Programmierprojekt CoMa II - Young Tableauxs

Megi Andoni - 395007 Jacob Haag - 378334 Mino Mischlich - 401947

June 2019

Lemma 2. *Die Relation $\backsim_K$ beschreibt eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}_w$.*

Beweis:
Seien $x, y, z \in \mathcal{M}_W$ Wörter mit $x \backsim_K y$ und $y \backsim_K z$. Dann gibt es endliche Folgen $o_1 \dots o_n$ und $u_1 \dots u_m$, mit $n, m \in \mathbb{N}, \quad o_i, u_j \in \{K_1, K_1^{-1}, K_2, K_2^{-1}\}$ für $i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m$, und Indize $k_1, \dots, k_n$, $\bar{k}_1 \dots \bar{k}_m$ an denen o_i bzw. u_j ausgeführt werden, sodass x durch $o_1 \dots o_n$ in y überführt wird, und y durch $u_1 \dots u_m$ in z. Dann wird aber auch x durch $o_1 \dots o_n u_1 \dots u_m$ in z überführt, und daher ist die Relation transitiv. Ebenso wird y offenbar durch $(o_i \dots o_n)^{-1} = o_n^{-1} \dots o_1^{-1}$ durch Ausführung an entsprechenden Indize in x überführt, womit die Relation symmetrisch ist. Offensichtlich ist die Relation auch reflexiv, da es keine Operationen benötigt, um x in x zu überführen. Folglich ist $\backsim_K$ eine Äquivalenzrelation. □

Lemma 3. *Die Menge $\overline{\mathcal{M}}_W := \mathcal{M}_W / \backsim_K$ wird mit der induzierten (d.h. von $\mathcal{M}$ geerbten) Operation zu einem Monoid.*

Beweis:
Um diese Aussage zu zeigen weisen wir folgende Eigenschaften nach:
1) Abgeschlossenheit
Seien $\bar{w}, \bar{v} \in \overline{\mathcal{M}}_W$ und $w_1, w_2 \in \bar{w}$ sowie $v_1, v_2 \in \bar{v}$. Dann gibt es $o_1 \dots o_n$ und $u_1 \dots u_m$, mit $n, m \in \mathbb{N}, \quad o_i, u_j \in \{K_1, K_1^{-1}, K_2, K_2^{-1}\}$ die jeweils w_1 in w_2 und v_1 in v_2 überführen. Also gilt für $w_1 v_1, w_2 v_2 \in \overline{wv}$

$$w_2 v_2 = (o_1 \dots o_n) w_1 \cdot (u_1 \dots u_m) v_1$$

was $w_2 v_2 \backsim_K w_1 v_1$ zeigt.
2) Assoziativität
Wegen $\bar{w} \cdot \bar{v} \in \{w \cdot v | w \in \bar{w}, v \in \bar{v}\}$ für $\bar{w}, \bar{v} \in \overline{\mathcal{M}}_w$, folgt die Assoziativität direkt aus der Assoziativität von $\cdot$ in $\mathcal{M}_W$.
3) Existenz eines neutralen Elements
Wir definieren zunächst e als das leere Wort. Offenbar ist e das neutrale Element in $\mathcal{M}_W$ und es gilt $\bar{e} = \{e\}$. Folglich gilt für alle $\bar{w} \in \overline{\mathcal{M}}_W$ auch

$$\bar{w} \cdot \bar{e} = \overline{we} = \bar{w}.$$

Damit ist also $(\overline{\mathcal{M}}_W, \cdot)$ ein Monoid. □

Korollar 5. *Für zwei Young Tableaux S und T gilt $w(S \bullet T) = \bar{w}(S) \cdot \bar{w}(T)$ in $\overline{\mathcal{M}}_W$.*

Beweis:
Für $w(T) = x_1 \dots x_s$ gilt nach Definition 3.2 und Proposition 4

$$
\begin{aligned}
\bar{w}(S \bullet T) =& \bar{w}(\dots(S \leftarrow x_1)\dots) \leftarrow x_s) \\
=& (\dots(\bar{w}(S) \cdot \bar{w}(x_1)) \dots \bar{w}(x_s)) \\
=& \bar{w}(S) \cdot \bar{w}(x_1) \cdot \dots \cdot \bar{w}(x_s) \\
=& \bar{w}(S) \cdot \bar{w}(T)
\end{aligned}
$$

wobei wir die Assoziativität von $\cdot$ in $\overline{\mathcal{M}}_W$ ausgenutzt haben. □

Lemma 6. *Die Abbildung $\bar{w} : \mathcal{M}_{YT} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}_W$ ist surjektiv.*

Beweis:
Wir beweisen die Aussage per Induktion über die Länge der Wörter $v \in \bar{v}$.
Induktionsanfang: Für Wörter v der Länge 1 gilt $\bar{v} = \{v\}$. Also ist das einelementige Young Tableaux T mit $w(T) = v$ das einzige Urbild von $\bar{v}$ unter der Abbildung $\bar{w}$.
Induktionsschritt: Es gelte die Aussage für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$. Sei $\bar{v} \in \overline{\mathcal{M}}$ und $v_1, \dots, v_n, v_{n+1} \in \bar{v}$. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert ein Young Tableaux T_n mit $w(T_n) = v_{\sigma(1)} \cdot v_{\sigma(n)}$, wobei $w(T_n)$ und $v_1, \dots, v_n$ äquivalent sind, für geeignetes σ. Mit Proposition 4 folgt dann

$$
\begin{aligned}
\bar{w}(T_n \leftarrow v_{n+1}) =& \bar{w}(T_n) \cdot \bar{w}(v_{n+1}) \\
=& \bar{w}(v_1 \dots v_n) \cdot \bar{w}(v_{n+1}) \\
=& \bar{w}(v_1 \dots v_{n+1}) \\
=& \bar{v}
\end{aligned}
$$

und damit folgt die Behauptung. □