最值定理

若$f(x) \in C[a,b]$，则一定有最大值M和最小值m，使得$m \leq f(x) \leq M$

> 推论1：若$f(x) \in C[a,b]$，$m \overset{\leq}{\not\equiv} f(x) \overset{\leq}{\not\equiv} M$,其中m和M是常数，则
> $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$

零点定理

若$f(x) \in C[a,b]$，且$f(a) * f(b) < 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f(\xi) = 0$

> 推论1：若$f(x) \in C[a,b]$，在(a,b)内可导，且$f'_{+}(a) * f'_{-}(b) < 0$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$
>
> 推论2: 若$f(x) \in (a,b)$，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \alpha$，$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \beta$，且$\alpha * \beta < 0$，则$f(x) = 0$在$(a,b)$中至少存在一个根，这里$a, b, \alpha, \beta$可以是有限数，也可以是无穷大。

介值定理

若$f(x) \in C[a,b]$，且$f(a) \neq f(b)$，则$\exists x_0 \in (a,b)$，使得$f(x_0) \in (f(a), f(b))$或者$f(x_0) \in (f(b), f(a))$

> 推论1:若$f(x) \in C[a,b]$，则当$\mu \in [m, M]$时，$\exists \xi \in [a,b]$，使得$f(\xi) = \mu$
>
> 推论2：若$f(x) \in C[a,b]$，在(a,b)内可导，且$f'_{+}(a) \neq f'_{-}(b)$，设$f'_{+}(a) < f'_{-}(b)$，对任意
> $\eta \in (f'_{+}(a), f'_{-}(b))$，$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = \eta$

费马引理：

若$f(x)$在x_0处取极值且可导，则$f'(x_0) = 0$

罗尔中值定理：

若$f(x) \in C[a,b]$，在(a,b)内可导，$f(a) = f(b)$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$

> 推论1:若$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = A$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$
>
> 推论2:若$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = 0$
>
> 推论3:若$f(x)$在$(a,+\infty)$内可导，$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，则$\exists \xi \in (a,+\infty)$，使得$f'(\xi) = 0$
>
> 推论4:若$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$，则$\exists \xi \in (-\infty,+\infty)$，使得$f'(\xi) = 0$

拉格朗日中值定理：

若$f(x) \in C[a,b]$，在(a,b)内可导，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

柯西中值定理：

若$f(x), g(x) \in C[a,b]$，在(a,b)内可导，且$g'(x) \neq 0, x \in (a,b)$，则$\exists \xi \in (a,b)$，使得$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

泰勒中值定理：

若$f(x)$在$x=x_0$的邻域内$n+1$阶可导，则
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

，其中ξ 介于x_0与x之间，称$R_n(x)=\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，为拉格朗日型余项，余项$R_n(x)$也可以表示为$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$，称为佩亚诺型余项

> 推论：若$f(x)$在$x=x_0$的邻域内$n+1$阶可导，则
> $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$

积分中值定理：

若$f(x)\in C[a,b]$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$

> 推论1:若$f(x)\in C[a,b]$，则$\exists\xi\in(a,b)$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$（$\xi$存在区间不同，由牛顿莱布尼茨公式和拉格朗日中值定理推得）
>
> 推论2:若$f(x),g(x)\in C[a,b]$且$g(x)\geq 0$，则$\exists\xi\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

柯西不等式

若$f(x),g(x)\in C[a,b]$，则$(\int_a^b f(x)g(x)dx)^2\leq\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx$

三角函数定积分推导公式

有$f(x)\in C[0,1]$，则$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(x)dx$，且$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，$I_1=1,I_0=\frac{\pi}{2}$

证明：

当$n\leq 2$时，显然$I_1=1,I_0=\frac{\pi}{2}$绝对成立

当$n\geq 2$时，$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-1}(x)d(cosx)$

$=-sin^{n-1}(x)cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)*cos^2(x)dx$

$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)*(1-sin^2(x))dx$

$=(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{n-2}(x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(x)dx]$

$=(n-1)[I_{n-2}-I_n]$

故$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$

当 $n=2k$时，$I_n=\frac{2k-1}{2k}*\frac{2k-3}{2k-2}*...*\frac{1}{2}*\frac{\pi}{2}=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}*\frac{\pi}{2}$

当 $n=2k$+1时，$I_n=\frac{2k}{2k+1}*\frac{2k-2}{2k-1}*...*\frac{2}{3}*1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$