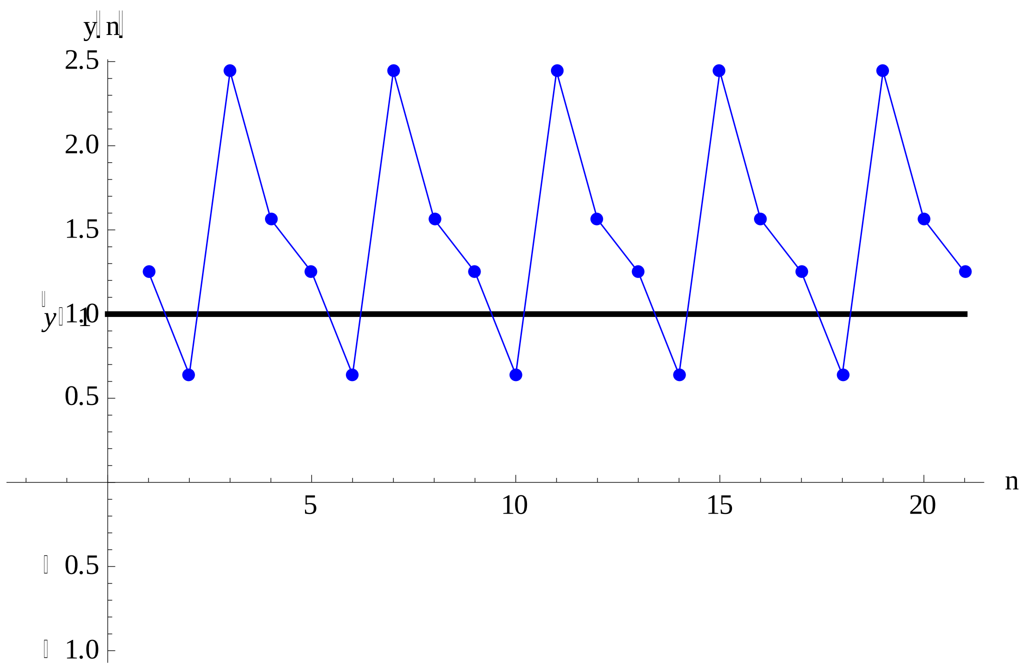
x(n)= {0.8,1.5625,1.25,1.95313, 0.8,1.5625,1.25,1.95313, 0.8,1.5625,1.25,1.95313, …}

y(n)= {1.25,0.64,2.44141,1.5625, 1.25,0.64,2.44141,1.5625, 1.25,0.64,2.44141,1.5625, …}

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 9. x(n) çözümlerinin grafiği



Şekil 10. y(n) çözümlerinin grafiği.

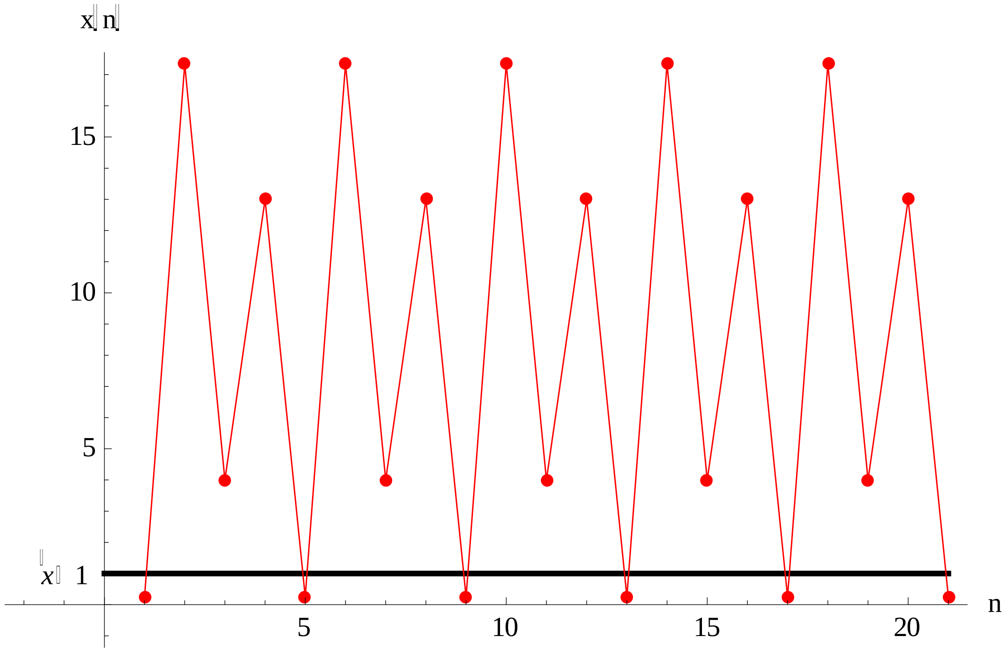
Örnek 6: Başlangıç şartları Teorem 4 dekine uygun bir şekilde seçilirse

$x[-1] = 4$; $x[0] = 13$; $y[-1] = 2$; $y[0]= 3$

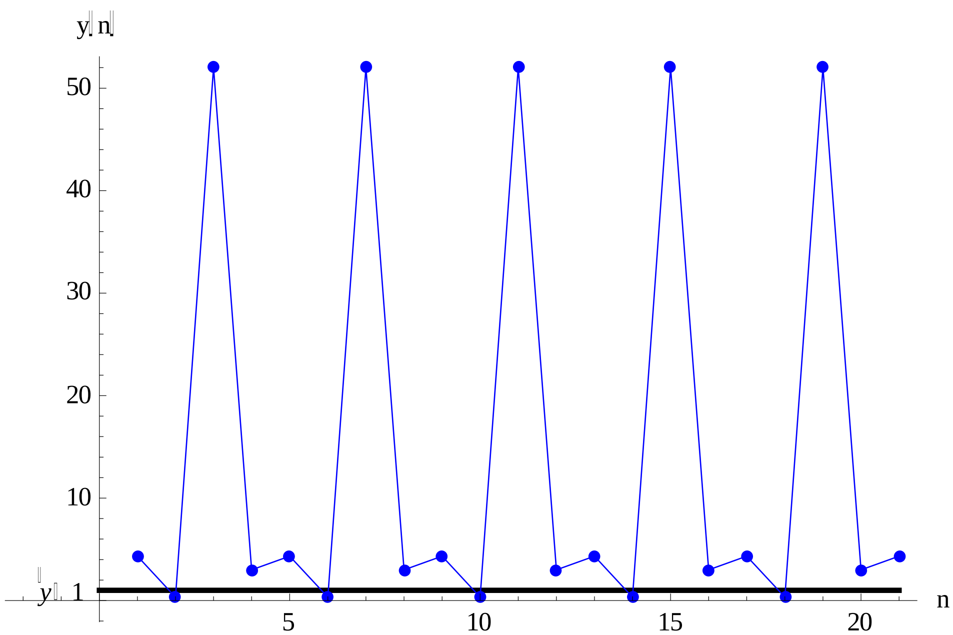
x(n)= {0.25,17.3333,4,13, 0.25,17.3333,4,13, 0.25,17.3333,4,13, …}

y(n)= {4.33333,0.333333,52,3, 4.33333,0.333333,52,3, 4.33333,0.333333,52,3, …}

çözümleri elde edilir ve çözümlerin grafikleri aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 11. x(n) çözümlerinin grafiği



Şekil 12. y(n) çözümlerinin grafiği.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, $x_{-1}; x_0; y_{-1}; y_0$ başlangıç şartları birden büyük pozitif reel sayılar olmak üzere, $x_{n+1} = \left\{ \frac{1}{x_{n-1}}, \frac{y_n}{x_n} \right\}; \quad y_{n+1} = \left\{ \frac{1}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{y_n} \right\}$ maksimumlu fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışları incelenmiştir. Bu fark denklem sisteminde katsayıları değiştirilerek yeni maksimumlu fark denklem sistemleri oluşturulabilir. Oluşturulacak yeni maksimumlu fark denklem sisteminin çözüm davranışları incelenebilir.

Bu makale, Akdeniz Üniversitesinde 7-9 Eylül 2015 tarihinde düzenlenen XXVIII. ULUSAL MATEMATİK SEMPOZYUM' unda sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] A. M. Amleh, "Boundedness Periodicity and Stability of Some Difference Equations", PhD Thesis, University of Rhode Island, 1998.

[2] C. Çinar, S. Stevic and İ.Yalçınkaya, "On the positive solutions of reciprocal difference equation with minimum", Journal of Applied Mathematics and Computing, 17, (1-2), 307-314, 2005.

[3] S. Elaydi, "An Introduction to Difference Equations", Spinger-Verlag, New York, 1996.

[4] E. M. Elsayed and S. Stevic, "On the max-type equation x_{n+1}=max{A/x_{n},x_{n-2}}", Nonlinear Analysis, TMA 71, 910-922, 2009.

[5] E. M. Elsayed, B. Iricanin and S. Stevic, "On the max-type equation x_{n+1} = max{A_{n}/x_{n},x_{n-1}}", ARS Combin., 2010.

[6] J. Feuer, "Periodic solutions of the Lyness max equation", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288, 147-160, 2003.

[7] A. Gelişken, C. Çinar and R. Karataş, "A note on the periodicity of the Lyness max equation", Advances in Difference Equations, Vol. (2008), Article ID 651747, 5 pages, 2008.

[8] A.Gelişken, , C. Çinar and İ. Yalçınkaya, "On the periodicity of a difference equation with maximum", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2008, Article ID 820629, 11 pages, 2008.

[9] A. Gelişken , Çinar, C. and A.S. Kurbanlı, "On the asymptotic behavior and periodic nature of a difference equation with maximum", Computers & Mathematics with Applications, 59, 898-902, 2010.

[10] B. Iricanin and E. M. Elsayed, "On a max-type equation x_{n+1}=max{A/x_{n},x_{n-3}}", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2010, Article ID 675413, 2010.

[11] M. R. S. Kulenevic and G. Ladas, "Dynamics of Second Order Rational Difference Equations with Open Problems and Conjecture",Boca Raton, London, 2002.

[12] D. P. Mishev, W. T. Patula, and H. D. Voulov, "A reciprocal difference equation with maximum", Computers & Mathematics with Applications, 43, 1021-1026, 2002.

[13] L. A. Moybe, "Difference Equations with Public Health Applications", New York, USA, 2000.

[14] Бурак Огул, Дагыстан Шимшек, " $x_{n+1} = \max\left\{ \frac{1}{x_{n-4}}, \frac{y_{n-4}}{x_{n-4}} \right\}; \quad y_{n+1} = \max\left\{ \frac{1}{y_{n-4}}, \frac{x_{n-4}}{y_{n-4}} \right\}$ Система решение разностного уравнения", Весник Кыргызского Государственного Технического Университета, N 34, Бишкек, Кыргызстан, 2015.

[15] B. Ogul, D. Simsek, " $x_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{x_{n-4}}, \frac{y_{n-4}}{x_{n-4}}\right\}; y_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{y_{n-4}}, \frac{x_{n-4}}{y_{n-4}}\right\}$ Maksimumlu Fark Denklem Sisteminin Çözümleri", Manas Journal of Engineering, 3(1): 35-57, 2015.

[16] G. Papaschinopoulos and V. Hatzifilippidis, "On a max difference equation", Journal of Mathematical Analysis andApplications, 258, 258-268, 2001.

[17] G. Papaschinopoulos, J. Schinas and V. Hatzifilippidis, "Global behaviour of the solutions of a max-equation and of a system of two max-equation", Journal of Computational Analysis and Applications, 5, 2, 237-247, 2003.

[18] W. T. Patula and H. D. Voulov, "On a max type recursive relation with periodic coefficients", Journal of Difference Equations and Applications, 10, 3, 329-338, 2004.

[19] G. Stefanidou and G. Papaschinopoulos, " The periodic nature of the positive solutions of a nonlinear fuzzy max--difference equation", Information Sciences, 176, 3694-3710, 2006.

[20] S. Stević, "On the recursive sequence x_{n+1}=max{c,x_{n}^{p}/x_{n-1}^{p}}", Applied Mathematics Letters, vol. 21, No: 8, 791--796, 2008.

[21] D. Simsek, C. Cinar and I. Yalçınkaya, "On the solutions of the difference equation x_{n+1}=max{1/x_{n-1},x_{n-1}}, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, Vol.1, No: 9--12, 481--487, 2006.

[22] D. Simsek, B. Demir and A. S. Kurbanlı, "x_{n+1}=max{(1/(x_{n})),((y_{n})/(x_{n}))}, y_{n+1}=max{(1/(y_{n})),((x_{n})/(y_{n}))} Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine", Ahmet Keleşoğlu Eğitim Fakültesi Dergisi, 28, 91-104, 2009.

[23] D. Simsek, B. Demir and C. Cinar, "On the Solutions of the System of Difference Equations x_{n+1}=max{(A/(x_{n})),((y_{n})/(x_{n}))}, y_{n+1}=max{(A/(y_{n})),((x_{n})/(y_{n}))}", Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2009, Article ID 325296, 11 pages, 2009.

[24] Simsek D., Kurbanlı A. S., Erdoğan M. E. , "x(n+1) = max{1 \ x(n-1) ; y(n-1) \ x(n-1)} ; y(n+1) = max{1 \ y(n-1) ; x(n-1) \ y(n-1)} Fark Denklem Sisteminin Çözümleri", XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, 153 pp, .04-07 Ağustos 2010, Erciyes Üniversitesi, 2010.

[25] Dağıstan Şimşek and Ahmet Dogan , "Solutions Of The System Of Maximum Difference Equations", Manas Journal of Engineering, 2(2): 9-22, 2014.

[26] Dağıstan Şimşek and Mustafa Eröz, " x(n+1) = max {1/x(n-1), y(n)/x(n-1) }, y(n+1) = max {1/y(n-1), x(n)/y(n-1) } Maksimumlu Fark Denklem Sisteminin Çözümleri", Manas Journal of Engineering, 3(2) 2015.

[27] H. D. Voulov, "On the periodic character of some difference equations", Journal of Difference Equations and Applications, 8, 799-810, 2002.

[28] I. Yalçınkaya, B. D. Iricanin and C. Çinar, "On a max-type difference equation", Discrete Dynamics in Nature and Society, Vol. 2007, Article ID 47264, 10 pages, 2007.

[29] I. Yalçınkaya, C. Çinar and M. Atalay, "On the solutions of systems of difference equations", Advances in Difference Equations, Vol. 2008, Article ID 143943, 9 pages, 2008.