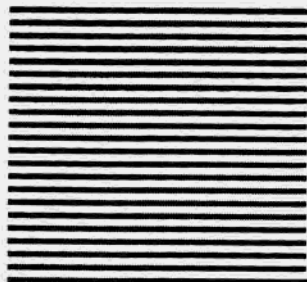


# АЛГЕБРА

Задачник

8  
КЛАС



# АЛГЕБРА

**8 класс**

*В двух частях*

**Часть 2**

## **Задачник**

для учащихся общеобразовательных  
учреждений

Под редакцией **А. Г. Мордковича**

*Рекомендовано*

*Министерством образования и науки  
Российской Федерации*

11-е издание, исправленное и дополненное



Москва 2013

УДК 373.167.1:512  
ББК 22.141я721+22.14я721.6  
А45

**На учебник получены положительные заключения  
Российской академии наук (№ 10106-5215/620 от 14.10.2011 г.)  
и Российской академии образования (№ 01-5/7д-717 от 24.10.2011 г.)**

**Авторы:**  
**А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский,  
Л. А. Александрова**

**А45 Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся  
общеобразовательных учреждений / [А. Г. Мордкович  
и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. — 11-е изд., испр. и  
доп. — М. : Мнемозина, 2013. — 344 с. : ил.**

**ISBN 978-5-346-02484-2**

Данное пособие предусматривает занятия с учащимися, проявляющими интерес и способности к математике. Целью работы в соответствующих классах является формирование у школьников устойчивого интереса к предмету, дальнейшее развитие их математических способностей, ориентация на профессии, связанные с математикой, на применение математических методов в различных отраслях науки и техники.

**УДК 373.167.1:512  
ББК 22.141я721+22.14я721.6**

**ISBN 978-5-346-02484-2 (ч. 2)  
ISBN 978-5-346-02482-8 (общ.)**

© «Мнемозина», 2002  
© «Мнемозина», 2013, с изменениями  
© Оформление. «Мнемозина», 2013  
Все права защищены

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплект\* для изучения курса алгебры в 8-м классе с повышенным уровнем математической подготовки состоит из следующих книг:

*Программы.* Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

*А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев.* Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

*А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Л. А. Александрова.* Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник / под ред. А. Г. Мордковича;

*А. Г. Мордкович.* Преподавание алгебры в 8—9 классах по учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева. Методическое пособие для учителя;

*А. Г. Мордкович.* Алгебра. 7—9 классы. Контрольные работы. К учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева;

*Л. А. Александрова.* Алгебра. 8 класс. Самостоятельные работы. К учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева / под ред. А. Г. Мордковича.

Данный комплект адресован не специализированным математическим школам или классам с собственными авторскими программами, а обычным классам в общеобразовательных школах, если в таких классах есть возможность (и желание) изучать курс алгебры на более высоком уровне по сравнению с массовой школой.

У вас в руках третья книга комплекта — задачник. Выделение в отдельную книгу задачника позволило авторам создать избыточную по объёму систему упражнений, обеспечивающую учителя более чем достаточным материалом для работы в классе и для домашних заданий без привлечения других источников. Во всех параграфах содержатся упражнения трёх уровней сложности: устные (полуустные), задания средней трудности (слева от номеров таких заданий помещён значок  $\circ$ ) и задания повышенной трудности (слева от номеров таких заданий помещён значок  $\bullet$ ). К большинству упражнений второго и третьего уровней приведены ответы.

Не следует стремиться решить с учениками все упражнения. Их чересчур много, это сделано нами сознательно, чтобы у учителей была возможность выбора. Этот выбор диктуется уровнем подго-

---

\* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах [www.mnemozina.ru](http://www.mnemozina.ru) и [www.ziimag.narod.ru](http://www.ziimag.narod.ru)

товленности класса и собственными методическими взглядами учителя, а потому носит заведомо творческий характер.

Обращаем ваше внимание, что указанная выше четвёртая книга УМК содержит авторскую концепцию курса алгебры 7—9-го классов, примерное тематическое планирование (из расчёта 5 часов в неделю), методические рекомендации по работе с учебниками «Алгебра» для 8-го и 9-го классов и решение наиболее трудных заданий из сборника контрольных работ. В дальнейшем планируется выпустить пособие для учителя с решением наиболее трудных задач из настоящего задачника.

*Авторы*

## § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Найдите, при каких значениях переменной не имеет смысла алгебраическая дробь:

1.1. а)  $\frac{a-5}{a+5}$ ; б)  $\frac{5c}{4+10c}$ ; в)  $\frac{3x-9}{1+x}$ ; г)  $\frac{15m+4}{4m+15}$ .

1.2. а)  $\frac{9x^2}{x(x+2)}$ ; б)  $\frac{8y^2}{y(y-4)}$ ;  
в)  $\frac{45z^3+5}{3z(23z+69)}$ ; г)  $\frac{72t^2-17}{2t(15t-60)}$ .

1.3. а)  $\frac{3a^2+5}{(a+2)(3a+9)}$ ; б)  $\frac{31c^2}{(3c-4)(c+12)}$ ;  
в)  $\frac{4x^2-2x-3}{(x-3)(x+3)}$ ; г)  $\frac{17s+1}{(s-2)(2+s)}$ .

1.4. а)  $\frac{7a^2-5}{(a+8)(a-9)(a+17)}$ ; б)  $\frac{73c^3-8}{(4c-2)(7c+8)(13c+39)}$ ;  
в)  $\frac{3b+2}{3b(3b-2)^2}$ ; г)  $\frac{2s-1}{2s(2s+1)^2}$ .

1.5. а)  $\frac{t^2+5t}{t^2-4t}$ ; б)  $\frac{t^2-t}{t^2+t}$ ;  
в)  $\frac{t+2}{t^2+2t}$ ; г)  $\frac{t-4}{t^2-4t}$ .

1.6. а)  $\frac{a^2+5}{(a-1)^2}$ ; б)  $\frac{12c^2-7}{(c+3)^2}$ ;  
в)  $\frac{b^2+12}{4b^2-4b+1}$ ; г)  $\frac{27m^3-15}{4m^2+36m+81}$ .

Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл алгебраическая дробь:

1.7. а)  $\frac{3x^2}{x^2 + 3}$ ;      в)  $\frac{x^2 - 1}{|x| + 5}$ ;

б)  $\frac{15b + 1}{b^2(b^2 + 1)}$ ;      г)  $\frac{8m - 3}{|m| \cdot (m^2 + 1)}$ .

1.8. а)  $\frac{35p - 24}{p^2 - 16}$ ;      в)  $\frac{t^2 + 4t - 1}{t^2 - 36}$ ;

б)  $\frac{14k^2 + 14}{(k^2 - 9)(k^2 + 1)}$ ;      г)  $\frac{8m^2 + 16}{(m^2 + 2)(m^2 - 4)}$ .

1.9. Найдите значения переменной, при которых алгебраическая дробь равна нулю (если такие значения существуют):

а)  $\frac{x - 4}{x + 2}$ ;      в)  $\frac{x^2 + 1}{x^2}$ ;

б)  $\frac{3x^2}{x(x - 2)}$ ;      г)  $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ .

1.10. При каких значениях переменной алгебраическая дробь  $\frac{2m^2 - 2}{m(m + 1)(m - 2)}$  обращается в нуль, а при каких — не имеет смысла?

Найдите допустимые значения переменных:

1.11. а)  $\frac{\frac{2}{b} - \frac{1}{b + 1}}{b - 2}$ ;      в)  $\frac{\frac{3}{b + 1} - 1}{b - 4}$ ;

б)  $\frac{x^2 - 4x + 9}{x - 2}$ ;      г)  $\frac{\frac{4}{x + 1} - 3}{\frac{x}{x + 12}}$ .

1.12. а)  $\frac{a + 1}{a - b}$ ;      в)  $\frac{a - b}{a + b}$ ;

б)  $\frac{b - 4}{a + 2b}$ ;      г)  $\frac{2ab}{3a - b}$ .

1.13. Докажите, что значение алгебраической дроби равно нулю при всех значениях переменной:

а)  $\frac{(a + 2)^2 - 4(a + 1) - a^2}{a^2 + 1}$ ;      б)  $\frac{9 + x(x - 6) - (x - 3)^2}{x^2 + 3}$ .

○1.14. Докажите, что алгебраическая дробь не имеет смысла ни при каких значениях переменной:

а)  $\frac{2x - 5}{(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x^2 + 3) + 3(9 + x)}$ ;

б)  $\frac{3a - 1}{2(4 - a) - (a + 2)(a^2 - 2a + 4) + a(a^2 + 2)}$ .

1.15. Докажите, что при любых значениях переменной:

а) значение дроби  $\frac{5}{a^2 + 7}$  положительно;

б) значение дроби  $\frac{-3}{b^2 + 4}$  отрицательно;

в) значение дроби  $\frac{(x - 3)^2}{a^2 + 8}$  неотрицательно;

г) значение дроби  $\frac{(y - 6)^2}{-y^2 - 3}$  неположительно.

1.16. Найдите значение алгебраической дроби:

а)  $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$  при  $a = 4$ ,  $b = -2$ ;

б)  $\frac{c^3 + dc}{c^2d + d^2}$  при  $c = -2$ ,  $d = 10$ ;

в)  $\frac{x^2 + y^2}{x^4 - y^4}$  при  $x = 13$ ,  $y = 12$ ;

г)  $\frac{m^4 - n^4}{m^3n - mn^3}$  при  $m = 2$ ,  $n = -1$ .

○1.17. Пусть  $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 5}$ . Найдите:

а)  $f(0)$ ;  $f(1)$ ;  $f(-3)$ ;

б)  $f(a)$ ;  $f(3a)$ ;  $f(a - 3)$ ;

в)  $f(x^2)$ ;  $f(x + 1)$ ;  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ;

г)  $f(ab)$ ;  $f(a + b)$ ;  $f\left(\frac{a}{b}\right)$ .

В № 1.18, 1.19 составьте математическую модель ситуации, описанной в условии задачи.

○1.18. Прогулочный катер двигался по реке, скорость течения которой 2 км/ч. По течению реки он проплыл 18 км, а против течения — 14 км, затратив на весь путь 1 ч 20 мин.



- 1.19. Из города в посёлок, находящийся на расстоянии 40 км от города, выехал грузовик, а через 10 мин вслед за ним отправился легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости грузовика. В посёлок они прибыли одновременно.

Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования:

- 1.20. Моторная лодка, собственная скорость которой равна 30 км/ч, прошла по течению реки расстояние 48 км и против течения — 42 км. Какова скорость течения реки, если известно, что на путь по течению лодка затратила столько же времени, сколько на путь против течения?
- 1.21. Автобус проходит расстояние 160 км за время, которое автомобиль тратит на прохождение 280 км. Найдите скорость автобуса, если известно, что она на 30 км/ч меньше скорости автомобиля.
- 1.22. Придумайте реальную ситуацию, описываемую заданной математической моделью:

а)  $\frac{12}{x} - \frac{12}{x+1} = 1$ ;      в)  $\frac{20}{x} = \frac{25}{x+1}$ ;

б)  $\frac{24}{x+2} = \frac{16}{x-2}$ ;      г)  $\frac{10}{x-2} + \frac{9}{x+2} = 3$ .

- 1.23. Какие значения может принимать число  $a$ , если дробь  $\frac{x^2 + 2x - 8}{x - a}$  определена при всех значениях  $x$ , удовлетворяющих условию:

а)  $x \neq -3$ ;      б)  $x \neq 0$ ;      в)  $x^2 = 4$ ;      г)  $|x| \neq 1$ ?

- 1.24. При каких значениях  $a$  определена для всех значений  $x$  дробь:

а)  $\frac{3x - a}{x^2 - a}$ ;      б)  $\frac{ax - 3}{x^2 + 1}$ ;      в)  $\frac{3x - a}{x - 3}$ ;      г)  $\frac{3x - a}{ax - 5}$ ?

- 1.25. Зная, что  $3x - 9y = 1$ , найдите значение выражения:

а)  $x - 3y$ ;      в)  $\frac{12y - 4x}{5}$ ;

б)  $\frac{6}{x - 3y}$ ;      г)  $(9y^2 - 6xy + x^2) \cdot 3$ .

О1.26. Зная, что  $\frac{a}{b} = 3$ , найдите значение выражения:

а)  $-\frac{a}{b}$ ;      б)  $\frac{b}{a}$ ;      в)  $\frac{a+b}{b}$ ;      г)  $\frac{b+2a}{a}$ .

О1.27. Зная, что  $\frac{x}{y} = \frac{1}{5}$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{x}{2y}$ ;      б)  $\frac{x+y}{x}$ ;      в)  $\frac{y}{2x}$ ;      г)  $\frac{x-y}{y}$ .

О1.28. Найдите значение дроби:

а)  $\frac{x+y}{x}$ , если  $\frac{x}{y} = 0,2$ ;      б)  $\frac{3x-8y}{y}$ , если  $\frac{x}{y} = 0,4$ .

О1.29. Зная, что  $\frac{a+2b}{b} = 7$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{a}{b}$ ;      б)  $\frac{2a-b}{2b}$ ;      в)  $\frac{2a+3b}{b}$ ;      г)  $\frac{4b-a}{2a}$ .

О1.30. Зная, что  $\frac{x-3y}{y} = 12$ , найдите значение выражения:

а)  $\frac{x}{y}$ ;      б)  $\frac{2x+y}{3y}$ ;      в)  $\frac{y}{x}$ ;      г)  $\frac{3x-y}{2x}$ .

О1.31. Найдите все натуральные значения  $n$ , при которых заданная дробь является натуральным числом:

а)  $\frac{n+3}{n}$ ;      б)  $\frac{2n+5}{n}$ ;      в)  $\frac{6-n}{n}$ ;      г)  $\frac{45-7n}{n}$ .

О1.32. Пусть  $\frac{x}{y} = 3$ . Найдите значение дроби  $\frac{3x^2 - 5xy + 2y^2}{x^2 + 5y^2}$ .

О1.33. Докажите, что если  $\frac{3b-a}{b-2a} = 4$ , то  $\frac{2a^2 - 3ab + 2b^2}{2a^2 - ab} = 1,58$ .

О1.34. Выразите:

а) переменную  $y$  из равенства  $(x-2)(y+4) = 15$ ;  
б) переменную  $k$  из равенства  $x^2 \cdot k - (k+1)x - 4 = 0$ ;  
в) переменную  $x$  из равенства  $(x+y)(2y-z) + x - 5 = 0$ ;  
г) переменную  $z$  из равенства  $\frac{1}{x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}}} = 1$ .

Сократите дробь:

1.35. а)  $\frac{14k^2l}{7kl^2}$ ;      в)  $\frac{135p^3q^2}{25q^2p}$ ;

б)  $\frac{13(x+4)^3}{26x(x+4)}$ ;      г)  $\frac{48m(2m-n)^3}{60n(2m-n)^3}$ .

○1.36. а)  $\frac{ac - bd + bc - ad}{af - bd + bf - ad}$ ;      в)  $\frac{2x - 2y - x^2 + y^2}{x^3y - 2x^2y^2 + xy^3}$ ;

б)  $\frac{a^2 + 2bc - b^2 - c^2}{b^2 - a^2 - c^2 + 2ac}$ ;      г)  $\frac{ac - 2bc - ab + b^2 + c^2}{bc + 2ab - ac - b^2 - a^2}$ .

○1.37. Докажите тождество:

а)  $\frac{4,5a^2 + 0,5ab}{40,5a^2 - 0,5b^2} = \frac{a}{9a - b}$ ;      б)  $\frac{24,5x^2 - 0,5y^2}{3,5x^2 - 0,5xy} = \frac{7x + y}{x}$ .

Найдите значение дроби:

○1.38. а)  $\frac{2x - 6y}{0,25x^2 - 2,25y^2}$ , если  $x + 3y = 8$ ,  $x - 3y \neq 0$ ;

б)  $\frac{2a + 4b}{0,2a^2 - 0,8b^2}$ , если  $a - 2b = 5$ ,  $a + 2b \neq 0$ .

○1.39. а)  $\frac{9x^2 - 3xy}{12xy - 4y^2}$  при  $x = 0,5$ ,  $y = 0,25$ ;

б)  $\frac{a^3 - 4ab^2}{12b^2 - 6ab}$  при  $a = -2,4$ ,  $b = 0,2$ ;

в)  $\frac{16m^2 - 4n^2}{6m - 3n}$  при  $m = 1,5$ ,  $n = -4,5$ ;

г)  $\frac{30kl - 15k^2}{4kl - 8l^2}$  при  $k = \frac{1}{5}$ ,  $l = \frac{1}{6}$ .

○1.40. Сократите дробь и выясните, изменилось ли в результате сокращения множество допустимых значений её переменных:

а)  $\frac{8x}{8a}$ ;      б)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ ;      в)  $\frac{2x^2 + 8}{10x^3 + 40x}$ ;      г)  $\frac{2x}{x^2}$ .

○1.41. Сократите дробь и выясните, изменилось ли в результате сокращения множество допустимых значений её переменных:

а)  $\frac{x-1}{x^2-x}$ ;      в)  $\frac{d^2-8dn+16n^2}{12n-3d}$ ;

б)  $\frac{x^2-4y^2}{2x+4y}$ ;      г)  $\frac{y^2-2y+1}{y^2-1}$ .

○1.42. Докажите, что значение данной дроби при всех допустимых значениях  $x$  равно  $-8$ , укажите эти допустимые значения  $x$ :

а)  $\frac{8x-8}{1-x}$ ;      в)  $\frac{8x+8}{\frac{x^2-1}{1-x}}$ ;

б)  $\frac{8x^3-64}{(2-x)(x^2+2x+4)}$ ;      г)  $\frac{8-\frac{8}{x^3}}{\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1\right)}$ .

○1.43. Найдите значения параметра  $a$ , при которых значение дроби при всех допустимых значениях  $t$  постоянно. Укажите это значение дроби и допустимые значения  $t$ :

а)  $\frac{t-3}{t-a}$ ;      в)  $\frac{2t^2-12t}{t^2-3at}$ ;

б)  $\frac{9t^2-4}{(2-at)(2-3t)}$ ;      г)  $\frac{t^3+8}{(2+at)(-t^2+2t-4)}$ .

○1.44. Пусть  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = k$ .

Докажите, что  $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{b_1+b_2+\dots+b_n} = k$ .

○1.45. Найдите все пары  $(x; y)$ , при которых данная дробь не определена, и изобразите их на координатной плоскости:

а)  $\frac{3x-5y}{x-y}$ ;      б)  $\frac{10x}{2x-y}$ ;      в)  $\frac{2x+y}{x+y}$ ;      г)  $\frac{-3x}{x+2y}$ .

○1.46. Найдите все пары  $(a; b)$ , при которых данная дробь не определена, и изобразите их на координатной плоскости:

а)  $\frac{10a}{(a-1)(b-1)}$ ;      в)  $\frac{b-5}{(a-5)(b+2)}$ ;

б)  $\frac{3+a}{(a+4)(2a+b)}$ ;      г)  $\frac{7ab}{(b-3)(4a-3b)}$ .

**01.47.** Постройте множество точек  $(x; y)$  на координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют условию:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x-1}{y-1} = 0; & \text{в) } \frac{x^2 - y^2}{x+y} = 0; \\ \text{б) } \frac{x^2 - 2xy + x}{x(x-y)} = 0; & \text{г) } \frac{x^2 - y^2 - 2y - 1}{x+y+1} = 0. \end{array}$$

**●1.48.** Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{2x^2 - 5x}{2x - 5}; & \text{в) } y = \frac{2x^2 - 5x}{x}; \\ \text{б) } y = \frac{2x^3}{x + |x|}; & \text{г) } y = \frac{x^3}{|x|}. \end{array}$$

Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

$$\mathbf{1.49.} \quad \text{а) } \frac{b}{3a} \text{ и } \frac{3}{a}; \quad \text{в) } \frac{3a^2}{8} \text{ и } \frac{5ab}{12};$$

$$\text{б) } \frac{b}{a} \text{ и } \frac{c}{2ab}; \quad \text{г) } \frac{m}{3n} \text{ и } \frac{5}{6mn}.$$

$$\mathbf{1.50.} \quad \text{а) } \frac{x^2}{5y} \text{ и } \frac{z-3}{y^2}; \quad \text{в) } \frac{3c}{2d^2} \text{ и } \frac{c+d}{6ad};$$

$$\text{б) } \frac{1}{15xy} \text{ и } \frac{1}{5x^2y^2}; \quad \text{г) } \frac{3t}{4x^2y} \text{ и } \frac{2t}{5xy^2}.$$

$$\mathbf{1.51.} \quad \text{а) } \frac{8}{15a^2b^3} \text{ и } \frac{3}{10a^3b^2}; \quad \text{в) } \frac{11c}{28p^3q^{31}} \text{ и } \frac{4c}{35p^8q};$$

$$\text{б) } \frac{7n+m}{63m^2n^4} \text{ и } \frac{n-4m}{36m^3n^3}; \quad \text{г) } \frac{2y^2-x}{24x^2y^3} \text{ и } \frac{8y+5x^2}{60x^4y}.$$

$$\mathbf{1.52.} \quad \text{а) } \frac{b}{a+b} \text{ и } \frac{13b}{a}; \quad \text{в) } \frac{2c}{b} \text{ и } \frac{b}{b-c};$$

$$\text{б) } \frac{1+a}{a^2} \text{ и } \frac{a-1}{a-4}; \quad \text{г) } \frac{x-y}{x+y} \text{ и } \frac{x+3}{x^3}.$$

$$\mathbf{1.53.} \quad \text{а) } \frac{b}{a} \text{ и } \frac{b^2}{a(a-1)}; \quad \text{в) } \frac{(c+d)}{c(c-d)} \text{ и } \frac{d}{c};$$

$$\text{б) } \frac{c+1}{c-1} \text{ и } \frac{c-3}{c(c-1)}; \quad \text{г) } \frac{x^2}{y(y+x)} \text{ и } \frac{y}{y+x}.$$

Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

1.54. а)  $\frac{b}{2a}$  и  $\frac{a+b}{a(a-b)}$ ;

в)  $\frac{m-n}{m(m+n)}$  и  $\frac{n}{3m}$ ;

б)  $\frac{a-1}{a^2}$  и  $\frac{a+1}{a(a-1)}$ ;

г)  $\frac{m-4}{m(m+2)}$  и  $\frac{m-2}{m^2}$ .

1.55. а)  $\frac{17x}{3x-3}$  и  $\frac{11}{6x-6}$ ;

в)  $\frac{5x}{8x+8y}$  и  $\frac{9y}{4x+4y}$ ;

б)  $\frac{b-2}{ab+2a}$  и  $\frac{a+2}{2b+b^2}$ ;

г)  $\frac{x-3}{x^2-xy}$  и  $\frac{y-3}{xy-y^2}$ .

1.56. а)  $\frac{5m}{m-8}$  и  $\frac{6n}{m+8}$ ;

в)  $\frac{q+10}{q-10}$  и  $\frac{3q}{q+10}$ ;

б)  $\frac{a-b}{b(a+b)}$  и  $\frac{4a}{b(a-b)}$ ;

г)  $\frac{x+1}{y(x-1)}$  и  $\frac{x-1}{y(x+1)}$ .

1.57. а)  $\frac{3c}{cd+d^2}$  и  $\frac{c+3}{cd-d^2}$ ;

в)  $\frac{x-2}{xy-y}$  и  $\frac{2y}{xy+y}$ ;

б)  $\frac{4-2x+x^2}{2x-x^2}$  и  $\frac{2-x}{2x+x^2}$ ;

г)  $\frac{x+1}{x^2-x}$  и  $\frac{x^2+x+1}{x^2+x}$ .

1.58. а)  $\frac{15}{m-n}$  и  $\frac{16}{n-m}$ ;

в)  $\frac{48}{3p-q}$  и  $\frac{11}{q-3p}$ ;

б)  $\frac{15a}{2a+b}$  и  $\frac{6b}{-2a-b}$ ;

г)  $\frac{4s}{-2t-3s}$  и  $\frac{8t}{2t+3s}$ .

1.59. а)  $\frac{1}{(x-y)^2}$  и  $\frac{1}{(y-x)^2}$ ;

в)  $\frac{25p}{(p-q)^2}$  и  $\frac{5q}{(q-p)^2}$ ;

б)  $\frac{15m}{(a-b)^2}$  и  $\frac{17n}{-(b-a)^2}$ ;

г)  $\frac{3k}{-(l-k)^2}$  и  $\frac{8l}{(k-l)^2}$ .

1.60. а)  $\frac{7x}{x^2-4}$  и  $\frac{x+2}{x-2}$ ;

в)  $\frac{m-n}{m+n}$  и  $\frac{5mn}{m^2-n^2}$ ;

б)  $\frac{8y}{y^2-9}$  и  $\frac{5}{3-y}$ ;

г)  $\frac{7m}{-m-n}$  и  $\frac{3n}{m^2-n^2}$ .

1.61. а)  $\frac{x+y}{x-y}$  и  $\frac{49}{(x-y)^2}$ ;

в)  $\frac{p}{(p+q)^2}$  и  $\frac{p-q}{p+q}$ ;

б)  $\frac{32a}{(z-t)^8}$  и  $\frac{42b}{(z-t)^7}$ ;

г)  $\frac{7a}{(a+b)^{12}}$  и  $\frac{9b}{(a+b)^{14}}$ .

Приведите к наименьшему общему знаменателю алгебраические дроби:

○1.62. а)  $\frac{11a}{a^3 + b^3}$  и  $\frac{1}{a + b}$ ;

в)  $\frac{10b}{b^3 - 8}$  и  $\frac{1}{b - 2}$ ;

б)  $\frac{3x + 1}{x^3 - 27}$  и  $\frac{x - 3}{x^2 + 3x + 9}$ ;

г)  $\frac{1 - 5y}{t^3 + y^3}$  и  $\frac{t + y}{t^2 - ty + y^2}$ .

○1.63. а)  $\frac{a - b}{5a + 5b}$  и  $\frac{a^2}{a^2 - b^2}$ ;

в)  $\frac{xy}{x^2 - y^2}$  и  $\frac{x + y}{2x - 2y}$ ;

б)  $\frac{y^3}{x^2 - y^2}$  и  $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 - xy}$ ;

г)  $\frac{z^2 + tz + t^2}{zt + z^2}$  и  $\frac{3t}{z^2 - t^2}$ .

○1.64. а)  $\frac{b}{2a^2}$ ,  $\frac{7}{6ab}$  и  $\frac{a}{3b^2}$ ;

в)  $3t$ ,  $\frac{2t}{s^2}$  и  $\frac{5}{st}$ ;

б)  $\frac{m}{(m + n)}$ ,  $\frac{n}{m}$  и  $(m + n)$ ;

г)  $\frac{a + b}{a^2}$ ,  $\frac{a - b}{3a}$  и  $\frac{b^2}{a + b}$ .

○1.65. а)  $\frac{1 + x + x^2}{x - 2}$ ,  $\frac{x + 2}{x - 1}$  и  $2x$ ;

в)  $\frac{y - 5}{y + 1}$ ,  $5y$  и  $\frac{y^2 - y + 1}{y + 5}$ ;

б)  $\frac{c - 1}{(c - 2)(c + 2)}$ ,  $\frac{c^2}{c - 2}$  и  $\frac{4}{c + 2}$ ;

г)  $\frac{4c}{c^2 - 25}$ ,  $\frac{c - 5}{c + 5}$  и  $\frac{c + 5}{c - 5}$ .

○1.66. а)  $\frac{x^2 + 5}{4 - x^2}$ ,  $\frac{x + 1}{x + 2}$  и  $\frac{x - 1}{x - 2}$ ;

б)  $\frac{2mn}{3n^2 - 3m^2}$ ,  $\frac{(m + n)^2}{-m^2 + 2mn - n^2}$  и  $\frac{(m - n)^2}{2mn + m^2 + n^2}$ ;

в)  $\frac{10xy}{4x^2 - y^2}$ ,  $\frac{2x}{-2x - y}$  и  $\frac{5y}{y - 2x}$ ;

г)  $\frac{6x}{5x^2 - 45}$ ,  $\frac{(x - 3)^2}{-x^2 - 6x - 9}$  и  $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 9 - 6x}$ .

○1.67. а)  $\frac{c + 6b}{ac + 2bc - 6ab - 3a^2}$ ,  $\frac{2b}{a + 2b}$  и  $\frac{c}{c - 3a}$ ;

б)  $\frac{3a - b}{4a + 2c}$ ,  $\frac{2a + c}{6a + 2b}$  и  $\frac{6a^2}{6a^2 + 2ab + 3ac + bc}$ ;

в)  $\frac{1}{y - 5z}$ ,  $\frac{z}{x + 2y}$  и  $\frac{2x + z}{xy - 10yz - 5xz + 2y^2}$ ;

г)  $\frac{a - 1}{a^2 - ab + bc - ac}$ ,  $\frac{a + c}{2b - 2a}$  и  $\frac{a - b}{3a - 3c}$ .

**01.68.** Докажите, что если в дроби  $\frac{a^3 - 2b^3}{3a^3 - a^2b - 4ab^2}$  переменные  $a$  и  $b$  заменить соответственно на  $pa$  и  $pb$ , то получим дробь, тождественно равную данной. Используя доказанное тождество, найдите значение заданной дроби при:

а)  $a = \frac{5}{113}$ ,  $b = \frac{4}{113}$ ;      б)  $a = 65$ ,  $b = 52$ .

**●1.69.** Постройте график функции:

а)  $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2}$ ;      б)  $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 8}{x - 4} - 2$ .

## § 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Выполните сложение (вычитание) алгебраических дробей:

**2.1.** а)  $\frac{c}{25} + \frac{d - c}{25}$ ;      в)  $\frac{48p^8}{5n} - \frac{23p^8}{5n}$ ;  
б)  $\frac{2a - b}{12b} + \frac{a + b}{12b}$ ;      г)  $\frac{7m + 2n}{n^3} - \frac{7m - 3n}{n^3}$ .

**2.2.** а)  $\frac{7p - 13}{10p} - \frac{2p - 3}{10p}$ ;      в)  $\frac{3x + 7y}{24y} + \frac{3x - 4y}{24y}$ ;  
б)  $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2} + \frac{3 - x}{2x^2}$ ;      г)  $\frac{2 - 3y^2 + y}{3y^2} - \frac{2 + y^2}{3y^2}$ .

**2.3.** а)  $\frac{6}{3 + p} + \frac{2p}{3 + p}$ ;      в)  $\frac{3q}{q - 4} - \frac{12}{q - 4}$ ;  
б)  $\frac{7}{z - 7} - \frac{z}{z - 7}$ ;      г)  $\frac{t}{3 - t} - \frac{3}{3 - t}$ .

**2.4.** Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

а)  $\frac{2m}{m - n} + \frac{2n}{n - m}$ ;      в)  $\frac{pq}{p - q} + \frac{q^2}{q - p}$ ;  
б)  $\frac{2y}{y + 3} + \frac{y - 3}{-y - 3}$ ;      г)  $\frac{3x + 5}{-x - 5} + \frac{2x}{x + 5}$ .



Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

$$2.5. \text{ а) } \frac{a^2 - 3}{a(a - 3)} - \frac{6}{a(a - 3)}; \quad \text{в) } \frac{15 - d^2}{d(5 + d)} + \frac{10}{d(d + 5)};$$

$$\text{б) } \frac{x^2 + 1}{xy - y^2} + \frac{y^2 + 1}{y^2 - xy}; \quad \text{г) } \frac{p^2 - 2}{p^2 - pq} + \frac{q^2 - 2}{pq - p^2}.$$

$$2.6. \text{ а) } \frac{100}{3x - 10} - \frac{9x^2}{3x - 10}; \quad \text{в) } \frac{121}{5x + 11} - \frac{25x^2}{5x + 11};$$

$$\text{б) } \frac{2z}{9 - z^2} - \frac{6}{9 - z^2}; \quad \text{г) } \frac{3t}{49 - t^2} - \frac{21}{49 - t^2}.$$

$$2.7. \text{ а) } \frac{z^2}{(z + 8)^2} - \frac{64}{(z + 8)^2}; \quad \text{в) } \frac{t^2}{(t + 10)^2} - \frac{100}{(t + 10)^2};$$

$$\text{б) } \frac{a^2}{(9x - a)^2} - \frac{81x^2}{(a - 9x)^2}; \quad \text{г) } \frac{49c^2}{(b - 7c)^2} - \frac{b^2}{(7c - b)^2}.$$

$$\textcircled{2.8.} \text{ а) } \frac{x^2 + 12x}{x^2 - 36} + \frac{36}{x^2 - 36}; \quad \text{в) } \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} - \frac{2xy}{x^2 - y^2};$$

$$\text{б) } \frac{c^2 + 100}{c - 10} + \frac{20c}{10 - c}; \quad \text{г) } \frac{d^2 + 49}{7 - d} + \frac{14d}{d - 7}.$$

$$\textcircled{2.9.} \text{ а) } \frac{x^3}{x^2 - y^2} - \frac{y^3}{x^2 - y^2}; \quad \text{в) } \frac{y^3}{y^2 - 4} + \frac{8}{y^2 - 4};$$

$$\text{б) } \frac{n^2 + n}{n^3 - 8} + \frac{n + 4}{n^3 - 8}; \quad \text{г) } \frac{m^2 + 9}{m^3 + 27} - \frac{3m}{m^3 + 27}.$$

$\textcircled{2.10.}$  Докажите тождество:

$$\text{а) } \frac{b^2}{b^2 + 1} + \frac{2b^2 + 1}{b^2 + 1} - \frac{2(2b^2 + 1)}{b^2 + 1} = -1;$$

$$\text{б) } \frac{3c^2 + 4}{2c^2 + 3} - \frac{2(c^2 + 2)}{2c^2 + 3} + \frac{c^2 + 3}{2c^2 + 3} = 1.$$

$\textcircled{2.11.}$  Упростите и найдите значение выражения:

$$\text{а) } \frac{-x^2 + 5x}{1 - 6x} + \frac{41x^2 - 2x}{6x - 1} \text{ при } x = \frac{1}{28};$$

$$\text{б) } \frac{(m - 1)^2}{m^3 + 27} + \frac{8 - m}{m^3 + 27} \text{ при } m = -3,5;$$

$$\text{в) } \frac{4c^2 - 8c}{3c - 2} - \frac{2c + 5c^2}{2 - 3c} \text{ при } c = \frac{2}{9};$$

$$\text{г) } \frac{n^2 + n + 1}{n^3 - 8} - \frac{n + 3}{8 - n^3} \text{ при } n = -4.$$

Упростите выражение:

○2.12. а)  $\frac{9x^2}{9x^2 - 4} - \frac{12x}{(3x - 2)(3x + 2)} + \frac{4}{9x^2 - 4}$ ;

б)  $\frac{25a^2}{25a^2 - 1} - \frac{10a}{(5a - 1)(5a + 1)} - \frac{1}{1 - 25a^2}$ .

○2.13. а)  $\frac{x^2 - 3}{(x - 2)^4} - \frac{5x - 1}{(x - 2)^4} + \frac{x + 6}{(x - 2)^4}$ ;

б)  $\frac{8m^2 + 3m - 2}{4m^2 + 4m + 1} - \frac{5m - 7}{-4m^2 - 4m - 1} - \frac{4m - 9}{(1 + 2m)^2}$ .

○2.14. а)  $\frac{5}{(b - 4)(5 - b)} + \frac{b + 1}{(4 - b)(5 - b)}$ ;

б)  $\frac{2}{(3 - a)(2 - a)} + \frac{a - 4}{(a - 3)(a - 2)}$ .

○2.15. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $\frac{3 + 2x}{(2 + x)(4 - x)} + \frac{1 + x}{(x + 2)(x - 4)}$  при  $x = 3,95$ ;

б)  $\frac{5y - 61}{(y - 2)(3 - y)(y - 1)} - \frac{55 - 3y}{(2 - y)(y - 3)(1 - y)}$  при  $y = 1,8$ .

○2.16. Вместо символа \* запишите такое выражение, чтобы получилось верное равенство:

а)  $\frac{*}{2 - 3a} + \frac{3a - 4}{2 - 3a} = 1$ ;      в)  $\frac{*}{2y + 5} + \frac{y - 1}{2y + 5} = -1$ ;

б)  $\frac{5x - 4}{x - 2} - \frac{*}{x - 2} = 2$ ;      г)  $\frac{4b - 7}{8b + 9} - \frac{*}{8b + 9} = -3$ .

○2.17. Докажите, что выражение  $\frac{x^2 - 3}{(x - 2)^4} - \frac{5x - 1}{(x - 2)^4} + \frac{x + 6}{(x - 2)^4}$ ; при всех допустимых значениях переменной принимает положительные значения.

○2.18. Докажите, что выражение  $\frac{2 - y^2}{(y - 3)^4} - \frac{7 - 5y}{(y - 3)^4} - \frac{4 - y}{(y - 3)^4}$  при всех допустимых значениях переменной принимает отрицательные значения.

○2.19. Докажите тождество:

$$\frac{x^3 + y^3}{(x - y)^2} + \frac{3xy^2 - y^3}{(y - x)^2} + \frac{3xy^2}{2xy - x^2 - y^2} = \frac{x^3}{(x - y)^2}.$$

Выполните сложение (вычитание) алгебраических дробей:

2.20. а)  $\frac{x}{5} + \frac{2x}{3}$ ; б)  $\frac{3b}{28} - \frac{b}{4}$ ; в)  $\frac{6m}{7} - \frac{m}{11}$ ; г)  $\frac{m}{42} + \frac{5m}{6}$ .

2.21. а)  $\frac{a+8}{9} + \frac{a-2}{12}$ ; в)  $\frac{3-z}{12} - \frac{3z-5}{8}$ ;

б)  $\frac{b-4q}{6} - \frac{2q+b}{10}$ ; г)  $\frac{p-5}{20} + \frac{p-1}{12}$ .

2.22. а)  $\frac{3c-5}{c} - \frac{3d-2}{d}$ ; в)  $\frac{7-5r}{r} - \frac{8-5s}{s}$ ;

б)  $\frac{8a-15}{2a} + \frac{13-12b}{3b}$ ; г)  $\frac{9-5z}{5z} + \frac{5+4t}{4t}$ .

2.23. а)  $\frac{n+4}{8n} - \frac{m-2}{8m}$ ; в)  $\frac{p+4}{12p} - \frac{q+8}{12q}$ ;

б)  $\frac{3c+5d}{35cd} + \frac{c-3d}{21cd}$ ; г)  $\frac{2m+3n}{21mn} - \frac{m+6n}{15mn}$ .

2.24. а)  $\frac{x^2+y^2}{x} - x$ ; в)  $3z + \frac{1-9z^2}{3z}$ ;

б)  $2s - \frac{(b+s)^2}{b}$ ; г)  $\frac{(p-q)^2}{2p} + q$ .

2.25. а)  $(2a+1) - \frac{8a^2+3}{4a}$ ; в)  $\frac{9b^2-4}{3b} + (2-3b)$ ;

б)  $\frac{4}{3b} + 3b + 4$ ; г)  $a - 1 + \frac{1}{4a}$ .

2.26. а)  $\frac{2m-n}{mn} + \frac{5n-2k}{nk}$ ; в)  $\frac{3z+2t}{zt} - \frac{t+3s}{st}$ ;

б)  $\frac{m+1}{m} - \frac{3m-1}{m^2}$ ; г)  $\frac{5}{a} - \frac{10a-1}{5a^3}$ .

02.27. Упростите выражение:

а)  $\frac{xy-y}{x} - \frac{xy-x}{y} - \frac{x^2-y^2}{xy}$ ;

б)  $12 + \frac{4p}{q} + \frac{p^2}{3q^2}$ ;

в)  $\frac{3mn+2n^2}{mn} - \frac{m+2n}{m} + \frac{m-2n}{n}$ ;

г)  $\frac{25b^2}{2a^2} - \frac{10b}{a} + 2$ .

**02.28.** Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $\frac{12x + 5y}{4x^2y} - \frac{5y - 4x}{5xy^2}$  при  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{1}{5}$ ;

б)  $\frac{2n + 3m}{6mn^2} - \frac{9m - 2n}{9m^2n}$  при  $m = \frac{2}{3}$ ,  $n = \frac{1}{2}$ .

Найдите область определения алгебраических дробей и выполните указанные действия:

**2.29.** а)  $\frac{1}{z + 2} - \frac{2}{3z}$ ;      в)  $\frac{1}{2t - 1} - \frac{2}{5t}$ ;

б)  $\frac{2a + b}{6a - b} - \frac{b}{2a}$ ;      г)  $\frac{7n + 2k}{9n - 2k} + \frac{n}{2k}$ .

**2.30.** а)  $4a + \frac{1}{a - 1}$ ;      в)  $\frac{9 + 3b^2}{b + 3} - 2b$ ;

б)  $a - 1 - \frac{2 - 3a}{a - 2}$ ;      г)  $\frac{3 - 2b^2}{2b - 1} + b + 3$ .

**2.31.** а)  $x + y - \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ ;      в)  $\frac{a^2 + b^2}{a + b} + a - b$ ;

б)  $x - y - \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ ;      г)  $\frac{a^2 + b^2}{a + b} - a - b$ .

**2.32.** а)  $\frac{b}{a} + \frac{b}{a(a - 1)}$ ;      в)  $\frac{n^2}{m(m + n)} - \frac{m - n}{3m}$ ;

б)  $\frac{c + 1}{c + 3} - \frac{c^2 - 3}{c(c + 3)}$ ;      г)  $\frac{a - 2}{a^2} - \frac{a + 2}{a(a - 2)}$ .

**2.33.** а)  $\frac{2}{a(a + b)} + \frac{2}{b(a + b)}$ ;      в)  $\frac{3}{x(x - y)} - \frac{3}{y(x - y)}$ ;

б)  $\frac{y - x}{x(x - a)} - \frac{y - a}{a(x - a)}$ ;      г)  $\frac{y + c}{c(c + a)} + \frac{y - a}{a(c + a)}$ .

**2.34.** а)  $\frac{y}{x(x + y)} - \frac{x}{y(x + y)}$ ;      в)  $\frac{9t}{p(3t - p)} - \frac{p}{t(3t - p)}$ ;

б)  $\frac{m + 2n}{n(m + n)} + \frac{n}{m(m + n)}$ ;      г)  $\frac{a}{b(a - b)} - \frac{2a - b}{a(a - b)}$ .

**2.35.** а)  $\frac{c}{b(c - 2b)} + \frac{2}{2b - c}$ ;      в)  $\frac{6}{a(a - 2)} + \frac{3}{2 - a}$ ;

б)  $\frac{c}{b(c - b)} + \frac{b}{c(b - c)}$ ;      г)  $\frac{9n}{m(3n - m)} + \frac{m}{n(m - 3n)}$ .

Упростите выражение:

2.36. а)  $\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y}$ ;      в)  $\frac{m}{m-n} - \frac{n}{m+n}$ ;

б)  $\frac{a-3}{a+3} - \frac{a+2}{a-2}$ ;      г)  $\frac{p+2}{p+1} - \frac{p+6}{p+3}$ .

2.37. а)  $\frac{c-d}{2d(c+d)} + \frac{c+d}{2d(c-d)}$ ;      в)  $\frac{x+y}{4x(x-y)} - \frac{x-y}{4x(x+y)}$ ;

б)  $\frac{x+4y}{5y(x+y)} - \frac{x-y}{5y(x-4y)}$ ;      г)  $\frac{d-c}{3c(2c+d)} + \frac{2c-d}{3c(c+d)}$ .

○2.38. а)  $\frac{x^2-3xy}{(x+y)(x-y)} + \frac{y}{x-y}$ ;      в)  $\frac{b-2m}{b+m} - \frac{m^2-5bm}{(b-m)(b+m)}$ ;

б)  $\frac{a-3c}{a-c} + \frac{a^2+3c^2}{(a-c)(a+c)}$ ;      г)  $\frac{3d}{d+4} - \frac{d^2-20d}{(d-4)(d+4)}$ .

○2.39. а)  $\frac{-6x-3}{(2x-3)(2x+3)} - \frac{2}{3-2x}$ ;

б)  $\frac{6a+1}{(2a+1)(2a-1)} - \frac{2a}{-2a-1}$ ;

в)  $\frac{15x-15y}{(5x-3y)(5x+3y)} + \frac{4}{-3y-5x}$ ;

г)  $\frac{4-18x}{(3x-2)(3x+2)} - \frac{3x}{2-3x}$ .

○2.40. а)  $\frac{4b}{(a-b)(a+b)} + \frac{a-b}{a(a+b)}$ ;      в)  $\frac{c+2}{c(c-2)} - \frac{8}{(c-2)(c+2)}$ ;

б)  $\frac{3-x}{(x-1)(x+1)} - \frac{x-2}{x(1-x)}$ ;      г)  $\frac{a+5}{(a-3)(a+3)} + \frac{a+4}{a(-a-3)}$ .

○2.41. а)  $\frac{3c}{(c-2)^2} - \frac{6}{c-2}$ ;      в)  $\frac{3m}{(m+5)^2} + \frac{2}{m+5}$ ;

б)  $\frac{a^2}{(a-b)^2} - \frac{a+b}{2(a-b)}$ ;      г)  $\frac{x+y}{3(x-y)} + \frac{x^2}{(x-y)^2}$ .

○2.42. а)  $\frac{a^2+3ab}{2ab+2b^2} - \frac{a}{2b}$ ;      в)  $\frac{c}{3d} - \frac{4cd+c^2}{3d^2+3cd}$ ;

б)  $\frac{x-1}{3x-12} - \frac{x-2}{2x-8}$ ;      г)  $\frac{c-2}{6c+4} - \frac{c-6}{15c+10}$ .

Упростите выражение:

$$\textcircled{2.43.} \text{ а) } \frac{2-a}{a^2-ab} - \frac{2-b}{ab-b^2}; \quad \text{б) } \frac{d+3}{cd+d^2} - \frac{c-3}{cd+c^2};$$

$$\text{в) } \frac{b+2a}{a^2+ab} - \frac{a+2b}{b^2+ab}; \quad \text{г) } \frac{3p+q}{p^2-pq} - \frac{3q+p}{pq-q^2}.$$

$$\textcircled{2.44.} \text{ а) } \frac{36+c^2}{c^2-36} - \frac{c}{c-6}; \quad \text{б) } \frac{2}{m-4} - \frac{5m-4}{m^2-16};$$

$$\text{в) } \frac{10x}{16-x^2} + \frac{5}{x-4}; \quad \text{г) } \frac{12n}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}.$$

$$\textcircled{2.45.} \text{ а) } \frac{1-x}{x^2-xy} - \frac{y-1}{y^2-xy}; \quad \text{б) } \frac{3+c}{c^2-cd} + \frac{3+d}{d^2-cd};$$

$$\text{в) } \frac{p-q}{2p^2+2pq} + \frac{2q}{p^2-q^2}; \quad \text{г) } \frac{3m+n}{9m^2-3mn} - \frac{4n}{9m^2-n^2}.$$

$$\textcircled{2.46.} \text{ а) } \frac{6x^2-15x+25}{4x^2-25} + \frac{x}{5-2x}; \quad \text{б) } \frac{2z}{4-3z} + \frac{15z^2+32z+16}{9z^2-16};$$

$$\text{в) } \frac{x-12a}{x^2-16a^2} - \frac{4a}{4ax-x^2}; \quad \text{г) } \frac{c-30d}{c^2-100d^2} - \frac{10d}{10cd-c^2}.$$

$$\textcircled{2.47.} \text{ а) } \frac{y}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{y^2-xy}; \quad \text{б) } \frac{a+b}{a^2-ab} - \frac{a}{(b-a)^2};$$

$$\text{в) } \frac{7n^2+mn-8m^2}{m^2-2mn+n^2} - \frac{8m}{n-m}; \quad \text{г) } \frac{5+13p-6p^2}{9p^2+6p+1} + \frac{2p}{3p+1}.$$

$$\textcircled{2.48.} \text{ а) } \frac{2x^2+1}{x^3-1} - \frac{x}{x^2+x+1}; \quad \text{б) } \frac{6c^2+48}{c^3+64} - \frac{3c}{c^2-4c+16};$$

$$\text{в) } \frac{6y}{y^3+8} + \frac{1}{y+2}; \quad \text{г) } \frac{1}{b-3} - \frac{9b}{b^3-27}.$$

$$\textcircled{2.49.} \text{ а) } c^2 - cd + d^2 - \frac{c^3-d^3}{c+d}; \quad \text{б) } \frac{m^3+n^3}{m-n} - m^2 - mn - n^2;$$

$$\text{в) } \frac{a^3-b^3}{a^2-ab+b^2} - a - b; \quad \text{г) } \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} + x - y.$$

$$\textcircled{2.50.} \text{ а) } \frac{m^2-2mn+4n^2}{m-2n} + \frac{m^2+2mn+4n^2}{m+2n};$$

$$\text{б) } \frac{4l^2+6lk+9k^2}{2l+3k} + \frac{4l^2-6lk+9k^2}{2l-3k}.$$

Упростите выражение:

○2.51. а)  $1 - \frac{1}{a^3 + 1} - \frac{a}{a + 1}$ ;

б)  $\frac{c}{c^2 + 3c + 9} - \frac{1}{c - 3} + \frac{27}{c^3 - 27}$ ;

в)  $1 - \frac{2d - 1}{4d^2 - 2d + 1} - \frac{2d}{2d + 1}$ ;

г)  $\frac{1}{b + 2} - \frac{b}{b^2 - 2b + 4} - \frac{12}{b^3 + 8}$ .

○2.52. а)  $\frac{3b^2 + 2b + 4}{b^3 - 1} - \frac{1 - 2b}{b^2 + b + 1} - \frac{3}{b - 1}$ ;

б)  $\frac{a - 2}{a^2 + 2a + 4} - \frac{6a}{a^3 - 8} + \frac{1}{a - 2}$ .

○2.53. а)  $\frac{2mn}{m^3 + n^3} + \frac{2m}{m^2 - n^2} - \frac{1}{m - n}$ ;

б)  $\frac{2xy}{x^3 - y^3} - \frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x + y}$ .

○2.54. а)  $\frac{1}{(b - 5)^2} - \frac{2}{b^2 - 25} + \frac{1}{(b + 5)^2}$ ;

б)  $\frac{1}{(2m - 5n)^2} - \frac{2}{25n^2 - 4m^2} + \frac{1}{(5n + 2m)^2}$ .

Докажите тождество:

○2.55.  $\frac{3a(16 - 3a)}{9a^2 - 4} + \frac{3(1 + 2a)}{2 - 3a} - \frac{2 - 9a}{3a + 2} = \frac{1}{3a + 2}$ .

○2.56.  $\frac{x + 2y}{x^2 + 2xy + y^2} - \frac{x - 2y}{x^2 - y^2} + \frac{2y^2}{(x + y)(x^2 - y^2)} = \frac{2y}{x^2 - y^2}$ .

○2.57.  $\frac{1}{2z^2 + 5z} - \frac{2}{25 - 10z} - \frac{4}{4z^2 - 25} = \frac{1}{5z}$ .

●2.58.  $\frac{1}{1 - a} + \frac{1}{1 + a} + \frac{2}{1 + a^2} + \frac{4}{1 + a^4} + \frac{8}{1 + a^8} + \frac{16}{1 + a^{16}} = \frac{32}{1 - a^{32}}$ .

●2.59. Найдите значения переменных, при которых не определена дробь:

а)  $\frac{2}{\frac{1}{a + 2} - \frac{1}{a - 3}}$ ;      в)  $\frac{a + 3b}{\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b}}$ ;

б)  $\frac{z + 1}{\frac{4}{z + 2} - \frac{3}{z - 1}}$ ;      г)  $\frac{x - 2y}{x - \frac{x^2 + y^2}{x - y}}$ .

**О2.60.** Найдите значение выражения:

а)  $\frac{8}{(x^2 + 3)(x^2 - 1)} + \frac{2}{x^2 + 3} + \frac{1}{x + 1}$  при  $x = 0,992$ ;

б)  $\frac{(x + 1)^3}{x} - \frac{(x + 1)^2}{x + 2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2}$  при  $x = -2,1$ .

**●2.61.** Пусть  $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - x + 1} + \frac{3 - 2x}{x^2 + x + 1}$ .

Найдите  $f(x) - f(-x)$ .

**●2.62.** Пусть  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{3x^2 - 7x + 5} - \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 7x + 5}$ .

Найдите  $f(x) + f(-x)$ .

**●2.63.** Пусть  $x = \frac{a - b}{a + b}$ ;  $y = \frac{b - c}{b + c}$ ;  $z = \frac{c - a}{c + a}$ . Докажите, что справедливо равенство  $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z)$ .

Упростите выражение:

**●2.64.**  $\frac{a^3}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3}{(b - a)(b - c)} + \frac{c^3}{(c - a)(c - b)}$ .

**●2.65.** а)  $\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ ;

б)  $\frac{b - c}{b + c} + \frac{c - a}{c + a} + \frac{a - b}{a + b} + \frac{(b - c)(c - a)(a - b)}{(b + c)(c + a)(a + b)}$ .

**●2.66.** а) Докажите, что при всех натуральных значениях  $n$  верно равенство  $\frac{1}{n(n + 1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}$ .

б) Используя равенство из пункта а), найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

**●2.67.** а) Докажите, что при всех натуральных значениях  $n$  верно равенство  $\frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n + 1} \right)$ .

б) Используя равенство из пункта а), найдите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101}.$$



### § 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Упростите выражение:

3.1. а)  $\frac{6a}{b} : \frac{3a}{b}$ ;      в)  $\left(-\frac{9}{2x}\right) \cdot \left(-\frac{5x}{3}\right)$ ;

б)  $-\frac{4p}{q} \cdot \frac{q}{2p}$ ;      г)  $\frac{5c}{2d} : \left(-\frac{15c}{d}\right)$ .

3.2. а)  $\frac{12x^5}{55} : \frac{6x^2}{5}$ ;      в)  $\frac{16}{5d^3} : \frac{12}{d^4}$ ;

б)  $\frac{4}{3y^3} \cdot \frac{y^8}{18}$ ;      г)  $\frac{36c^{12}}{49} \cdot \frac{7}{6c^{15}}$ .

3.3. а)  $\frac{a^3b}{c} \cdot \frac{c^2}{a^4b^2}$ ;      в)  $\frac{m^3}{cd} : \frac{m^2n}{cd}$ ;

б)  $\frac{3m^2n}{c} : \frac{m^2n}{3c}$ ;      г)  $\frac{5c^2x}{a} \cdot \frac{15a}{c^3x}$ .

3.4. а)  $6mx \cdot \frac{ab}{2mx^2}$ ;      в)  $\frac{m}{17a^2d^2} \cdot 34a^2d^8$ ;

б)  $9xy : \frac{3x^2y}{ab}$ ;      г)  $\frac{4x^3y^4}{a} : 36x^3y^4$ .

3.5. а)  $\frac{x-y}{4a} \cdot \frac{4}{x-y}$ ;      в)  $\frac{2m-3n}{7} \cdot \frac{7s}{2m-3n}$ ;

б)  $\frac{a+b}{8} : \frac{a+b}{8x}$ ;      г)  $\frac{15p+12q}{13p} : \frac{15p+12q}{13}$ .

3.6. а)  $\frac{16u-13v}{21} : \frac{13v-16u}{p}$ ;      в)  $\frac{98p-17q}{4} : \frac{17q-98p}{16m}$ ;

б)  $\frac{45m-n}{23c} \cdot \frac{c}{n-45m}$ ;      г)  $\frac{64r-15s}{9c^2} \cdot \frac{18c}{15s-64r}$ .

3.7. а)  $\frac{c+d}{c-d} \cdot \frac{c-d}{c(c+d)}$ ;      в)  $\frac{m(m-n)}{p(p+q)} \cdot \frac{p^2(p+q)}{m-n}$ ;

б)  $\frac{a-b}{c+d} : \frac{3(a-b)}{a(c+d)}$ ;      г)  $\frac{a+b}{2b(a-b)} : \frac{a+b}{2b^2(a-b)}$ .

Упростите выражение:

$$\textcircled{03.8.} \text{ а) } \frac{x+y}{x-y} \cdot (x-y); \quad \text{в) } (a+b) \cdot \frac{2a+b}{a+b};$$

$$\text{б) } \frac{2x+y}{x-y} : (2x+y)^2; \quad \text{г) } (a-b)^2 : \frac{a-b}{a-2b}.$$

$$\textcircled{03.9.} \text{ а) } \frac{a}{x^2-3x} : \frac{a^3}{3x-9}; \quad \text{в) } \frac{m^3-m^2}{y^4} \cdot \frac{y^2}{m^2-m};$$

$$\text{б) } \frac{mx+my}{ab^2} \cdot \frac{a^2b}{4x+4y}; \quad \text{г) } \frac{6a}{n^2-n} : \frac{3an}{2n-2}.$$

$$\textcircled{03.10.} \text{ а) } \frac{4p-p^2}{y-x} : \frac{8p-2p^2}{x-y}; \quad \text{в) } \frac{c^3-c^2}{d^3+d} \cdot \frac{1+d^2}{c-c^2};$$

$$\text{б) } \frac{a-b}{3q-q^2} \cdot \frac{6q-2q^2}{b-a}; \quad \text{г) } \frac{x+x^3}{n-n^2} : \frac{x^2+1}{n^3-n^2}.$$

$$\textcircled{03.11.} \text{ а) } \frac{x^2-y^2}{3xy} \cdot \frac{3y}{x-y}; \quad \text{в) } \frac{c^2-49}{10cd} : \frac{2c+14}{5d};$$

$$\text{б) } \frac{5a^2}{a^2-16} : \frac{5a}{a+4}; \quad \text{г) } \frac{b-d}{d} \cdot \frac{3bd}{b^2-d^2}.$$

$$\textcircled{03.12.} \text{ а) } \frac{1}{x+y} \cdot (x^3+y^3);$$

$$\text{б) } (a^3+b^3) : (a^2-ab+b^2);$$

$$\text{в) } \frac{1}{n^3-m^3} \cdot (n^2+nm+m^2);$$

$$\text{г) } (p^3-q^3) : (p-q).$$

$$\textcircled{03.13.} \text{ а) } \frac{1}{a^3-b^3} \cdot (a^2-b^2); \quad \text{в) } \frac{12n}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{6n};$$

$$\text{б) } (8a^3+1) : \frac{4a^2-2a+1}{n}; \quad \text{г) } \frac{m^3-64}{3} : (m^2+4m+16).$$

$$\textcircled{03.14.} \text{ а) } \frac{x^2-10x+25}{3x+12} : \frac{2x-10}{x^2-16};$$

$$\text{б) } \frac{1-a}{4a+8b} \cdot \frac{a^2+4ab+4b^2}{3-3a};$$

$$\text{в) } \frac{c^2-25}{c^2+12c+36} \cdot \frac{3c+18}{2c+10};$$

$$\text{г) } \frac{5m-10n}{m-5} : \frac{4n^2-4mn+m^2}{15-3m}.$$

Выполните возведение алгебраической дроби в степень:

**3.15.** а)  $\left(\frac{a}{2x}\right)^5$ ; б)  $\left(\frac{5y}{3}\right)^3$ ; в)  $\left(\frac{8z}{9}\right)^2$ ; г)  $\left(\frac{t}{4b}\right)^4$ .

**3.16.** а)  $\left(-\frac{2x}{3y}\right)^5$ ; б)  $\left(-\frac{8z}{15t}\right)^2$ ; в)  $\left(-\frac{4t}{5s}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{3m}{4n}\right)^4$ .

**3.17.** а)  $\left(\frac{2x^2y^3}{3z^6}\right)^4$ ; б)  $\left(\frac{5a^4c^3}{2k^3}\right)^3$ ;  
 б)  $\left(-\frac{3n^6k^3}{10p^4}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{5x^6y^3}{z^8}\right)^4$ .

Упростите выражение:

**○3.18.** а)  $\frac{a^2}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{a^3}\right)^2$ ; б)  $\left(\frac{a^3b}{c^4}\right)^5 \cdot \left(\frac{c^7}{a^6b^2}\right)^3$ ;

б)  $\left(\frac{p}{x^3}\right)^3 : \left(\frac{p^2}{x^3}\right)^2$ ; г)  $\left(\frac{x^6y^8}{z^5}\right)^5 : \frac{x^{10}y^{13}}{z^8}$ .

**○3.19.** а)  $\left(-\frac{18a^3}{11b^3}\right) \cdot \left(-\frac{22b^4}{9a^2}\right)$ ; б)  $-\frac{35ax^2}{12b^2y} \cdot \frac{8ab}{21xy}$ ;

б)  $\frac{17x^2y}{5a} : \left(-\frac{34xy^2}{25a^2}\right)$ ; г)  $\left(-\frac{27c^3}{4b^2}\right) : \left(-\frac{45c^5}{32b}\right)$ .

**○3.20.** а)  $\left(-\frac{2pq^5}{3ma^2}\right)^2 \cdot \frac{9m^2a^2}{4p^3q^7}$ ; б)  $\left(-\frac{2x^3y^4}{5a^2b}\right)^3 \cdot \left(-\frac{25a^4b^3}{24x^8y^{13}}\right)$ ;

б)  $-\frac{50a^4b^5}{63m^9n^8} : \left(\frac{5a^2b^3}{3m^2n^5}\right)^3$ ; г)  $\left(-\frac{10p^2q^2}{3a^3}\right)^2 : \left(-\frac{25p^3q^3}{27a^6}\right)$ .

**○3.21.** а)  $\frac{10y^5}{9a} : \frac{5y^3}{3b} \cdot \frac{3a^2}{by}$ ; б)  $\frac{28a^2}{27x^3} : \frac{21x^4}{45y} \cdot \frac{x^8}{20ya}$ ;

б)  $\frac{25a^3b^3}{14x^2y^4} \cdot \frac{21xy^3}{10a^2b^2} \cdot \frac{8xy^2}{15ab}$ ; г)  $\frac{45m^4}{49n^2t} \cdot \frac{56n^3}{27m^2} : \frac{20m^2n}{63t^2}$ .

**○3.22.** а)  $\left(\frac{x^2}{2a^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4a^4}{x^3}\right)^2$ ; б)  $\left(-\frac{2a^2}{b^3}\right)^8 \cdot \left(\frac{b^2}{-2a^3}\right)^2$ ;

б)  $\left(-\frac{2a^8b^3}{c^7}\right)^5 : \left(-\frac{4a^{10}b^4}{c^9}\right)^4$ ; г)  $\left(-\frac{9x^7y^6}{a^{12}}\right)^4 \cdot \left(-\frac{a^8}{27x^5y^4}\right)^3$ .

**○3.23.** Укажите допустимые значения переменных, при которых справедливо тождество:

а)  $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$ ; б)  $\left(\frac{a^2 - 9}{a}\right)^0 = 1$ ;

б)  $\left(\frac{2a - b}{a + 2}\right)^0 = 1$ ; г)  $\left(\frac{16 - a^2}{a^2 - 9}\right)^0 = 1$ .

Упростите выражение:

$$\textcircled{3.24.} \text{ а) } \frac{a^2 - 1}{a - b} \cdot \frac{9a - 9b}{a^2 + a}; \quad \text{в) } \frac{(x + 4)^2}{3x - 9} \cdot \frac{x^2 - 9}{3x + 12};$$

$$\text{б) } \frac{(y - 5)^2}{3y + 18} \cdot \frac{2y - 10}{y^2 - 36}; \quad \text{г) } \frac{b^2 + 4bc}{b + 6} \cdot \frac{b^2 - 16c^2}{2b + 12}.$$

$$\textcircled{3.25.} \text{ а) } \frac{x^2 y}{25y^2 - 4} \cdot \frac{15y + 6}{3xy^2}; \quad \text{в) } \frac{m^2 n}{64n^2 - 9} \cdot \frac{5mn}{8n + 3};$$

$$\text{б) } \frac{7 - 2x}{22a^2 b^2} \cdot \frac{4x^2 - 49}{11ab^3}; \quad \text{г) } \frac{24c^2 d}{9p^2 - 25} \cdot \frac{5 - 3p}{12cd^3}.$$

$$\textcircled{3.26.} \text{ а) } \frac{5p^2 - 5q^2}{5p - 10q} \cdot \frac{p^2 - 2pq}{(q - p)^2}; \quad \text{в) } \frac{3x^2 - 3y^2}{xy + 3y^2} \cdot \frac{(y - x)^2}{9y + 3x};$$

$$\text{б) } \frac{x^2 - 6x + 9}{9x^3} \cdot \frac{x^2 - 9}{9x}; \quad \text{г) } \frac{25 - y^2}{25y} \cdot \frac{10y^2}{y^2 - 10y + 25}.$$

$$\textcircled{3.27.} \text{ а) } \frac{a^3 + b^3}{a^2 b - ab^2} \cdot \frac{a - b}{a + b}; \quad \text{в) } \frac{2x^2 + 4x}{x^3 - 8} \cdot \frac{x + 2}{x - 2};$$

$$\text{б) } \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} \cdot (x^3 - 27); \quad \text{г) } (x^3 + y^3) \cdot \frac{x + y}{x^2 - xy + y^2}.$$

$$\textcircled{3.28.} \text{ а) } \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}; \quad \text{в) } \frac{z^2 + 6z + 9}{z^3 + 27} \cdot \frac{3z + 9}{z^2 - 3z + 9};$$

$$\text{б) } \frac{t^3 + 8}{12t^2 + 27t} \cdot \frac{4t + 9}{t^2 - 2t + 4}; \quad \text{г) } \frac{y^3 - 8}{y^2 - 9} \cdot \frac{y + 3}{y^2 + 2y + 4}.$$

$$\textcircled{3.29.} \text{ а) } \frac{a^2 - 6a + 9}{1 - b^3} \cdot \frac{2a - 6}{b^2 - 1}; \quad \text{в) } \frac{b^2 - 6b + 9}{4b^2 - 6b + 9} \cdot \frac{27 + 8b^3}{6 - 2b};$$

$$\text{б) } \frac{c^3 - 8d^3}{2c + 4d} \cdot \frac{4d^2 - c^2}{(2d - c)^2}; \quad \text{г) } \frac{(m - 1)^2}{4 + 4m^3} \cdot \frac{1 - m^2}{(2m + 2)^2}.$$

$$\textcircled{3.30.} \text{ а) } \frac{1 - 16a^2}{4a^2 + 10a + 25} \cdot \frac{4a - 1}{8a^3 - 125};$$

$$\text{б) } \frac{64a^3 - 27b^3}{(4a - 3b)^2} \cdot \frac{9b^2 - 16a^2}{16a^2 + 12ab + 9b^2};$$

$$\text{в) } \frac{4 - 9c^2}{9c^2 - 12c + 16} \cdot \frac{2 - 3c}{27c^3 + 64};$$

$$\text{г) } \frac{125p^3 + 8q^3}{(5p + 2q)^2} \cdot \frac{25p^2 - 10pq + 4q^2}{4q^2 - 25p^2}.$$

Упростите выражение:

03.31. а)  $\frac{x-3}{2x+4} \cdot \frac{x^2-4}{x^3-27} \cdot \frac{x^2+3x+9}{x^2-2x}$ ;  
 б)  $\frac{a^2-16}{2a-a^2} \cdot \frac{ab-2b}{a^2+8a+16} : \frac{a-4}{4b}$ ;  
 в)  $\frac{b^2-10b+25}{5b-10} : \frac{b^2-25}{2b-b^2} \cdot \frac{b+5}{5b}$ ;  
 г)  $\frac{a^3+8}{3a-6} : \frac{a^2+4a+4}{a^2-2a} : \frac{a^2-2a+4}{a^2-4}$ .

03.32. а)  $\left(\frac{b^4(b-c)^2}{a^6(c-a)}\right)^3 : \left(\frac{b^2(b-c)}{a^3(a-c)}\right)^6$ ;  
 б)  $\left(-\frac{a^2+ab}{ab^2-b^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{b-a}{a^2+2ab+b^2}\right)^3$ ;  
 в)  $\left(\frac{a^2(a-b)}{x^4(a-x)^3}\right)^6 \cdot \left(\frac{x^6(x-a)^5}{a^3(b-a)^2}\right)^4$ ;  
 г)  $\left(\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2+xy}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x+y}{2xy-x^2}\right)^3$ .

03.33. Докажите тождество:

а)  $\frac{a^4-64ab^3}{a^2-2ab+b^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{a^2b-16b^3} : \frac{a^3+4a^2b+16ab^2}{ab+4b^2} = \frac{a+b}{a-b}$ ;  
 б)  $\frac{x^3z+125z}{x^2-16z^2} : \frac{x^3-25x}{x^2-8xz+16z^2} \cdot \frac{x+4z}{x^2-5x+25} : \frac{x-4z}{x-5} = \frac{z}{x}$ .

03.34. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{4x^2}{2x-y} : \frac{12x^3}{4x^2-y^2} \cdot \frac{2x^2}{6x^2+3xy}$  при  $x=2,7845$ ,  $y=-13,8471$ ;  
 б)  $\frac{a^2+a}{2a-8} \cdot \frac{a^2+a}{2a+8} : \frac{3a^4+6a^3+3a^2}{a^2-16}$  при  $a=1\,234\,567\,890$ .

03.35. Докажите, что при всех допустимых значениях переменных выражение принимает одно и то же значение:

а)  $\left(\frac{2x^2y^3}{x+y}\right)^3 : \left(\frac{x^6y^9}{x^2-y^2} \cdot \frac{8x-8y}{x^2+2xy+y^2}\right)$ ;  
 б)  $\left(\frac{a-3}{3a^2b}\right)^2 : \left(\frac{9-a^2}{18a^3b} : \frac{a^2b+3ab}{2a-6}\right)$ .

- 3.36. Общее сопротивление трёх параллельно соединённых проводников можно найти по формуле  $\frac{1}{R_{\text{общ}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ . Выразите  $R_{\text{общ}}$  как дробь от  $R_1, R_2, R_3$ .

Постройте график функции:

- 3.37. а)  $y = (x - 1) \cdot \frac{2x - 1}{x - 1}$ ;      в)  $y = \frac{x^2 - 4x}{(x - 4)^2} \cdot \frac{x^2 - 16}{2x}$ ;  
 б)  $y = \frac{2x + 3}{x} : \frac{4x + 6}{5x^2}$ ;      г)  $y = \frac{x^3 + 1}{(x + 2)^2} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - x + 1}$ .
- 3.38. а)  $y = \frac{x^2 + x - 6}{x} : \frac{x - 2}{2x}$ ;  
 б)  $y = \frac{2x^2 - 10x + 8}{x + 3} : \frac{x - 1}{3x + 9}$ .

## § 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Упростите выражение:

- 4.1. а)  $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{5xy}{x - y}$ ;      в)  $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a + b}{3ab}$ ;  
 б)  $\left(\frac{z^2}{t^2} + \frac{2z}{t} + 1\right) : \frac{t + z}{t}$ ;      г)  $\left(1 - \frac{2c}{d} + \frac{c^2}{d^2}\right) \cdot \frac{d}{c - d}$ .
- 4.2. а)  $\left(\frac{m^2}{n} - n\right) : \left(\frac{m}{n} + 1\right)$ ;      в)  $\left(4p - \frac{q^2}{p}\right) : \left(1 - \frac{2p}{q}\right)$ ;  
 б)  $\left(3 + \frac{u}{v}\right) \cdot \frac{uv}{2u + 6v}$ ;      г)  $\left(\frac{r}{s} - 2\right) : \frac{4s - 2r}{rs^2}$ .
- 4.3. а)  $\left(2 + \frac{t}{t + 1}\right) \cdot \frac{3t^2 + 3t}{12t + 8}$ ;      в)  $\frac{z - 3}{z + 3} \cdot \left(z + \frac{z^2}{3 - z}\right)$ ;  
 б)  $\left(p - \frac{5p}{p + 2}\right) : \frac{p - 3}{p + 2}$ ;      г)  $\left(\frac{q}{q - 5} - 2q\right) : \frac{11 - 2q}{q - 5}$ .
- 4.4. а)  $\left(\frac{6}{x - y} - \frac{5}{x + y}\right) \cdot \frac{x - y}{x + 11y}$ ;      в)  $\left(\frac{x - 2y}{xy} + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^2 y^2}{x - y}$ ;  
 б)  $\left(a - \frac{a^2}{a + 1}\right) \cdot \frac{a^2 - 1}{a^2 + 2a}$ ;      г)  $\frac{cd - d^2}{c^2 + d^2} \cdot \left(\frac{c}{c + d} + \frac{d}{c - d}\right)$ .

Упростите выражение:

$$\textcircled{04.5.} \text{ а) } \left( \frac{1+c^3}{1+c} - c \right) \cdot \frac{1+c}{1-c^2}; \quad \text{в) } \left( \frac{x^3-8}{x-2} + 2x \right) : \frac{x^2+4x+4}{2-x};$$

$$\text{б) } \frac{b+3}{b^3+9b} \cdot \left( \frac{b+3}{b-3} + \frac{b-3}{b+3} \right); \quad \text{г) } \frac{x^2-9}{2x^2+1} \cdot \left( \frac{6x+1}{x-3} + \frac{6x-1}{x+3} \right).$$

$$\textcircled{04.6.} \text{ а) } \left( \frac{m}{n^2-mn} + \frac{n}{m^2-mn} \right) \cdot \frac{mn}{n+m};$$

$$\text{б) } \frac{r^2-25}{r+3} \cdot \frac{1}{r^2+5r} - \frac{r+5}{r^2-3r};$$

$$\text{в) } \left( \frac{st}{s^2-t^2} + \frac{t}{2t-2s} \right) \cdot \frac{s+t}{2t};$$

$$\text{г) } \frac{3a+b}{a^2b-ab^2} + \frac{b-a}{ab} : \frac{a^2-b^2}{3a-b}.$$

**04.7.** Найдите значение выражения:

$$\text{а) } \left( \frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1} \right) : \frac{4m}{10m-5} \text{ при } m = \frac{3}{14};$$

$$\text{б) } \left( \frac{a}{b-a} - \frac{a}{b+a} \right) \cdot \frac{b^2+2ab+a^2}{2a^2} \text{ при } a = 23 \text{ и } b = 33.$$

Докажите тождество:

$$\textcircled{04.8.} \text{ а) } \frac{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}}{\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}} = -\frac{x}{y}; \quad \text{в) } \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y}} = \frac{y}{x};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{2}{x} - \frac{x-2}{x^2-x}}{\frac{3}{x} + \frac{x+3}{x^2-x}} = \frac{1}{4}; \quad \text{г) } \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{4-x}{x^2-x}}{\frac{2}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-x}} = 2.$$

$$\textcircled{04.9.} \text{ а) } \left( \frac{a+5}{5a-1} + \frac{a+5}{a+1} \right) : \frac{a^2+5a}{1-5a} + \frac{a^2+5}{a+1} = a-1;$$

$$\text{б) } \left( \frac{b-3}{7b-4} - \frac{b-3}{b-4} \right) \cdot \frac{7b-4}{9b-3b^2} + \frac{b^2-14}{4-b} = -b-4.$$

**04.10.** Найдите область определения выражения  $A(x)$  и упростите выражение:

$$\text{а) } A(x) = \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x^2-x}{x+1}}; \quad \text{б) } A(x) = \frac{1 + \frac{1+x}{1-3x}}{1-3 \cdot \frac{1+x}{1-3x}}.$$

- 4.11. Из пункта  $A$  в пункт  $B$  со скоростью  $v_1$  выехал автомобиль. Приехав в пункт  $B$ , автомобиль мгновенно развернулся и со скоростью  $v_2$  поехал обратно в пункт  $A$ . Выразите его среднюю скорость  $v$  на всём продолжении пути туда и обратно. Как изменится результат, если, доехав до пункта  $B$ , автомобиль пробудет там  $a$  часов, а затем поедет обратно в пункт  $A$ , если  $a$  составляет  $k$ -ю часть суммарного времени движения из  $A$  в  $B$  и обратно из  $B$  в  $A$ ?

○4.12. Докажите тождество:

$$\text{а) } x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2; \quad \text{б) } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Упростите выражение:

$$\text{○4.13. а) } \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right);$$

$$\text{б) } \frac{z-2}{4z^2+16z+16} : \left(\frac{z}{2z-4} - \frac{z^2+4}{2z^2-8} - \frac{2}{z^2+2z}\right).$$

$$\text{○4.14. а) } \left(\frac{10m^2}{3+2m} - 5m\right) : \frac{30m^2-15m}{8m^3+27} + \frac{8-2m}{2m-1};$$

$$\text{б) } \left(3n - \frac{9n^2}{3n+1}\right) \cdot \frac{27n^3+1}{6n-9n^2} + \frac{9n-3}{3n-2}.$$

$$\text{○4.15. а) } \left(\frac{d^3-8}{d^2-4} - \frac{6d}{d+2}\right) : \left(1 - \frac{4}{d+2}\right)^2;$$

$$\text{б) } \left(c - \frac{c^3+8}{2c+c^2}\right) \cdot \frac{c}{(c-2)^2} + \frac{2}{2-c}.$$

○4.16. Укажите область определения выражения и докажите, что его значение не зависит от значений переменной:

$$\text{а) } \frac{2a}{a+1} + \left(\frac{3}{(a-1)^2} - \frac{3}{a^2-1}\right) : \frac{3}{a^2-2a+1};$$

$$\text{б) } \frac{b^2+8b+16}{b} \cdot \left(\frac{b}{(b+4)^2} + \frac{b}{16-b^2}\right) + \frac{8}{b-4};$$

$$\text{в) } \frac{y}{y+2} + \left(\frac{1}{4-y^2} - \frac{1}{4-4y+y^2}\right) : \frac{2}{(y-2)^2};$$

$$\text{г) } \frac{x^2-10x+25}{2x} \cdot \left(\frac{x}{x^2-25} - \frac{x}{(x-5)^2}\right) + \frac{5}{5+x}.$$



○4.17. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $6a + \left( \frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2} \right) : \frac{4a}{a^4 - 2a^3 + 8a - 16}$  при  $a = -2,5$ ;

б)  $\left( \frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1} \right) \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{a}{4} - \frac{1}{4a} \right)$  при  $a = -3\frac{3}{4}$ ;

в)  $\left( \frac{n+2}{n-2} \right)^3 : \frac{n^3 + 4n^2 + 4n}{3n^2 - 12n + 12} \cdot \frac{n}{3}$  при  $n = -0,5$ ;

г)  $\left( \frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 + 2ab + b^2} \right) : \left( \frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)$  при  $a = -2,5$ ,  
 $b = -0,5$ .

Упростите выражение:

○4.18. а)  $\left( 1 - \frac{2}{1-3a} \right) \cdot \left( 1 - \frac{9a-9a^2}{3a+1} \right) : (2 \cdot (1-9a^2))$ ;

б)  $\frac{2}{a} - \left( \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a} \right) : \frac{a^3+a^2+2a}{a^2-1}$ .

○4.19. а)  $2n - \left( \frac{2n-3}{n+1} - \frac{n+1}{2-2n} - \frac{n^2+3}{2n^2-2} \right) \cdot \frac{n^3+1}{n^2-n}$ ;

б)  $\left( \left( \frac{3}{x-y} + \frac{3x}{x^3-y^3} \cdot \frac{x^2+xy+y^2}{x+y} \right) : \frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2} \right) \cdot \frac{3}{x+y}$ .

Докажите тождество:

○4.20.  $\left( \frac{8y^2+2y}{8y^3-1} - \frac{2y+1}{4y^2+2y+1} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2y+1}{2y} - \frac{4y^2+10y}{4y^2+2y} \right) : \frac{1}{2y} = \frac{2y-1}{2y+1}$ .

○4.21.  $\left( \frac{y^2+9}{27-3y^2} + \frac{y}{3y+9} - \frac{3}{y^2-3y} \right) : \frac{(3y+9)^2}{3y^2-y^3} = \frac{y}{9y+27}$ .

○4.22.  $\left( \frac{z}{z-2} - \frac{z^2}{z^3+8} \cdot \frac{z^2+2z}{z-2} \right) : \frac{8}{z^2-2z+4} + \frac{z^2+z-2}{2z+4} = \frac{z-2}{4}$ .

○4.23.  $\frac{18xy}{2y+3x} + \frac{1}{2y-3x} : \left( \frac{4}{4y^2-9x^2} - \frac{6y-9x}{8y^3+27x^3} \right) = 3x+2y$ .

○4.24. Найдите значение выражения:

$$\frac{2-a}{5} + \left( \frac{1}{1-2a} \right)^2 : \left( \frac{a+2}{4a^3-4a^2+a} - \frac{2-a}{1-8a^3} \cdot \frac{4a^2+2a+1}{2a^2+a} \right)$$

при  $a = -3,2746$ .

Найдите значение выражения:

○4.25.  $\left( \frac{b^2 - 2b + 4}{4b^2 - 1} \cdot \frac{2b^2 + b}{b^3 + 8} - \frac{b + 2}{2b^2 - b} \right) : \frac{4}{b^2 + 2b} - \frac{b + 4}{3 - 6b}$

при  $b = \frac{7}{275}$ .

○4.26.  $\left( \frac{1}{2x + 1} - \frac{3}{8x^3 + 1} + \frac{3}{4x^2 - 2x + 1} \right) \cdot \left( 2x - \frac{4x - 1}{2x + 1} \right)$

при  $x = -2,123$ .

●4.27. Выполните подстановку и упростите выражение

$$\frac{ax}{a + x} + \frac{bx}{x - b}, \text{ где } x = \frac{ab}{a - b}.$$

●4.28. Докажите, что при любых значениях  $x > 2$  значение выражения

$$\left( \frac{x + 1}{2x} + \frac{4}{x + 3} - 2 \right) : \frac{x + 1}{x + 3} - \frac{x^2 - 5x + 3}{2x}$$

является отрицательным числом.

●4.29. Докажите, что выражение

$$\frac{12a - 4a^2}{2a + 3} + \frac{1}{2a - 3} : \left( \frac{4}{4a^2 - 9} - \frac{6a - 9}{8a^3 + 27} \right)$$

при любых допустимых значениях переменной  $a$  принимает одно и то же значение.

●4.30. Найдите:

а)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , если  $f(x) = \frac{x - 1}{3 - x}$ ;

б)  $f(f(x))$ , если  $f(x) = \frac{a - x}{x}$ ;

в)  $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ , если  $f(x) = \frac{2x - 1}{3 - 5x}$ ;

г)  $f\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)$ , если  $f(x) = \frac{a + kx}{b + mx}$ .

●4.31. Найдите  $f(f(f(f(x))))$ , если:

а)  $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ ;      б)  $f(x) = \frac{4}{2 - x}$ .

## § 5. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

При каком значении переменной равна нулю алгебраическая дробь:

5.1. а)  $\frac{7x-21}{3}$ ; б)  $\frac{x+1}{x^2+1}$ ; в)  $\frac{3x+1}{x+3}$ ; г)  $\frac{(x+3)(x-1)}{3x}$ ?

5.2. а)  $\frac{x^2+3x}{x^2}$ ; б)  $\frac{x-4}{x^2-4x}$ ; в)  $\frac{4x^2-1}{6x+3}$ ; г)  $\frac{x^2}{x^2+2x}$ ?

Решите уравнение:

5.3. а)  $\frac{p^2+4p}{2-p} = 0$ ; в)  $\frac{q^2-16q}{q+4} = 0$ ;

б)  $\frac{4x^2-9}{4x^2} = 0$ ; г)  $\frac{9x^2-1}{3x} = 0$ .

5.4. а)  $\frac{x^2-4x}{4x} = 0$ ; в)  $\frac{x^2+3x}{5x+15} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-36}{x^2+6x} = 0$ ; г)  $\frac{x^2-64}{8x-x^2} = 0$ .

5.5. а)  $\frac{t^4-81}{t^2+9} = 0$ ; в)  $\frac{y^4-16}{y^2+4} = 0$ ;

б)  $\frac{a^3-4a}{a+2} = 0$ ; г)  $\frac{9d-d^3}{d-3} = 0$ .

5.6. а)  $\frac{10-3y}{4y} = -2$ ; в)  $\frac{2t+9}{5t} = 4$ ;

б)  $\frac{6-v}{2v-1} = \frac{4}{3}$ ; г)  $\frac{s+2}{3s-5} = \frac{5}{4}$ .

○ 5.7. а)  $\frac{3n+75}{5} = \frac{6n+42}{5}$ ; в)  $\frac{x^2+2x}{x^2+1} = \frac{2x+1}{x^2+1}$ ;

б)  $\frac{x^2}{x+3} = \frac{x}{x+3}$ ; г)  $\frac{5y^2-1}{y} = \frac{y^2+3}{y}$ .

○ 5.8. а)  $\frac{x^2-2}{x+2} = \frac{2}{x+2}$ ; в)  $\frac{x^2}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$ ;

б)  $\frac{x^2-1}{x-3} = \frac{3x-1}{x-3}$ ; г)  $\frac{16+3x^2}{x-4} = \frac{4x^2}{x-4}$ .

Решите уравнение:

○5.9. а)  $\frac{x^2 - 8x}{x - 6} = \frac{4x - 36}{x - 6}$ ;      в)  $\frac{x^2 + 16x}{x + 5} = \frac{6x - 25}{x + 5}$ ;

б)  $\frac{4x - 1}{x - 2} = \frac{x + 5}{x - 2}$ ;      г)  $\frac{7x + 4}{x + 3} = \frac{3x - 8}{x + 3}$ .

○5.10. а)  $\frac{4}{x} - \frac{x + 8}{2x} = \frac{5}{6}$ ;      в)  $\frac{x - 20}{4x} + \frac{5}{x} = \frac{2}{3}$ ;

б)  $\frac{1}{2x} + \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{2}$ ;      г)  $\frac{x}{x - 2} - \frac{2}{3x} = \frac{1}{3}$ .

○5.11. а)  $\frac{3}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = 1$ ;      в)  $\frac{1}{x - 3} + \frac{x}{x + 3} = 1$ ;

б)  $\frac{2x}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} = 2$ ;      г)  $\frac{3x}{x - 2} - \frac{5}{x + 2} = 3$ .

Решите задачу, выделяя три этапа математического моделирования:

○5.12. Расстояние между городами  $A$  и  $B$  50 км. Из города  $A$  в город  $B$  выехал велосипедист, а через 2 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист. Двигаясь со скоростью в 2,5 раза большей, чем у велосипедиста, мотоциклист прибыл в  $B$  одновременно с велосипедистом. Найдите скорость велосипедиста и скорость мотоциклиста.

○5.13. Из пункта  $A$  выехал автобус, а через 15 мин в том же направлении выехал другой автобус со скоростью в 1,2 раза большей и догнал первый на расстоянии 45 км от  $A$ . Найдите скорость первого автобуса.

○5.14. Катер прошёл 12 км по течению реки и 4 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость катера, если скорость течения равна 4 км/ч?

○5.15. Лодка проплыла 18 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения равна 3 км/ч?

○5.16. Расстояние между городами  $A$  и  $B$  равно 400 км. Из  $A$  в  $B$  выехала грузовая машина, а через 2 ч вслед за ней выехала легковая машина, скорость которой в 1,5 раза больше скорости грузовой. Найдите скорость грузовой машины, если известно, что она прибыла в  $B$  на 1 ч 20 мин позже легковой.

○5.17. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 100 км. Из  $A$  в  $B$  выехал автобус, а через 8 мин вслед за ним выехал мотоциклист, скорость которого в 1,2 раза больше скорости автобуса. В пункт  $B$  автобус пришёл на 12 мин позже мотоциклиста. Чему равна скорость мотоциклиста?

Решите уравнение:

○5.18. а)  $\frac{2x^2 - 1}{x} = x$ ;                      в)  $\frac{3x^2 + 2}{x + 1} = 3x$ ;

б)  $\frac{5x^2 - 36}{6x} = x - 2$ ;                      г)  $\frac{2x^2 - 13}{x - 2} = x + 2$ .

○5.19. а)  $\frac{x^2 + 4x}{x + 2} = \frac{2x}{3}$ ;                      в)  $\frac{x^2 - 5x}{x - 1} = \frac{7x}{9}$ ;

б)  $\frac{c - 2}{c + 3} = \frac{c + 3}{c - 2}$ ;                      г)  $\frac{x - 2}{x + 2} = \frac{x + 3}{x - 4}$ .

○5.20. а)  $\frac{3x}{x - 1} + \frac{x + 3}{x + 1} = 3$ ;                      в)  $\frac{2x}{x + 3} + \frac{x - 6}{x - 3} = 2$ ;

б)  $\frac{a - 1}{4a - 5} = \left(\frac{2a - 1}{4a - 5}\right)^2$ ;                      г)  $\left(\frac{b - 1}{b + 3}\right)^2 = \frac{b + 1}{b + 3}$ .

○5.21. а)  $\frac{3}{x - 4} - \frac{25}{x^2 - 16} = \frac{x + 1}{x + 4}$ ;

б)  $\frac{19}{(x - 5)(x + 1)} + \frac{x}{x + 1} = \frac{3}{x - 5}$ ;

в)  $\frac{1}{x - 5} - \frac{26}{x^2 - 25} = \frac{x + 4}{x + 5}$ ;

г)  $\frac{14}{(x - 3)(x + 2)} + \frac{6}{x + 2} = \frac{x}{x - 3}$ .

○5.22. а)  $\frac{x^2 + 3x}{2(x - 3)} + \frac{x + 12}{6} = \frac{3x}{x - 3}$ ;                      в)  $\frac{x^2 - x}{3(x + 2)} + \frac{x}{x + 2} = \frac{x + 6}{12}$ ;

б)  $\frac{3}{x} - \frac{6}{x(x + 2)} = \frac{1 + 2x}{x + 2}$ ;                      г)  $\frac{1}{x} - \frac{5}{x(5 - x)} = \frac{x - 7}{5 - x}$ .

○5.23. а)  $\frac{x}{x - 2} - \frac{4}{x + 2} = \frac{8}{x^2 - 4}$ ;                      в)  $\frac{x}{x - 3} - \frac{6}{x + 3} = \frac{18}{x^2 - 9}$ ;

б)  $\frac{3x + 27}{3x - x^2} + \frac{3}{x} - \frac{4x}{3 - x} = 0$ ;                      г)  $\frac{5x}{x - 2} + \frac{2}{x} - \frac{16 + 2x}{x^2 - 2x} = 0$ .

Решите уравнение:

○5.24. а)  $\frac{c-2}{2c+6} + \frac{c+3}{3c-6} = 0$ ;

б)  $\frac{y+2}{y^2-7y} - \frac{4}{(7-y)^2} = \frac{1}{y-7}$ ;

в)  $\frac{d+5}{5d-20} + \frac{d-4}{4d+20} = \frac{9}{20}$ ;

г)  $\frac{2a-2}{a^2-36} - \frac{a-2}{a^2-6a} - \frac{a-1}{a^2+6a} = 0$ .

○5.25. а)  $\frac{c+2}{c^2-5c} - \frac{c-5}{2c^2-50} = \frac{c+25}{2c^2-50}$ ;

б)  $\frac{3y-1}{6y-3} - \frac{1}{1-4y^2} = \frac{y}{2y+1}$ ;

в)  $\frac{4(d+9)}{5d^2-45} + \frac{d+3}{5d^2-15d} = \frac{d-3}{d^2+3d}$ ;

г)  $\frac{1}{4x-6} + \frac{2x-5}{18-8x^2} - \frac{1}{2x^2+3x} = 0$ .

○5.26. а) Существует ли такое значение  $d$ , при котором разность дробей  $\frac{12d-7}{10d+1}$  и  $\frac{d-3}{5d+1}$  равна 1?

б) Существует ли такое значение  $b$ , при котором разность дробей  $\frac{18b+2}{b-4}$  и  $\frac{15b+1}{b+5}$  равна 3?

○5.27. а) Алгебраическое выражение  $\frac{a+1}{2} - 3b$  принимает значение  $3\frac{1}{2}$  при  $b = -0,5$  и при некотором значении  $a$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $a$  и при  $b = \frac{5}{12}$ ?

б) Алгебраическое выражение  $\frac{c-2}{3} \cdot x - 4x$  принимает значение 1 при  $x = -\frac{1}{3}$  и при некотором значении  $c$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $c$  и при  $x = -11\frac{1}{3}$ ?

○5.28. а) Алгебраическое выражение  $\frac{n+1}{3} \cdot y + \frac{3n-1}{5} \cdot y^2 + y^3$  принимает значение  $-21$  при  $y = -3$  и при некотором значении  $n$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $n$  и при  $y = \frac{1}{3}$ ?

б) Алгебраическое выражение  $\frac{s-9}{4} \cdot z + \frac{s+2}{3} \cdot z^2 - z^3$  принимает значение  $16$  при  $z = -2$  и при некотором значении  $s$ . Чему равно значение того же выражения при том же значении  $s$  и при  $z = 0,5$ ?

Решите уравнение:

○5.29. а)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+2}{x+1} = 4$ ;      в)  $\frac{2x+3}{x+4} + \frac{2}{x+1} = 2$ ;

б)  $\frac{3x+4}{2x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 1$ ;      г)  $\frac{x+2}{2x+1} + \frac{x+3}{x+1} = 5$ .

○5.30. а)  $\frac{5x+7}{x^2+11x-12} = \frac{13x-1}{x(x+11)-12}$ ;

б)  $\frac{x^2-7x+3}{x^2+10x-39} = \frac{7x-12}{39-10x-x^2}$ ;

в)  $\frac{5x^2-8x+13}{x^3+10x^2+x-12} = \frac{7x^2-10x+13}{x^3+10x^2+x-12}$ ;

г)  $\frac{3x^2-6x+6301}{x^2-27x+11} = \frac{2x^2+21x+6290}{x^2-27x+11}$ .

○5.31. а)  $\frac{x^2-7x+6}{x^2+1} + \frac{(x-1)(x-6)}{(1-x)(1+x)+2x^2} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2-5x+6}{x-1} + \frac{(x-2)(x-3)}{(1+x)^2-x^2-x-2} = 0$ .

○5.32. а)  $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(x+1)^2} = \frac{5}{2x(x+1)}$ ;

б)  $\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0$ .

○5.33. а)  $\frac{3x-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$ ;

б)  $\frac{6}{4-x} = \frac{25}{1-3x} - \frac{16}{x-4}$ .

●5.34. Решите уравнение  $\frac{x^2 + 6x}{x + 6} = a$ ;

- а) при  $a = 3$ ;
- б) при  $a = -3$ ;
- в) при  $a = -6$ ;
- г) для всех значений параметра  $a$ .

●5.35. Решите уравнение  $\frac{x^2 - ax}{x - a} = 2$ :

- а) при  $a = 3$ ;
- б) при  $a = -5$ ;
- в) при  $a = 2$ ;
- г) для всех значений параметра  $a$ .

●5.36. Решите уравнение  $\frac{x^3 - 4x}{x^2 - 4} = a$ :

- а) при  $a = 3$ ;
- б) при  $a = -1$ ;
- в) при  $a = -2$ ;
- г) для всех значений параметра  $a$ .

●5.37. При каких значениях параметра  $a$  дробь  $\frac{t^2 - ta}{a - t}$  ни при каких допустимых значениях  $t$  не принимает значения, равного 5?

●5.38. Для каждого значения  $c$  решите уравнение:

- а)  $\frac{x + 1}{x - c} = 0$ ;
- б)  $\frac{2x - c}{x - 4} = 1$ ;
- в)  $\frac{x - c}{x - 5} = 0$ ;
- г)  $\frac{cx + 4}{x + 2} = 2$ .

●5.39. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{3x - 5}{x - 1} = a + \frac{b}{x - 1}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .

●5.40. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{x + 2}{x^2 - 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{b}{x - 1}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .

●5.41. Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , что равенство  $\frac{2x + 5}{x^2 - 2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 2}$  выполняется при всех допустимых значениях  $x$ .



●5.42. Для каждого значения  $a$  решите уравнение:

а)  $\frac{2x+3}{x+4} + \frac{a}{x+1} = 2$ ;

б)  $\frac{x+1}{x-1} + \frac{3x+a}{x+1} = 4$ ;

в)  $\frac{ax+4}{2x+1} - \frac{x+3}{x+1} = 1$ ;

г)  $\frac{x+2}{2x+1} + \frac{ax+3}{x+1} = 5$ .

●5.43. Найдите все значения  $a$ , при которых один из корней уравнения равен  $x_0$ , и для каждого такого  $a$  решите данное уравнение:

а)  $\frac{2x+19}{5x^2-5} + \frac{a}{x^2-1} = \frac{3}{1-x}$ ,  $x_0 = 3$ ;

б)  $\frac{a}{(x+1)^2} + \frac{4}{x(x+1)^2} = \frac{5}{2x(x+1)}$ ,  $x_0 = 1$ ;

в)  $\frac{ax-3}{2x^2-2} - \frac{2x+2}{3x^2+6x+3} = \frac{5x-5}{12x^2-24x+12}$ ,  $x_0 = 3$ ;

г)  $\frac{6}{4-x} = \frac{a+7}{1-3x} + \frac{2-a}{x-4}$ ,  $x_0 = 2$ .

## § 6. СТЕПЕНЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Запишите в виде степени с положительным показателем следующее выражение:

6.1. а)  $3^{-3}$ ; б)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ ; в)  $5^{-2}$ ; г)  $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ .

6.2. а)  $a^{-5}$ ; б)  $\frac{1}{(c+d)^{-3}}$ ; в)  $(t-s)^{-3}$ ; г)  $\frac{1}{t^{-2}}$ .

6.3. а)  $\left(\frac{5}{a}\right)^{-2}$ ; б)  $\frac{1}{(a+b)^{-2}}$ ; в)  $(5x)^{-3}$ ; г)  $\frac{1}{(2x)^{-2}}$ .

6.4. Представьте числа 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{32}$ ,  $\frac{1}{128}$  в виде степени числа:

а) 2; б)  $\frac{1}{2}$ .

**6.5.** Представьте числа 3, 9, 27, 81, 243,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{81}$ ,  $\frac{1}{243}$  в виде степени числа:

а) 3;      б)  $\frac{1}{3}$ .

**6.6.** Представьте в виде степени числа 10 число:

а) 0,1;      б) 0,0001;      в) 0,01;      г) 0,00001.

Вычислите:

**6.7.** а)  $3^{-3}$ ,  $2^{-2}$ ,  $88^{-1}$ ;      в)  $(-2)^0$ ,  $(-3)^{-2}$ ,  $(-5)^{-3}$ ;

б)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ ,  $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ ,  $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$ ;      г)  $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ ,  $\left(2\frac{1}{5}\right)^{-2}$ ,  $\left(-111\frac{1}{9}\right)^{-3}$ .

**6.8.** а)  $(0,1)^{-1}$ ,  $(0,1)^{-2}$ ,  $(0,1)^{-3}$ ;

б)  $(0,01)^{-1}$ ,  $(-0,01)^{-9}$ ,  $(-0,01)^{-4}$ ;

в)  $(-0,001)^{-2}$ ,  $(-0,001)^{-3}$ ,  $(0,001)^{-5}$ ;

г)  $(0,0001)^{-1}$ ,  $(-0,0001)^{-3}$ ,  $(0,00001)^{-2}$ .

**6.9.** а)  $(0,2)^{-1}$ ,  $(0,3)^{-2}$ ;

в)  $(-0,006)^{-2}$ ,  $(-0,003)^{-3}$ ;

б)  $(0,03)^{-1}$ ,  $(-0,07)^{-2}$ ;      г)  $(-0,999999)^{-1}$ ,  $(0,11111)^{-1}$ .

**6.10.** а)  $(3,1)^{-1}$ ,  $(2,2)^{-2}$ ,  $(2,5)^{-3}$ ;

б)  $(-1,02)^{-1}$ ,  $(-1,25)^{-2}$ ,  $(-1,5)^{-3}$ .

**6.11.** Запишите данное число в виде произведения степени числа 10 на число из отрезка  $[-1; 1]$ :

а) 239,7;      б) 0,0987;      в) -657 483;      г) -0,000087.

Например,  $22,3 = 0,223 \cdot 10^2$ ,  $0,003 = 0,3 \cdot 10^{-2}$ .

**6.12.** Расположите в порядке убывания числа:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ ,  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ ;

б)  $3^{-1}$ ,  $3^3$ ,  $3^0$ ,  $3^{-2}$ ;

в)  $5^{-2}$ ,  $5^2$ ,  $5^{-1}$ ,  $5^0$ ;

г)  $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^0$ ,  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ .

Найдите значение выражения:

6.13. а)  $(64 \cdot 4^{-5})^2$ ;      в)  $(128 \cdot 2^{-6})^{-2}$ ;

б)  $\frac{5^{-3} \cdot 5^{-1}}{5^{-6}}$ ;      г)  $\frac{3^{-9}}{3^{-2} \cdot 3^{-6}}$ .

○6.14. а)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 10^{-1} + (4)^0 - (-2)^3 - (-5)^{-2} \cdot (-5)^3$ ;

б)  $-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot (2)^{-1} - \left(\frac{4}{81}\right)^0 - (-0,5)^{-2} + (2,5)^{-1} \cdot (2,5)^2$ ;

в)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot (4)^{-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + (-0,6)^{-3} \cdot (-0,6)^4 - (4^5)^0$ ;

г)  $(-0,5)^{-3} \cdot (2)^{-1} - (-2,7)^0 - (-2)^3 \cdot 1,2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ .

Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

6.15. а)  $a^2 \cdot a^{-3}$ ;      б)  $b^4 \cdot b^{-5}$ ;      в)  $d \cdot d^{-2}$ ;      г)  $m^{-5} \cdot m^{-1}$ .

6.16. а)  $k^6 : k^{-1}$ ;      б)  $l^2 : l^{-1}$ ;      в)  $x^3 : x^{-4}$ ;      г)  $y : y^{-3}$ .

6.17. а)  $2a^{-2} : \left(\frac{2}{3}a\right)$ ;      в)  $\frac{4}{7}m^7 : \left(1\frac{3}{4}m^{-3}\right)$ ;

б)  $1,2x^{-2} : (4x^{-5})$ ;      г)  $8r^{-5} : \left(\frac{2}{3}r^{-7}\right)$ .

6.18. а)  $3m^{-2}n^3 : \frac{3}{4}m^{-3}n^3$ ;      в)  $\frac{7}{11}t^{-2}s^6 : \left(1\frac{4}{7}t^{-1}s^{-2}\right)$ ;

б)  $0,5a^2b^{-2} \cdot (4a^{-3}b^3)$ ;      г)  $16p^{-1}q^3 : \left(\frac{4}{7}p^{-3}q^2\right)$ .

6.19. а)  $(a^2 - 1) \cdot a^{-1}$ ;      в)  $(b - b^3) \cdot b^{-2}$ ;

б)  $(l^3 - l^2) \cdot l^{-2}$ ;      г)  $(m^5 - m^4) \cdot m^{-5}$ .

6.20. а)  $ab^{-1} + a^{-1}b$ ;      в)  $p^2q^2(p^{-2} - q^{-2})$ ;

б)  $c^{-1}d^2 - c^2d^{-1}$ ;      г)  $mn^{-2} - m^{-2}n$ .

○6.21. а)  $(b^{-1} + a^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$ ;      в)  $(m^{-2} + n^{-2}) : (m^2 + n^2)$ ;

б)  $(x^{-2} - y^{-2}) : (x - y)$ ;      г)  $(ab^{-2} + a^{-2}b) \cdot \left(\frac{a^{-1}}{b}\right)^{-2}$ .

**○6.22.** Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

а)  $(b^{-1} + a^{-1}) \cdot \left( \frac{1}{a^{-1}} + \frac{1}{b^{-1}} \right)^{-1}$ ;

б)  $\left( (s^{-1} + t^{-1}) : \left( \frac{1}{s^{-2}} - \frac{1}{t^{-2}} \right) \right)^{-1}$ .

**6.23.** Представьте выражение в виде степени и найдите его значение при заданном значении переменной:

а)  $\frac{b^5(b^{-4})^2}{b^{-2}b}$  при  $b = 3^{-1}$ ;      б)  $\frac{(n^{-5})^3n}{n^{-2}n^{-10}}$  при  $n = 4$ .

**6.24.** Докажите тождество:

а)  $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-1} - b^{-1}) = a^{-2} - b^{-2}$ ;

б)  $(a^{-1} + b^{-1})(a^{-2} - a^{-1}b^{-1} + b^{-2}) = a^{-3} + b^{-3}$ .

**6.25.** Верно ли равенство:

а)  $(a^{-1} + b^{-1})^2 = a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1} + b^{-2}$ ;

б)  $(a + b)^{-2} = a^2 - 2a^1b^1 + b^2$ ;

в)  $(a^{-1} - b^{-1})^{-2} = a^2 + 2a^1b^1 + b^2$ ;

г)  $(a^{-1} - b^{-1})^3 = a^{-3} - 3a^{-2}b^{-1} + 3a^{-1}b^{-2} - b^{-3}$ ?

Вынесите за скобку степень с наименьшим показателем:

**6.26.** а)  $33a^{-2} + 23a^{-5}$ ;      в)  $2a^{-2} + 7a^5$ ;

б)  $3a^{-2} + 7$ ;      г)  $8a + 15a^{-5}$ .

**6.27.** а)  $5a + 3a^{-2} + 23a^{-5}$ ;      в)  $3a^{-3} - 2a^{-2} + 7a^5$ ;

б)  $7 + 3a^{-5} + 2a$ ;      г)  $a^{-2} + a^{-1} + 1$ .

**6.28.** а)  $5ab^{-3} + 3a^{-2}b^2 - 2a^{-4}$ ;

б)  $3a^{-3}b^{-5} - 2a^{-2}b + 7a^5b^{-6}$ .

**6.29.** а)  $5a^{k-2} + 3a^{k+2} + 23a^{k-5}$ ;      в)  $7a^{-1-k} + 3a^{5-k} + 2a^{-k}$ ;

б)  $3a^{3-d} - 5a^{2-d} - 6a^{5-d}$ ;      г)  $a^{-1+k} + a^{2-k} + 2a^{-2k}$ .

**○6.30.** Вычислите  $2^{-k}$ , если  $2^{3-k} + 2^{1-k} + 5 \cdot 2^{-k} = 40$ .

Сократите дробь:

○6.31. а)  $\frac{1+a^{-1}}{1+a}$ ;      в)  $\frac{3+5a^{-1}}{3a+5}$ ;

б)  $\frac{1-a^{-1}}{1-a}$ ;      г)  $\frac{2a^{-2}+a^{-1}}{a+2}$ .

○6.32. а)  $\frac{b^{-1}+a^{-1}}{a+b}$ ;      в)  $\frac{3b^{-1}+2a^{-1}}{3a+2b}$ ;

б)  $\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a-b}$ ;      г)  $\frac{ab^{-1}-ba^{-1}}{a^2-b^2}$ .

○6.33. а)  $\frac{b^{-1}+a^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}$ ;      в)  $\frac{b^{-3}+a^{-3}}{a+b}$ ;

б)  $\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}$ ;      г)  $\frac{b^{-3}-a^{-3}}{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$ .

Найдите значение выражения:

○6.34. а)  $\frac{3x^{-2}}{2-x^{-2}} - \frac{3x^{-2}}{2+x^{-2}}$  при  $x = 0,5^{-1}$ ;

б)  $\frac{9x^{-1}}{2-x^{-1}} - \frac{9x^{-1}}{2+x^{-1}}$  при  $x = 0,2^{-1}$ .

○6.35. а)  $\frac{2x(2-x)^{-1}}{1-\left(\frac{2-x}{2x}\right)^{-1}}$  при  $x = \frac{3}{5}$ ;      б)  $\frac{3x(2-x)^{-1}}{2-\left(\frac{2-x}{3x}\right)^{-1}}$  при  $x = \frac{5}{7}$ .

○6.36. а)  $\frac{2x^{-1}-y^{-1}}{2x^{-1}+y^{-1}}$ , если  $\frac{y}{x} = 3^{-1}$ ;      б)  $\frac{x^{-1}-3y^{-1}}{x^{-1}+3y^{-1}}$ , если  $\frac{x}{y} = 4^{-1}$ .

○6.37. а)  $\frac{x^{-1}-3y^{-1}}{x^{-2}-9y^{-2}} \cdot x^{-1}$ , если  $\frac{x}{y} = 2^{-1}$ ;

б)  $\frac{x^{-1}+2y^{-1}}{x^{-2}-4y^{-2}} \cdot x^{-1}$ , если  $\frac{y}{x} = 5^{-1}$ .

○6.38. Пусть  $x+x^{-1}=5$ . Найдите значение выражения:

а)  $x^2+x^{-2}$ ;      в)  $x^4+x^{-4}$ ;

б)  $x^3+x^{-3}$ ;      г)  $x^5+x^{-5}$ .

○6.39. Решите уравнение:

а)  $4x^{-2} - 4x^{-1} = -1$ ;      в)  $9x^{-2} + 6x^{-1} = -1$ ;

б)  $x^{-4} + 16 = 8x^{-2}$ ;      г)  $x^{-4} + 81 = 18x^{-2}$ .

Упростите выражение:

○6.40. а)  $\left(\frac{x+4}{3x+3} - (x+1)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{x+1}{3}\right)^{-1} + \frac{2}{x^2-1}$ ;

б)  $\left(\frac{x+10}{5x+25} - (x+5)^{-1}\right) \cdot \left(\frac{x-5}{5}\right)^{-1} - \frac{10}{x^2-25}$ .

○6.41. а)  $\frac{2-a-5(a+2)^{-1}}{5(4-a^2)^{-1}-1}$ ;      б)  $\frac{(x^2-1)^{-1}-3}{3(x-1)-(x+1)^{-1}}$ .

Докажите тождество:

●6.42.  $\left(\frac{y^2(xy^{-1}-1)^2}{x(1+x^{-1}y)^2} \cdot \frac{y^2(x^{-2}+y^{-2})}{x(xy^{-1}+x^{-1}y)}\right) : \frac{1-x^{-1}y}{xy^{-1}+1} = \frac{x-y}{x+y}$ .

●6.43.  $\left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}} - \frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\right)^{-1} = \frac{a^{-n}b^n - b^{-n}a^n}{4}$ .

●6.44.  $\left(\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-2n}-a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} + \left(\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-2n}+a^{-n}b^{-n}+b^{-2n}}\right)^{-1} = \frac{2a^{-n}b^{2n}}{b^{2n}-a^{2n}}$ .

○6.45. Найдите область определения выражения:

а)  $(x^2-4)^{-4}$ ;

б)  $(x-(x-1)^{-1}-1)^{-3}$ ;

в)  $(x^2-4)^{-1}$ ;

г)  $3((x^0-(x-1)^{-1})^0-x)^{-1}$ .

## § 7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Используя обозначения  $N$ ,  $Z$ ,  $Q$  и знаки  $\in$ ,  $\notin$ , запишите следующее утверждение:

- 7.1. а)  $-8$  — целое число;  
б)  $-12$  — рациональное число;  
в)  $79$  — натуральное число;  
г)  $15$  — целое число.
- 7.2. а)  $-10$  не является натуральным числом;  
б)  $-5,7$  не является целым числом;  
в)  $0$  не является натуральным числом;  
г)  $\frac{2}{13}$  не является целым числом.
- 7.3. Назовите несколько элементов множества:  
а) натуральных чисел;  
б) отрицательных чисел;  
в) целых чисел;  
г) рациональных чисел.
- 7.4. Назовите несколько общих элементов:  
а) множества натуральных чисел и множества целых чисел;  
б) множества рациональных чисел и множества натуральных чисел;  
в) множества целых чисел и множества рациональных чисел;  
г) множества положительных чисел и множества целых чисел.

Установите, является ли истинным высказывание:

7.5. а)  $12 \in N$ ;      б)  $-3 \in Q$ ;      в)  $-\frac{36}{12} \in Z$ ;      г)  $0 \in N$ .

7.6. а)  $37 \notin Z$ ;      б)  $-5 \notin N$ ;      в)  $\frac{5}{12} \notin N$ ;      г)  $\frac{3}{8} \notin Q$ .

Установите, является ли истинным высказывание:

7.7. а)  $5 \in [3; 7]$ ;                      в)  $-17 \in (-17; 8]$ ;

б)  $-19 \notin (0; 19)$ ;                    г)  $45 \notin [0; 45]$ .

7.8. а)  $[7; 9] \subset (6; 10)$ ;                      в)  $[1; 6] \subset (0; 4)$ ;

б)  $(-3; +\infty) \subsetneq [0; +\infty)$ ;                    г)  $[3; 4] \subsetneq [5; 7]$ .

07.9. Сколько целых чисел заключено между числами  $\frac{1111}{37}$  и  $\frac{11512}{361}$ ?

07.10. Между какими соседними целыми числами заключено число  $\frac{1111111}{2431}$ ?

07.11. Найдите целое число, ближайшее к числу  $\frac{76543210}{1234567}$ .

07.12. Запишите все дроби со знаменателем 17, находящиеся между 1,5 и 1,7.

07.13. Покажите, что между числами  $\frac{111}{112}$  и  $\frac{112}{113}$  можно найти рациональное число. Верно ли, что между любыми двумя рациональными числами всегда можно найти хотя бы одно рациональное число?

07.14. Найдите два рациональных числа, модуль разности которых меньше, чем  $\frac{1}{99999}$ . Верно ли, что для любого положительного рационального числа можно найти два таких рациональных числа, модуль разности которых меньше данного?

07.15. а) Между числами 0,14 и 0,15 вставьте девять рациональных чисел.

б) Между числами 0,245 и 0,246 вставьте 99 рациональных чисел.

07.16. а) Между числами  $\frac{13}{17}$  и  $\frac{14}{17}$  вставьте 99 рациональных чисел.

б) Между числами  $\frac{18}{19}$  и  $\frac{19}{20}$  вставьте 99 рациональных чисел.

07.17. Представьте число 1 в виде суммы семи различных рациональных дробей, все числители которых равны 1.



- 7.18.** Сколько существует правильных обыкновенных несократимых дробей со знаменателем 20?
- **7.19.** Докажите, что между числами 1 и 1,03 располагается бесконечно много обыкновенных дробей, числитель которых на 1 больше знаменателя.
- **7.20.** Есть ли между числами  $\frac{23}{1240}$  и  $\frac{24}{1249}$  обыкновенные дроби с числителем 1? Если есть, то сколько?
- **7.21.** Найдите между числами  $\frac{1980}{3011}$  и  $\frac{1927}{2885}$  обыкновенную дробь с наименьшим знаменателем.

Запишите в виде бесконечной десятичной периодической дроби:

**7.22.** а)  $\frac{3}{11}$ ;      б)  $\frac{8}{33}$ ;      в)  $\frac{5}{99}$ ;      г)  $\frac{2}{15}$ .

**7.23.** а)  $\frac{29}{6}$ ;      б)  $\frac{34}{9}$ ;      в)  $\frac{53}{12}$ ;      г)  $\frac{78}{11}$ .

- **7.24.** Найдите 548-й десятичный знак бесконечной периодической десятичной дроби:

а) 4,(1234567012);      в) 75,34(72);  
б) 0,349(12);      г) 4,2(539).

- **7.25.** Запишите данное рациональное число в виде десятичной периодической дроби и найдите её 2012-ю цифру после запятой:

а)  $\frac{1}{3}$ ;      б)  $\frac{13}{99}$ ;      в)  $\frac{127}{999}$ ;      г)  $\frac{1412}{3333}$ .

- **7.26.** Найдите период в десятичной записи числа  $\frac{5}{7}$  и 2012-ю цифру после запятой.

Представьте в виде обыкновенной дроби:

**7.27.** а) 0,(3);      б) 0,(15);      в) 0,(6);      г) 0,(108).

**7.28.** а) 15,(3);      б) 2,(14);      в) 7,(2);      г) 23,(25).

○ **7.29.** а) 0,0(24);      б) 0,00(3);      в) 0,0(6);      г) 0,00(18).

Представьте в виде обыкновенной дроби:

○7.30. а) 1,6(1);      б) 2,03(5);      в) 3,9(12);      г) 0,7(72).

○7.31. а) 0,15(3);      б) 2,1(61);      в) 6,12(8);      г) 0,3(306).

○7.32. Вычислите и представьте результат в виде бесконечной десятичной дроби:

а)  $1,(3) + 0,(23)$ ;      в)  $1,(1) \cdot 2,(2)$ ;

б)  $3,(29) + 1,(3)$ ;      г)  $2,(24) : 1,(12)$ .

●7.33. Одна седьмая жителей посёлка — пенсионеры, а одна девятнадцатая — военные. Какое наименьшее число людей может жить в посёлке, если среди военных девятая часть — пенсионеры?

●7.34. Не менее чем  $\frac{139}{201}$  и не более чем  $\frac{89}{123}$  членов бригады получили премии. Какое наименьшее число людей было в бригаде?

## § 8. ПОНЯТИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Известно, что  $a^2 = b$ . Найдите все значения  $a$ , при которых:

8.1. а)  $b = 1$ ;      б)  $b = 4$ ;      в)  $b = 9$ ;      г)  $b = 100$ .

8.2. а)  $b = 1,21$ ;      в)  $b = 0,0225$ ;

б)  $b = 2\frac{7}{9}$ ;      г)  $b = 5\frac{1}{16}$ .

8.3. Объясните, почему не существует ни одного числа  $b$  такого, что  $b^2 + 1 = 0$ .

○8.4. Объясните, почему не существуют числа  $a$  и  $b$  такие, что  $b^2 = 2a - 2 - a^2$ .

8.5. а) Найдите все значения  $a$ , при которых верно равенство  $a^2 = 0$ .

б) При каком значении  $a$  верно равенство  $a^3 = 0$ ?

8.6. а) При каком значении  $a$  существует только одно такое значение  $b$ , что  $a^2 = b^2$ ?

б) При каком значении  $a$  существует ровно два различных значения  $b$  такие, что  $a^2 = b^2$ ?

**8.7.** Докажите, используя определение квадратного корня, что:

а)  $\sqrt{9} = 3$ ;      в)  $\sqrt{144} = 12$ ;

б)  $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \frac{5}{4}$ ;      г)  $\sqrt{0,000225} = 0,015$ .

**8.8.** Докажите, что:

а)  $\sqrt{324} \neq -18$ ;      в)  $\sqrt{-81} \neq -9$ ;

б)  $\sqrt{1\frac{25}{36}} \neq 1\frac{5}{6}$ ;      г)  $\sqrt{0,4} \neq 0,2$ .

**8.9.** Имеет ли смысл выражение:

а)  $\sqrt{-1}$ ;      б)  $-\sqrt{-9}$ ;      в)  $\sqrt{(-3)^2}$ ;      г)  $\sqrt{-\left(-\frac{49}{100}\right)}$ ?

**8.10.** При каких значениях  $a$  имеет смысл выражение:

а)  $\sqrt{a}$ ;      б)  $\sqrt{a^2}$ ;      в)  $\sqrt{-a}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{1}{a}}$ ?

Укажите все значения переменных, при которых определено выражение:

**8.11.** а)  $\sqrt{a \cdot b}$ ;      б)  $\frac{\sqrt{-a^2}}{\sqrt{b}}$ ;      в)  $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b^3}$ ;      г)  $\sqrt{-x^3y^2}$ .

**8.12.** а)  $\sqrt{x^2(y-2)^2}$ ;      в)  $\sqrt{-(x+1)^2(y-2)^2}$ ;  
б)  $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{1-b}$ ;      г)  $\sqrt{a+4} \cdot \sqrt{-b}$ .

Вычислите:

**8.13.** а)  $\sqrt{25}$ ;      в)  $\sqrt{49}$ ;  
б)  $\sqrt{144}$ ;      г)  $\sqrt{361}$ .

**8.14.** а)  $\sqrt{0,04}$ ;      в)  $\sqrt{0,64}$ ;  
б)  $\sqrt{\frac{1}{25}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{36}{49}}$ .

**8.15.** а)  $\sqrt{6\frac{1}{4}}$ ;      б)  $\sqrt{1,96}$ ;      в)  $\sqrt{1\frac{24}{25}}$ ;      г)  $\sqrt{3,24}$ .

Вычислите:

8.16. а)  $(\sqrt{5})^2$ ; б)  $\left(\sqrt{\frac{5}{7}}\right)^2$ ; в)  $(\sqrt{4,5})^2$ ; г)  $\left(\sqrt{\frac{1}{12}}\right)^2$ .

8.17. а)  $(-\sqrt{11})^2$ ; б)  $-(\sqrt{21})^2$ ; в)  $-(-\sqrt{2})^2$ ; г)  $-\sqrt{(-3)^2}$ .

8.18. а)  $(2\sqrt{3})^2$ ; б)  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ; в)  $-(4\sqrt{11})^2$ ; г)  $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$ .

8.19. а)  $(\sqrt{3})^6$ ; б)  $(3\sqrt{2})^4$ ; в)  $(-\sqrt{11})^4$ ; г)  $(\sqrt{5})^6$ .

8.20. а)  $\sqrt{3 + \sqrt{36}}$ ; в)  $\sqrt{7 + \sqrt{81}}$ ;

б)  $\sqrt{44 + \sqrt{25}}$ ; г)  $\sqrt{7 - \sqrt{9}}$ .

8.21. а)  $\sqrt{16} + \sqrt{100}$ ; в)  $\sqrt{121} - \sqrt{64}$ ;

б)  $\sqrt{49} + \sqrt{0}$ ; г)  $\sqrt{81} + \sqrt{1}$ .

8.22. а)  $\sqrt{64} \cdot \sqrt{4}$ ; в)  $\sqrt{25} \cdot \sqrt{225}$ ;

б)  $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,36}$ ; г)  $0,2 \cdot \sqrt{1600}$ .

8.23. а)  $(\sqrt{3})^2 \cdot (\sqrt{5})^2$ ; в)  $(\sqrt{0,15})^2 \cdot (\sqrt{20})^4$ ;

б)  $(\sqrt{0,02})^6$ ; г)  $(\sqrt{2\sqrt{3}})^8$ .

8.24. а)  $(2\sqrt{7})^4$ ; в)  $(-2\sqrt{(-7)^2})^2$ ;

б)  $(-2\sqrt{1,5})^6$ ; г)  $(0,1\sqrt{0,02})^6$ .

○8.25. а)  $(\sqrt{1 + \sqrt{3}})^2 + (\sqrt{3 - \sqrt{3}})^2$ ;

б)  $(\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2 + (\sqrt{3 + \sqrt{2}})^2$ ;

в)  $(\sqrt{81 - 14\sqrt{5}})^2 + (\sqrt{7 + \sqrt{5}})^4$ ;

г)  $(\sqrt{3\sqrt{7} - 2})^4 - (\sqrt{67 - 12\sqrt{7}})^2$ .

Вычислите:

8.26. а)  $\sqrt{225} + 3\sqrt{121}$ ;      в)  $-0,03 \cdot \sqrt{10\,000} + \sqrt{16}$ ;

б)  $\frac{9,5}{\sqrt{361}} + \sqrt{\frac{1}{4}}$ ;      г)  $\frac{4}{\sqrt{256}} - \sqrt{\frac{1}{64}}$ .

8.27. а)  $5 - \frac{1}{7} \cdot \sqrt{1\frac{27}{169}}$ ;      в)  $2 \cdot \sqrt{1\frac{9}{16}} - 1$ ;

б)  $8 \cdot \sqrt{5\frac{1}{16}} + 3$ ;      г)  $4 - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5\frac{11}{49}}$ .

8.28. а)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{196} + 1,5 \cdot \sqrt{0,36}$ ;

б)  $0,5 \cdot \sqrt{0,04} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{144}$ ;

в)  $3,6 \cdot \sqrt{0,25} + \frac{1}{32} \cdot \sqrt{256}$ ;

г)  $2,5 \cdot \sqrt{3,24} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{225}$ .

8.29. а)  $\sqrt{1156}$ ;      б)  $\sqrt{1521}$ ;      в)  $\sqrt{1024}$ ;      г)  $\sqrt{1849}$ .

8.30. а)  $\sqrt{22\,500}$ ;      в)  $\sqrt{12\,960\,000}$ ;

б)  $\sqrt{67,24}$ ;      г)  $\sqrt{0,7225}$ .

8.31. Докажите, что каждое из приведённых чисел является полным квадратом натурального числа, и извлеките из него квадратный корень:

а)  $361 + 4 \cdot 19 + 4$ ;      в)  $456 \cdot 460 + 4$ ;

б)  $234 \cdot 236 + 1$ ;      г)  $561 \cdot 567 + 9$ .

8.32. Докажите, что значение квадратного корня не является целым числом:

а)  $\sqrt{8467}$ ;      б)  $\sqrt{2215}$ ;      в)  $\sqrt{2113}$ ;      г)  $\sqrt{1228}$ .

8.33. Докажите, что следующие числа не являются полными квадратами:

а)  $1\,234\,000\,567$ ;      в)  $98\,765\,000\,432$ ;

б)  $123 \cdot 7\,654\,300\,021$ ;      г)  $223 \cdot 12\,357\,936$ .

**8.34.** Подберите два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

а)  $\sqrt{14}$ ;            в)  $\sqrt{105}$ ;

б)  $-\sqrt{0,3}$ ;        г)  $-\sqrt{28}$ .

Решите уравнение:

**8.35.** а)  $x^2 = 16$ ;        б)  $x^2 = 5$ ;        в)  $x^2 = 9$ ;        г)  $x^2 = 17$ .

**8.36.** а)  $x^2 - 25 = 0$ ;        в)  $x^2 - 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - 2 = 0$ ;        г)  $x^2 - 6 = 0$ .

**8.37.** а)  $\frac{1}{3}x^2 = 75$ ;        в)  $\frac{1}{6}x^2 = 24$ ;

б)  $4x^2 - 28 = 0$ ;        г)  $3x^2 - 78 = 0$ .

**8.38.** а)  $(x + 8)^2 = 1$ ;        в)  $(x - 3)^2 - 4 = 0$ ;

б)  $(x - 1)^2 = 3$ ;        г)  $(x + 2)^2 - 10 = 0$ .

**8.39.** а)  $(x - 5)^2 = 0$ ;        в)  $(3x - 5)^2 = 0$ ;

б)  $(2x + 1)^2 + 3 = 0$ ;        г)  $3(x + 4)^2 = 0$ .

**8.40.** а)  $(3x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 20$ ;

б)  $(3x + 2)^3 - (3x - 2)^3 = 124$ ;

в)  $(5x + 2)^2 + (x - 10)^2 = 208$ ;

г)  $(2x + 1)^3 - (2x - 1)^3 = 218$ .

**8.41.** а)  $4x^2 + 4x + 1 = 49$ ;        в)  $25x^2 - 30x + 9 = 16$ ;

б)  $x^2 + 4x + 3 = 0$ ;        г)  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .

**8.42.** Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:

а)  $64 \text{ см}^2$ ;        б)  $100 \text{ см}^2$ ;        в)  $2,25 \text{ см}^2$ ;        г)  $17 \text{ м}^2$ .

**8.43.** Укажите хотя бы одно целое число  $x$ , удовлетворяющее неравенству:

а)  $x > \sqrt{2}$ ;        в)  $x > \sqrt{5}$ ;

б)  $2x < \sqrt{3}$ ;        г)  $3x < \sqrt{11}$ .

**8.44.** Укажите три целых числа, удовлетворяющих неравенству:

а)  $2x > \sqrt{5}$ ;        в)  $3x < \sqrt{2}$ ;

б)  $2x < \sqrt{7}$ ;        г)  $5x > \sqrt{10}$ .

**8.45.** При каком значении переменной верно равенство:

а)  $\sqrt{x} = 11$ ;      в)  $\sqrt{x} = 1,1$ ;

б)  $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$ ;      г)  $\sqrt{x} = \frac{7}{8}$ ?

**8.46.** Найдите наибольшее целое число, которое удовлетворяет неравенству:

а)  $x \leq \sqrt{5}$ ;      б)  $2x < \sqrt{7}$ ;      в)  $x < \sqrt{3}$ ;      г)  $3x \leq \sqrt{2}$ .

**8.47.** Найдите наименьшее целое число, которое больше числа:

а)  $\sqrt{7}$ ;      б)  $\sqrt{10}$ ;      в)  $\sqrt{62}$ ;      г)  $\sqrt{103}$ .

**8.48.** Сколько целых чисел принадлежит промежутку:

а)  $[1; \sqrt{5}]$ ;      в)  $[-\sqrt{3}; \sqrt{6}]$ ;

б)  $(-\sqrt{2}; \sqrt{3})$ ;      г)  $(\sqrt{7}; 7)$ ?

Используя определение квадратного корня, решите уравнение:

**8.49.** а)  $\sqrt{x-1} = 3$ ;      в)  $\sqrt{x+2} = 5$ ;

б)  $\sqrt{4x+1} = 7$ ;      г)  $\sqrt{7x-1} = 1$ .

**8.50.** а)  $\sqrt{289-x^2} = 8$ ;      в)  $\sqrt{25-x^2} = 0$ ;

б)  $\sqrt{x^2+144} = 13$ ;      г)  $\sqrt{x^2-144} = 5$ .

Решите уравнение:

**8.51.** а)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2-x} = 0$ ;      в)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{2+x} = 0$ ;

б)  $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x-2} = 0$ ;      г)  $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{4-x} = 0$ .

○**8.52.** а)  $\sqrt{(x-1)(2x-1)} + \sqrt{4x^2-1} = 0$ ;

б)  $\sqrt{3x-1} + \sqrt{6x^2-5x+1} = 0$ .

○**8.53.** а)  $(\sqrt{3x+5} + 3)^2 = 9$ ;      б)  $(\sqrt{3x+5} - 3)^2 = 9$ .

○**8.54.** Решите уравнение:

а)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{y-4} = 0$ ;

б)  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{y+4x-1} = 0$ ;

$$в) \sqrt{x+3} + \sqrt{y^2-4} = 0;$$

$$г) \sqrt{5x+7y-12} + \sqrt{3y+4x-7} = 0.$$

**8.55.** Постройте в одной системе координат графики функций:

а)  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = x \cdot \sqrt{3}$ ;

б)  $y = -3x$ ,  $y = -4x$ ,  $y = -x \cdot \sqrt{11}$ .

**8.56.** На координатной плоскости отметьте все точки с координатами  $x$  и  $y$ , для которых определены выражения:

а)  $\sqrt{x}$ ;    б)  $\sqrt{y-x}$ ;    в)  $\sqrt{xy}$ ;    г)  $\sqrt{-y}$ .

## § 9. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Укажите, какие из перечисленных чисел являются рациональными, а какие — иррациональными:

**9.1.** а) 2,1;    б)  $\sqrt{2}$ ;    в)  $\sqrt{25}$ ;    г)  $\sqrt{12}$ .

**9.2.** а)  $\sqrt{0,49}$ ;    б)  $\sqrt{0,9}$ ;    в)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ;    г)  $\sqrt{1\frac{4}{9}}$ .

**9.3.** Проверьте справедливость соотношения:

а)  $6,1 < \sqrt{38} < 6,2$ ;    в)  $4,4 < \sqrt{20} < 4,5$ ;

б)  $10,5 < \sqrt{111} < 10,6$ ;    г)  $21,5 < \sqrt{463} < 21,6$ .

**9.4.** Между какими целыми числами находится число:

а)  $\sqrt{7}$ ;    б)  $\sqrt{12}$ ;    в)  $\sqrt{20}$ ;    г)  $\sqrt{150}$ ?

Сравните числа:

**9.5.** а)  $\sqrt{7}$  и 3;    в)  $\sqrt{5}$  и 2;

б)  $\sqrt{17,3}$  и 4;    г)  $\sqrt{10}$  и 3,16.

**9.6.** а)  $-\sqrt{12}$  и -4;    в)  $-\sqrt{19}$  и -4,5;

б)  $-\sqrt{25,6}$  и -5;    г)  $-\sqrt{37}$  и -6,1.

**9.7.** Докажите, что:

а) сумма иррациональных чисел  $6 + \sqrt{2}$  и  $6 - \sqrt{2}$  является рациональным числом;

б) произведение иррациональных чисел  $2 + \sqrt{3}$  и  $2 - \sqrt{3}$  является рациональным числом.



**9.8.** Докажите, что:

- а) сумма иррациональных чисел  $3 + 2\sqrt{5}$  и  $3 - 2\sqrt{5}$  является рациональным числом;
- б) произведение иррациональных чисел  $\sqrt{7} - \sqrt{27}$  и  $\sqrt{7} + \sqrt{27}$  является рациональным числом.

**9.9.** а) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых — рациональное число.

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, сумма которых — иррациональное число.

**9.10.** а) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых — рациональное число.

б) Приведите пример двух иррациональных чисел, произведение которых — иррациональное число.

**9.11.** Приведите примеры, показывающие, что квадратный корень из рационального числа может быть выражен:

- а) целым числом;
- б) конечной десятичной дробью;
- в) бесконечной десятичной непериодической дробью;
- г) бесконечной десятичной периодической дробью.

**9.12.** а) Докажите, что сумма рационального и иррационального чисел есть число иррациональное.

б) Докажите, что произведение рационального (отличного от нуля) и иррационального чисел есть число иррациональное.

**9.13.** Поясните, почему является иррациональным заданное число:

- а)  $5 + \sqrt{3}$ ;
- б)  $7 - \sqrt{2}$ ;
- в)  $1 + \sqrt{8}$ ;
- г)  $3 - \sqrt{5}$ .

**9.14.** Пусть  $r$  — рациональное число,  $\alpha$  — иррациональное число. Рациональным или иррациональным является число:

- а)  $r + \alpha$ ;
- б)  $\alpha^2$ ;
- в)  $2\alpha$ ;
- г)  $r^2 - \alpha^2$ ?

**9.15.** а) Могут ли сумма и произведение двух иррациональных чисел быть одновременно рациональными числами? Если не могут, то почему? Если могут, то приведите пример.

б) Могут ли разность и частное двух различных иррациональных чисел быть одновременно рациональными числами? Если не могут, то почему? Если могут, то приведите пример.

- 9.16. Докажите, что число  $\sqrt{17}$  — иррациональное.
- 9.17. Пусть  $a^3 + 5a - \frac{7}{a}$  является иррациональным числом.  
Докажите, что  $a$  — также иррациональное число.
- 9.18. Известно, что  $a$  — иррациональное число. Докажите, что  $\sqrt{a}$  — иррациональное число.
- 9.19. Докажите, что число  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$  — иррациональное.
- 9.20. Укажите какие-нибудь два рациональных и два иррациональных числа, расположенных между числами:
- а) 1 и 2;                      в) 5 и 6;  
б)  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ ;              г)  $\sqrt{1,2}$  и  $\sqrt{1,3}$ .
- 9.21. Используя микрокалькулятор, определите, с какой по счёту после запятой начинают отличаться цифры в десятичной записи чисел  $\sqrt{0,44444}$  и  $\frac{2}{3}$ , какое из этих чисел больше.
- 9.22. Укажите какие-либо два иррациональных числа, разность между которыми не превосходит 0,2, а их среднее арифметическое равно 1.
- 9.23. а) Могут ли существовать два различных иррациональных числа, среднее геометрическое которых рациональное число? Если нет, то почему? Если могут, то приведите пример.  
б) Могут ли существовать два различных иррациональных числа, среднее геометрическое и среднее арифметическое которых одновременно являются рациональными числами? Если нет, то почему? Если могут, то приведите пример.
- 9.24. Дан квадрат  $ABCD$ . Может ли:
- а) длина диагонали быть рациональным числом;  
б) его периметр быть иррациональным числом;  
в) периметр треугольника  $ABC$  быть рациональным числом;  
г) его площадь быть иррациональным числом?

**○9.25.** Может ли:

- а) отношение периметра квадрата к сумме длин его диагоналей быть рациональным числом;
- б) периметр квадрата быть числом иррациональным, а площадь — целым;
- в) периметр квадрата быть числом рациональным, а площадь — иррациональным;
- г) периметр квадрата быть числом целым, а площадь — нецелым?

**○9.26.** Могут ли периметр и площадь равностороннего треугольника быть одновременно рациональными числами?

**○9.27.** На числовой прямой отмечены точки  $O(0)$  и  $E(1)$ . Используя циркуль и линейку, постройте точки  $M(\sqrt{17})$  и  $N\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

**●9.28.** а) На прямой  $y = x(\sqrt{2} - 1) + 5$  укажите все точки, обе координаты которых рациональные числа.

б) Докажите, что на прямой  $y = 7x - 3$  координаты любой точки либо обе рациональны, либо обе иррациональны.

**●9.29.** Докажите, что на графике функции  $y = \sqrt{2} \cdot x$  имеется только одна точка, у которой и абсцисса и ордината — целые числа. Постройте график этой функции.

**●9.30.** Докажите, что на графике функции  $y = \sqrt{3} \cdot x + \sqrt{3}$  имеется только одна точка, у которой и абсцисса и ордината — целые числа. Постройте график этой функции.

**●9.31.** Докажите, что на прямой  $y = x\sqrt{2} + \sqrt{3}$  нет ни одной точки, обе координаты которых рациональные числа. Есть ли на этой прямой сто точек с целочисленными ординатами?

## § 10. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Сравните числа:

- 10.1. а) 3,1416 и 3,14159;      в) 1,2112 и 1,2121;  
б) -5,123 и -5,1231;      г) -7,3434 и -7,4343.

- 10.2. а) 3,(7) и  $\frac{26}{7}$ ;      в) 6,(3) и  $\frac{19}{3}$ ;  
б) 0,(1) и  $\frac{1}{9}$ ;      г) 4,(2) и  $\frac{21}{5}$ .

- 10.3. а) 4,8 и  $\sqrt{29}$ ;      в)  $-\sqrt{3}$  и  $-\frac{71}{41}$ ;  
б)  $-\sqrt{10}$  и -3,16;      г)  $\sqrt{45}$  и 5,9.

10.4. С помощью микрокалькулятора выясните, сколько первых цифр после запятой совпадает у данных чисел. Выпишите первые несовпадающие цифры и сравните числа:

- а)  $\frac{73\ 136}{87\ 445}$  и  $\frac{146\ 263}{174\ 891}$ ;      в)  $\sqrt{2}$  и  $1\frac{828\ 427}{2000\ 000}$ ;  
б)  $\sqrt{\frac{136}{7}}$  и  $\sqrt{19,44}$ ;      г)  $\pi$  и  $\sqrt{9,869}$ .

10.5. Даны выражения  $a(a + 2)$  и  $(a - 3)(a + 2)$ . Не выполняя действий, сравните значения этих выражений при:

- а)  $a = 2$ ;      б)  $a = -\sqrt{3}$ ;      в)  $a = 3,23$ ;      г)  $a = -\sqrt{5}$ .

10.6. Сравните числа  $x$  и  $y$ , если известно, что:

- а)  $x = y - 5$ ;      в)  $y + 3 = x + 2\sqrt{2}$ ;  
б)  $x + 1 = 2y$ , где  $y > 1$ ;      г)  $y - x = 1 + y^2$ .

10.7. Какой знак имеют произведение  $mn$  и частное  $\frac{m}{n}$ , если известно, что:

- а)  $m$  и  $n$  — числа одного знака;  
б)  $m$  и  $n$  — числа разных знаков.

10.8. Известно, что  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c < 0$ ,  $d < 0$ . Какой знак имеет выражение:

- а)  $abcd$ ;      б)  $\frac{abd}{c}$ ;      в)  $\frac{ac}{bd}$ ;      г)  $a^2b^3c^4d^5$ ?

**10.9.** Выясните, положительными или отрицательными являются числа  $p$  и  $q$ , если известно, что:

а)  $pq > 0$ ;      б)  $p^2q < 0$ ;      в)  $\frac{p}{q} < 0$ ;      г)  $\frac{p}{q^2} > 0$ .

**10.10.** Известно, что  $a > 2$ . Какой знак имеет выражение:

а)  $3a - 6$ ;      в)  $\frac{-5}{2-a}$ ;

б)  $\frac{a-2}{a-1}$ ;      г)  $(a-2)(1-a)$ ?

**10.11.** Известно, что  $b < 3$ . Какой знак имеет выражение:

а)  $(b-1)^2(b-3)$ ;      в)  $14-4b$ ;

б)  $\frac{b-4}{3-b}$ ;      г)  $\frac{b^2+1}{(b-7)(3-b)}$ ?

**10.12.** Какой знак имеет выражение  $(s-1)(s-4)$ , если известно, что:

а)  $s < 1$ ;      в)  $1 < s < 4$ ;

б)  $s > 4$ ;      г)  $s > 5$ ?

Расположите в порядке возрастания числа:

○**10.13.** а)  $\sqrt{5}$ , 0,  $\frac{13}{6}$ ;      в)  $\frac{\pi}{6}$ , 0,3, 0,5;

б)  $\pi$ , 3, 3,1;      г)  $-3,2$ ,  $-\sqrt{10}$ ,  $-3$ .

○**10.14.** а)  $2\pi$ , 6,3, 5,81;      в)  $\frac{\pi}{2}$ , 1,5, 1,6;

б) 0,  $-\frac{4}{\sqrt{2}}$ ,  $-\frac{15}{7}$ ;      г)  $-0,5$ ,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $-1$ .

**10.15.** На числовой прямой точками  $A$  и  $B$  (рис. 1) отмечены два из следующих чисел: 1,3, 2,5,  $\pi$ ,  $\frac{1}{\pi}$ . Какое число соответствует точке  $A$ , а какое — точке  $B$ ?

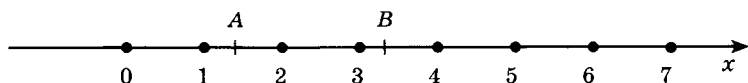


Рис. 1

- 10.16.** На числовой прямой точками  $C$  и  $D$  (рис. 2) отмечены два из следующих чисел:  $\sqrt{8}$ ,  $-1,2$ ,  $0,5\pi$ ,  $-\frac{\pi}{4}$ . Какое число соответствует точке  $C$ , а какое — точке  $D$ ?

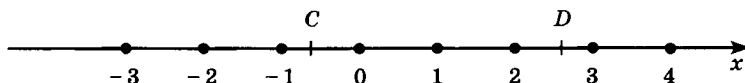


Рис. 2

- 10.17.** На числовой прямой отмечены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  (рис. 3).

Укажите координаты каждой из отмеченных точек, если известно, что ими являются числа:

- а)  $-\sqrt{3}$ ,  $-2$ ,  $-\frac{\pi}{2}$ ;      в)  $\sqrt{5}$ ,  $2,5$ ,  $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ;  
 б)  $\sqrt{3}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $1$ ;      г)  $\sqrt{20}$ ,  $4,5$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ .

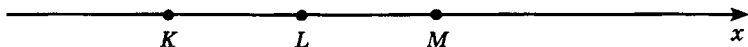


Рис. 3

- 10.18.** Найдите расстояние между точками числовой прямой, соответствующими числам:

- а) 88 и 107;      в)  $-28,11$  и  $43,88$ ;  
 б)  $-34,1$  и  $-43,8$ ;      г) 0 и  $-889,321$ .

- 10.19.** Отметьте на числовой прямой все точки, расстояние от которых до точки:

- а) 2,2 равно 0,6;      в)  $-12,4$  равно 6,2;  
 б) 1 меньше 0,6;      г)  $-2,5$  больше 4.

- 10.20.** а) Найдите все такие значения  $a$ , при которых расстояние между точками  $a$  и  $6a$  равно 8.

- б) Найдите все такие значения  $a$ , при которых расстояние между точками  $-a$  и  $6a$  равно 3.

- 10.21.** а) Найдите все такие значения  $a$ , при которых расстояние между точками  $a$  и  $-a$  равно  $a + 3$ .

- б) Найдите все такие значения  $a$ , при которых расстояние между точками  $a$  и  $-a$  равно  $a - 3$ .

○10.22. а) Найдите число, если оно находится между числами  $-4$  и  $7$ , а соответствующая ему точка делит отрезок  $[-4; 7]$  в отношении  $2 : 3$ , считая слева направо.

б) Найдите число, если оно находится между числами  $-10$  и  $25$ , а соответствующая ему точка делит отрезок  $[-10; 25]$  в отношении  $4 : 3$ , считая слева направо.

Как расположены на числовой прямой точки  $a$ ,  $0$ ,  $b$ , если:

10.23. а)  $ab < 0$ ,  $a + b < 0$ ;      в)  $ab > 0$ ,  $a + b < 0$ ;

б)  $ab < 0$ ,  $a + b > 0$ ;      г)  $ab > 0$ ,  $a + b > 0$ ?

10.24. а)  $ab > 0$ ,  $a - b > 0$ ;      в)  $ab < 0$ ,  $a - b < 0$ ;

б)  $ab > 0$ ,  $a - b < 0$ ;      г)  $ab < 0$ ,  $a - b > 0$ ?

○10.25. На числовой прямой отмечены точки, соответствующие числам  $0$  и  $1$ . С помощью циркуля и линейки постройте точки, соответствующие числам:

а)  $-3$  и  $5$ ;      в)  $\frac{2}{3}$  и  $-1\frac{3}{7}$ ;

б)  $0,25$  и  $-2,125$ ;      г)  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ .

○10.26. На числовой прямой отмечены точки  $A$  и  $B$ . С помощью циркуля и линейки постройте точки, соответствующие числам  $0$  и  $1$ , если:

а)  $A(-3)$ ,  $B(3)$ ;      б)  $A(-2)$ ,  $B(5)$ .

○10.27. На числовой прямой отмечены точки  $A$  и  $B$ . С помощью циркуля и линейки постройте точку, соответствующую числу  $0$ , если:

а)  $A(1)$ ,  $B(\sqrt{2})$ ;      б)  $A(-3)$ ,  $B(\sqrt{2})$ .

## § 11. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

Замените символ  $*$  знаком  $<$  или  $>$  так, чтобы получилось верное неравенство:

11.1. а)  $\frac{2}{5} * 0,41$ ;      в)  $-1,7 * -1\frac{3}{4}$ ;

б)  $-1\frac{5}{6} * -1,82$ ;      г)  $2,56 * 2\frac{7}{11}$ .

11.2. а)  $-3,1 + 3,5 * 2,1 - 2,59$ ;

б)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} * 1\frac{1}{5}$ ;

в)  $7,31 - 2,33 * 3,11 + 1,88$ ;

г)  $-\frac{2}{5} - 2\frac{1}{6} * -2\frac{1}{2}$ .

Запишите на математическом языке следующее высказывание:

- 11.3.** а) Сумма чисел  $a$  и  $b$  больше их произведения;  
б) квадрат числа  $m$  меньше числа  $n$ ;  
в) полусумма чисел  $k$  и  $l$  меньше их утроенной разности;  
г) утроенное число  $p$  больше, чем куб числа  $p$ .
- 11.4.** а) Разность чисел  $t$  и  $s$  больше их отношения;  
б) квадрат суммы чисел  $m$  и  $n$  не больше их разности;  
в) разность квадратов чисел  $k$  и  $l$  меньше их удвоенной суммы;  
г) произведение двух последовательных натуральных чисел не меньше квадрата большего из них.

**11.5.** Сравните числа:

- а) 2,8 и  $\sqrt{8}$ ;      в)  $\sqrt{10}$  и 3,4;  
б)  $\sqrt{3}$  и 1,7;      г)  $\sqrt{7}$  и 2,7.

**11.6.** Сравните числа  $a$  и  $b$ , если:

- а)  $a = \sqrt{5}$ ,  $b = \frac{4}{5}\sqrt{8}$ ;      в)  $a = \sqrt{8}$ ,  $b = \frac{4}{5}\sqrt{13}$ ;  
б)  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = \frac{7}{6}\sqrt{2}$ ;      г)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = \frac{3}{5}\sqrt{19}$ .

**11.7.** Известно, что  $a < b$ . Замените символ  $*$  знаком  $<$  или  $>$  так, чтобы получилось верное неравенство:

- а)  $a + 7,3 * b + 7,3$ ;      в)  $a - 125 * b - 125$ ;  
б)  $-5a * -5b$ ;      г)  $0,1a * 0,1b$ .

**11.8.** Какое из чисел  $m$  или  $n$  больше, если:

- а)  $m + 12 < n + 12$ ;      в)  $-0,3 - m > -0,3 - n$ ;  
б)  $3,5 - m > 3,5 - n$ ;      г)  $4,9 + m < 4,9 + n$ ?

Сравните числа  $a$  и  $b$ , если:

**11.9.** а)  $a - b = 1,21$ ;      в)  $a = b - 0,3$ ;

- б)  $\frac{a-b}{2} > 1$ ;      г)  $\frac{1}{a-b} > 7$ .

**11.10.** а)  $3 + 0,4a < 3 + 0,4b$ ;      в)  $4a + b \leq 4b + a$ ;

- б)  $\frac{a-2}{2} < \frac{b-a}{-2}$ ;      г)  $a - 2b > b - 2a$ .



**11.11.** а) Известно, что  $a, b, c, d$  — положительные числа, причём  $a > b, d < b, c > a$ . Расположите в порядке возрастания числа  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ .

б) О положительных числах  $a, b, c, d$  известно, что  $a < b, c > d$  и  $a > c$ . Расположите в порядке убывания числа  $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ .

**11.12.** О положительных числах  $a, b, c, d$  известно, что  $a < b, c > d$  и  $a > c$ . Сравните числа:

а)  $b$  и  $c$ ;      б)  $ab$  и  $ac$ ;      в)  $b$  и  $d$ ;      г)  $\frac{a}{c}$  и  $\frac{b}{d}$ .

**11.13.** Зная, что  $k > l$ , расположите в порядке возрастания числа:  $0,2 + k; l; l - 12; k; k + 2,6; l - 1,45$ .

**11.14.** а) Расположите в порядке возрастания числа:

$$a - 3; a + 8; a - \sqrt{11}; a - c^2 - 11; \frac{3a + 25,7}{3}.$$

б) Расположите в порядке убывания числа:

$$c^2 - 0, (3); c^2 - \frac{101}{301}; c^2 + \sqrt{c^2 + 3}; c^2 - 8\sqrt{c^2 + 3}; c^2.$$

**11.15.** Сложите почленно неравенства:

- а)  $5 > 2$  и  $-3 < 1$ ;  
б)  $7,5 < 11,7$  и  $-4,7 > -5,8$ ;  
в)  $0,2 < 3$  и  $2,8 > 1,7$ ;  
г)  $-3,9 > -7,2$  и  $6,5 < 14,7$ .

**11.16.** а) Докажите, что если  $a > 2$ , то:

$$1) -2a < -4; \quad 2) 0,5a > 1.$$

б) Докажите, что если  $m < 4,5$ , то:

$$1) -\frac{m}{3} > -1,5; \quad 2) \frac{m}{1,5} < 3.$$

**11.17.** а) Докажите, что если  $b > 0,5$ , то:

$$1) 2b + 4 > 5; \quad 2) -7b - 2 < -5,5.$$

б) Докажите, что если  $n < -3$ , то:

$$1) -\frac{n}{8} - \frac{1}{4} > \frac{1}{8}; \quad 2) \frac{n}{6} + \frac{2}{9} < -\frac{5}{18}.$$

**О11.18.** Докажите, что:

- а) если  $a > 2$ ,  $b > 3$ , то  $3a + 5b > 21$ ;
- б) если  $a < 2b$ ,  $b < c$ , то  $2a < 4c$ ;
- в) если  $a > 3$ ,  $b > 5$ , то  $2a + 4b > 26$ ;
- г) если  $a \geq 5b$ ,  $b \geq 2c$ , то  $3a \geq 30c$ .

Всегда ли верно, что:

- О11.19.** а) если  $a > 3$ ,  $b > 5$ , то  $ab > 15$ ;  
б) если  $a < 2$ ,  $b < 3$ , то  $ab < 6$ ;  
в) если  $a > 4$ , то  $a^2 > 16$ ;  
г) если  $a < 6$ , то  $a^2 < 36$ ?

- О11.20.** а) если  $a > 1$ , то  $\frac{6}{a} < 6$ ;      в) если  $a < 5$ , то  $\frac{15}{a} > 3$ ;  
б) если  $a < 2$ , то  $\frac{4}{a} > 2$ ;      г) если  $a > 7$ , то  $\frac{14}{a} < 2$ ?

**О11.21.** Оцените значение выражения:

- а)  $2k + 3l$ , если  $k > 3$ ,  $l > 7$ ;
- б)  $12 - 4n - 3m$ , если  $m > 1$ ,  $n > 4$ ;
- в)  $s - 3p$ , если  $p > 2$ ,  $s < 5$ ;
- г)  $16 - 3y + 4x$ , если  $x > 6$ ,  $y < 12$ .

**О11.22.** Известно, что  $10 < a < 16$ . Оцените значение выражения:

- а)  $0,5a$ ;      в)  $-3a$ ;
- б)  $a - 16$ ;      г)  $2a + 1$ .

**О11.23.** Известно, что  $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$ . Оцените значение выражения:

- а)  $2\sqrt{7}$ ;      б)  $2 + 2\sqrt{7}$ ;      в)  $-\sqrt{7}$ ;      г)  $3 - \sqrt{7}$ .

**О11.24.** Известно, что  $8 < a < 10$  и  $1 < b < 2$ . Оцените значение выражения:

- а)  $\frac{1}{4}a + b$ ;      б)  $a - \frac{1}{2}b$ ;      в)  $ab$ ;      г)  $\frac{a}{b}$ .

**О11.25.** Известно, что  $a > b + 3$ ,  $b + 1 > 7$ . Докажите, что  $a > 9$ .

Докажите, что при любых значениях переменных справедливо неравенство:

- 11.26.** а)  $3(x + 1) + x < 4(2 + x)$ ;      в)  $2y^2 - 6y + 1 > 2y(y - 3)$ ;  
б)  $m(m + n) \geq mn$ ;      г)  $c^2 - d^2 \geq -2d^2 - 1$ .

- 11.27.** а)  $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ ;      в)  $2pq \leq p^2 + q^2$ ;  
б)  $9m^2 + 6mn \geq -n^2$ ;      г)  $4c^2 + 9d^2 \geq 12cd$ .

○11.28. Можно ли утверждать, что  $a > b$ , если

а)  $3a + 12 > 3b + 10$ ;      в)  $7a > 5b$ ;

б)  $\frac{2a}{b} > 2$ ;      г)  $\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ?

Всегда ли верно, что:

○11.29. а) Если  $x^2y \geq 0$ , то  $y \geq 0$ ;

б) если  $\frac{x}{y^2} \geq 0$ , то  $x \geq 0$ ;

в) если  $xy^2 < 0$ , то  $x < 0$ ;

г) если  $\frac{x^2}{y} \geq 0$ , то  $y > 0$ ?

○11.30. а) Если  $\frac{2}{a-3} > 1$ , то  $3 < a < 5$ ;

б) если  $\frac{1}{a-2} < 1$ , то  $a > 3$ ;

в) если  $\frac{8}{a-2} > 2$ , то  $2 < a < 6$ ;

г) если  $\frac{12}{a-1} < 3$ , то  $a > 5$ ?

Сравните числа  $a$  и  $b$ , если:

○11.31. а)  $a = \sqrt{2} + \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{5} + 2$ ;

б)  $a = 2 + \sqrt{11}$ ,  $b = \sqrt{5} + \sqrt{10}$ ;

в)  $a = \sqrt{7} + \sqrt{5}$ ,  $b = 3 + \sqrt{3}$ ;

г)  $a = \sqrt{3} + \sqrt{15}$ ,  $b = 4 + \sqrt{2}$ .

○11.32. а)  $a = \sqrt{37} - \sqrt{14}$ ,  $b = 6 - \sqrt{15}$ ;

б)  $a = \sqrt{11} - \sqrt{10}$ ,  $b = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ ;

в)  $a = \sqrt{17} - \sqrt{15}$ ,  $b = \sqrt{7} - \sqrt{5}$ ;

г)  $a = \sqrt{10} - \sqrt{7}$ ,  $b = \sqrt{11} - \sqrt{6}$ .

○11.33. Докажите, что:

а)  $\sqrt{15} + \sqrt{24} < 9$ ;

б)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2011}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2012} < 1$ ;

в)  $\sqrt{37} + \sqrt{49,01} > 12,995$ ;

г)  $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2013}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2012} > 1$ .

○11.34. Пусть  $a^2 + b^2 = 1$ , где  $a$  и  $b$  — положительные числа. Докажите, что:

а)  $a^2 < 1$ ;      в)  $a^3 < a^2$ ;

б)  $b > b^2$ ;      г)  $a + b > 1$ .

○11.35. а) Пусть  $-4 < b < 3$ . Найдите множество значений выражения  $b^2$ .

б) Пусть  $\frac{2}{3} < b < 2$ . Найдите множество значений выражения  $b^{-2}$ .

○11.36. а) Пусть  $0,5 < c < 4$ . Найдите множество значений выражения  $\frac{1}{c}$ .

б) Пусть  $-0,5 < c < 4$ , но  $c \neq 0$ . Найдите множество значений выражения  $\frac{1}{c}$ .

○11.37. а) Пусть  $-3 < s < 5$ . Найдите множество значений выражения  $\frac{8}{6-s}$ .

б) Пусть  $2 < t < 3$ . Найдите множество значений выражения  $\frac{8}{t-5}$ .

Сколько целочисленных значений может принимать выражение:

○11.38. а)  $12a - 10b$ , если  $-\frac{8}{3} < a < 8$ ;  $-6 < b < 4,8$ ;

б)  $3,5p - 12q$ , если  $-2 < p < -0,1$ ;  $-0,5 < q < 7?$

○11.39. а)  $2a - \frac{1}{b}$ , если  $-\frac{5}{2} < a < 7,12$ ;  $-2 < b < -0,8$ ;

б)  $\frac{2}{p} + \frac{4}{q}$ , если  $-2 < p < -0,1$ ;  $0,25 < q < 7?$

●11.40. а) Известно, что  $\frac{6a}{b-1}$  — целое число, делящееся на 9, и  $1,5 < a < 2,5$ ;  $0,1 < b < 0,4$ . Найдите это число.

б) Известно, что  $\frac{1,4+a}{b}$  — целое число и  $-1,1 < a < 2,2$ ;  $-4 < b < -2,25$ . Найдите это число.

○11.41. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

а)  $3b - 0,4a^2$ , если  $-5 \leq a \leq -1,5$ ;  $-0,25 \leq b \leq 1,3$ ;

б)  $4a^2 - \frac{2}{b}$ , если  $-6 \leq a \leq -\sqrt{2}$ ;  $3,2 \leq b \leq 4$ ;

в)  $2a + ab$ , если  $-16 \leq a \leq -5$ ;  $-12 \leq b \leq -4$ ;

г)  $-4a - ab$ , если  $16 \leq a \leq 45$ ;  $-2 \leq b \leq -1$ .

○11.42. а) Пусть точка  $M(x; y)$  принадлежит прямоугольнику  $ABCD$ :  $A(-3; 8)$ ;  $B(-3; 1)$ ;  $C(5; 1)$ ;  $D(5; 8)$ . Какие значения для таких точек  $M$  может принимать выражение  $2x^2 - 3y$ ?

б) Пусть точка  $N(x; y)$  принадлежит прямоугольнику  $EFPK$ :  $E(2; -5)$ ;  $F(2; 3)$ ;  $K(-6; -5)$ ;  $P(-6; 3)$ . Какие значения для таких точек  $N$  может принимать выражение  $4x + y^2$ ?

## § 12. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ , ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

12.1. Постройте график функции  $y = \sqrt{x}$ . С помощью графика найдите:

а) значения  $y$  при  $x = 4$ ; 7; 16;

б) значения  $x$ , если  $y = 0$ ; 1; 3;

в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[0; 4]$ ;

г) при каких значениях  $x$  график функции расположен выше прямой  $y = 1$ , ниже прямой  $y = 1$ .

**12.2.** Используя график функции  $y = \sqrt{x}$ , найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = 0; 1; 2\frac{1}{4}$ ;
- б) значения  $x$ , если  $y = 2; 2,5; 4$ ;
- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[1; 9]$ ;
- г) при каких значениях  $x$  график функции расположен выше прямой  $y = 2$ , ниже прямой  $y = 2$ .

**12.3.** Постройте график функции  $y = -\sqrt{x}$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = 1; 2\frac{1}{4}; 9$ ;
- б) значения  $x$ , если  $y = 0; -2; -4$ ;
- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[2; 4]$ ;
- г) при каких значениях  $x$  график функции расположен выше прямой  $y = -2$ , ниже прямой  $y = -2$ .

**12.4.** Не выполняя построения, определите, принадлежит ли графику функции  $y = \sqrt{x}$  точка:

- а)  $A(2; \sqrt{2})$ ;      в)  $C(6,25; 2,5)$ ;
- б)  $B(1; 0)$ ;      г)  $D(-9; 3)$ .

**12.5.** Не выполняя построения, определите, принадлежит ли графику функции  $y = -\sqrt{x}$  точка:

- а)  $A(144; -12)$ ;      в)  $C(3; -\sqrt{3})$ ;
- б)  $B(-4; 2)$ ;      г)  $D(2,25; 1,5)$ .

**12.6.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \sqrt{x}$ :

- а) на отрезке  $[0; 1]$ ;
- б) на полуинтервале  $(3; 9]$ ;
- в) на отрезке  $[1; 4]$ ;
- г) на луче  $[5; +\infty)$ .

**12.7.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = -\sqrt{x}:$$

- а) на отрезке  $[0; 4]$ ;
- б) на луче  $[3; +\infty)$ ;
- в) на отрезке  $[1; 9]$ ;
- г) на полуинтервале  $(2; 9]$ .

**12.8.** Решите графически уравнение:

- а)  $\sqrt{x} = x$ ;                      в)  $\sqrt{x} = 2$ ;
- б)  $-\sqrt{x} = x - 2$ ;            г)  $\sqrt{x} = -x^2$ .

**12.9.** Решите графически систему уравнений:

- а)  $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$
- б)  $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = \frac{1}{2}x - 4; \end{cases}$
- в)  $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2x - 1; \end{cases}$
- г)  $\begin{cases} y = -\sqrt{x}, \\ y = -\frac{1}{2}x. \end{cases}$

**12.10.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x}$ . Найдите:

- а)  $f(9)$ ,  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ,  $f(6,25)$ ;
- б)  $f(a)$ ,  $f(-a)$ ,  $f(2a)$ ;
- в)  $f(a+1)$ ,  $f(2-a)$ ,  $f(3a-1)$ ;
- г)  $f(a)+1$ ,  $f(2a)-1$ ,  $f(a-3)+1$ .

**12.11.** Дано:  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = x^2$ . Докажите, что:

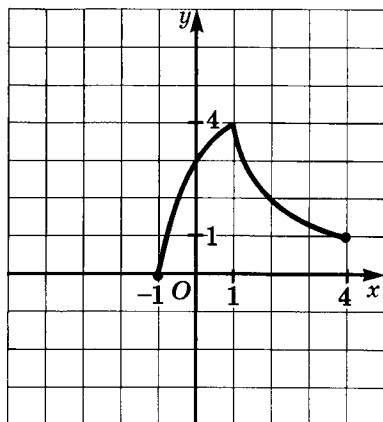
- а)  $f(x^4) = g(x)$ ;            б)  $(f(x))^8 = g(x^2)$ .

**12.12.** Зная, что  $f(x) = \sqrt{x}$ , решите уравнение:

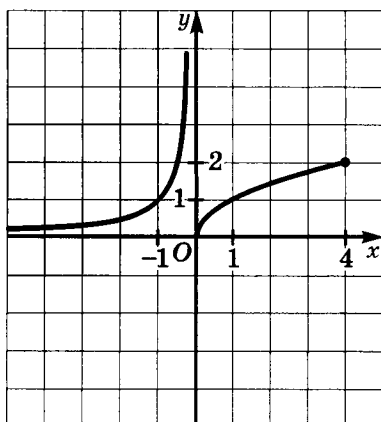
- а)  $f(x-1) = 3$ ;            б)  $f(2x) = 4$ .

**12.13.** Укажите, на каком промежутке выпукла вверх, а на каком выпукла вниз функция, график которой изображён:

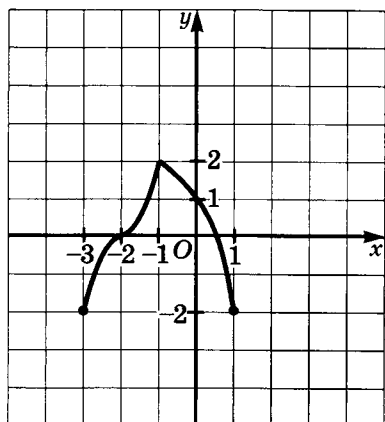
- а) на рис. 4;      в) рис. 6;  
б) рис. 5;      г) рис. 7.



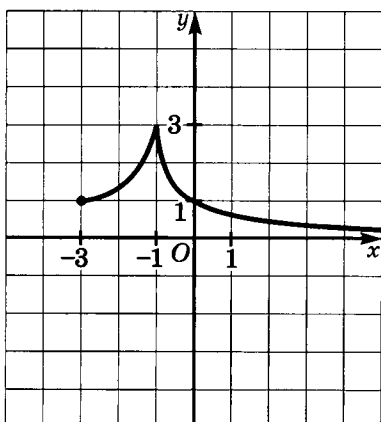
**Рис. 4**



**Рис. 5**



**Рис. 6**



**Рис. 7**

○12.14. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

- а) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ .  
б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .  
в) Перечислите свойства функции.



○12.15. Дана функция  $y = f(x)$ , где:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x - 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 1; \\ -\sqrt{x}, & \text{если } 1 < x \leq 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$

1) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(1)$ ,  $f(4)$ ,  $f(9)$ .

2) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

3) Перечислите свойства функции.

12.16. Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Укажите, какому промежутку принадлежит переменная  $x$ , если на этом промежутке:

$$\text{а) } y_{\text{наим}} = 0, y_{\text{наиб}} = 1; \quad \text{б) } y_{\text{наим}} = 2, y_{\text{наиб}} = 4.$$

12.17. Дана функция  $y = -\sqrt{x}$ . Укажите, какому промежутку принадлежит переменная  $x$ , если на этом промежутке:

$$\text{а) } y_{\text{наим}} = -3, y_{\text{наиб}} = 0; \quad \text{б) } y_{\text{наим}} = -2, y_{\text{наиб}} = -1.$$

12.18. Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Укажите, какому промежутку принадлежит переменная  $y$ , если:

$$\text{а) } x \in [0; 9]; \quad \text{в) } x \in [3; 9];$$

$$\text{б) } x \in [4; +\infty); \quad \text{г) } x \in [1; 5].$$

12.19. Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Укажите, какому промежутку принадлежит переменная  $x$ , если:

$$\text{а) } y \in [1; 3]; \quad \text{в) } y \in [2; 4];$$

$$\text{б) } y \in [2; +\infty); \quad \text{г) } y \in [3; +\infty).$$

12.20. Используя график функции  $y = \sqrt{x}$ , запишите промежуток, которому удовлетворяет переменная  $y$ , если:

$$\text{а) } 0 \leq x \leq 4; \quad \text{в) } 2 < x < 9;$$

$$\text{б) } x > 1; \quad \text{г) } x \leq 4.$$

12.21. Используя график функции  $y = \sqrt{x}$ , запишите промежуток, которому удовлетворяет переменная  $x$ , если:

$$\text{а) } 0 \leq y \leq 2; \quad \text{б) } y > 1; \quad \text{в) } 2 < y < 3; \quad \text{г) } y \leq 3.$$

12.22. Используя график функции  $y = -\sqrt{x}$ , определите, какому промежутку принадлежит переменная  $y$ , если:

$$\text{а) } x \in [1; 3]; \quad \text{в) } x \in [2; 4];$$

$$\text{б) } x \in [4; +\infty); \quad \text{г) } x \in [1; +\infty).$$

○12.23. Докажите, что функция является убывающей:

а)  $y = -\sqrt{x}$ ;      б)  $y = \sqrt{-x}$ .

○12.24. Постройте график функции:

а)  $y = 2\sqrt{x}$ ;      в)  $y = 0,5\sqrt{x}$ ;

б)  $y = -0,5\sqrt{x}$ ;      г)  $y = -2\sqrt{x}$ .

○12.25. Решите графически уравнение:

а)  $2\sqrt{x} = x$ ;

б)  $2\sqrt{x} = 3 - x$ ;

в)  $-2\sqrt{x} = x - 8$ ;

г)  $-\sqrt{x} = 3x^2$ .

○12.26. Постройте график функции и опишите её свойства:

а)  $y = \sqrt{-x}$ ;      б)  $y = -\sqrt{-x}$ .

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○12.27. а)  $y = \sqrt{-x}$  на  $[-4; -1]$ ;      в)  $y = \sqrt{-x}$  на  $[-16; -6]$ ;

б)  $y = \sqrt{-x}$  на  $[-9; -5]$ ;      г)  $y = \sqrt{-x}$  на  $(-\infty; -2]$ .

○12.28. а)  $y = -\sqrt{-x}$  на  $[-16; -4]$ ;      в)  $y = -\sqrt{-x}$  на  $[-8; -5]$ ;

б)  $y = -\sqrt{-x}$  на  $(-10; -1]$ ;      г)  $y = -\sqrt{-x}$  на  $(-\infty; -9]$ .

○12.29. Постройте график уравнения:

а)  $x = y^2$ ;      в)  $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$ ;

б)  $x = \sqrt{y}$ ;      г)  $(x + \sqrt{y})(y - \sqrt{x}) = 0$ .

○12.30. Пусть прямая, параллельная оси ординат, пересекает ось абсцисс в точке  $A$  (с положительной абсциссой), график функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $B$  и график функции  $y = 2\sqrt{x}$  в точке  $C$ . Докажите, что  $B$  — середина отрезка  $AC$ .

○12.31. Постройте на координатной плоскости фигуру, ограниченную графиком функции  $y = \sqrt{x}$ , прямой  $y = 6 - x$  и осью абсцисс, и укажите все точки с целочисленными координатами, принадлежащие этой фигуре.

○12.32. Постройте на координатной плоскости фигуру, ограниченную графиком функции  $y = \sqrt{x}$ , прямой  $y = 2 - x$  и осью ординат, и найдите длину наибольшего отрезка прямой, параллельной оси абсцисс, принадлежащего этой фигуре.

- 12.33. Постройте на координатной плоскости фигуру, ограниченную прямой  $y = x - 2$  и графиками функций  $y = \sqrt{x}$  и  $y = -\sqrt{x}$ . Найдите точку этой фигуры, имеющую наибольшую абсциссу.
- 12.34. На графике функции  $y = x + \sqrt{x}$  найдите точку, равноудалённую от точек  $A(1; 0)$  и  $B(7; 0)$ .
- 12.35. Древнегреческий философ Архимед, вычисляя площади разных фигур, получил следующий результат. Если вершина параболы совпадает с вершиной прямоугольника, расположенного так, как это показано на рисунке 8, то площадь прямоугольника делится параболой в отношении 1 : 2. Используя этот результат, найдите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
- а)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = 0,5x$ ;      б)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = x^2$ .

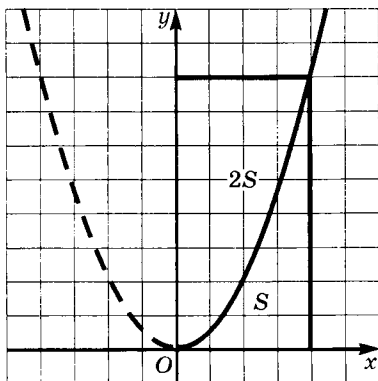


Рис. 8

## § 13. СВОЙСТВА КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ

Вычислите:

- 13.1. а)  $\sqrt{16 \cdot 25}$ ;      в)  $\sqrt{64 \cdot 36}$ ;  
 б)  $\sqrt{0,01 \cdot 0,09}$ ;      г)  $\sqrt{0,04 \cdot 1,21}$ .
- 13.2. а)  $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 9}$ ;      в)  $\sqrt{81 \cdot 100 \cdot 4}$ ;  
 б)  $\sqrt{0,64 \cdot 0,36 \cdot 9}$ ;      г)  $\sqrt{0,01 \cdot 81 \cdot 0,25}$ .
- 13.3. а)  $\sqrt{\frac{36}{121}}$ ;      б)  $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ ;      в)  $\sqrt{\frac{1}{64}}$ ;      г)  $\sqrt{1\frac{13}{36}}$ .

Вычислите:

13.4. а)  $\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{25}{9}}$ ;      в)  $\sqrt{\frac{9}{49} \cdot \frac{1}{16}}$ ;

б)  $\sqrt{1\frac{9}{16} \cdot \frac{49}{81}}$ ;      г)  $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$ .

13.5. а)  $\sqrt{5^4}$ ;      б)  $\sqrt{(-2)^8}$ ;      в)  $\sqrt{2^{12}}$ ;      г)  $\sqrt{(-5)^2}$ .

13.6. а)  $\sqrt{3^4 \cdot 5^2}$ ;      б)  $\sqrt{2^6 \cdot 7^4}$ ;      в)  $\sqrt{7^2 \cdot 3^6}$ ;      г)  $\sqrt{2^4 \cdot 5^2}$ .

Используя свойства квадратного корня, найдите с помощью таблицы квадратов значение выражения:

13.7. а)  $\sqrt{115\,600}$ ;      в)  $\sqrt{608\,400}$ ;

б)  $\sqrt{577\,600}$ ;      г)  $\sqrt{902\,500}$ .

13.8. а)  $\sqrt{20,25}$ ;      б)  $\sqrt{43,56}$ ;      в)  $\sqrt{96,04}$ ;      г)  $\sqrt{37,21}$ .

13.9. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{a^2}$ , если  $a = 15$ ;      в)  $-3\sqrt{b^6}$ , если  $b = 2$ ;

б)  $2\sqrt{a^4}$ , если  $a = 7$ ;      г)  $5\sqrt{y^8}$ , если  $y = -2$ .

Упростите выражение\*:

13.10. а)  $\sqrt{9a^{16}}$ ;      б)  $\sqrt{36b^8}$ ;      в)  $\sqrt{49c^4}$ ;      г)  $\sqrt{81d^6}$ .

13.11. а)  $-5\sqrt{4x^2}$ ;      в)  $-0,1\sqrt{100z^8}$ ;

б)  $-3\sqrt{9y^6}$ ;      г)  $-\sqrt{0,25t^2}$ .

13.12. а)  $\sqrt{x^2y^4}$ ;      б)  $\sqrt{z^6t^8}$ ;      в)  $\sqrt{m^{12}n^{16}}$ ;      г)  $\sqrt{p^8q^{10}}$ .

13.13. а)  $\sqrt{25a^4b^6}$ ;      в)  $\sqrt{36m^2n^8}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{81}{49}p^{12}q^{26}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{1}{4}r^{18}s^2}$ .

13.14. а)  $\sqrt{\frac{4a^2}{b^6}}$ ;      б)  $\sqrt{\frac{169a^{18}}{25b^{30}}}$ ;      в)  $\sqrt{\frac{49a^{18}}{81b^6}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{576a^{12}}{25b^{26}}}$ .

---

\*Всюду в этом параграфе предполагается, что переменные принимают только положительные значения.

Используя свойства квадратных корней, найдите значение числового выражения:

**13.15.** а)  $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ ;      в)  $\sqrt{63} \cdot \sqrt{7}$ ;

б)  $\sqrt{45} \cdot \sqrt{5}$ ;      г)  $\sqrt{10} \cdot \sqrt{90}$ .

**13.16.** а)  $\sqrt{1,3} \cdot \sqrt{5,2}$ ;      в)  $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{10}$ ;

б)  $\sqrt{2,8} \cdot \sqrt{0,7}$ ;      г)  $\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{50}$ .

**13.17.** а)  $\sqrt{0,05} \cdot \sqrt{45}$ ;      в)  $\sqrt{2,7} \cdot \sqrt{1,2}$ ;

б)  $\sqrt{1,92} \cdot \sqrt{3}$ ;      г)  $\sqrt{16,9} \cdot \sqrt{0,4}$ .

**13.18.** а)  $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{160}}$ ;      б)  $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{12}}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{117}}{\sqrt{52}}$ ;      г)  $\frac{\sqrt{999}}{\sqrt{111}}$ .

**13.19.** а)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}}$ ;      б)  $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{192}}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{242}}$ ;      г)  $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{27}}$ .

**О13.20.** Вычислите:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-4} \cdot (3)^{-2}$ ;      в)  $(\sqrt{6})^{-4} + \left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ ;

б)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{-4} : (3)^{-3}$ ;      г)  $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot (\sqrt{6})^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2}$ .

**13.21.** Найдите значение выражения наиболее рациональным способом:

а)  $\sqrt{13^2 - 12^2}$ ;      в)  $\sqrt{41^2 - 40^2}$ ;

б)  $\sqrt{25^2 - 24^2}$ ;      г)  $\sqrt{85^2 - 84^2}$ .

Найдите значение выражения:

**13.22.** а)  $\sqrt{8^2 + 15^2}$ ;      в)  $\sqrt{5^2 + 12^2}$ ;

б)  $\sqrt{145^2 - 144^2}$ ;      г)  $\sqrt{313^2 - 312^2}$ .

**13.23.** а)  $\sqrt{72,5^2 - 71,5^2}$ ;      в)  $\sqrt{98,5^2 - 97,5^2}$ ;

б)  $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$ ;      г)  $\sqrt{21,8^2 - 18,2^2}$ .

○13.24. Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{\frac{165^2 - 124^2}{164}}$ ;      в)  $\sqrt{\frac{98}{176^2 - 112^2}}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{149^2 - 76^2}{457^2 - 384^2}}$ ;      г)  $\sqrt{\frac{145,5^2 - 96,5^2}{193,5^2 - 31,5^2}}$ .

13.25. Докажите, что:

а)  $20\sqrt{\frac{a}{400}} = \sqrt{a}$ ;      в)  $\sqrt{c} = \frac{1}{15} \cdot \sqrt{225c}$ ;

б)  $\sqrt{b} = \frac{1}{13} \cdot \sqrt{169b}$ ;      г)  $12 \cdot \sqrt{\frac{d}{144}} = \sqrt{d}$ .

13.26. Зная, что  $\sqrt{60} \approx 7,7$ , найдите приближённое значение выражения:

а)  $\sqrt{0,6}$ ;      б)  $\sqrt{240}$ ;      в)  $\sqrt{6000}$ ;      г)  $\sqrt{540}$ .

13.27. Зная, что  $\sqrt{90} \approx 9,5$ , найдите приближённое значение выражения:

а)  $\sqrt{810}$ ;      б)  $\sqrt{360} + 2$ ;      в)  $\sqrt{2250}$ ;      г)  $\sqrt{9000} - 4$ .

Найдите, если это возможно, такие целые числа  $a$  и  $b$ , что:

○13.28. а)  $(3 - 5\sqrt{2})^2 = a + b\sqrt{2}$ ;      в)  $(\sqrt{2} + 7\sqrt{3})^2 = a + b\sqrt{6}$ ;  
б)  $(2 - 3\sqrt{3})^2 = a - b\sqrt{3}$ ;      г)  $(3\sqrt{20} - 2\sqrt{15})^2 = a + b\sqrt{3}$ .

○13.29. а)  $(1 - a\sqrt{3})^2 = b - 12\sqrt{3}$ ;      в)  $(a - 3\sqrt{5})^2 = b + 12\sqrt{5}$ ;  
б)  $(a + 3\sqrt{2})^2 = 13 + b\sqrt{2}$ ;      г)  $(5 - a\sqrt{6})^2 = 49 - b\sqrt{6}$ .

○13.30. Найдите целые числа  $a$  и  $b$  такие, что справедливо равенство:

а)  $(a + b\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ ;

б)  $(a\sqrt{2} + b\sqrt{3})^2 = 11 + 4\sqrt{6}$ ;

в)  $(a - b\sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ ;

г)  $(a\sqrt{2} - b\sqrt{5})^2 = 22 - 4\sqrt{10}$ .

Упростите выражение:

○13.31. а)  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ ;

б)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ ;

в)  $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}}$ ;

г)  $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ .

○13.32. а)  $\sqrt{2x - 1 + 2\sqrt{x(x - 1)}}$ ,  $x \geq 1$ ;

б)  $\sqrt{2x - 1 - 2\sqrt{x(x - 1)}}$ ,  $x \geq 1$ .

●13.33. Докажите, что  $\sqrt{16 + 6\sqrt{7}} + \sqrt{32 - 10\sqrt{7}}$  — натуральное число.

13.34. Докажите, что:

а)  $a\sqrt{b} = \begin{cases} -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a < 0, \\ \sqrt{a^2b}, & \text{если } a > 0; \end{cases}$

б)  $\sqrt{ab} = \begin{cases} -a\sqrt{b}, & \text{если } a < 0, \\ a\sqrt{b}, & \text{если } a > 0. \end{cases}$

Найдите все допустимые значения переменных, входящих в тождество:

13.35. а)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ;

б)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ ;

в)  $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$ ;

г)  $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{b}$ .

13.36. а)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-b}}$ ;

в)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ ;

г)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}$ .

**13.37.** Найдите все допустимые значения переменных, входящих в тождество:

а)  $\sqrt{a^6} = a^3$ ;

б)  $\sqrt{xy^4} = y \cdot \sqrt{xy^2}$ ;

в)  $\sqrt{a^6} = -a^3$ ;

г)  $\sqrt{-xy^4} = -y \cdot \sqrt{-xy^2}$ .

**○13.38.** Найдите наименьшие натуральные числа  $m$  и  $n$ , при которых число  $a$  является натуральным числом; для таких  $m$  и  $n$  найдите число  $a$ :

а)  $a = \sqrt{6} \cdot \sqrt{2^m \cdot 3^n}$ ;      в)  $a = \sqrt{56} \cdot \sqrt{2^m \cdot 7^n}$ ;

б)  $a = \sqrt{108} \cdot \sqrt{n^m}$ ;      г)  $a = \sqrt{997} \cdot \sqrt{n^m}$ .

**○13.39.** Подберите две пары значений переменных, при которых заданное равенство верно, и две пары значений переменных, при которых заданное равенство неверно:

а)  $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ;      в)  $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ ;

б)  $\sqrt{ab} = a\sqrt{b}$ ;      г)  $\sqrt{ab} = ab$ .

**13.40.** Известно, что  $f(x) = -\sqrt{x}$ . Докажите, что:

а)  $f(4x) = 2f(x)$ ;      в)  $f(0,01x) = 0,1f(x)$ ;

б)  $f(x^4) = -(f(x))^4$ ;      г)  $f(x^5) = x^2f(x)$ .

Постройте график функции:

**○13.41.** а)  $y = (\sqrt{x})^2$ ;      в)  $y = (\sqrt{x^2})^2$ ;

б)  $y = (\sqrt{x})^4$ ;      г)  $y = (\sqrt{-x})^2$ .

**○13.42.** а)  $y = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{-x})^2 + 3$ ;

б)  $y = (\sqrt{x})^2 + 8 - x$ ;

в)  $y = (\sqrt{1-x})^2 + 1$ ;

г)  $y = (\sqrt{2-x})^2 + (\sqrt{x-1})^2 + x - 1$ .



Постройте график функции:

○13.43. а)  $y = \sqrt{2x} \cdot \sqrt{8x}$ ;

б)  $y = \sqrt{-2x} \cdot \sqrt{-0,125x}$ ;

в)  $y = (\sqrt{2x})^2$ ;

г)  $y = (\sqrt{-0,4x})^2$ .

○13.44. а)  $y = \frac{3x}{\sqrt{x}}$ ;

б)  $y = \frac{-2x}{\sqrt{-x}}$ .

○13.45. а)  $y = (1 + \sqrt{x})^2 + (1 - \sqrt{x})^2$ ;

б)  $y = 5 + (\sqrt{x-3})^2 + (\sqrt{x-4})^2$ ;

в)  $y = (1 + \sqrt{-x})^2 + (1 - \sqrt{-x})^2$ ;

г)  $y = 1 + (\sqrt{x-3})^2 + (\sqrt{4-x})^2$ .

13.46. Решите уравнение:

а)  $(x-3)(\sqrt{x}-1) = 0$ ;

б)  $(x+2)(\sqrt{x}-1) = 0$ ;

в)  $(x-3)(\sqrt{x}+1) = 0$ ;

г)  $(x-3)(\sqrt{-x}-1) = 0$ .

○13.47. При каких значениях параметра  $a$  уравнение:

а)  $(x-a)(\sqrt{-x}+1) = 0$  не имеет корней;

б)  $(x-a)(\sqrt{x}-2) = 0$  имеет два различных корня?

○13.48. При каких значениях параметра  $a$  уравнение:

а)  $\frac{x-a}{\sqrt{x}-1} = 0$  не имеет корней;

б)  $\frac{x-a}{\sqrt{-x}-2} = 0$  имеет корень?

## § 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИЮ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Вынесите множитель из-под знака корня:

14.1. а)  $\sqrt{36 \cdot 5}$ ; б)  $\sqrt{\frac{2}{25}}$ ; в)  $\sqrt{2 \cdot 144}$ ; г)  $\sqrt{\frac{121}{10}}$ .

14.2. а)  $\sqrt{\frac{25}{16 \cdot 2}}$ ; б)  $\sqrt{\frac{36 \cdot 2}{169 \cdot 5}}$ ; в)  $\sqrt{\frac{6 \cdot 49}{121}}$ ; г)  $\sqrt{\frac{144 \cdot 3}{7 \cdot 25}}$ .

14.3. а)  $\sqrt{12}$ ; б)  $\sqrt{275}$ ; в)  $\sqrt{20}$ ; г)  $\sqrt{108}$ .

14.4. а)  $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ ; б)  $\frac{1}{2}\sqrt{120}$ ; в)  $\frac{1}{10}\sqrt{200}$ ; г)  $\frac{1}{5}\sqrt{150}$ .

14.5. а)  $\sqrt{\frac{8}{27}}$ ; б)  $\sqrt{10\frac{1}{8}}$ ; в)  $\sqrt{\frac{40}{63}}$ ; г)  $\sqrt{1\frac{13}{32}}$ .

14.6. Сравните значения выражений:

а)  $A = 3\sqrt{50}$ ,  $B = 2\sqrt{98}$ ; в)  $A = 4\sqrt{48}$ ,  $B = 5\sqrt{27}$ ;

б)  $A = 3\sqrt{\frac{8}{9}}$ ,  $B = \frac{1}{2}\sqrt{48}$ ; г)  $A = \frac{1}{7}\sqrt{80}$ ,  $B = 2\sqrt{\frac{24}{49}}$ .

Вынесите множитель из-под знака корня\*:

14.7. а)  $\sqrt{4a}$ ; б)  $\sqrt{a^3}$ ; в)  $\sqrt{49d}$ ; г)  $\sqrt{c^7}$ .

14.8. а)  $\sqrt{x^{15}y^2}$ ; б)  $\sqrt{100x^3}$ ; в)  $\sqrt{x^8t^9}$ ; г)  $\sqrt{32y^4}$ .

14.9. а)  $\sqrt{\frac{x^3}{8y^3}}$ ; б)  $\sqrt{\frac{50m^4n^3}{9r^4}}$ ; в)  $\sqrt{\frac{81c^6}{a^3}}$ ; г)  $\sqrt{\frac{72a^6b^7}{49y^8}}$ .

Внесите множитель под знак корня:

14.10. а)  $2\sqrt{3}$ ; б)  $-11\sqrt{3}$ ; в)  $5\sqrt{2}$ ; г)  $-6\sqrt{2}$ .

14.11. а)  $\frac{1}{4}\sqrt{32}$ ; б)  $-\frac{2}{3}\sqrt{15}$ ; в)  $-\frac{5}{2}\sqrt{8}$ ; г)  $\frac{4}{7}\sqrt{35}$ .

---

\*Всюду в этом параграфе предполагается, что переменные принимают только положительные значения.

Внесите множитель под знак корня:

14.12. а)  $x\sqrt{12}$ ; б)  $-b\sqrt{10}$ ; в)  $z\sqrt{5}$ ; г)  $-d\sqrt{3}$ .

14.13. а)  $3x\sqrt{2x}$ ; в)  $0,2y\sqrt{5y}$ ;  
б)  $-3x^2\sqrt{\frac{1}{3}}$ ; г)  $-5m^6\sqrt{5m}$ .

○14.14. Расположите в порядке возрастания числа:

а) 6,  $2\sqrt{8}$ , 5,  $\sqrt{26}$ ; в) 4,  $3\sqrt{2}$ ,  $4\frac{1}{2}$ ,  $\sqrt{19}$ ;

б) 2,  $\sqrt{7}$ ,  $2\sqrt{3}$ , 3; г) 1,  $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ,  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ , 0,7.

14.15. Внесите множитель под знак корня, если известно, что  $a < 0$ :

а)  $a\sqrt{12}$ ; б)  $-a\sqrt{5}$ ; в)  $3a\sqrt{2}$ ; г)  $-2a\sqrt{7}$ .

Упростите выражение:

14.16. а)  $\sqrt{216} - 2\sqrt{6}$ ; в)  $\sqrt{20} + \sqrt{125}$ ;

б)  $5\sqrt{3} - \sqrt{300} - \sqrt{27}$ ; г)  $2\sqrt{125} + 2\sqrt{20} - \frac{1}{2}\sqrt{80}$ .

14.17. а)  $\sqrt{9a} + \sqrt{25a} - \sqrt{36a}$ ;

б)  $5\sqrt{3x} + \frac{1}{2}\sqrt{12x} - 10\sqrt{0,03x}$ ;

в)  $\sqrt{5b} - 2\sqrt{20b} - 3\sqrt{80b}$ ;

г)  $3\sqrt{2y} - \sqrt{8y} + 0,1\sqrt{200y}$ .

14.18. а)  $\sqrt{a^3b} + \frac{2}{3a}\sqrt{a^5b}$ ;

б)  $\sqrt{m^5} + 4m\sqrt{m^3} - m^2\sqrt{m}$ ;

в)  $2a\sqrt{a^7b} - \sqrt{a^9b}$ ;

г)  $\sqrt{81d^3} - 5d\sqrt{d} + \frac{3}{d}\sqrt{4d^5}$ .

Упростите выражение:

**14.19.** а)  $(6\sqrt{12} - \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$ ;      в)  $(2\sqrt{50} - 5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ ;  
б)  $(12\sqrt{45} - 6\sqrt{20}) : 3\sqrt{5}$ ;      г)  $(4\sqrt{75} + 2\sqrt{12}) : 2\sqrt{3}$ .

**14.20.** а)  $\sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$ ;      в)  $\sqrt{mn}(\sqrt{m} + \sqrt{n})$ ;  
б)  $(a + \sqrt{b})(2a - 3\sqrt{b})$ ;      г)  $(\sqrt{m} - 2\sqrt{n})(\sqrt{m} - \sqrt{n})$ .

Выполните действия, используя формулы сокращённого умножения:

**14.21.** а)  $(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ ;      в)  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ;  
б)  $(7 - 5\sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2})$ ;      г)  $(8 + 3\sqrt{7})(8 - 3\sqrt{7})$ .

**14.22.** а)  $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})$ ;      в)  $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$ ;  
б)  $(\sqrt{2x} - 3)(\sqrt{2x} + 3)$ ;      г)  $(\sqrt{3p} - \sqrt{q})(\sqrt{3p} + \sqrt{q})$ .

**14.23.** а)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$ ;      в)  $(\sqrt{m} - \sqrt{n})^2$ ;  
б)  $(\sqrt{x} - 3\sqrt{y})^2$ ;      г)  $(\sqrt{t} + 2\sqrt{x})^2$ .

**14.24.** а)  $(\sqrt{2} + 4)^2$ ;      в)  $(2 + \sqrt{17})^2$ ;  
б)  $(\sqrt{5} - 1)^2$ ;      г)  $(3 - \sqrt{8})^2$ .

**14.25.** а)  $(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2$ ;      в)  $(3\sqrt{5} - 5\sqrt{3})^2$ ;  
б)  $(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{120}$ ;      г)  $(6 - \sqrt{2})^2 + 3\sqrt{32}$ .

**14.26.** а)  $(\sqrt{m} - \sqrt{n})(m + \sqrt{mn} + n)$ ;  
б)  $(c + \sqrt{d})(c^2 - \sqrt{d} + d)$ ;  
в)  $(\sqrt{r} - 2\sqrt{n})(r + 2\sqrt{rn} + 4n)$ ;  
г)  $(2\sqrt{s} + 3t)(4s - 6t\sqrt{s} + 9t^2)$ .

**○14.27.** Раскройте скобки:

а)  $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)^2$ ;      в)  $(\sqrt{6} + \sqrt{2} - 1)^2$ ;  
б)  $(\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1)^2$ ;      г)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{5})^2$ .

Освободите дробь от иррациональности в знаменателе:

14.28. а)  $\frac{x}{\sqrt{7}}$ ; б)  $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ; в)  $\frac{y}{\sqrt{y}}$ ; г)  $\frac{42}{5\sqrt{p}}$ .

14.29. а)  $\frac{3}{\sqrt{a+b}}$ ; б)  $\frac{a+3}{\sqrt{a^2-9}}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt{c-d}}$ ; г)  $\frac{b-2}{\sqrt{4-b^2}}$ .

14.30. а)  $\frac{5}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ; б)  $\frac{3}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ ;  
 б)  $\frac{1}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}$ ; г)  $\frac{6}{(\sqrt{p}+\sqrt{q})^3}$ .

14.31. а)  $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$ ; в)  $\frac{6}{\sqrt{15}+\sqrt{12}}$ ; г)  $\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ .

14.32. а)  $\frac{1}{\sqrt{a+3}-2}$ ; б)  $\frac{2}{3-\sqrt{2x-1}}$ ;  
 б)  $\frac{y-3}{\sqrt{4-y}+1}$ ; г)  $\frac{3-b}{2-\sqrt{b+1}}$ .

○14.33. а)  $\frac{p-\sqrt{pq}+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}$ ; б)  $\frac{x-3\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-3}$ ;  
 б)  $\frac{4+2\sqrt{t}+t}{2+\sqrt{t}}$ ; г)  $\frac{a+2\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}}$ .

○14.34. а)  $\frac{10}{\sqrt{5}-\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{80}}$ ;  
 б)  $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$ ;  
 в)  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{24}-\sqrt{48}+\sqrt{108}}$ ;  
 г)  $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ .

Разложите выражение на множители методом вынесения общего множителя за скобки:

14.35. а)  $5+\sqrt{5}$ ; б)  $\sqrt{b}-b$ ; в)  $3-\sqrt{3}$ ; г)  $\sqrt{a}+a$ .

14.36. а)  $\sqrt{3}+15$ ; б)  $14-\sqrt{7}$ ;  
 б)  $8-4\sqrt{2}$ ; г)  $45-9\sqrt{5}$ .

Разложите выражение на множители методом вынесения общего множителя за скобки:

14.37. а)  $\sqrt{10} - \sqrt{6}$ ;      в)  $\sqrt{14} + \sqrt{35}$ ;  
б)  $2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}$ ;      г)  $7 + \sqrt{14} - \sqrt{7}$ .

14.38. а)  $a - 2\sqrt{a}$ ;      в)  $\sqrt{a} - 2a$ ;  
б)  $\sqrt{3b} - b$ ;      г)  $a + \sqrt{ab}$ .

14.39. а)  $a + b + \sqrt{a + b}$ ;      в)  $3a - 3b - 2\sqrt{a - b}$ ;  
б)  $\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{a + b}$ ;      г)  $a\sqrt{a - b} + \sqrt{a^2 - b^2}$ .

14.40. Разложите выражение на множители способом группировки:

а)  $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$ ;      в)  $a\sqrt{b} - \sqrt{a} + \sqrt{ab} - 1$ ;  
б)  $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$ ;      г)  $ab + a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + \sqrt{ab}$ .

Разложите выражение на множители, используя формулу разности квадратов:

14.41. а)  $a^2 - 5$ ;      б)  $25 - p$ ;      в)  $11 - b^2$ ;      г)  $m - 100$ .  
14.42. а)  $b - 3$ ;      б)  $16z - 5$ ;      в)  $a - c$ ;      г)  $7 - 64t$ .

Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

14.43. а)  $1 - 2\sqrt{p} + p$ ;      в)  $c - 2\sqrt{cd} + d$ ;  
б)  $x + 6y\sqrt{x} + 9y^2$ ;      г)  $q + 4p\sqrt{q} + 4p^2$ .  
14.44. а)  $49a - 14\sqrt{ab} + b$ ;      в)  $9m - 6\sqrt{mn} + n$ ;  
б)  $3c^2 + 10c\sqrt{3} + 25$ ;      г)  $2a + 2b\sqrt{2a} + b^2$ .

14.45. а)  $4 + 4\sqrt{3} + 3$ ;      в)  $2 + 2\sqrt{2} + 1$ ;  
б)  $3 - 2\sqrt{2}$ ;      г)  $7 - 4\sqrt{3}$ .

14.46. Сократите дробь:

а)  $\frac{a^2 - 7}{a - \sqrt{7}}$ ;      б)  $\frac{b + \sqrt{3}}{3 - b^2}$ ;      в)  $\frac{c^2 - 11}{c - \sqrt{11}}$ ;      г)  $\frac{b + \sqrt{21}}{21 - b^2}$ .

Сократите дробь:

14.47. а)  $\frac{x-9}{\sqrt{x}+3}$ ; б)  $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ ; в)  $\frac{9-\sqrt{t}}{t-81}$ ; г)  $\frac{\sqrt{r}+\sqrt{s}}{r-s}$ .

14.48. а)  $\frac{3\sqrt{x}-4\sqrt{y}}{9x-16y}$ ; б)  $\frac{121a^2-144b}{12\sqrt{b}-11a}$ ; в)  $\frac{25a-49b}{5\sqrt{a}+7\sqrt{b}}$ ; г)  $\frac{9\sqrt{ab}-4\sqrt{c}}{16c-81ab}$ .

14.49. а)  $\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{15}-3}$ ; в)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}$ ; г)  $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{10}}{\sqrt{21}+\sqrt{14}}$ .

14.50. а)  $\frac{4a+4\sqrt{3}}{3-a^2}$ ; б)  $\frac{x-y}{\sqrt{5y}-\sqrt{5x}}$ ; в)  $\frac{x-25}{3\sqrt{x}+15}$ ; г)  $\frac{\sqrt{mn}+n}{m-n}$ .

14.51. а)  $\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ; б)  $\frac{x+4\sqrt{xy}+4y}{x-4y}$ ; в)  $\frac{x^2-6x\sqrt{y}+9y}{3\sqrt{y}-x}$ ; г)  $\frac{x^2-5y}{x^2+5y-x\sqrt{20y}}$ .

14.52. а)  $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ ; б)  $\frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}-2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{c^3}-\sqrt{d^3}}{c+\sqrt{cd}+d}$ ; г)  $\frac{27+a\sqrt{a}}{3+\sqrt{a}}$ .

14.53. Упростите выражение:

а)  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{5y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5y}}$ ;  
 б)  $\frac{11\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{4\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{4\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{4\sqrt{x}}$ ;  
 в)  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2mn}} - \frac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}}{\sqrt{2mn}}$ ;  
 г)  $\frac{2\sqrt{c}-\sqrt{d}}{5\sqrt{c}} - \frac{8\sqrt{c}+6\sqrt{d}}{5\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{c}-3\sqrt{d}}{5\sqrt{c}}$ .

Упростите выражение:

$$14.54. \text{ а) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+3} + \frac{3}{\sqrt{a}+3}; \quad \text{в) } \frac{4}{\sqrt{q}-4} - \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q}-4};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-13} + \frac{13}{13-\sqrt{n}}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt{t}}{3-\sqrt{t}} + \frac{3}{\sqrt{t}-3}.$$

$$14.55. \text{ а) } \frac{a}{\sqrt{a}-3} - \frac{9}{\sqrt{a}-3}; \quad \text{в) } \frac{c}{\sqrt{c}+9} - \frac{81}{\sqrt{c}+9};$$

$$\text{б) } \frac{c}{\sqrt{c}-10} - \frac{20\sqrt{c}-100}{\sqrt{c}-10}; \quad \text{г) } \frac{d}{\sqrt{d}+7} + \frac{14\sqrt{d}+49}{\sqrt{d}+7}.$$

$$14.56. \text{ а) } \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{yz}}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{cd}} - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{dm}};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}-\sqrt{r}}{\sqrt{nr}}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{bc}}.$$

$$\circ 14.57. \text{ а) } \frac{4}{\sqrt{a}-5} + \frac{1}{\sqrt{a}}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{b}-2} - \frac{\sqrt{b}+3}{\sqrt{b}};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}} - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}.$$

$$\circ 14.58. \text{ а) } \frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-12} - \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-8}; \quad \text{в) } \frac{\sqrt{c}-2}{3\sqrt{c}+3} - \frac{3\sqrt{c}-4}{7\sqrt{c}+7};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{p}+1}{p-\sqrt{pq}} - \frac{\sqrt{q}+1}{\sqrt{pq}-q}; \quad \text{г) } \frac{\sqrt{d}+3}{\sqrt{cd}+d} - \frac{\sqrt{c}-3}{\sqrt{cd}+c}.$$

○14.59. Проверьте равенство:

$$\text{а) } \frac{2}{5+2\sqrt{6}} + \frac{2}{5-2\sqrt{6}} = 20;$$

$$\text{б) } \frac{6}{7-4\sqrt{3}} - \frac{6}{7+4\sqrt{3}} = \frac{144}{\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } \frac{3}{5\sqrt{2}-7} + \frac{3}{5\sqrt{2}+7} = 30\sqrt{2};$$

$$\text{г) } \frac{1}{9+4\sqrt{5}} - \frac{1}{9-4\sqrt{5}} = -2\sqrt{80}.$$



Докажите, что верно равенство:

○14.60. а)  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$ ;

б)  $\sqrt{23 - 4\sqrt{15}} = 2\sqrt{5} - \sqrt{3}$ ;

в)  $2 - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ;

г)  $\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = \sqrt{23 + 6\sqrt{10}}$ .

○14.61. а)  $(3 + 2\sqrt{2})(1 - \sqrt{2})^2 = 1$ ;

б)  $(\sqrt{3} - 1)^2(4 + 2\sqrt{3}) = 4$ ;

в)  $(7 + 4\sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^2 = 1$ ;

г)  $(\sqrt{2} - 3)^2(11 + 6\sqrt{2}) = 49$ .

○14.62. а)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$ ;

б)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}(2 + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 2$ ;

в)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$ ;

г)  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = -2$ .

○14.63. а) Докажите, что  $(1 - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ . Можно ли на основании этого утверждать, что  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$ ?

б) Докажите, что  $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ . Можно ли на основании этого утверждать, что  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ ?

○14.64. Какое из данных равенств верно? Ответ объясните.

а)  $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 5$ ;      б)  $\sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = 5 - \sqrt{3}$ .

Докажите тождество:

$$\textcircled{14.65.} \text{ а) } \frac{4\sqrt{ab}}{a-4b} + \frac{\sqrt{a}-2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+2\sqrt{b}} = \frac{a+4b}{a-4b};$$

$$\text{б) } \frac{2\sqrt{a}-3\sqrt{b}}{2\sqrt{a}+3\sqrt{b}} - \frac{12\sqrt{ab}}{9b-4a} = \frac{4a+9b}{4a-9b}.$$

$$\textcircled{14.66.} \text{ а) } \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}} + \frac{2a}{a-b} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}};$$

$$\text{б) } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{ab}}{b-a} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Упростите выражение:

$$\textcircled{14.67.} \text{ а) } \frac{\sqrt{a}}{x-3\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{x}-9}; \quad \text{в) } \frac{6\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}} : \frac{3\sqrt{an}}{2\sqrt{n}-2};$$

$$\text{б) } \frac{z-25}{z-3\sqrt{z}} : \frac{\sqrt{z}+5}{9-z}; \quad \text{г) } \frac{3c-3d}{c+\sqrt{cp}} \cdot \frac{\sqrt{c}+\sqrt{p}}{6\sqrt{d}-6\sqrt{c}}.$$

$$\textcircled{14.68.} \text{ а) } \frac{x-10\sqrt{x}+25}{3\sqrt{x}+12} : \frac{2\sqrt{x}-10}{x-16};$$

$$\text{б) } \frac{1-a}{4\sqrt{a}+8\sqrt{b}} \cdot \frac{a+4\sqrt{ab}+4b}{3-3\sqrt{a}};$$

$$\text{в) } \frac{c-25}{c+12\sqrt{c}+36} \cdot \frac{3\sqrt{c}+18}{2\sqrt{c}+10};$$

$$\text{г) } \frac{5\sqrt{m}-10\sqrt{n}}{\sqrt{m}-5} : \frac{4n-4\sqrt{mn}+m}{15-3\sqrt{m}}.$$

$$\textcircled{14.69.} \text{ а) } \frac{4x}{2\sqrt{x}-\sqrt{y}} : \frac{12x\sqrt{x}}{4x-y} : \frac{2x}{6x-3\sqrt{xy}};$$

$$\text{б) } \frac{a-16}{\sqrt{a}-3} \cdot \frac{1}{a+4\sqrt{a}} : \frac{4-\sqrt{a}}{a-3\sqrt{a}}.$$

Упростите выражение:

○14.70. а)  $\left(2 + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + 1}\right) \cdot \frac{3t + 3\sqrt{t}}{12\sqrt{t} + 8};$

б)  $\left(\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \frac{xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$

○14.71. а)  $\left(\sqrt{a} - \frac{a}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \frac{a - 1}{\sqrt{a}};$

б)  $\frac{1 - 2\sqrt{b}}{2\sqrt{b} + 1} + \frac{b + 3\sqrt{b}}{4b - 1} : \frac{3 + \sqrt{b}}{4\sqrt{b} + 2};$

в)  $\frac{\sqrt{cd} - d}{c + d} \cdot \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}} + \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}\right);$

г)  $\frac{a - 16}{\sqrt{a} + 3} \cdot \frac{1}{a + 4\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a} + 4}{a - 3\sqrt{a}}.$

Докажите тождество:

○14.72. а)  $\left(\frac{\sqrt{m}}{n - \sqrt{mn}} + \frac{\sqrt{n}}{m - \sqrt{mn}}\right) \cdot \frac{\sqrt{mn}}{\sqrt{n} + \sqrt{m}} = -1;$

б)  $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) \cdot \frac{a - b}{a^2 + ab} = \frac{1}{a};$

в)  $\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) : \left(\sqrt{x} - \frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right) = \frac{1}{y};$

г)  $\frac{z + 2\sqrt{z}}{\sqrt{z} - 2} : \left(\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z} - 2} - \frac{z - 12}{z - 4} - \frac{4}{z + 2\sqrt{z}}\right) = \frac{z}{2}.$

○14.73. а)  $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b - a}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab} + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) = \sqrt{a} + \sqrt{b};$

б)  $\frac{\sqrt{z} - 2}{4z - 16\sqrt{z} + 16} : \left(\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{z} - 4} - \frac{z - 12}{2z - 8} - \frac{2}{z + 2\sqrt{z}}\right) = \frac{\sqrt{z}}{4(\sqrt{z} + 2)}.$

○14.74. Упростите выражение:

а)  $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right) \cdot \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right)^{-1};$

б)  $\left(\sqrt{c} - \sqrt{d} + \frac{2\sqrt{cd}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{\sqrt{c} - \sqrt{d}} - \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c}}\right).$

○14.75. Упростите выражение:

$$\text{а) } \frac{\frac{x}{x-\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}}{\frac{x^2+2}{x^2+x\sqrt{2}}}; \quad \text{б) } \frac{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}{\frac{a^2+ab}{a-b}}.$$

○14.76. Найдите значение выражения

$$\frac{1}{4} \cdot (xa^{-1} - ax^{-1}) \cdot \left( \frac{a^{-1} - x^{-1}}{a^{-1} + x^{-1}} - \frac{a^{-1} + x^{-1}}{a^{-1} - x^{-1}} \right)$$

$$\text{при } a = \sqrt{2} + \sqrt{3}, \quad x = 0,2(13).$$

○14.77. Найдите значение выражения

$$\frac{1+ax^{-1}}{a^{-1}x^{-1}} \cdot \frac{a^{-1}}{a^{-1}x - ax^{-1}} : \frac{ax^{-1}}{x-a} \cdot x^{-2}$$

$$\text{при } a = -2,785, \quad x = \sqrt{13} - 1.$$

○14.78. Докажите тождество

$$\left( \left( \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} \right)^{-4} + 1 \right) : \left( \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a^2+1}} \right)^{-2} = \left( \sqrt{\frac{a+1}{2}} \right)^{-2}.$$

Упростите выражение:

$$\bullet 14.79. \text{ а) } \sqrt{\frac{x}{x-a^2}} : \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-a^2}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-a^2}} \right);$$

$$\text{б) } \left( \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a-b}} \right) : \left( 1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right).$$

$$\circ 14.80. \text{ а) } \left( \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a-b) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}};$$

$$\text{б) } \left( \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) : \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} - 2 \right) \right) : \left( 1 + \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

○14.81. Вычислите при заданном значении  $x$ :

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}, \quad x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

○14.82. Найдите значение выражения:

а)  $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2$ , если  $x = \sqrt{2} + 1$ ;

б)  $2a^2 - ab - b^2$  при  $a = \sqrt{5} + 1$  и  $b = \sqrt{5} - 1$ ;

в)  $3b^2 + 2b\sqrt{3} + 1$ , если  $b = 3\sqrt{3}$ ;

г)  $2a^2 - 5ab + 2b^2$  при  $a = \sqrt{6} + \sqrt{5}$  и  $b = \sqrt{6} - \sqrt{5}$ .

○14.83. Сравните значения числовых выражений  $A$  и  $B$ :

а)  $A = \frac{1}{3\sqrt{3} - 5} + \frac{1}{3\sqrt{3} + 5}$ ;  $B = \sqrt{30}$ ;

б)  $A = \frac{2}{4 + 2\sqrt{5}} - \frac{2}{4 - 2\sqrt{5}}$ ;  $B = \sqrt{24}$ ;

в)  $A = \frac{3}{2\sqrt{6} - 3} + \frac{3}{2\sqrt{6} + 3}$ ;  $B = \sqrt{3}$ ;

г)  $A = \frac{1}{2 + 3\sqrt{2}} - \frac{1}{2 - 3\sqrt{2}}$ ;  $B = \sqrt{2}$ .

○14.84. Упростите выражение:

а)  $\sqrt{36 - 10\sqrt{11}}$ ;      б)  $\sqrt{25 + 4\sqrt{34}}$ .

Проверьте равенство:

●14.85. а)  $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}} = 1$ ;

б)  $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}} + \sqrt{16 - 6\sqrt{7}} = 1$ .

●14.86.  $\left( \frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} \right)^2 = 8$ .

●14.87. Упростите выражение  $\sqrt{10 + 8\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ .

●14.88. Докажите тождество

$$\frac{b^2 - 3b - (b - 1)\sqrt{b^2 - 4} + 2}{b^2 + 3b - (b + 1)\sqrt{b^2 - 4} + 2} \cdot \frac{\sqrt{b + 2}}{\sqrt{b - 2}} = \frac{1 - b}{1 + b},$$

если  $b > 2$ .

## § 15. АЛГОРИТМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Используя алгоритм извлечения квадратного корня, вычислите квадратный корень из числа:

15.1. а) 729;      б) 2704;      в) 7396;      г) 3481.

15.2. а) 84 100;      б) 40,96;      в) 75 690 000;      г) 0,7744.

15.3. а) 11 449;      б) 167 281;      в) 308 025;      г) 12 996.

15.4. а) 1204,09;      в) 51,6961;  
б) 78854 400;      г) 9 940 090 000.

○15.5. а) 121; 12 321; 1 234 321; 123 454 321; 12 345 654 321;  
1 234 567 654 321; 123 456 787 654 321;  
12 345 678 987 654 321;  
б) 81; 9801; 998 001; 99 980 001; 9 999 800 001;  
999 998 000 001; 9 999 999 999 800 000 000 001.

Попробуйте найти закономерность.

○15.6. Вычислите:

а)  $\sqrt{168^2 + 49^2}$ ;      в)  $\sqrt{1,35^2 + 0,72^2}$ ;

б)  $\sqrt{9,2^2 + (4\sqrt{2})^2}$ ;      г)  $\sqrt{99^2 + (45\sqrt{3})^2}$ .

Решите уравнение:

○15.7. а)  $x^2 - 11\,236 = 0$ ;      в)  $x^2 - 12\,544 = 0$ ;  
б)  $2x^2 - 23\,762 = 0$ ;      г)  $3x^2 - 33\,075 = 0$ .

○15.8. а)  $(x - 31)^2 = 17\,161$ ;      в)  $(x + 54)^2 = 15\,376$ ;  
б)  $(2x + 23)^2 - 17\,689 = 0$ ;      г)  $(5x - 14)^2 - 50\,176 = 0$ .

○15.9. а)  $x^4 - 20\,736 = 0$ ;      в)  $16x^4 - 50\,625 = 0$ ;  
б)  $x^{-2} = 18\,769$ ;      г)  $25x^{-2} = 24\,964$ .

○15.10. а)  $\frac{4x^2}{9} = 12\,769$ ;  
б)  $\frac{9x^2}{4} = 48\,841$ .

○15.11. Решите уравнение:

а)  $\frac{x^3 - 24\,336x}{2x^3 + 106x^2} = 0$ ;      в)  $\frac{x^3 - 99\,225x}{15x} = 0$ ;

б)  $\frac{y^4 - 14\,641}{3y^2 - 33y} = 0$ ;      г)  $\frac{y^4 - 83\,521}{5y^4 + 85y^2} = 0$ .

○15.12. Участок, отведённый под фермерское хозяйство, имеет прямоугольную форму и занимает площадь 9,5256 га. Найдите периметр участка, если его стороны относятся как 3 : 2.

○15.13. Две противоположные стороны квадрата увеличили на 8,5 мм каждую, а две другие стороны уменьшили на 8,5 мм каждую. В результате получили прямоугольник, площадь которого равна 416,16 мм<sup>2</sup>. Найдите сторону квадрата.

○15.14. Для изготовления открытого металлического ящика в форме прямоугольного параллелепипеда из квадратного листа жести вырезали по углам четыре одинаковых квадрата со стороной 180 мм. Найдите первоначальные размеры листа жести, если площадь полученной заготовки равна 2 560 000 мм<sup>2</sup>.

○15.15. Деревянный брусок имеет форму прямоугольного параллелепипеда, измерения которого относятся как 2 : 3 : 5, а площадь поверхности равна 632 462 мм<sup>2</sup>. Найдите размеры бруска.

## § 16. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Вычислите:

16.1. а)  $|56|$ ;      б)  $|-47|$ ;      в)  $|2,56|$ ;      г)  $\left| -3\frac{2}{3} \right|$ .

16.2. а)  $|1 - 0,99|$ ;      в)  $\left| -\frac{11}{12} + 1\frac{1}{6} \right|$ ;  
б)  $\left| -1 + \frac{100}{101} \right|$ ;      г)  $|0,999 - 1,01|$ .

16.3. а)  $|\sqrt{2} - 1|$ ;      б)  $|\pi - 3,15|$ ;      в)  $|\sqrt{8} - 4|$ ;      г)  $|\pi - 3,14|$ .

16.4. Отметьте на числовой прямой точки с координатой  $a$ , если выполняются следующие условия:

а)  $|a| = 7$ ;      б)  $|a - 2| = 4$ ;      в)  $|a| = a$ ;      г)  $|a| = -a$ .

**16.5.** Укажите на числовой прямой все точки с координатой  $x$  такие, что:

- а)  $|x - 7| = x - 7$ ;      в)  $|x + 4| = 4 + x$ ;  
б)  $|x - 6| = 6 - x$ ;      г)  $|x + 5| = -x - 5$ .

Используя определение модуля числа, докажите следующие свойства модуля:

○**16.6.** Каждое действительное число  $a$  не больше своего модуля:  $a \leq |a|$  и не меньше числа, противоположного модулю:  $a \geq -|a|$ , т. е. каждое действительное число  $a$  удовлетворяет неравенству  $-|a| \leq a \leq |a|$ .

○**16.7.** Если число  $a \geq 0$  и число  $x$  удовлетворяет неравенству  $-a \leq x \leq a$ , то модуль числа  $x$  удовлетворяет неравенству  $|x| \leq a$ , и, наоборот, если  $|x| \leq a$ , то справедливо неравенство  $-a \leq x \leq a$ .

○**16.8.** Если число  $a \geq 0$  и для числа  $x$  справедливо хотя бы одно из неравенств  $x \geq a$  или  $x \leq -a$ , то модуль числа  $x$  удовлетворяет неравенству  $|x| \geq a$ , и, наоборот, каждое число  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $|x| \geq a$ , будет удовлетворять хотя бы одному из неравенств  $x \geq a$  или  $x \leq -a$ .

Укажите на координатной прямой все точки с координатой  $x$  такие, что:

○**16.9.** а)  $|x| \leq x$ ;      б)  $|x| > x$ ;      в)  $|x| \leq -x$ ;      г)  $|x| > -x$ .

○**16.10.** а)  $|x - 3| \leq x - 3$ ;      в)  $|x + 5| \leq 5 + x$ ;  
б)  $|x - 3| \leq 3 - x$ ;      г)  $|x + 2| \leq -x - 2$ .

○**16.11.** а)  $|x - 8| > x - 8$ ;      в)  $|x + 77| > 77 + x$ ;  
б)  $|x - 5| > 5 - x$ ;      г)  $|x + 0,2| > -0,2 - x$ .

**16.12.** Найдите значение выражения при указанном значении  $a$ :

- а)  $|a| + 1$ ,  $a = \sqrt{2} - 1$ ;  
б)  $|a| + 2$ ,  $a = 2 - \sqrt{5}$ ;  
в)  $\sqrt{3} - |a|$ ,  $a = \sqrt{3} - 1$ ;  
г)  $|a| - \sqrt{3}$ ,  $a = \sqrt{3} - 2$ .



Найдите значение выражения:

○16.13. а)  $|a| + |b|$  при  $a = 1 - \sqrt{2}$ ,  $b = 3 - \sqrt{2}$ ;

б)  $|x + y|$  при  $x = 2\sqrt{7} - 5$ ,  $y = \sqrt{7} - 3$ ;

в)  $|t| - |z|$  при  $t = 2 - \sqrt{5}$ ,  $z = \sqrt{5} - 1$ ;

г)  $|z - t|$  при  $z = 2\sqrt{3} - 3$ ,  $t = 2 - \sqrt{3}$ .

○16.14. а)  $|\sqrt{53} - 7| + |\sqrt{53} - 5\sqrt{3}| + |\sqrt{75} - 9|$ ;

б)  $|1 - \sqrt{37}| + |2 - \sqrt{37}| + \dots + |6 - \sqrt{37}| + 6 \cdot |7 - \sqrt{37}|$ ;

в)  $|19 - \sqrt{2}| + |19 - 2\sqrt{2}| + |19 - 3\sqrt{2}| - |19 - 6\sqrt{2}|$ ;

г)  $|\sqrt{131} - 1| + |\sqrt{131} - 2| + \dots + |\sqrt{131} - 10| +$   
 $+ |\sqrt{131} - 11| + 11 \cdot |\sqrt{131} - 12|$ .

**16.15.** Используя определение модуля числа, докажите, что модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, изображающими эти числа.

**16.16.** Пусть точка  $A$  на числовой прямой имеет координату  $a$ , а точка  $B$  — координату  $b$ . Докажите, что расстояние между точками  $A$  и  $B$  равно  $|a - b|$ .

**16.17.** Докажите, что  $|x - a| = 2$  тогда и только тогда, когда расстояние от точки с координатой  $x$  до точки  $A$  с координатой  $a$  равно 2, причём таких точек две:  $M_1(a - 2)$  и  $M_2(a + 2)$ , и точка  $A$  является серединой отрезка  $M_1M_2$ .

**16.18.** Найдите все точки  $x$  на числовой прямой такие, что выполняется указанное равенство. Дайте геометрическое толкование этому равенству:

а)  $|x| = 8$ ;                      в)  $|x - 4| = 0$ ;

б)  $|x - 3| = 5$ ;                г)  $|x + 5| = 4$ .

**16.19.** а) Пусть  $|x| = 2$ . Чему может быть равен  $|x + 5|$ ?

б) Пусть  $|x - 10| = 3$ . Чему может быть равен  $|2x + 1|$ ?

**16.20.** а) Пусть  $|x + 8| = 3$ . Чему может быть равен  $|x|$ ?

б) Пусть  $|x + 7| = 0$ . Чему может быть равен  $|3x - 1|$ ?

- 16.21. а) Существует ли такое число  $x$ , что  $|x - 8| = 2$ , а  $|x - 5| = 1$ ?  
Если да, то какое?  
б) Существует ли такое число  $x$ , что  $|x - 9| = 12$ , а  $|x - 5| = 1$ ?  
Если да, то какое?
- 16.22. а) Пусть  $|a - 3| = 5$ , а  $|b - 3| = 111$ . Какие значения может принимать  $|a - b|$ ?  
б) Пусть  $|x - a| = 4$  и  $|y - a| = 7$ . Какие значения может принимать  $|x - y|$ ?
- 16.23. а) Пусть  $|y + a| = 523$  и  $|a| = 37$ . Какие значения может принимать  $|y|$ ?  
б) Пусть  $|y| = 400$  и  $|y + a| = 37$ . Какие значения может принимать  $|a|$ ?
- 16.24. а) Пусть  $|x + b| = 5$  и  $|y + b| = 17$ . Какие значения может принимать  $|x - y|$ ?  
б) Пусть  $|x + a| = 107$  и  $|x + b| = 77$ . Какие значения может принимать  $|a - b|$ ?
- 16.25. Докажите, что все точки  $M(x)$ , координата которых удовлетворяет условию  $|x - a| + |b - x| = |b - a|$ , «заполняют» отрезок, концы которого имеют координаты  $a$  и  $b$ .
- 16.26. Укажите на координатной прямой все точки с координатой  $x$  такие, что:
- а)  $|x| + |2 - x| = 2$ ;                      в)  $|x - 7| + |x| = 7$ ;  
б)  $|x - 3| + |8 - x| = 5$ ;                  г)  $|x + 4| + |5 - x| = 9$ .
- 16.27. Используя определение модуля числа, докажите, что модуль разности двух чисел не меньше разности модулей этих чисел:  $|a - b| \geq |a| - |b|$ .
- 16.28. Сравните выражения  $x = |a + b|$  и  $y = |a| + |b|$ , если:
- а)  $a = 9, b = 11$ ;                      г)  $a = -3, b = -24$ ;  
б)  $a = 0, b = -7$ ;                      д)  $a = 9, b = -111$ ;  
в)  $a = -5; b = 11$ ;                      е)  $a = -11, b = 11$ .
- 16.29. При каких значениях  $a$  и  $b$  выполняется равенство:
- а)  $|a + b| = |a| + |b|$ ;                  б)  $|a - b| = |a| - |b|$ ?

При каких значениях  $a$  и  $b$  выполняется равенство:

- 16.30. а)  $|a + b| = |a| - |b|$ ;  
б)  $|a + b| = |b| - |a|$ ;  
в)  $|a + b| = a + b$ ;  
г)  $|a + b| = -a - b$ ?

- 16.31. а)  $|a + b| = a - b$ ;  
б)  $|a + b| = b - a$ ;  
в)  $|a + b| = a$ ;  
г)  $|a + b| = -b$ ?

- 16.32. Используя определение модуля, докажите свойство модуля:  $|a^n| = |a|^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , причём, если  $n = 2k$  — чётное число, то  $|a|^{2k} = a^{2k}$ . В частности, докажите, что  $|a|^2 = |a^2| = a^2$ .

- 16.33. Используя определение модуля, докажите, что сумма модулей чисел равна нулю тогда и только тогда, когда каждое число равно нулю:

$$|a| + |b| + |c| + \dots + |d| = 0 \Leftrightarrow a = b = \dots = d = 0.$$

- 16.34. Постройте график функции  $y = |x|$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = 5$ ;  $0$ ;  $-2,5$ ;  
б) значения  $x$ , если  $y = 7$ ;  $3$ ;  $1$ ;  
в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[-4; -1]$ ;  
г) значения  $x$ , при которых функция убывает, возрастает.

- 16.35. Постройте график функции  $y = -|x|$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = -6$ ;  $-1$ ;  $4$ ;  
б) значения  $x$ , если  $y = -8$ ;  $-6$ ;  $0$ ;  
в) какому промежутку принадлежит переменная  $y$ , если  $x \in [-1; 4]$ ;  
г) значения  $x$ , при которых функция убывает, возрастает.

- 16.36. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = |x|$ :

- а) на отрезке  $[-1; 1]$ ;                      в) на луче  $[-2; +\infty)$ ;  
б) на интервале  $(-4; 2)$ ;                    г) на полуинтервале  $[-3; 1)$ .

**16.37.** Постройте графики функций  $y = |x|$  и  $y = 3$ .

- а) Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций.
- б) Обведите ту часть графика функции  $y = |x|$ , которая находится ниже прямой  $y = 3$ .
- в) Определите, при каких значениях  $x$  для функции  $y = |x|$  выполняется условие  $y < 3$ .
- г) При каких значениях  $x$  выполняется условие  $|x| > 3$ ?

**16.38.** Постройте график функции  $y = |x|$ . По графику найдите:

- а) при каких значениях  $x$   $y = 2$ ;
- б) при каких значениях  $x$   $y > 2$ ,  $y < 2$ ;
- в) при каких значениях  $x$   $2 < y < 5$ ;
- г) при каких значениях  $y$   $x < -2$ .

**16.39.** Постройте график функции  $y = -|x|$ . По графику найдите:

- а) при каких значениях  $x$   $y = -4$ ;
- б) при каких значениях  $x$   $y > -4$ ,  $y < -4$ ;
- в) при каких значениях  $y$   $x > 4$ ;
- г) при каких значениях  $x$  выполняется условие  $-4 \leq y \leq -1$ .

**16.40.** Укажите наименьшее значение выражения:

- а)  $|x|$ ;      б)  $|x + 3|$ ;      в)  $|x| + 3$ ;      г)  $|x - 6| - 6$ .

**16.41.** Найдите наименьшее значение, которое может принимать выражение (укажите какое-либо значение переменной, при котором принимается это наименьшее значение):

- а)  $|x| + |22 - x|$ ;      в)  $|x + 18| + |x|$ ;
- б)  $|x - 1| + |x + 445|$ ;      г)  $|3x + 5| + |21 - 3x|$ .

**16.42.** Решите графически уравнение:

- а)  $|x| = -x^2$ ;      в)  $|x| = x^2$ ;
- б)  $|x| = \sqrt{x}$ ;      г)  $|x| = -\sqrt{x}$ .

**16.43.** Построив графики функций  $y = |x|$  и  $y = b$ , решите неравенство:

- а)  $|x| > b$ , если  $b = 5$ ;      в)  $|x| < b$ , если  $b = 4$ ;
- б)  $|x| \leq b$ , если  $b = 1$ ;      г)  $|x| \geq b$ , если  $b = 2$ .

**16.44.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

- а) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(5)$ .
- б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .
- в) Перечислите свойства функции.

○16.45. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } -3 \leq x \leq 3; \\ 6 - x, & \text{если } x > 3. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-3)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4,5)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○16.46. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{если } x < 1; \\ \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$

а) Найдите  $f(4)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

Решите уравнение:

16.47. а)  $|x - \sqrt{3}| = 0$ ;      в)  $|x + 7| = 0$ ;

б)  $|x| = 0,2$ ;      г)  $|x| = 1$ .

16.48. а)  $|x - 1| = 2$ ;      в)  $|x - 11| = 9$ ;

б)  $\left|x - 1\frac{5}{6}\right| = 2$ ;      г)  $|x + 0,75| = 3,75$ .

16.49. а)  $|2x - 1| = 3$ ;      в)  $|2 + 2x| = 6$ ;

б)  $|1 + 3x| = 2$ ;      г)  $|4x + 1| = 5$ .

○16.50. а)  $|0,2x - 2| = 3,6$ ;      в)  $|2 - 3,5x| = 6,2$ ;

б)  $|3 - 1,5x| = 2,5$ ;      г)  $|0,4x + 1| = 2,3$ .

Решите графически систему уравнений:

○16.51. а)  $\begin{cases} y = |x|, \\ y = 0,5x + 3; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = -|x|, \\ y = \frac{1}{3}x - 4; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = -|x|; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = x - 1, \\ y = |x|. \end{cases}$

○16.52. а)  $\begin{cases} y = 3|x|, \\ y = x^2; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}|x|, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$

Решите графически неравенство:

○16.53. а)  $|x| \geq 3$ ;      в)  $-|x| < 4$ ;

б)  $x^2 > |x|$ ;      г)  $\sqrt{x} \geq |x|$ .

○16.54. а)  $|x| \leq -x + 4$ ;      в)  $|x| > -x + 4$ ;

б)  $|x| > x - 2$ ;      г)  $-|x| > 3 - x$ .

16.55. Упростите выражение  $\sqrt{(x-3)^2}$ , если:

а)  $x - 3 \geq 0$ ;      б)  $x - 3 < 0$ .

Упростите выражение:

16.56. а)  $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}$ ;      в)  $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ ;

б)  $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$ ;      г)  $\sqrt{(3-\sqrt{6})^2}$ .

○16.57. а)  $\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{x^2+10x+25}}{x+5}$ ;

б)  $\frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+9}}$ ;      г)  $\frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+36}}$ .

○16.58. а)  $2 + \sqrt{5} - \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}$ ;      в)  $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} + \sqrt{7} + 2$ ;

б)  $4 + \sqrt{6} - \sqrt{(\sqrt{6}-2)^2}$ ;      г)  $\sqrt{(\sqrt{10}-4)^2} - \sqrt{10} - 4$ .

○16.59. а)  $\sqrt{(5-\sqrt{30})^2} + \sqrt{(6-\sqrt{30})^2}$ ;

б)  $\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}$ ;

в)  $\sqrt{(6-\sqrt{42})^2} + \sqrt{(7-\sqrt{42})^2}$ ;

г)  $\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2-2\sqrt{2})^2}$ .

○16.60. Упростите выражение  $\sqrt{x^2+4x+4} - \sqrt{x^2-6x+9}$ , если:

а)  $x < -2$ ;      в)  $x > 3$ ;

б)  $-2 < x < 3$ ;      г)  $-7 \leq x \leq -4$ .

●16.61. Упростите выражение

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 2\sqrt{x^2 - 10x + 25}, \text{ если:}$$

а)  $x < -1$ ;                      в)  $2 < x < 5$ ;

б)  $-1 < x < 2$ ;              г)  $x > 5$ .

●16.62. Вычислите:

а)  $\frac{|2,3 - \sqrt{5}|}{\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} - 0,3}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - 1,6}{|1,4 - \sqrt{2}|}$ ;

б)  $\frac{|\sqrt{123} + \sqrt{125} - 2\sqrt{124}|}{2\sqrt{1,24} - \sqrt{1,23} - \sqrt{1\frac{1}{4}}}$ ;

г)  $\frac{|\sqrt{44} - 3\sqrt{45} + \sqrt{46}|}{3\sqrt{11,25} - \sqrt{11,5} - \sqrt{11}}$ .

●16.63. Найдите все такие натуральные значения  $n$ , при которых число  $k$  — натуральное:

а)  $k = |5 - \sqrt{13}| + |\sqrt{13} - n|$ ;

б)  $k = |5\sqrt{2} - 1| + |\sqrt{2} - 7| + |n \cdot \sqrt{2} - 325|$ ;

в)  $k = |10 - \sqrt{58,3}| + |n - \sqrt{58,3}|$ ;

г)  $k = |7\sqrt{3} - 11| + |\sqrt{3} - n| + |(n^2 - 5n + 12) \cdot \sqrt{2} - 97|$ .

○16.64. Используя свойства модуля, докажите неравенство:

а)  $|x| + |3 - x| \geq 3$ ;

б)  $|f + 3| + |f + 5| \geq 2$ ;

в)  $|d - 1| + |d + 54| + |3 - 2d| \geq 56$ ;

г)  $|d - 1| + |d + 54| + |3 - 2d| \geq 56 - d^2$ .

Постройте график функции:

○16.65. а)  $y = x|x|$ ;                      в)  $y = \frac{x}{|x|}$ ;

б)  $y = \frac{|x|}{x} + 1$ ;                      г)  $y = \frac{x^2}{|x|}$ .

○16.66. а)  $y = \sqrt{x^2} + x$ ;                      в)  $y = \sqrt{x^2} - x$ ;

б)  $y = 3x - |2x - 4|$ ;              г)  $y = |x - 3| + 2x$ .

○16.67. а)  $y = 2|x|$ ;                      в)  $y = 0,5|x|$ ;

б)  $y = -\frac{1}{3}|x|$ ;                      г)  $y = -3|x|$ .

●16.68. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \frac{x^2 + 3x + 10}{|x^2 + 3x + 10|}; \quad \text{б) } y = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} - |x| + 2.$$

○16.69. Найдите все целые значения  $x$ , при каждом из которых значение функции  $y = |5 + 3\sqrt{3}| + |3\sqrt{3} + x|$  является натуральным числом.

○16.70. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x|$  и  $y = a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки?

○16.71. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x|$  и  $y = x + a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют бесконечно много общих точек?

○16.72. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x|$  и  $y = 2x + a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки?

○16.73. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x|$  и  $y = -0,5x + a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют бесконечно много общих точек?



## § 17. ФУНКЦИЯ $y = kx^2$ , ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

**17.1.** Постройте график функции и укажите промежутки убывания и возрастания функции:

а)  $y = 3x^2$ ;                      в)  $y = -2x^2$ ;

б)  $y = -1,5x^2$ ;                  г)  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

**17.2.** Постройте в одной системе координат графики заданных функций и сделайте вывод о взаимном расположении построенных графиков:

а)  $y = x^2$  и  $y = -x^2$ ;

б)  $y = 0,5x^2$  и  $y = -0,5x^2$ ;

в)  $y = 3,5x^2$  и  $y = -3,5x^2$ ;

г)  $y = \frac{1}{5}x^2$  и  $y = -\frac{1}{5}x^2$ .

**17.3.** Постройте график функции:

а)  $y = 2x^2$ ;                      в)  $y = 3x^2$ ;

б)  $y = 0,5x^2$ ;                  г)  $y = 0,2x^2$ .

Что можно сказать о взаимном расположении построенного графика и графика функции  $y = x^2$ ?

**17.4.** Постройте график функции:

а)  $y = -1,5x^2$ ;                  в)  $y = -2,5x^2$ ;

б)  $y = -3x^2$ ;                    г)  $y = -0,5x^2$ .

Что можно сказать о взаимном расположении построенного графика и графика функции  $y = -x^2$ ?

**17.5.** Постройте график функции  $y = 2x^2$ . С помощью графика определите:

- а) значения функции при  $x = 0; 1; -2$ ;
- б) значения аргумента, если  $y = 0; 2; 8$ ;
- в) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[-2; 1]$ ;
- г) каким промежуткам принадлежит переменная  $x$ , если  $y \in [2; 8]$ .

**17.6.** Постройте график функции  $y = -x^2$ . С помощью графика определите:

- а) значения функции при  $x = 0; -2; 3$ ;
- б) значения аргумента, если  $y = 0; -4; -9$ ;
- в) наибольшее и наименьшее значения функции на полуинтервале  $(-3; 1]$ ;
- г) каким промежуткам принадлежит переменная  $x$ , если  $y \in [-4; -1)$ .

**17.7.** Постройте график функции  $y = 0,5x^2$ .

- а) Найдите, при каких значениях  $x$  значение функции равно 2.
- б) Выделите ту часть графика, которая соответствует условию  $y < 2$ . Найдите, при каких значениях  $x$  выполняется это условие.
- в) Укажите, при каких значениях  $x$  выполняется условие  $y > 2$ .
- г) Укажите, какие значения функции соответствуют условию  $x \leq -2$ .

**17.8.** Используя график функции  $y = -3x^2$ , найдите:

- а) при каких значениях  $x$   $y = -3$ ;
- б) при каких значениях  $x$   $y > -3$ ;  $y \leq -3$ .

**17.9.** Принадлежит ли графику функции  $y = -220x^2$  точка:

- а)  $A(1; -220)$ ;      в)  $C(-3; 1320)$ ;
- б)  $B(4; -880)$ ;      г)  $D(1,5; -495)$ ?

**17.10.** Найдите коэффициент  $k$  в уравнении параболы  $y = kx^2$ , зная, что парабола проходит через точку:

- а)  $M(2; 20)$ ;      в)  $K(-1; 10)$ ;
- б)  $N(-3; 27)$ ;      г)  $L(4; -96)$ .

О17.11. а) Пересекает ли график функции  $y = 1,3x^2$  отрезок  $AB$ , если  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; 6)$ ?

б) Пересекает ли график функции  $y = -x^2$  отрезок  $AB$ , если  $A(-13,04; -169)$ ,  $B(29,3; -900)$ ?

17.12. Напишите уравнение параболы  $y = kx^2$ , график которой изображён:

а) на рис. 9;      в) рис. 11;

б) рис. 10;      г) рис. 12.

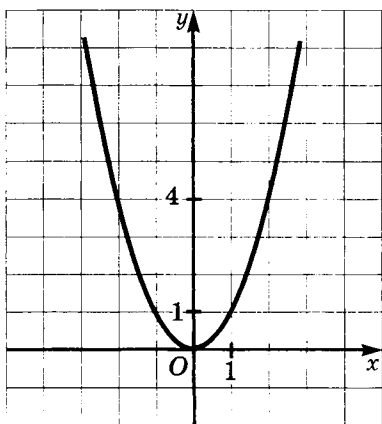


Рис. 9

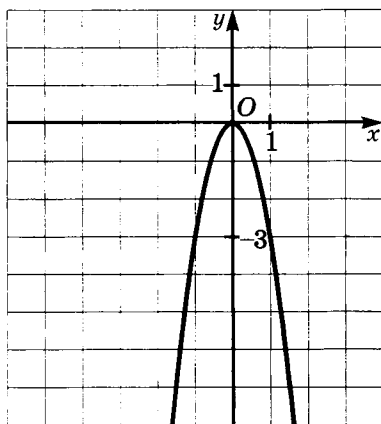


Рис. 10

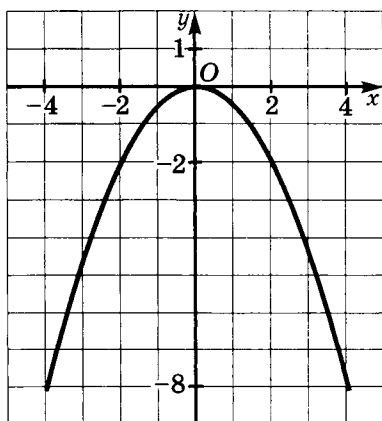


Рис. 11

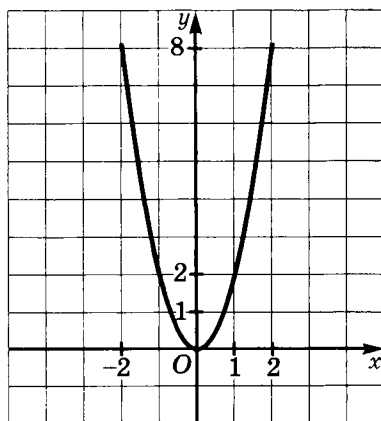
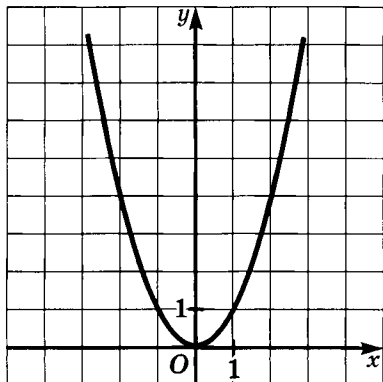


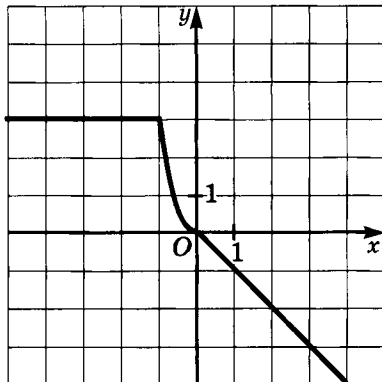
Рис. 12

**17.13.** Выясните, является ли ограниченной снизу функция, график которой изображён на заданном рисунке, и если да, то найдите наименьшее значение функции:

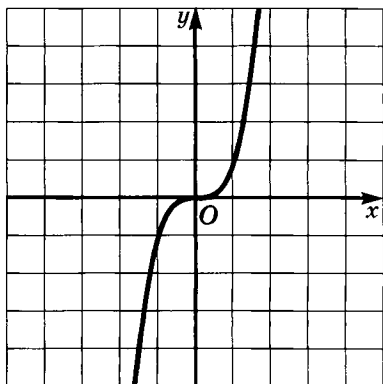
а) рис. 13;      б) рис. 14;      в) рис. 15;      г) рис. 16.



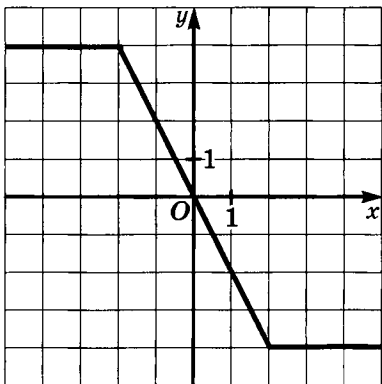
**Рис. 13**



**Рис. 14**



**Рис. 15**



**Рис. 16**

**17.14.** Выясните, является ли ограниченной сверху функция, график которой изображён на заданном рисунке, и если да, то найдите наибольшее значение функции:

а) рис. 17;      б) рис. 18;      в) рис. 19;      г) рис. 20.

**17.15.** Является ли ограниченной функция, график которой изображён:

а) на рис. 21;      б) рис. 22;      в) рис. 23;      г) рис. 24?

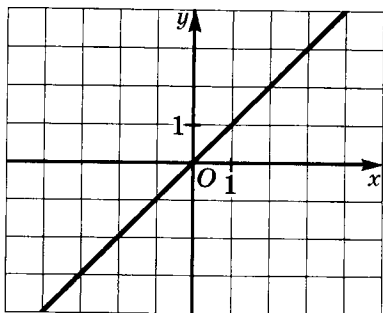


Рис. 17

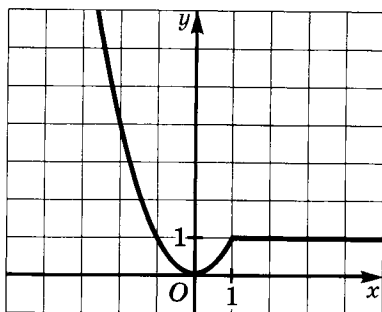


Рис. 18

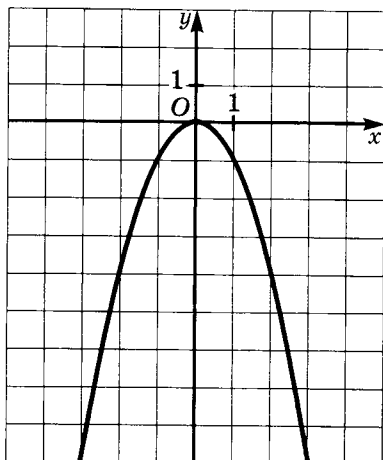


Рис. 19

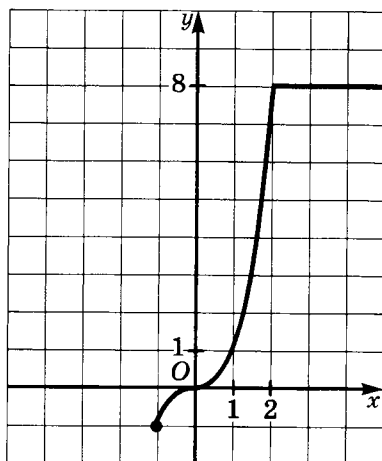


Рис. 20

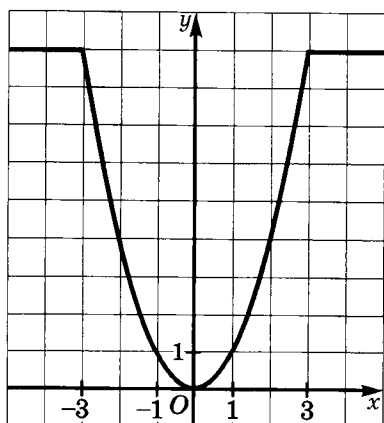


Рис. 21

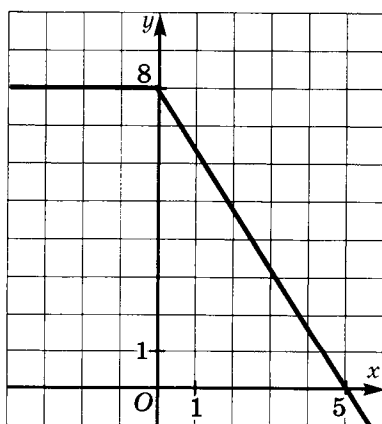


Рис. 22

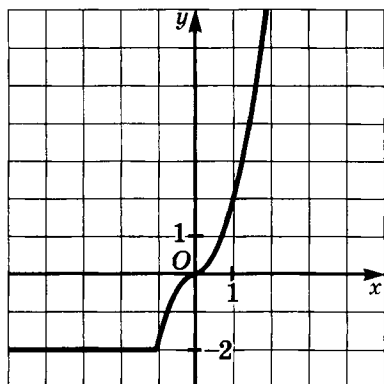


Рис. 23

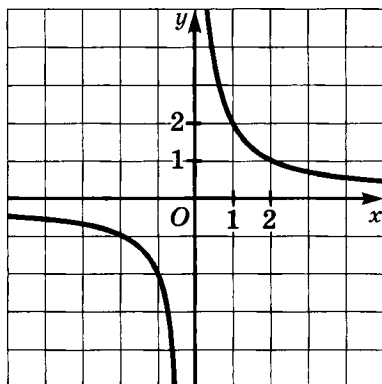


Рис. 24

**17.16.** Изобразите схематически график функции:

- а) ограниченной снизу;
- б) ограниченной сверху и снизу;
- в) ограниченной сверху;
- г) не ограниченной ни сверху, ни снизу.

**17.17.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

- а)  $y = 2x^2$  на отрезке  $[-2; 2]$ ;
- б)  $y = -0,5x^2$  на полуинтервале  $(-3; 2]$ ;
- в)  $y = -3x^2$  на отрезке  $[-2; 1]$ ;
- г)  $y = -0,5x^2$  на отрезке  $[-1; 4]$ .

**17.18.** Докажите, что заданная функция возрастает на указанном промежутке:

- а)  $y = x^2$  при  $x \geq 0$ ;
- б)  $y = -2x^2$  при  $x < 0$ ;
- в)  $y = 3x^2$  при  $x \geq 0$ ;
- г)  $y = -0,1x^2$  при  $x < 0$ .

**17.19.** Докажите, что заданная функция убывает на указанном промежутке:

- а)  $y = x^2$  при  $x < 0$ ;
- б)  $y = -1,3x^2$  при  $x \geq 0$ ;
- в)  $y = 0,4x^2$  при  $x < 0$ ;
- г)  $y = -10x^2$  при  $x \geq 0$ .

**17.20.** Исследуйте на монотонность функцию:

- а)  $y = 2x^2$ ;
- б)  $y = -x^2$ ;
- в)  $y = 0,5x^2$ ;
- г)  $y = -2x^2$ .

**17.21.** Пусть  $A$  — наибольшее значение функции  $y = 3x^2$  на отрезке  $[-1; 1]$ , а  $B$  — наибольшее значение функции  $y = -\frac{1}{7}x^2$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Сравните  $A$  и  $B$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

**17.22.** Пусть  $C$  — наибольшее значение функции  $y = 4x^2$  на отрезке  $[-1; 0]$ , а  $D$  — наименьшее значение функции  $y = 3 + x$  на луче  $[1; +\infty)$ . Сравните  $C$  и  $D$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

**17.23.** Пусть  $M$  — наименьшее значение функции  $y = 2x$  на отрезке  $[2; 5]$ , а  $N$  — наибольшее значение функции  $y = -5x^2$  на луче  $(-\infty; 0]$ . Сравните  $M$  и  $N$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

**17.24.** Пусть  $L$  — наименьшее значение функции  $y = 1,8x^2$  на луче  $[0; +\infty)$ , а  $K$  — наименьшее значение функции  $y = -3x + 1$  на отрезке  $[-1; 0]$ . Сравните  $K$  и  $L$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

**17.25.** Пусть  $P$  — наибольшее значение функции  $y = -702x^2$  на луче  $[0; +\infty)$ , а  $Q$  — наименьшее значение функции  $y = x^2$  на отрезке  $[-2; 1]$ . Не выполняя построения, сравните  $P$  и  $Q$ .

Решите графически уравнение:

○**17.26.** а)  $x^2 = x + 2$ ;                      в)  $-3x^2 = 3x - 6$ ;

б)  $\frac{1}{2}x^2 = x + 4$ ;                      г)  $-x^2 = 2x - 3$ .

○**17.27.** а)  $5x^2 = 5x - 6$ ;                      в)  $x^2 = -x - 8$ ;

б)  $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x + 2$ ;                      г)  $-0,5x^2 = 0,5x + 3$ .

Решите графически систему уравнений:

**17.28.** а)  $\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 2; \end{cases}$                       в)  $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ y = 2; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 6; \end{cases}$                       г)  $\begin{cases} y = -x^2, \\ y = -5. \end{cases}$

○**17.29.** а)  $\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 4x; \end{cases}$                       в)  $\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ y = -x; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = -x^2, \\ x + y + 6 = 0; \end{cases}$                       г)  $\begin{cases} y = 2x^2, \\ y + 2x - 4 = 0. \end{cases}$

Решите графически систему уравнений:

$$\textcircled{17.30.} \text{ а) } \begin{cases} y = \frac{1}{8}x^2, \\ y = \sqrt{x}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = 3x^2, \\ y = -\sqrt{x}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = 0,5x^2, \\ y = |x|; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = |x|, \\ y = \frac{1}{3}x^2. \end{cases}$$

$$\textcircled{17.31.} \text{ а) } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = x - 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = 0,5x^2, \\ y = 2x - 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = -4|x|, \\ y = -2x^2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = -|3x|, \\ y = -x^2. \end{cases}$$

Определите, используя графический метод, число решений системы уравнений:

$$\textcircled{17.32.} \text{ а) } \begin{cases} y = 2x^2, \\ y = x + 4; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = 0,5x^2, \\ y = 1,5x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ y = -\sqrt{x}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2, \\ y = |x|. \end{cases}$$

$$\textcircled{17.33.} \text{ а) } \begin{cases} y = -4x^2, \\ y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = 3x^2, \\ y = x - 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2, \\ y = -|x|; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = -2x^2, \\ y = \sqrt{x}. \end{cases}$$

**○17.34.** С помощью графика функции  $y = 3x^2$  найдите промежуток, которому принадлежит переменная  $y$ , если:

$$\text{а) } 1 < x < 2; \quad \text{б) } x \leq -1; \quad \text{в) } -1 < x \leq 1; \quad \text{г) } x \leq 0.$$

**○17.35.** С помощью графика функции  $y = \frac{1}{3}x^2$  найдите промежутки, которым принадлежит переменная  $x$ , если:

$$\text{а) } y \geq 3; \quad \text{б) } \frac{1}{3} < y < 3; \quad \text{в) } y < 3; \quad \text{г) } 3 \leq y \leq 12.$$

**○17.36.** С помощью графика функции  $y = -x^2$  найдите промежутки, которым принадлежит переменная  $x$ , если:

$$\text{а) } y < -4; \quad \text{в) } y \geq -4; \\ \text{б) } -4 \leq y < -1; \quad \text{г) } -9 < y \leq -4.$$



- 17.37. а) Постройте параболу  $y = 0,5x^2$  и прямую  $y = x + 4$  в одной системе координат.  
 б) Найдите абсциссы точек пересечения графиков построенных функций.  
 в) Выделите ту часть параболы, которая расположена ниже прямой.  
 г) При каких значениях  $x$  парабола  $y = 0,5x^2$  расположена ниже прямой  $y = x + 4$ ?
- 17.38. а) Используя графики функций  $y = -2x^2$  и  $y = 2x - 4$ , определите, при каких значениях  $x$  прямая расположена ниже параболы.  
 б) Используя графики функций  $y = -x^2$  и  $y = 2x$ , определите, при каких значениях  $x$  прямая расположена выше параболы.
- 17.39. а) Используя графики функций  $y = \frac{1}{3}x^2$  и  $y = x$ , решите неравенство  $\frac{1}{3}x^2 < x$ .  
 б) Используя графики функций  $y = -x^2$  и  $y = 2x - 3$ , решите неравенство  $-x^2 \geq 2x - 3$ .
- 17.40. а) Изобразите множество точек координатной плоскости, ордината которых больше удвоенного квадрата абсциссы.  
 б) Изобразите множество точек координатной плоскости, ордината которых меньше половины квадрата абсциссы.
- 17.41. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 2x^2$ . Найдите:  
 а)  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(-3)$ ,  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ;  
 б)  $f(a)$ ,  $f(4a)$ ,  $f(-2a)$ ,  $f(-0,5a)$ ;  
 в)  $f(a + 1)$ ,  $f(b - 2)$ ,  $f(x - 3)$ ,  $f(x + 9)$ ;  
 г)  $f(a) + 1$ ,  $f(x) - 2$ ,  $f(a) + b$ ,  $f(x) - a$ .
- 17.42. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -4x^2$ . Найдите:  
 а)  $f(1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f\left(\frac{1}{4}\right)$ ;  
 б)  $f(a)$ ,  $f(-a)$ ,  $f(-2a)$ ,  $f(5a)$ ;  
 в)  $f(a + 2)$ ,  $f(a - 3)$ ,  $f(x - 1)$ ,  $f(x + 6)$ ;  
 г)  $f(a) + 1$ ,  $f(x) - 5$ ,  $f(x + 2) - 1$ ,  $f(x - c) + d$ .

- 17.43.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 1,5x^2$ . Найдите:  
 а)  $f(x^2)$ ;      б)  $f(2x^2)$ ;      в)  $f(-x^2)$ ;      г)  $f(-2x^2)$ .
- **17.44.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2$ . При каких значениях аргумента выполняется равенство  $f(x + 1) = f(x + 4)$ ?
- **17.45.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 2x^2$ . При каких значениях аргумента выполняется равенство  $4f(x + 3) = f(2x) - 24$ ?
- **17.46.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -x^2$ . При каких значениях аргумента выполняется равенство  $f(x - 3) = f(x + 5)$ ?
- **17.47.** а) Пусть  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ . Постройте график функции  $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$ .  
 б) Пусть  $f(x) = -\sqrt{x}$ . Постройте график функции  $y = 2f(x^4)$ .
- **17.48.** а) Пусть  $f(x) = x^2 + 6x - 1$ . Постройте график функции  $y = 0,3f(x - 3) + 3$ .  
 б) Пусть  $f(x) = x^2 + 4x + 17$ . Постройте график функции  $y = -2f(x - 2) + 26$ .
- **17.49.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 6. \end{cases}$   
 а) Найдите  $f(-1)$ ,  $f(6)$ ,  $f(1)$ .  
 б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .  
 в) Перечислите свойства функции.
- **17.50.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } -4 \leq x \leq 0; \\ -\frac{1}{3}x^2, & \text{если } 0 < x \leq 3. \end{cases}$   
 а) Найдите  $f(-4)$ ,  $f(0,5)$ ,  $f(3)$ .  
 б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .  
 в) Перечислите свойства функции.
- **17.51.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -3x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 4. \end{cases}$   
 а) Найдите  $f(0)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ .  
 б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .  
 в) Перечислите свойства функции.

○17.52. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ 3x + 2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а)  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ ;

б) значения  $x$ , при которых  $f(x) = 2$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = 8$ .

○17.53. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -0,5x^2, & \text{если } -4 \leq x \leq 0; \\ -\sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 4. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а)  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$ ;

б) значения  $x$ , при которых  $f(x) = -2$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = -8$ .

○17.54. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -x - 4, & \text{если } -4 \leq x \leq -2; \\ -0,5x^2, & \text{если } -2 < x \leq 2; \\ -2, & \text{если } 2 < x \leq 3. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(2)$ ,  $f(2,4)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○17.55. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq -1; \\ -1, & \text{если } -1 < x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 2. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-2,5)$ ,  $f(-0,5)$ ,  $f(4)$ ,  $f(\sqrt{5} - 3)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

●17.56. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{если } -4 \leq x \leq -1; \\ 2x^2, & \text{если } -1 < x \leq 1; \\ -x + 3, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

С помощью графика определите, при каких значениях  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет:

а) один корень;

в) три корня;

б) два корня;

г) четыре корня.

○17.57. Постройте график функции:

а)  $y = \frac{2x^3 + 2x^2}{x + 1}$ ;      в)  $y = \frac{3x^3 - 3x^2}{x - 1}$ ;

б)  $y = \frac{-0,5x^3 + x^2}{x - 2}$ ;      г)  $y = \frac{-\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2}{x + 2}$ .

○17.58. Постройте график уравнения:

а)  $(y - x)(y - x^2) = 0$ ;      в)  $(y - 3x^2)(y - 5) = 0$ ;

б)  $(-2x^2 + y)(y + 1) = 0$ ;      г)  $(y - 4x^2)(5x^2 + y) = 0$ .

●17.59. Постройте график уравнения и определите количество общих точек этого графика и прямой  $x = a$  для каждого  $a \in \mathbb{R}$ :

а)  $y^2 - x^4 = 0$ ;      в)  $(y - x^2)(y^2 + x) = 0$ ;

б)  $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$ ;      г)  $(y^2 - x^4)(y^4 - x^2) = 0$ .

●17.60. Постройте график уравнения и определите количество общих точек этого графика и прямой  $y = a$  для каждого  $a \in \mathbb{R}$ :

а)  $y^2 - x^4 = 0$ ;      в)  $(y - x^2)(y^2 + x) = 0$ ;

б)  $(y - x^2)(y^2 - x) = 0$ ;      г)  $(y^2 - x^4)(y^4 - x^2) = 0$ .

○17.61. При каких значениях  $a$  существуют такие значения  $k \neq 0$ , что уравнение  $kx^2 = a$  имеет ровно одно решение?

○17.62. При каких значениях  $a$  существуют такие значения  $k \in (0; 1)$ , что уравнение  $kx^2 = a$ :

а) не имеет решений;

б) имеет решения;

в) имеет ровно одно решение;

г) имеет два решения?

○17.63. При каких значениях  $k \neq 0$  существуют такие значения  $a \in (0; 1)$ , что уравнение  $kx^2 = a$ :

а) не имеет решений;

б) имеет решения;

в) имеет ровно одно решение;

г) имеет два решения?

## § 18. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$ , ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

**18.1.** Постройте график функции и укажите, где она убывает, где возрастает:

а)  $y = \frac{3}{x}$ ;      б)  $y = -\frac{2}{x}$ ;      в)  $y = \frac{4}{x}$ ;      г)  $y = -\frac{3}{x}$ .

**18.2.** Задайте число  $k$  так, чтобы график функции  $y = \frac{k}{x}$  был расположен:

- а) в первой и третьей четвертях;  
б) во второй и четвёртой четвертях.

**18.3.** Постройте график функции  $y = \frac{2}{x}$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = 1; -2; 4$ ;  
б) значения  $x$ , если  $y = -1; 2; -4$ ;  
в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ ;  
г) какому промежутку принадлежит переменная  $x$ , если  $y \in [-2; -1]$ .

**18.4.** Постройте график функции  $y = -\frac{3}{x}$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = -3; 1; 6$ ;  
б) значения  $x$ , если  $y = 3; -1; -6$ ;  
в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[-3; -1]$ ;  
г) какому промежутку принадлежит переменная  $x$ , если  $y \in \left[-3; -\frac{1}{2}\right]$ .

**18.5.** а) Постройте график функции  $y = \frac{4}{x}$ .

- б) Найдите, при каких значениях аргумента значение функции равно 2.  
в) Выделите ту часть графика, которая соответствует условию  $y > 2$ . При каких значениях  $x$  выполняется это условие?  
г) При каких значениях  $x$  выполняется условие  $y < 2$ ?

- 18.6.** а) Постройте график функции  $y = -\frac{1}{x}$ .  
 б) Найдите, при каких значениях аргумента значение функции равно 1.  
 в) При каких значениях  $x$   $y > 1$ ?  
 г) При каких значениях  $x$   $y < 1$ ?
- 18.7.** Принадлежит ли графику функции  $y = \frac{68}{x}$  точка:  
 а)  $A(1; 68)$ ;      в)  $C(-2; 34)$ ;  
 б)  $B(5; 13)$ ;      г)  $D(-4; -17)$ ?
- 18.8.** Задайте формулой функцию  $y = \frac{k}{x}$ , зная, что её график проходит через точку:  
 а)  $M(3; 7)$ ;      в)  $K(-4; 19)$ ;  
 б)  $N(-0,2; 12)$ ;      г)  $L(2,5; 8)$ .
- 18.9.** а) Найдите абсциссу точки графика  $y = \frac{4}{x}$ , если её ордината равна 16.  
 б) Найдите точки графика  $y = \frac{4}{x}$  с равными координатами.
- 18.10.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \frac{2}{x}$ :  
 а) на отрезке  $[-2; -1]$ ;      в) на луче  $(-\infty; -1]$ ;  
 б) на полуинтервале  $[1; 4)$ ;      г) на интервале  $(1; 2)$ .
- 18.11.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = -\frac{4}{x}$ :  
 а) на отрезке  $[-4; -2]$ ;      в) на луче  $[2; +\infty)$ ;  
 б) на интервале  $(1; 4)$ ;      г) на полуинтервале  $(-4; -2]$ .
- 18.12.** а) Пусть  $A$  — наибольшее значение функции  $y = \frac{3}{x}$  на отрезке  $[1; 3]$ , а  $B$  — наименьшее значение функции  $y = x^2$  на отрезке  $[-1; 1]$ . Сравните  $A$  и  $B$ . Сделайте графическую иллюстрацию.  
 б) Пусть  $C$  — наименьшее значение функции  $y = -\frac{1}{x}$  на луче  $[1; +\infty)$ , а  $D$  — наибольшее значение функции  $y = 2x^2$  на отрезке  $[0; 1]$ . Сравните  $C$  и  $D$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

**18.13.** Докажите, что заданная функция убывает на указанном промежутке:

а)  $y = \frac{3}{x}$  при  $x > 0$ ;      в)  $y = \frac{1,5}{x}$  при  $x > 0$ ;

б)  $y = \frac{0,2}{x}$  при  $x < 0$ ;      г)  $y = \frac{7}{x}$  при  $x < 0$ .

**18.14.** Докажите, что заданная функция возрастает на указанном промежутке:

а)  $y = -\frac{2}{x}$  при  $x > 0$ ;      в)  $y = -\frac{12}{x}$  при  $x < 0$ ;

б)  $y = -\frac{2,5}{x}$  при  $x < 0$ ;      г)  $y = -\frac{0,9}{x}$  при  $x > 0$ .

**18.15.** Исследуйте на монотонность функцию:

а)  $y = \frac{2}{x}$ ;      в)  $y = 3 - \frac{1}{x}$ ;

б)  $y = -\frac{3}{x}$ ;      г)  $y = \frac{4}{x} - 1$ .

**18.16.** С помощью графика функции  $y = -\frac{3}{x}$  определите, имеет ли отрезок  $AB$  точки, принадлежащие этому графику, если:

а)  $A(-1; 1)$ ,  $B(2; 6)$ ;      в)  $A(3; 1)$ ,  $B(-1; -3)$ ;

б)  $A(-3; 3)$ ,  $B(0; 0)$ ;      г)  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 100)$ .

○**18.17.** а) Найдите на оси ординат какую-либо точку  $M$  такую, чтобы отрезок  $AM$ , где  $A(8; 0)$ , имел с графиком функции  $y = \frac{3}{x}$  две общие точки.

б) Найдите на оси ординат какую-либо точку  $M$  такую, чтобы отрезок  $AM$ , где  $A(-8; 0)$ , не имел с графиком функции  $y = -\frac{2}{x}$  общих точек.

**18.18.** а) Докажите, что графики функций  $y = -\frac{3}{x}$  и  $y = x$  не имеют общих точек.

б) Докажите, что графики функций  $y = -\frac{1}{x}$  и  $y = -x$  имеют две общие точки.

○**18.19.** а) Определите длину отрезка прямой  $x = 3$ , который пересекают на ней графики функций  $y = \frac{3}{2x}$  и  $y = \frac{9}{4x}$ .

б) Определите длину отрезка прямой  $x = -2$ , который пересекают на ней графики функций  $y = -\frac{32}{11x}$  и  $y = -\frac{28}{11x}$ .

○18.20. а) Определите длину отрезка прямой  $y = 6$ , который высекают на ней графики функций  $y = \frac{3}{4x}$  и  $y = \frac{4}{3x}$ .

б) Определите длину отрезка прямой  $y = -4$ , который высекают на ней графики функций  $y = -\frac{64}{15x}$  и  $y = -\frac{4}{3x}$ .

○18.21. а) При каких значениях  $a$  графики функций  $y = \frac{21}{x}$  и  $y = \frac{4}{x}$  высекают на прямой  $x = a$  отрезок длиной 17?

б) При каких значениях  $b$  графики функций  $y = -\frac{3}{x}$  и  $y = \frac{4}{x}$  высекают на прямой  $y = b$  отрезок длиной 7?

○18.22. а) Найдите точки графика функции  $y = \frac{1}{x}$ , равноудалённые от осей координат.

б) Найдите точки графика функции  $y = -\frac{9}{x}$ , равноудалённые от осей координат.

○18.23. На графике функции  $y = -\frac{1}{x}$  укажите шесть пар точек, симметричных относительно начала координат.

○18.24. Найдите координаты точек  $A$  и  $B$ , если они лежат на графике функции  $y = -\frac{2}{3x}$  и при этом абсцисса точки  $B$  равна 2, а серединой отрезка  $AB$  является начало координат.

○18.25. Найдите координаты середины отрезка, высекаемого на прямой  $y = 23,4x$  графиком функции  $y = \frac{19}{7x}$ .

○18.26. Найдите точки пересечения графиков функций:

а)  $y = \frac{2}{x}$  и  $y = 2x$ ;      в)  $y = -\frac{3}{x}$  и  $y = -3x$ ;

б)  $y = -\frac{5}{x}$  и  $y = -5$ ;      г)  $y = \frac{4}{x}$  и  $y = 1$ .

Решите графически уравнение:

○18.27. а)  $\frac{2}{x} = 2$ ;      в)  $\frac{4}{x} = -1$ ;

б)  $-\frac{4}{x} = 3 - x$ ;      г)  $-\frac{2}{x} = 1 - x$ .

○18.28. а)  $\frac{2}{x} = -\frac{x}{2}$ ;      б)  $\frac{1}{x} = |x|$ ;      в)  $\frac{3}{x} = \frac{x}{3}$ ;      г)  $-\frac{4}{x} = |x|$ .



○18.29. Решите графически уравнение:

а)  $\frac{1}{x} = x^2$ ;      б)  $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ ;      в)  $-\frac{2}{x} = 2x^2$ ;      г)  $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ .

Решите графически систему уравнений:

○18.30. а)  $\begin{cases} y = -\frac{5}{x}, \\ y = -5; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ y = -1; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ y = x + 3; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ y = x + 4. \end{cases}$

○18.31. а)  $\begin{cases} y = -\frac{4}{x}, \\ y = 0,5x^2; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = \frac{8}{x}, \\ y = x^2; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} y = -\frac{1}{x}, \\ y = -\sqrt{x}; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ y = 2\sqrt{x}. \end{cases}$

○18.32. Определите, используя графический метод, число решений системы уравнений:

а)  $\begin{cases} y = \frac{2}{x}, \\ 2x - 3y - 6 = 0; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = -\frac{1}{x}, \\ x - 5y = 0; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ x - 2y - 2 = 0; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = \frac{4}{x}, \\ 3x - 4y + 12 = 0. \end{cases}$

○18.33. Используя график функции  $y = \frac{6}{x}$ , найдите промежуток, которому принадлежит переменная  $x$ , если:

а)  $1 \leq y \leq 3$ ;      в)  $-2 \leq y < -1$ ;  
б)  $y < -2$ ;      г)  $y \geq 6$ .

○18.34. Используя графики функций  $y = \frac{2}{x}$  и  $y = 0,5x$ :

- а) определите, при каких значениях  $x$  прямая расположена ниже гиперболы;  
б) решите неравенство  $0,5x > \frac{2}{x}$ .

○18.35. Используя графики функций  $y = -\frac{2}{x}$  и  $y = -2x$ :

- а) определите, при каких значениях  $x$  прямая расположена выше гиперболы;
- б) решите неравенство  $-2x < -\frac{2}{x}$ .

○18.36. Решите неравенство графически:

- а)  $\frac{4}{x} > 2x - 2$ ;      б)  $0,5x - 1 > \frac{4}{x}$ .

○18.37. а) Изобразите множество точек координатной плоскости, ордината которых больше числа, обратного абсциссе.

б) Изобразите множество точек координатной плоскости, ордината которых меньше числа, обратного абсциссе.

○18.38. а) Изобразите множество точек координатной плоскости, произведение координат которых больше 1.

б) Изобразите множество точек координатной плоскости, произведение координат которых меньше 1.

○18.39. а) Изобразите множество точек координатной плоскости, квадрат суммы координат которых больше квадрата их разности на 4.

б) Изобразите множество точек координатной плоскости, квадрат суммы координат которых меньше квадрата их разности на 8.

18.40. Дана функция  $y = \frac{4}{x}$ . Найдите:

- а)  $f(1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(0,3)$ ,  $f\left(-\frac{1}{6}\right)$ ;
- б)  $f(-a)$ ,  $f(-2a)$ ,  $f(3x)$ ,  $f(-x)$ ;
- в)  $f(a+1)$ ,  $f(b-3)$ ,  $f(x+1)$ ,  $f(x-10)$ ;
- г)  $f(a)+1$ ,  $f(x)-2$ ,  $f(x-2)+1$ ,  $f(x+7)-1$ .

18.41. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -\frac{6}{x}$ . Найдите:

- а)  $f(-1)$ ,  $f(-3)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f\left(\frac{2}{3}\right)$ ;
- б)  $f(3a)$ ,  $f(6a)$ ,  $f(-2x)$ ,  $f\left(-\frac{1}{3}x\right)$ ;
- в)  $f(a-2)$ ,  $f(b+4)$ ,  $f(x-1)$ ,  $f(x+2)$ ;
- г)  $f(x)-4$ ,  $f(2x)+1$ ,  $f(x-1)+2$ ,  $2f(x+3)-1$ .

**18.42.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{4}{x}$ . Найдите:

а)  $f(x^2)$ ;      б)  $\frac{1}{4}f(x^3)$ ;      в)  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ ;      г)  $-f(x^5)$ .

**18.43.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{4}{x}$ . Найдите:

а)  $f^2(x)$ ;      б)  $\frac{1}{f(x)}$ ;      в)  $f^3(x)$ ;      г)  $-\frac{2}{f(x)}$ .

○**18.44.** а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{4}{x}$ . Докажите, что

$$f(x+1) - f(x-1) = -\frac{1}{2}f(x+1) \cdot f(x-1).$$

б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{3}{x}$ . Докажите, что

$$f(x+2) + f(2-x) = -4f(x^2-4).$$

○**18.45.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Найдите значение аргумента, при котором выполняется равенство

$$f(x+3) = 2f(x+5).$$

○**18.46.** а) Пусть  $f(x) = \frac{1}{x+4}$ . Постройте график функции  $y = 0,3f(x-4)$ .

б) Пусть  $f(x) = x$ . Постройте график функции  $y = -f\left(-\frac{1}{x}\right)$ .

●**18.47.** Найдите функцию  $y = f(x)$ , удовлетворяющую условию  $2f(x) + 3f(-x) = \frac{2}{x}$ , и постройте её график.

○**18.48.** Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x < -1; \\ 2x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а)  $f(-2)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$ ;

б) при каких значениях  $x$   $f(x) = 2$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{2}$ .

○18.49. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{если } x \leq -1; \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{если } -1 < x \leq 1. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

а)  $f(-4)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(1)$ ;

б) при каких значениях  $x$   $f(x) = -2$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2}$ .

○18.50. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & \text{если } 0 < x \leq 4; \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x > 4. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-3)$ ,  $f(1)$ ,  $f(\sqrt{33} - 1)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○18.51. Постройте график функции:

а)  $y = \frac{x-3}{x^2-3x}$ ;      в)  $y = \frac{-x+2}{x^2-2x}$ ;

б)  $y = \frac{2x+2}{x^2+x}$ ;      г)  $y = \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^2+2x}$ .

Постройте график уравнения:

○18.52. а)  $xy = 3$ ;

в)  $xy = 6$ ;

б)  $(xy-1)(y-3) = 0$ ;

г)  $(xy-2)(xy+5) = 0$ .

○18.53. а)  $(yx-1)(y-x) = 0$ ;

в)  $\frac{xy+1}{x+y} = 0$ ;

б)  $\frac{xy-1}{x-y} = 0$ ;

г)  $(yx-1)(yx+2) = 0$ .

○18.54. Постройте график уравнения и определите число общих точек этого графика и прямой  $y = a$  для всех  $a > 0$ :

а)  $(yx-1)(y-x) = 0$ ;

в)  $(yx-1)(yx+2) = 0$ ;

б)  $\frac{xy-1}{x-y} = 0$ ;

г)  $(xy+1)(x^2-y^2) = 0$ .

○18.55. Постройте график уравнения и определите число общих точек этого графика и прямой  $y = a$  для всех  $0 \leq a \leq 4$ :

а)  $(6yx - 1)(2y + 3x) = 0$ ;      в)  $9y^2x^2 - 4 = 0$ ;

б)  $\frac{2xy - 1}{2x - y} = 0$ ;      г)  $(xy + 1)(x^2 - y^2) = 0$ .

○18.56. При каких значениях  $k$  существуют такие значения  $a \in (0; 1)$ , что уравнение  $\frac{k}{x} = a$ :

а) не имеет корней;

б) имеет корни;

в) имеет ровно один корень?

○18.57. При каких значениях  $a$  существуют такие значения  $k \in (0; 1)$ , что уравнение  $\frac{k}{x} = a$ :

а) не имеет корней;

б) имеет такие корни, что  $x \in (0; 1)$ ;

в) имеет такие корни, что  $x \in [-1; 1]$ ?

## § 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l) + m$ , ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

График функции  $y = f(x + l)$

19.1. Изобразите на координатной плоскости заданные точки и определите, используя обороты «левее на...» и «правее на...», их взаимное расположение:

а)  $A(-1; 7)$  и  $A_1(6; 7)$ ;

б)  $C(8; -6)$  и  $C_1(14; -6)$ ;

в)  $B(2; 3)$  и  $B_1(-2; 3)$ ;

г)  $D(-13; -4)$  и  $D_1(-3; -4)$ .

19.2. Как найти расстояние между точками, имеющими одинаковые ординаты? Закончите предложение: «Если точки имеют одинаковые ординаты, то расстояние между ними равно...»

**19.3.** Заданы функции  $y = f(x)$ ,  $y = y_1(x) = f(x - 2)$  и  $y = y_2(x) = f(x + 3)$ . Заполните таблицу значений этих функций:

$y = f(x)$	$y = y_1(x) = f(x - 2)$	$y = y_2(x) = f(x + 3)$
$y(2) = 5$	$y_1(4) =$	$y_2(-1) =$
$y(5) = 57$	$y_1(7) =$	$y_2(2) =$
$y(9) =$	$y_1(11) = 11$	$y_2(6) =$
$y(0) =$	$y_1(2) =$	$y_2(-3) = 15$
$y(-2) =$	$y_1(0) = -1$	$y_2(-5) =$

**19.4.** Докажите, что:

- любая точка графика функции  $y = f(x + 2)$  с абсциссой  $x_0 - 2$  находится на 2 единицы левее, чем точка графика  $y = f(x)$  с абсциссой  $x_0$ ;
- график функции  $y = f(x + 2)$  можно получить из графика  $y = f(x)$ , сдвинув его на 2 единицы влево вдоль оси абсцисс.

**19.5.** Докажите, что:

- любая точка графика функции  $y = f(x - 3)$  с абсциссой  $x_0 + 3$  находится на 3 единицы правее, чем точка графика функции  $y = f(x)$  с абсциссой  $x_0$ ;
- график функции  $y = f(x - 3)$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$ , сдвинув его на 3 единицы вправо вдоль оси абсцисс.

Постройте в одной системе координат графики функций:

**19.6.**  $y = 2x$ ,  $y = 2(x + 3)$  и  $y = 2(x - 1)$ .

**19.7.**  $y = x^2$ ,  $y = (x + 3)^2$  и  $y = (x - 1)^2$ .

**19.8.**  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x + 3}$  и  $y = \frac{1}{x - 1}$ .

**19.9.**  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{x + 2}$  и  $y = \sqrt{x - 1}$ .

**О19.10.** Как расположены относительно друг друга графики функций:

- $y = f(2x)$  и  $y = f(2x - 4)$ ;
- $y = f(x - 2)$  и  $y = f(x + 7)$ ;
- $y = f(2x)$  и  $y = f(2x + 1)$ ;
- $y = f\left(\frac{x}{3} - 1\right)$  и  $y = f\left(\frac{x}{3} + 4\right)$ ?

**19.11.** Постройте в одной системе координат графики функций  $y = |x|$ ,  $y = |x - 3|$  и  $y = |x + 1|$ .

**19.12.** График какой функции получится, если:

- а) параболу  $y = 3x^2$  перенести на 4 единицы влево вдоль оси  $Ox$ ;
- б) гиперболу  $y = -\frac{7}{x}$  перенести на 3 единицы вправо вдоль оси  $Ox$ ;
- в) график функции  $y = \sqrt{x}$  перенести на 2 единицы влево вдоль оси  $Ox$ ;
- г) график функции  $y = |x|$  перенести на 1 единицу влево вдоль оси  $Ox$ ?

Постройте график функции и укажите промежутки убывания и возрастания функции:

**19.13.** а)  $y = 2(x + 1)^2$ ;      в)  $y = -(x - 3)^2$ ;

б)  $y = -\frac{1}{x - 2}$ ;      г)  $y = \frac{3}{x - 1}$ .

**19.14.** а)  $y = \sqrt{x - 3}$ ;      в)  $y = -\sqrt{x + 4}$ ;

б)  $y = -|x - 4|$ ;      г)  $y = |x + 3|$ .

**19.15.** Напишите уравнение:

а) параболы  $y = a(x + l)^2$ , изображённой на рис. 25;

б) параболы  $y = a(x + l)^2$ , изображённой на рис. 26;

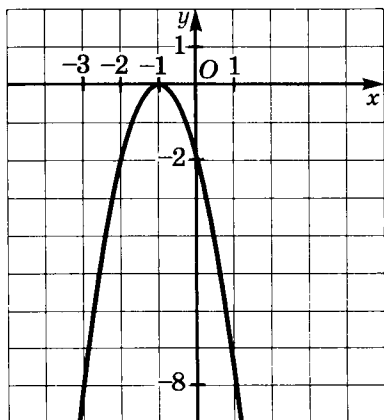


Рис. 25

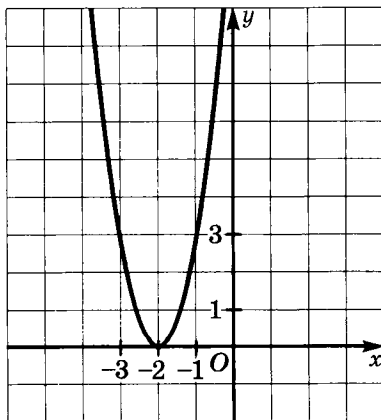


Рис. 26

в) кривой  $y = \sqrt{x+l}$  или  $y = -\sqrt{x+l}$ , изображённой на рис. 27;

г) кривой  $y = \sqrt{x+l}$  или  $y = -\sqrt{x+l}$ , изображённой на рис. 28.

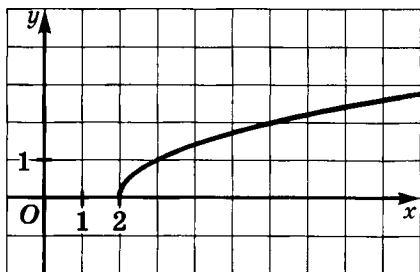


Рис. 27

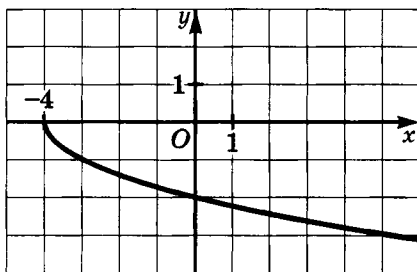


Рис. 28

019.16. Задайте функцию:

а)  $y = \frac{k}{x+l}$ , график которой изображён на рис. 29;

б)  $y = \frac{k}{x+l}$ , график которой изображён на рис. 30;

в)  $y = |x+l|$  или  $y = -|x+l|$ , график которой изображён на рис. 31;

г)  $y = |x+l|$  или  $y = -|x+l|$ , график которой изображён на рис. 32.

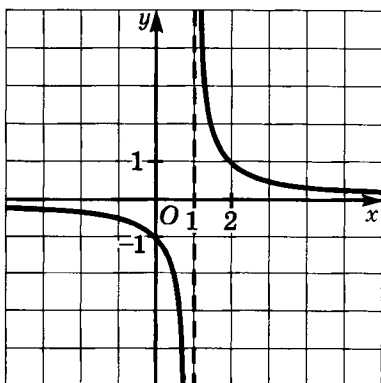


Рис. 29

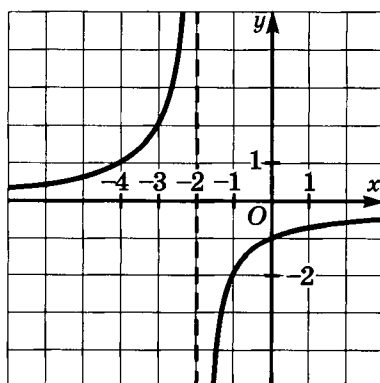


Рис. 30



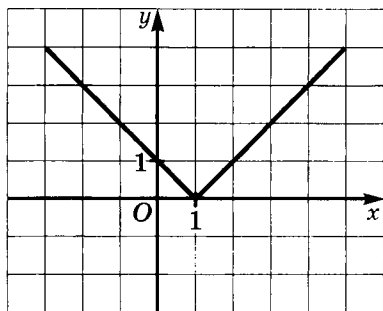


Рис. 31

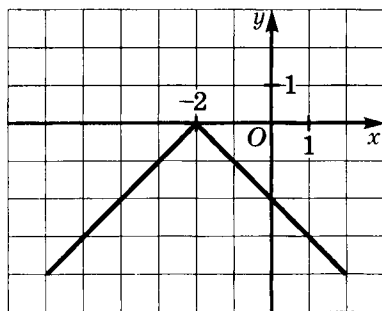


Рис. 32

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○19.17. а)  $y = 2(x - 1)^2$  на отрезке  $[0; 2]$ ;

б)  $y = \frac{4}{x - 3}$  на луче  $[4; +\infty)$ ;

в)  $y = -5(x + 4)^2$  на луче  $(-\infty; 0]$ ;

г)  $y = -\frac{2}{x + 2}$  на отрезке  $[-1; 0]$ .

○19.18. а)  $y = \sqrt{x + 4}$  на отрезке  $[-3; 0]$ ;

б)  $y = |x + 2|$  на отрезке  $[-2; 0]$ ;

в)  $y = -\sqrt{x - 1}$  на полуинтервале  $[1; 4)$ ;

г)  $y = |x + 2|$  на луче  $(-\infty; 3]$ .

○19.19. Постройте график функции  $y = 2(x - 1)^2$ .

а) Найдите значения  $y$  при  $x = -1; 0; 1$ .

б) Найдите значения  $x$ , если  $y = 2; 8; 0$ .

в) Укажите промежутки возрастания и убывания функции.

г) Напишите уравнение оси симметрии параболы.

○19.20. Постройте график функции  $y = -\frac{6}{x - 2}$ .

а) Найдите значения  $y$  при  $x = -1; 0; 3$ .

б) Найдите значения  $x$ , если  $y = 3; -1; -2$ .

в) Исследуйте функцию на монотонность.

г) Напишите уравнения асимптот данной гиперболы.

○19.21. Используя график функции  $y = \sqrt{x+4}$ , найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = -4$ ; 0; 5;
- б) значения  $x$ , если  $y = 1$ ; 0; 3;
- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке  $[-3; 0]$ ;
- г) значения аргумента, удовлетворяющие условию  $0 < y < 3$ .

○19.22. Постройте график функции  $y = |x+1|$ . С помощью графика найдите:

- а) значения  $y$  при  $x = -1$ ; 0; 4;
- б) значения  $x$ , если  $y = 1$ ; 0; 5;
- в) промежутки возрастания и убывания функции;
- г) значения аргумента, удовлетворяющие условию  $y \leq 1$ .

Решите графически уравнение:

- 19.23. а)  $(x-2)^2 = x$ ;      в)  $(x+3)^2 = 1$ ;  
б)  $2(x-2)^2 = 8$ ;      г)  $2(x-1)^2 = 2x+2$ .

- 19.24. а)  $\frac{2}{x+3} = 2$ ;      в)  $-\frac{3}{x-3} = 1-x$ ;  
б)  $\frac{2}{x-1} = |x|$ ;      г)  $\frac{2}{x-2} = \sqrt{x+1}$ .

○19.25. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ 3(x-3)^2, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

- а) Найдите  $f(-1)$ ;  $f(2)$ ;  $f(4)$ .
- б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .
- в) Перечислите свойства функции.

○19.26. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{x+1}, & \text{если } -3 \leq x < -1; \\ -x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$

- а) Найдите  $f(-1,5)$ ;  $f(-1)$ ;  $f(2)$ .
- б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .
- в) Перечислите свойства функции.

○19.27. Постройте график функции:

- а)  $y = x^2 - 2x + 1$ ;      в)  $y = 3x^2 + 24x + 48$ ;
- б)  $y = -x^2 + 8x - 16$ ;      г)  $y = 20x - 2x^2 - 50$ .

○19.28. Постройте график функции:

а)  $y = \sqrt{(x - 4)^2}$ ;

в)  $y = \sqrt{(x + 6)^2}$ ;

б)  $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$ ;

г)  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ .

○19.29. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$  на отрезке  $[-2; 2]$ ;

б)  $y = \sqrt{x^2 - 10x + 25}$  на луче  $[2; +\infty)$ .

○19.30. а) Пусть  $A$  — наибольшее значение функции  $y = -3(x + 4)^2$  на отрезке  $[-5; -3]$ , а  $B$  — наибольшее значение функции  $y = \frac{3}{x}$  на луче  $[1; +\infty)$ . Что больше:  $A$  или  $B$ ? Сделайте графическую иллюстрацию.

б) Пусть  $M$  — наименьшее значение функции  $y = 5(x + 3)^2$  на отрезке  $[-4; -2]$ , а  $N$  — наибольшее значение функции  $y = 2x + 3$  на отрезке  $[0; 1]$ . Что больше:  $M$  или  $N$ ? Сделайте графическую иллюстрацию.

○19.31. а) Пусть  $K$  — наибольшее значение функции  $y = -\frac{1}{x + 2}$  на луче  $(-\infty; -3]$ , а  $L$  — наименьшее значение функции  $y = -3x + 2$  на луче  $(-\infty; 1]$ . Что больше:  $L$  или  $K$ ? Сделайте графическую иллюстрацию.

б) Пусть  $P$  — наибольшее значение функции  $y = -(x + 5)^2$  на отрезке  $[-6; -4]$ , а  $Q$  — наибольшее значение функции  $y = -2(x - 1)^2$  на отрезке  $[0; 2]$ . Сравните числа  $P$  и  $Q$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

Решите графически уравнение:

○19.32. а)  $|x + 1| = -2x^2$ ;

в)  $|x - 3| = \sqrt{x - 1}$ ;

б)  $\frac{4}{x + 1} = -0,5(x + 1)^2$ ;

г)  $\sqrt{x + 2} = \frac{2}{x - 1}$ .

○19.33. а)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = -2(x - 2)^2$ ;

в)  $\sqrt{x^2 + 6x + 9} = (x + 3)^2$ ;

б)  $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x}$ ;

г)  $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = -x$ .

О19.34. Решите графически систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} y = 2(x+1)^2, \\ y = 3x; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} y = -(x+1)^2, \\ y = x-1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} y = \sqrt{x-3}, \\ y = (x-3)^2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} y = 0,5(x+1)^2, \\ y = \sqrt{x^2+2x+1}. \end{cases} \end{array}$$

О19.35. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} y = -\frac{4}{x-3}, \\ y = |x+2|; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} y = 2(x-1)^2, \\ y = \sqrt{x+2}? \end{cases} \end{array}$$

●19.36. а) Используя графики функций  $y = 2x - 2$  и  $y = \frac{4}{x-2}$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $2x - 2 > \frac{4}{x-2}$ .

б) Используя графики функций  $y = \sqrt{x+1}$  и  $y = x - 1$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $\sqrt{x+1} \leq x - 1$ .

О19.37. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ \sqrt{x+1}, & \text{если } 1 < x \leq 5. \end{cases}$$

С помощью графика функции найдите:

- а)  $f(-2,8)$ ,  $f(3,84)$ ,  $f(0)$ ;  
б) при каких значениях  $x$   $f(x) = 0$ ,  $f(x) = 2$ ,  $f(x) = 4$ .

О19.38. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+3}, & \text{если } -3 \leq x \leq 1; \\ 2(x-1)^2, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

- а) Постройте график функции  $y = f(x)$ .  
б) При каких значениях  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет один корень, два корня?

●19.39. Постройте график функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{x+3}{x^2-9}; & \text{в) } y = \frac{6-3x}{x^2-4}; \\ \text{б) } y = \frac{|x|}{x}(x-2)^2; & \text{г) } y = \frac{|1-x|}{x-1}(x-3)^2. \end{array}$$

### График функции $y = f(x) + m$

- 19.40.** Изобразите на координатной плоскости заданные точки и определите, используя обороты «выше на...» и «ниже на...», их взаимное расположение:

- а)  $A(-1; 7)$  и  $A_1(-1; 10)$ ;      в)  $C(0; -6)$  и  $C_1(0; -5)$ ;  
 б)  $B(2; 7)$  и  $B_1(2; 5)$ ;      г)  $D(3; -4)$  и  $D_1(3; -7)$ .

- 19.41.** Как найти расстояние между точками, имеющими одинаковые абсциссы? Закончите предложение: «Если точки имеют одинаковые абсциссы, то расстояние между ними равно...»

- 19.42.** Заданы функции  $y = f(x)$ ,  $y = f(x) + 2$  и  $y = f(x) - 3$ . Заполните таблицу значений этих функций:

$y \backslash x$	-1	2	4	6	7
$y = f(x)$	5	7	-5		
$y = f(x) + 2$				3	-11
$y = f(x) - 3$					

- 19.43.** Докажите, что любая точка графика функции  $y = f(x) - 3$  с абсциссой  $x_0$  находится на 3 единицы ниже, чем точка графика функции  $y = f(x)$  с той же самой абсциссой, а график функции  $y = f(x) - 3$  можно получить из графика функции  $y = f(x)$  параллельным переносом вдоль оси ординат на 3 единицы вниз.

Постройте в одной системе координат графики функций:

- 19.44.**  $y = 2x$ ,  $y = 2x + 3$  и  $y = 2x - 1$ .

- 19.45.**  $y = x^2$ ,  $y = x^2 + 3$  и  $y = x^2 - 1$ .

- 19.46.**  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x} + 3$  и  $y = \frac{1}{x} - 1$ .

- 19.47.**  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt{x} - 2$  и  $y = \sqrt{x} + 1$ .

- 19.48.**  $y = |x|$ ,  $y = |x| - 3$  и  $y = |x| + 2$ .

- 19.49.** График какой функции получится, если график функции:

а)  $y = 2x^2$  перенести на 3 единицы вверх вдоль оси  $Oy$ ;

б)  $y = \frac{9}{x}$  перенести на 1 единицу вниз вдоль оси  $Oy$ ;

в)  $y = \sqrt{x}$  перенести на 2 единицы вниз вдоль оси  $Oy$ ;

г)  $y = |x|$  перенести на 4 единицы вверх вдоль оси  $Oy$ ?

- 19.50.** Постройте график функции:

а)  $y = 2x^2 + 3$ ;      в)  $y = -x^2 - 4$ ;

б)  $y = -|x| - 1$ ;      г)  $y = |x| + 4$ .

**19.51.** Постройте график функции:

а)  $y = \sqrt{x} + 5$ ;      в)  $y = -\sqrt{x} + 4$ ;

б)  $y = -\frac{5}{x} - 1$ ;      г)  $y = \frac{4}{x} - 3$ .

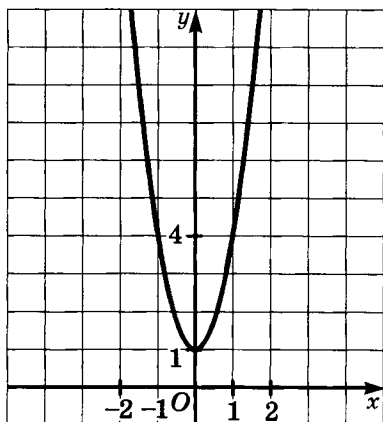
**○19.52.** Напишите уравнение:

а) параболы  $y = ax^2 + t$ , изображённой на рис. 33;

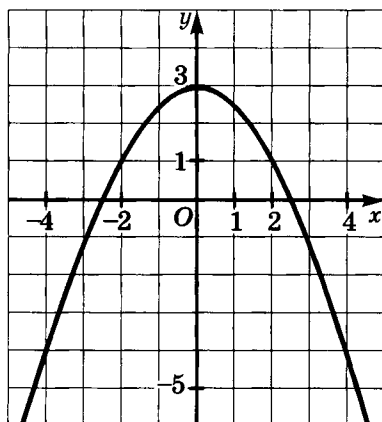
б) параболы  $y = ax^2 + t$ , изображённой на рис. 34;

в) гиперболы  $y = \frac{k}{x} + t$ , изображённой на рис. 35;

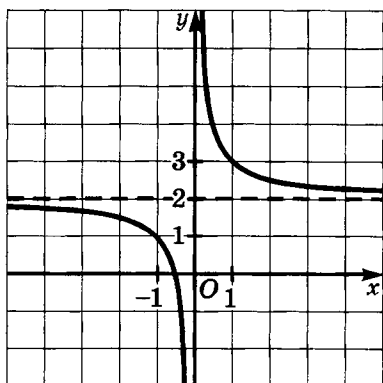
г) гиперболы  $y = \frac{k}{x} + t$ , изображённой на рис. 36.



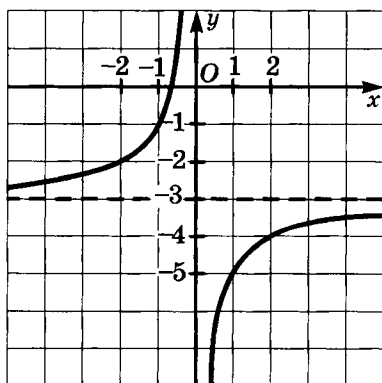
**Рис. 33**



**Рис. 34**



**Рис. 35**



**Рис. 36**

○19.53. Задайте аналитически функцию, график которой изображён:

а) на рис. 37;      в) рис. 39;

б) рис. 38;      г) рис. 40.

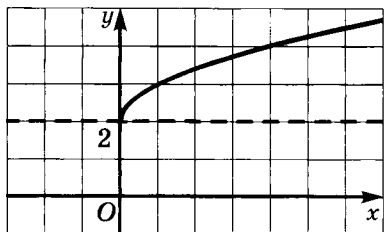


Рис. 37

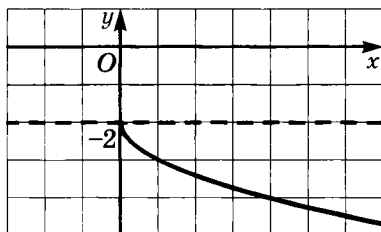


Рис. 38

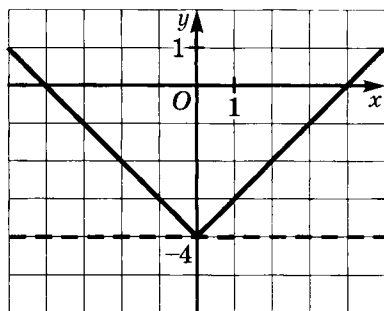


Рис. 39

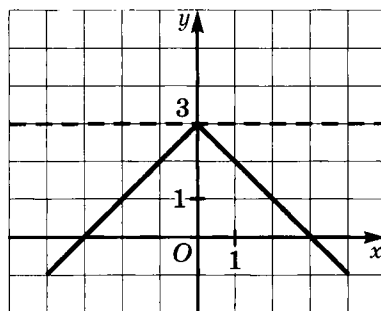


Рис. 40

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

○19.54. а)  $y = 2x^2 - 5$  на отрезке  $[-2; 1]$ ;

б)  $y = \frac{2}{x} - 2$  на отрезке  $[1; 2]$ ;

в)  $y = -3x^2 + 4$  на открытом луче  $(-2; +\infty)$ ;

г)  $y = -\frac{1}{x} + 1$  на луче  $(-\infty; -1]$ .

○19.55. а)  $y = \sqrt{x} - 2$  на отрезке  $[4; 9]$ ;

б)  $y = |x| - 4$  на отрезке  $[-4; 5]$ ;

в)  $y = -\sqrt{x} + 1$  на полуинтервале  $(1; 9]$ ;

г)  $y = -|x| + 2$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

○19.56. а) Пусть  $A$  — наибольшее значение функции  $y = \frac{3}{x} - 2$  на отрезке  $[1; 3]$ , а  $B$  — наименьшее значение функции  $y = 1 - x$  на отрезке  $[-4; 3]$ . Сравните  $A$  и  $B$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

б) Пусть  $K$  — наибольшее значение функции  $y = -\frac{2}{x} - 1$  на луче  $(-\infty; -1]$ , а  $L$  — наименьшее значение функции  $y = (x - 4)^2$  на отрезке  $[3; 5]$ . Сравните  $L$  и  $K$ . Сделайте графическую иллюстрацию.

○19.57. Используя график функции  $y = 0,5x^2 - 2$ , найдите:

- а) значение функции при  $x = -1; 0; 2$ ;
- б) значения аргумента, если  $y = 0; y = -2; y = 6$ ;
- в) наименьшее значение функции;
- г) значения аргумента, при которых  $y < 0, y > 0$ .

○19.58. Используя график функции  $y = -\sqrt{x} + 2$ , найдите:

- а) значение функции при  $x = 0; 1; 9$ ;
- б) значение аргумента, если  $y = 1; y = 0; y = -2$ ;
- в) множество значений функции;
- г) значения аргумента, при которых  $y > 0, y < 0$ .

○19.59. Используя график функции  $y = \frac{6}{x} - 3$ , найдите:

- а) значение функции при  $x = -3; 2; 6$ ;
- б) значение аргумента, если  $y = 0; -1; 3$ ;
- в) значения аргумента, при которых  $y > 0, y < 0$ ;
- г) уравнения асимптот графика функции.

○19.60. Постройте график функции  $y = |x| - 1$ . С помощью графика найдите:

- а) значение  $y$  при  $x = 0; -2; 3$ ;
- б) значения  $x$ , если  $y = 3; 0; -2$ ;
- в) значения  $x$ , при которых  $y < 0, y > 0$ ;
- г) наименьшее значение функции.

○19.61. Решите графически уравнение:

- а)  $x^2 + 1 = \frac{2}{x}$ ;
- б)  $-\sqrt{x} + 4 = 3x^2$ ;
- в)  $\frac{3}{x} - 2 = x$ ;
- г)  $-|x| + 2 = 0,5(x - 2)^2$ .



○19.62. Решите графически систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} y = \frac{2}{x} + 1, \\ y + 5x - 1 = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = -x^2 - 2, \\ 5x - 3y = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} y = -\frac{3}{x} + 1, \\ y = -\sqrt{x} - 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = 0,5x^2 - 3, \\ y = \sqrt{x} + 3. \end{cases}$$

○19.63. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & \text{если } -2 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{если } 1 < x \leq 4. \end{cases}$$

а) Найдите  $f(-1,5)$ ;  $f(1)$ ;  $f(4)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) По графику определите, при каких значениях  $x$   $f(x) = 2$ ,  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = -2$ .

○19.64. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{3}{x}, & \text{если } 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

а) Найдите  $f(-1)$ ;  $f\left(\frac{1}{3}\right)$ ;  $f(3)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○19.65. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } -4 \leq x \leq -2; \\ -0,5x^2 + 3, & \text{если } -2 < x \leq 2; \\ \frac{x}{3}, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$$

а) Найдите  $f(-2)$ ;  $f(0)$ ;  $f(4)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○19.66. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } -5 \leq x \leq -3; \\ |x| - 1, & \text{если } -3 < x < 1; \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } 1 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

а) Найдите  $f(-5)$ ;  $f(1)$ ;  $f\left(\frac{\pi^2}{4} + 1\right)$ .

б) Постройте график функции  $y = f(x)$ .

в) Перечислите свойства функции.

○19.67. а) Используя графики функций  $y = -x^2 + 4$  и  $y = x + 2$ , решите неравенство  $x + 2 \leq -x^2 + 4$ .

б) Используя графики функций  $y = x^2 - 2$  и  $y = -|x| + 4$ , решите неравенство  $x^2 - 2 < -|x| + 4$ .

○19.68. Постройте график функции:

а)  $y = \sqrt{-x} - 1$ ;      б)  $y = -\sqrt{-x} + 1$ .

### График функции $y = f(x + l) + m$

19.69. Пусть дан график функции  $y = f(x)$ . Как построить график функции:

а)  $y = f(x + 3) - 4$ ;      в)  $y = f(x + 1) + 3$ ;

б)  $y = f(x - 5) + 2$ ;      г)  $y = f(x - 2) - 1$ ?

19.70. График какой функции получится, если:

а) параболу  $y = 2,5x^2$  перенести на 3 единицы влево и на 4 единицы вниз;

б) гиперболу  $y = -\frac{4}{x}$  перенести на 2 единицы вправо и на 1 единицу вверх;

в) график функции  $y = \sqrt{x}$  перенести на 1 единицу влево и на 2 единицы вверх;

г) график функции  $y = |x|$  перенести на 3 единицы вправо и на 1 единицу вниз?

Постройте график функции:

○19.71. а)  $y = (x + 1)^2 - 2$ ;      в)  $y = -(x - 4)^2 + 3$ ;

б)  $y = -3(x - 1)^2 + 4$ ;      г)  $y = 0,5(x + 4)^2 + 1$ .

○19.72. а)  $y = \frac{3}{x+5} + 2$ ;      в)  $y = -\frac{1}{x-3} + 4$ ;

б)  $y = -\frac{3}{x-1} + 2$ ;      г)  $y = \frac{2}{x+3} - 4$ .

○19.73. Постройте график функции:

а)  $y = \sqrt{x+1} + 2$ ;      в)  $y = \sqrt{x-1} - 1$ ;

б)  $y = |x+3| - 4$ ;      г)  $y = |x-2| + 3$ .

○19.74. Напишите уравнение:

а) параболы  $y = a(x+l)^2 + m$ , изображённой на рис. 41;

б) параболы  $y = a(x+l)^2 + m$ , изображённой на рис. 42;

в) гиперболы  $y = \frac{k}{x+l} + m$ , изображённой на рис. 43;

г) гиперболы  $y = \frac{k}{x+l} + m$ , изображённой на рис. 44.

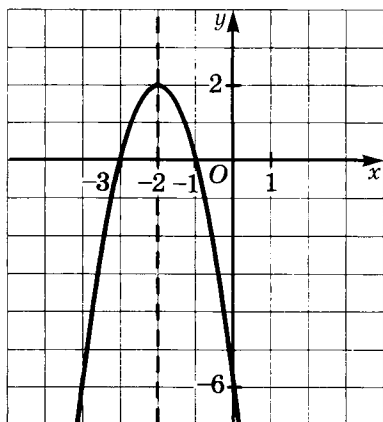


Рис. 41

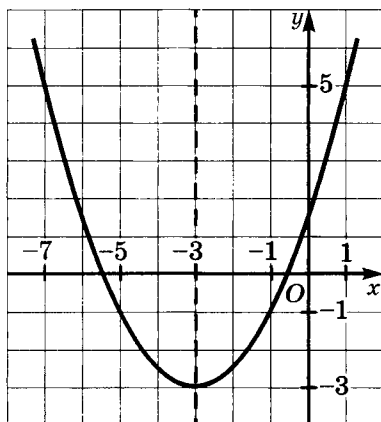


Рис. 42

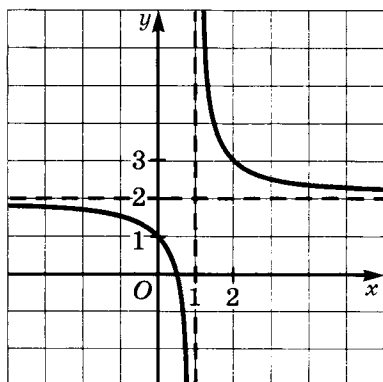


Рис. 43

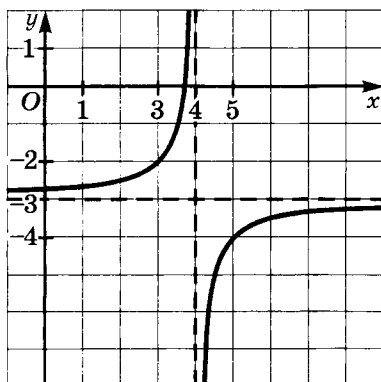


Рис. 44

○19.75. График какой функции изображён:

а) на рис. 45;      в) рис. 47;

б) рис. 46;      г) рис. 48?

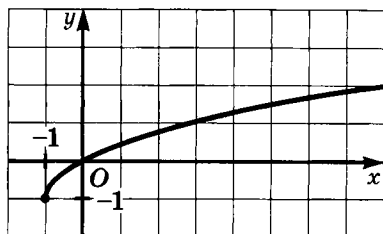


Рис. 45

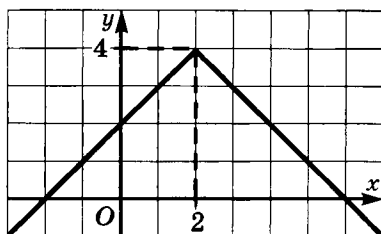


Рис. 46

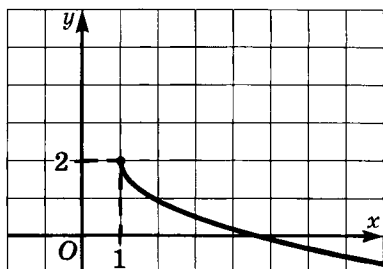


Рис. 47

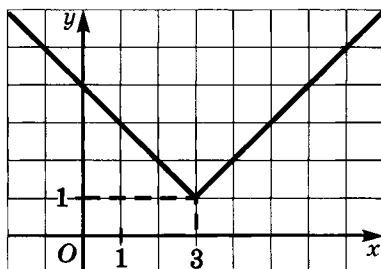


Рис. 48

○19.76. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = 2(x - 1)^2 + 3;$$

а) на отрезке  $[0; 1]$ ;

в) на отрезке  $[1; 2]$ ;

б) на луче  $[1; +\infty)$ ;

г) на луче  $(-\infty; 0]$ .

○19.77. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \frac{3}{x+1} - 3;$$

а) на отрезке  $[0; 2]$ ;

в) на отрезке  $[2; 5]$ ;

б) на луче  $[0; +\infty)$ ;

г) на луче  $(-\infty; -2]$ .

○19.78. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sqrt{x+2} - 3;$$

а) на отрезке  $[-2; 2]$ ;

в) на полуинтервале  $[23; 34]$ ;

б) на интервале  $(0; 1)$ ;

г) на луче  $[3; +\infty)$ .

- 19.79. Используя график функции  $y = -(x - 3)^2 + 4$ :
- найдите значения аргумента, при которых  $y = 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ ;
  - определите промежутки возрастания и убывания функции;
  - укажите наибольшее значение функции;
  - напишите уравнение оси симметрии параболы.
- 19.80. Используя график функции  $y = \frac{6}{x+2} - 1$ :
- найдите значения аргумента, при которых  $y = 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ ;
  - определите промежутки убывания функции;
  - укажите центр симметрии гиперболы;
  - напишите уравнения асимптот гиперболы.
- 19.81. Используя график функции  $y = \sqrt{x+1} - 2$ , найдите:
- область определения функции;
  - область значений функции;
  - координаты точек пересечения графика с осями координат;
  - значения аргумента, при которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ .
- 19.82. Постройте график функции  $y = |x - 2| - 3$ . С помощью графика найдите:
- наименьшее значение функции;
  - промежутки возрастания, убывания функции;
  - значения  $x$ , при которых  $y = 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ ;
  - область значений функции.
- 19.83. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} + 2, & \text{если } x < -1; \\ -2x - 2, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$
- Найдите  $f(-2)$ ;  $f(-1)$ ;  $f(0,25)$ .
  - Постройте график функции  $y = f(x)$ .
  - С помощью графика функции найдите, при каких значениях  $x$   $f(x) = 1$ ,  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = -2$ .
- 19.84. Постройте и прочитайте график функции  $y = f(x)$ , где:
- $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 + 2, & \text{если } -3 \leq x \leq -1; \\ (x+1)^2 + 1, & \text{если } x > -1; \end{cases}$
  - $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4} - 1, & \text{если } -4 \leq x \leq 0; \\ -x^2 + 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

○19.85. Дана функция  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} -3(x+2)^2 - 1, & \text{если } -3 \leq x \leq -1; \\ 4x, & \text{если } -1 < x \leq 1. \end{cases}$$

Постройте график функции  $y = f(x)$  и определите, при каких значениях  $p$  уравнение  $f(x) = p$ :

- а) имеет один корень;      в) имеет три корня;  
б) имеет два корня;      г) не имеет корней.

○19.86. Постройте график функции, предварительно преобразовав её методом выделения полного квадрата к виду  $y = a(x+l)^2 + m$ :

- а)  $y = x^2 + 2x + 3$ ;      в)  $y = x^2 - 4x$ ;  
б)  $y = -x^2 + 4x - 1$ ;      г)  $y = -x^2 - 8x - 7$ .

○19.87. Постройте график функции:

- а)  $y = 2x^2 - 4x + 5$ ;      в)  $y = -4x^2 + 8x - 10$ ;  
б)  $y = -3x^2 + 6x - 1$ ;      г)  $y = 2x^2 - 8x + 6$ .

○19.88. Постройте и прочитайте график функции:

- а)  $y = 2|x - 3| - 3$ ;      в)  $y = -3|x + 4| + 6$ ;  
б)  $y = \frac{|x - 1|}{2} - 1$ ;      г)  $y = -\frac{4|x + 3|}{3} + 8$ .

## § 20. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$ , ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

20.1. Назовите коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  квадратичной функции:

- а)  $y = 7x^2 - 3x - 2$ ;      в)  $y = 8x^2 - 2x$ ;  
б)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$ ;      г)  $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{7} - \frac{3}{10}x^2$ .

20.2. Не выполняя построения, ответьте на вопрос, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы:

- а)  $y = 3x^2 - 7x + 1$ ;      в)  $y = -7x^2 + x - 2$ ;  
б)  $y = -5x^2 + 2x + 0,5$ ;      г)  $y = 6x^2 + 9x + 1$ .

**20.3.** Найдите координаты вершины параболы:

- а)  $y = 4x^2 + 8x - 1$ ;      в)  $y = -x^2 + x - 1$ ;  
б)  $y = -3x^2 - 6x + 2$ ;      г)  $y = 5x^2 - 10x + 4$ .

**○20.4.** Постройте график функции  $y = x^2 + 4x - 5$ . С помощью графика определите:

- а) значение функции при  $x = -3$ ; 0; 1;  
б) значения аргумента, если  $y = -8$ ;  $-5$ ; 0;  
в) наименьшее значение функции;  
г) промежутки возрастания и убывания функции;  
д) значения аргумента, при которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ .

**○20.5.** Постройте график функции  $y = -2x^2 + 4x + 6$ . С помощью графика определите:

- а) значение функции при  $x = -2$ ; 0; 3;  
б) значения аргумента, если  $y = -10$ ; 6; 0;  
в) наибольшее значение функции;  
г) промежутки возрастания и убывания функции;  
д) значения аргумента, при которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ .

**○20.6.** Постройте график функции. Укажите её наименьшее или наибольшее значение:

- а)  $y = x^2 + 4x + 5$ ;      в)  $y = -x^2 + 2x - 3$ ;  
б)  $y = -2x^2 + 8x - 5$ ;      г)  $y = 3x^2 + 6x + 1$ .

**○20.7.** Не выполняя построения графика, найдите множество значений функции:

- а)  $y = -3x^2 + 6x + 2$ ;      в)  $y = 2x^2 - 4x + 3$ ;  
б)  $y = -4x^2 - 8x$ ;      г)  $y = 4 - 3x^2$ .

**○20.8.** Найдите значение коэффициента  $c$  и постройте график функции:

- а)  $y = x^2 - 6x + c$ , если известно, что наименьшее значение функции равно 1;  
б)  $y = -x^2 + 4x + c$ , если известно, что наибольшее значение функции равно 2.

**○20.9.** Найдите ближайшую к оси абсцисс точку графика функции:

- а)  $y = -x^2 + 6x - 11$ ;      б)  $y = 3x^2 - 6x + 5$ .

**○20.10.** Определите расстояние от оси абсцисс до параболы:

- а)  $y = x^2 + 8x + 31$ ;      б)  $y = -2x^2 + 12x - 19$ .

○20.11. Определите расстояние:

- а) от параболы  $y = x^2 + 8x$  до прямой  $y = -17$ ;
- б) от параболы  $y = -2x^2 + 12x$  до прямой  $y = 23$ .

○20.12. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

- а)  $y = 2x^2 + 4x - 1$  на отрезке  $[-1; 0]$ ;
- б)  $y = -x^2 + 2x + 3$  на отрезке  $[1; 2]$ ;
- в)  $y = 3x^2 - 12x + 1$  на полуинтервале  $[1; 4)$ ;
- г)  $y = -x^2 + 4x - 5$  на луче  $[0; +\infty)$ .

○20.13. Постройте график функции:

- а)  $y = -x^2 + 2x$ ;      в)  $y = x^2 + 6x$ ;
- б)  $y = 2x^2 + 4x$ ;      г)  $y = -3x^2 + 12x$ .

○20.14. Исследуйте на монотонность функцию:

- а)  $y = (x - 2)^2$ ;      в)  $y = 2x^2 + 1$ ;
- б)  $y = 4 - x^2 + 3x$ ;      г)  $y = 7 + 4x - 2x^2$ .

○20.15. Докажите, что функция:

- а)  $y = x^2 - 4x + 5$  является возрастающей на промежутке  $(3; 12)$ ;
- б)  $y = x^2 + 6x - 7$  является убывающей на промежутке  $(-8; -5)$ .

Запишите уравнение прямой, которая является осью симметрии параболы:

- 20.16. а)  $y = 2x^2 - x + 1$ ;      в)  $y = 7x^2 + 12x + 4$ ;
- б)  $y = -5x^2 + 2x - 2$ ;      г)  $y = -x^2 + 2x + 1$ .

- 20.17. а)  $y = (x + 2)^2 - 3$ ;      в)  $y = -(x - 1)^2 + 3$ ;
- б)  $y = (3x + 2)^2$ ;      г)  $y = -(2x - 8)^2$ .

○20.18. Пусть  $f(x) = (x - 1)^2 + 2$ . Докажите, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из равенства  $a + b = 2$  следует, что  $f(a) = f(b)$ . Объясните этот факт исходя из свойств параболы. Попробуйте обобщить эту задачу: «Пусть  $f(x) = (x + n)^2 + m$ . Докажите, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из равенства  $a + b = -2n$  следует, что  $f(a) = f(b)$ ».

○20.19. Найдите координаты точек пересечения графика квадратичной функции с осью  $x$ :

- а)  $y = x^2 - 6x + 5$ ;      в)  $y = 2x^2 + 8x + 6$ ;
- б)  $y = -0,5x^2 + 2x + 6$ ;      г)  $y = -x^2 + 8x - 7$ .



○20.20. Используя график функции  $y = -x^2 + 6x - 5$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство:

а)  $y > 0$ ;      б)  $y \leq 3$ ;      в)  $y \leq 0$ ;      г)  $y > -5$ .

○20.21. Используя график функции  $y = 2x^2 + 8x + 6$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство:

а)  $y \geq 0$ ;      б)  $y < -6$ ;      в)  $y < 0$ ;      г)  $y \geq 6$ .

○20.22. Постройте график и проверьте, равна ли абсцисса вершины параболы полусумме нулей функции:

а)  $y = (x - 2)(x + 4)$ ;      в)  $y = (2 - x)(x - 6)$ ;

б)  $y = -5x(x + 2)$ ;      г)  $y = 3x(2 + 2x)$ .

Не выполняя построения графика, найдите нули функции и промежутки знакопостоянства:

○20.23. а)  $y = x^2 - 6x$ ;      в)  $y = -4x^2 - 8x$ ;

б)  $y = 2x^2 - 32$ ;      г)  $y = -3x^2 + 27$ .

○20.24. а)  $y = (x - 3)^2 - 1$ ;      в)  $y = -(x + 1)^2 + 4$ ;

б)  $y = (2 - x)(x + 1)$ ;      г)  $y = 2(x - 1)(x + 3)$ .

○20.25. а)  $y = x^2 - 4x - 5$ ;      в)  $y = 2x^2 + 6x + 8$ ;

б)  $y = -x^2 + 6x - 5$ ;      г)  $y = -2x^2 + 4x + 6$ .

○20.26. Определите число корней уравнения:

а)  $-x^2 + 4x + 5 = 0$ ;      в)  $2x^2 - 6x + 1 = x - 2$ ;

б)  $-2x^2 - 4x + 1 = -\frac{2}{x}$ ;      г)  $-x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{x}$ .

Определите число решений системы уравнений:

○20.27. а)  $\begin{cases} y = 2x^2 - 6x + 1, \\ y = 3; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = -3x^2 + 12x - 5, \\ y = -5; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ 2x - 3y = 0; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = -4x^2 + 4x + 2, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

○20.28. а)  $\begin{cases} y = -x^2 + 6x - 4, \\ 2x - y + 3 = 0; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 4, \\ x - 2y = 0; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = 3x^2 - 6x - 4, \\ y - 2x - 4 = 0; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 6, \\ 3x - 2y + 1 = 0. \end{cases}$

- 20.29.** а) Найдите значение коэффициента  $c$ , если известно, что график функции  $y = x^2 + 4x + c$  пересекает ось ординат в точке  $A(0; 2)$ .  
 б) Найдите значение коэффициента  $c$ , если известно, что график функции  $y = x^2 + 4x + c$  пересекает ось ординат в точке  $B(0; 4)$ .
- 20.30.** а) Найдите значение коэффициента  $a$ , если известно, что график функции  $y = ax^2 + 4x + 5$  пересекает ось абсцисс в точке  $M(-10; 0)$ .  
 б) Найдите значение коэффициента  $a$ , если известно, что график функции  $y = ax^2 + 4x - 8$  пересекает ось абсцисс в точке  $N(4; 0)$ .
- 20.31.** а) Найдите значение коэффициента  $b$ , если известно, что осью симметрии графика функции  $y = x^2 + bx + 4$  является прямая  $x = 1$ .  
 б) Найдите значение коэффициента  $b$ , если известно, что осью симметрии графика функции  $y = 2x^2 + bx - 3$  является прямая  $x = -4$ .
- 20.32.** а) Зная, что  $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ , найдите  $f(x^2)$ .  
 б) Зная, что  $f(x) = -x^2 + 2x - 4$ , найдите  $f(-x - 1)$ .
- 20.33.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ . Сравните:  
 а)  $f(2)$  и  $f(2,0137)$ ;      в)  $f(1,999)$  и  $f(2)$ ;  
 б)  $f\left(\frac{65}{63}\right)$  и  $f\left(\frac{63}{65}\right)$ ;      г)  $f(49,7)$  и  $f(49,69)$ .
- 20.34.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -x^2 - 6x + 7$ . Сравните:  
 а)  $f(-2,43)$  и  $f(-3)$ ;      в)  $f\left(-\frac{25}{7}\right)$  и  $f(-3)$ ;  
 б)  $f(-59,9)$  и  $f(-60)$ ;      г)  $f(-0,99)$  и  $f(1,1)$ .
- 20.35.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ . Сравните:  
 а)  $f(\sqrt{2})$  и  $f(-1)$ ;      в)  $f(-1)$  и  $f(-\sqrt{5})$ ;  
 б)  $f(-12,473)$  и  $f(-12,472)$ ;      г)  $f(\sqrt{2})$  и  $f(\sqrt{3})$ .
- 20.36.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 5x^2 + 3x - 2$ . Найдите:  
 а)  $f(2x)$ ;      б)  $f(x - 1)$ ;      в)  $f(x^3)$ ;      г)  $2f(3x)$ .
- 20.37.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -2x^2 + x - 4$ . Найдите:  
 а)  $f(-x)$ ;      б)  $f(x + 5)$ ;      в)  $f(-x^2)$ ;      г)  $3f(2x)$ .

○20.38. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 2x^2 - 3x + 12$ . При каком значении аргумента выполняется равенство  $f(x - 1) = f(x + 1)$ ?

○20.39. Дан квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx + 7$ . Известно, что  $f(-1) = f(5)$ . Решите уравнение  $f(x) = f(4)$ .

○20.40. Дан квадратный трёхчлен  $f(x) = ax^2 + bx - 4$ . Известно, что  $f(-8) = f(2)$ . Решите уравнение  $f(x) = f(-6)$ .

Постройте и прочитайте график функции:

○20.41.  $y = \begin{cases} 2x^2 + 4x - 1, & \text{если } -2 \leq x \leq 0; \\ x - 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

○20.42.  $y = \begin{cases} -3x^2 + 6x + 4, & \text{если } 0 \leq x \leq 2; \\ \frac{4}{x}, & \text{если } 2 < x \leq 4. \end{cases}$

○20.43.  $y = \begin{cases} -\frac{2}{x}, & \text{если } x < -1; \\ 4 - 3x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 1; \\ |x - 2|, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

○20.44. а) Используя графики функций  $y = x^2 - 2x - 1$  и  $y = -\frac{2}{x}$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство:

$$x^2 - 2x - 1 < -\frac{2}{x}.$$

б) Используя графики функций  $y = -x^2 + 6x - 3$  и  $y = \frac{6}{x - 2}$ , определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство:

$$-x^2 + 6x - 3 > \frac{6}{x - 2}.$$

○20.45. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых вершина параболы  $y = -x^2 + 4x + a$  находится на оси абсцисс.

○20.46. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых вершина параболы  $y = -x^2 + 4x + a$  находится на равных расстояниях от осей координат.

- 20.47. Найдите значение коэффициента  $a$ , если известно, что прямая  $x = 2$  является осью симметрии графика функции  $y = ax^2 - (a + 6)x + 9$ .
- 20.48. При каком значении коэффициента  $c$  вершина параболы  $y = x^2 + 6x + c$  находится на расстоянии 5 от начала координат?
- 20.49. При каких значениях коэффициентов  $b$  и  $c$  точка  $A(1; -2)$  является вершиной параболы  $y = x^2 + bx + c$ ?
- 20.50. Найдите значения коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$ , если известно, что точка  $A(1; -2)$  является вершиной параболы  $y = ax^2 + bx + c$  и что парабола пересекает ось ординат в точке  $B(0; 2)$ .
- 20.51. Напишите уравнение параболы вида  $y = ax^2 + bx + c$ , если её график проходит через точку  $M(3; 5)$ , а вершиной является точка  $T(1; 2)$ .
- 20.52. Напишите уравнение параболы вида  $y = ax^2 + bx + c$ , если её график проходит через начало координат, а вершиной является точка  $T(-1; 4)$ .
- 20.53. Напишите уравнение параболы вида  $y = ax^2 + bx + c$ , если вершиной является точка  $B(-1; -4)$ , а одна из точек её пересечения с осью абсцисс удалена от начала координат на расстояние 3.
- 20.54. Найдите значения коэффициентов  $b$  и  $c$ , если известно, что график функции  $y = x^2 + bx + c$  проходит через точки  $(0; 8)$  и  $(3; -1)$ .
- 20.55. Найдите значения коэффициентов  $b$  и  $c$ , если известно, что график функции  $y = x^2 + bx + c$  проходит через точки  $(1; 6)$  и  $(-1; -2)$ .
- 20.56. График какой квадратичной функции проходит через точки:  
а)  $K(-2; 3)$ ,  $L(-1; 0)$ ,  $M(0; -9)$ ;  
б)  $A(2; 3)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(3; 2)$ ?
- 20.57. Задайте параболу вида  $y = ax^2 + bx + c$ , проходящую через три точки:  
а)  $A(0; 0)$ ,  $B(1; -1)$ ,  $C(2; 2)$ ;  
б)  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; -3)$ ,  $C(3; 1)$ .
- 20.58. Убедитесь, что через точки  $A(1; 7)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(0; 5)$  не проходит ни одна парабола вида  $y = ax^2 + bx + c$ . Объясните, почему это так.

○20.59. При каких значениях параметра  $a$  функция:

а)  $y = x^2 - 2ax + 5$  убывает на промежутке  $(3; 5]$ ;

б)  $y = 0,5x^2 - ax - 8$  возрастает на промежутке  $(-4; 9]$ ?

○20.60. При каких значениях параметра  $a$  функция:

а)  $y = -x^2 + 4ax$  возрастает на промежутке  $(0; 7)$ ;

б)  $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}ax - 5$  убывает на промежутке  $[-4; 0]$ ?

○20.61. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых функция:

а)  $y = -x^2 + (3 + b)x - 7$  принимает равные значения в точках  $-5$  и  $3$ ;

б)  $y = x^2 + (b - 1)x - 24$  принимает равные значения в точках  $-6$  и  $4$ ?

○20.62. Постройте графики функций:

а)  $y = x^2 + 2x + 3$  и  $y = -2x^2 + 8x - 11$ ;

б)  $y = x^2 + 4x + 5$  и  $y = 2x - x^2$ .

Найдите наименьшую длину отрезка прямой, параллельной оси ординат, концы которого лежат на данных графиках.

○20.63. Найдите наибольшую длину отрезка, параллельного оси ординат и принадлежащего фигуре, ограниченной графиками данных функций. Постройте указанную фигуру:

а)  $y = 3 - x^2$  и  $y = x^2 - 4$ ;

б)  $y = x^2 + 1$  и  $y = x^2 - 4$ .

○20.64. Найдите наибольшую длину отрезка, параллельного оси абсцисс и принадлежащего фигуре, ограниченной графиками функций:

а)  $y = -x^2$  и  $y = x^2 - 2$ ;

б)  $y = x^2 + 2x + 2$  и  $y = -x^2 - 2x + 2$ .

○20.65. Найдите наибольшее значение выражения:

а)  $3 + \frac{8}{x^2 - 4x + 5}$ ;

б)  $\frac{8}{x^2 - 4x + 6} + \frac{4}{x^2 - 4x + 8}$ .

○20.66. а) Из всех точек координатной плоскости, для которых разность ординаты и квадрата абсциссы на 5 больше удвоенной абсциссы, найдите ту, у которой ордината наименьшая.

- б) Из всех точек координатной плоскости, для которых отношение ординаты к абсциссе на 6 больше числа, противоположного абсциссе, найдите ту, у которой ордината наибольшая.
- 20.67. а) На прямой  $2x + 3y + 2 = 0$  найдите точку  $K$ , произведение координат которой наибольшее.  
 б) На прямой  $2x - 5y + 12 = 0$  найдите точку  $K$ , произведение координат которой наименьшее.
- 20.68. а) На параболе  $y = x^2$  найдите точку  $K$ , сумма координат которой наименьшая.  
 б) На параболе  $y = 2x^2 - x + 1$  найдите точку  $K$ , разность абсциссы и ординаты которой наибольшая.
- 20.69. На прямой  $y = 4x - 5$  найдите точку:  
 а) с наименьшей суммой ординаты и квадрата абсциссы;  
 б) с наибольшей разностью абсциссы и квадрата ординаты.
- 20.70. Докажите, что прямая  $4x + 5y + 60 = 0$  и парабола  $y = 4x^2 + 12x + 31$  не имеют общих точек. При каком значении  $x$  отрезок, параллельный оси ординат, концы которого лежат на заданных линиях, имеет наименьшую длину?
- 20.71. а) Докажите, что параболы  $y = 0,25(x^2 - 8x + 11)$  и  $y = x^2 - 2x + 2$  пересекаются;  
 б) найдите координаты точек пересечения парабол;  
 в) рассмотрите отрезки, отсекаемые на прямых  $x = m$  ( $-1 < m < 1$ ) данными параболой, и найдите длину наибольшего из этих отрезков;  
 г) найдите координаты концов этого отрезка.
- 20.72. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции  $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a > 0$ , где  $f(1) < 0$ ,  $c > 0$ .  
 а) Каким образом расположены нули функции относительно точки  $x = 1$ ?  
 б) Какой знак имеет сумма нулей этой функции, если эти нули существуют?
- 20.73. Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , если известно, что  $a \cdot f(1) < 0$ ,  $x_0 < -1$ , где  $x_0$  — абсцисса вершины параболы. Какой знак имеет сумма нулей этой функции, если эти нули существуют?

- 20.74.** Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , если известно, что  $a \cdot f(1) > 0$ ,  $x_0 < 1$ , где  $x_0$  — абсцисса вершины параболы, и уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два корня. Каким образом расположены нули функции относительно точки  $x = 1$ ?
- 20.75.** Нарисуйте возможный вид графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , если известно, что  $f(1) < 0$ ,  $f(-1) < 0$ ,  $a > 0$ . Каким образом расположены нули функции относительно точек  $x = 1$ ,  $x = -1$  оси абсцисс?
- 20.76.** а) Число 12 представьте в виде суммы двух слагаемых, произведение которых наибольшее.  
б) Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых, сумма квадратов которых наименьшая.
- 20.77.** а) Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых, сумма квадрата первого из которых со вторым наименьшая.  
б) Число 12 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы разность первого и квадрата второго была наибольшей.
- 20.78.** а) Пусть  $a + b = 7$ . Какое наибольшее значение принимает выражение  $ab$ ?  
б) Пусть  $a + b = 8$ . Какое наименьшее значение принимает выражение  $a^2 + b^2$ ?
- 20.79.** а) Пусть  $2a + 5b = 7$ . Какое наибольшее значение принимает выражение  $ab$ ?  
б) Пусть  $a + 3b = 10$ . Какое наименьшее значение принимает выражение  $a^2 + b^2$ ?
- 20.80.** а) Найдите наименьшее целочисленное значение, которое принимает функция  $y = 3x^2 - 17x + 1$ .  
б) Найдите наибольшее целочисленное значение, которое принимает функция  $y = -2x^2 + 7x - 11$ .
- 20.81.** а) Пусть  $m$  — целое число. Найдите наименьшее значение выражения  $3m^2 - 11m$ .  
б) Пусть  $k$  — целое число. Найдите наибольшее значение выражения  $31k - 7k^2$ .

- 20.82. Докажите, что парабола  $y = ax^2 + bx + c$  может быть единственным образом задана координатами своей вершины  $B(x_0; y_0)$  и любой точкой  $K(x_1; y_1)$ , принадлежащей параболе и такой, что

$$\begin{cases} x_1 \neq x_0, \\ y_1 \neq y_0. \end{cases}$$

## § 21. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решите уравнение двумя способами — графическим и аналитическим:

○21.1. а)  $x^2 - 2x = 0$ ;                      в)  $x^2 + 4x = 0$ ;  
б)  $-x^2 + 6x = 0$ ;                      г)  $-x^2 - 8x = 0$ .

○21.2. а)  $x^2 - 4 = 0$ ;                      в)  $x^2 - 9 = 0$ ;  
б)  $-x^2 + 1 = 0$ ;                      г)  $-x^2 + 16 = 0$ .

○21.3. а)  $2x^2 - 2 = 0$ ;                      в)  $0,5x^2 - 2 = 0$ ;  
б)  $-3x^2 + 6x = 0$ ;                      г)  $-\frac{1}{3}x^2 - 2x = 0$ .

Решите графически уравнение:

○21.4. а)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;                      в)  $x^2 + 4x - 5 = 0$ ;  
б)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;                      г)  $x^2 - 2x - 3 = 0$ .

○21.5. а)  $x^2 - x - 2 = 0$ ;                      в)  $x^2 + 3x + 2 = 0$ ;  
б)  $x^2 - 3x - 4 = 0$ ;                      г)  $x^2 + x - 6 = 0$ .

○21.6. а)  $-x^2 + 6x - 5 = 0$ ;                      в)  $-x^2 - 6x - 8 = 0$ ;  
б)  $-x^2 - 3x + 4 = 0$ ;                      г)  $-x^2 + x + 6 = 0$ .

○21.7. а)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;                      в)  $x^2 - x - 6 = 0$ ;  
б)  $-x^2 - x + 6 = 0$ ;                      г)  $-x^2 - 5x - 6 = 0$ .

○21.8. Докажите, что уравнение не имеет корней:

а)  $3x^2 - 6x + 11 = 0$ ;                      в)  $x^2 + 2x + 4 = 0$ ;  
б)  $x^2 - 3x + 5 = 0$ ;                      г)  $2x^2 + 5x + 9 = 0$ .

○21.9. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что его площадь равна  $8 \text{ см}^2$ , а длина на 2 см больше ширины.



- О21.10.** Найдите стороны прямоугольника, если известно, что его периметр равен 14 дм, а площадь равна 12 дм<sup>2</sup>.
- О21.11.** Найдите катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 5 см, а один из его катетов на 1 см больше другого.
- О21.12.** Длина забора, огораживающего участок прямоугольной формы, равна 20 м. Найдите длину и ширину участка, если известно, что его площадь составляет 24 м<sup>2</sup>.
- О21.13.** Площадь прямоугольного треугольника равна 6 см<sup>2</sup>. Найдите его катеты, если известно, что один из них на 4 см больше другого.
- О21.14.** Один из катетов прямоугольного треугольника на 1 м больше другого и на 1 м меньше гипотенузы. Найдите стороны этого треугольника.
- О21.15.** Найдите обыкновенную дробь, если известно, что её числитель на 2 меньше знаменателя, а произведение числителя и знаменателя равно 15.
- О21.16.** Пешеход прошёл 2 км по лесной тропе, а затем 3 км по шоссе, увеличив при этом скорость на 2 км/ч. Найдите скорость пешехода на каждом участке пути, если на весь путь он затратил 1 ч.
- О21.17.** При каком значении  $p$  уравнение  $x^2 - 2x + 1 = p$  имеет один корень?
- О21.18.** При каких значениях  $p$  уравнение  $x^2 + 2x + 3 = p$  не имеет корней?
- О21.19.** При каких значениях  $p$  уравнение  $x^2 - 4x + 4 = p$  имеет два корня?
- О21.20.** При каких значениях  $p$  уравнение  $x^2 + 4x - 6 = p$  имеет хотя бы один корень?
- О21.21.** При каких значениях  $p$  уравнение  $x^2 + 6x + 8 = p$ :
- а) не имеет корней;
  - б) имеет один корень;
  - в) имеет два корня?
- О21.22.** При каких значениях параметра  $a$  корни двух квадратных уравнений  $x^2 = a$  и  $x^2 - 4x = 0$  перемежаются?

**О21.23.** Решите графически уравнение на указанном промежутке:

а)  $x^2 - x + 1 = 0$ ;  $x \in [-1; 0]$ ;

б)  $x^3 - x + 1 = 0$ ;  $x \in [-2; -1]$ .

**О21.24.** Решите графически уравнение:

а)  $\frac{6}{x} = 1 - x^2$ ;      в)  $-\frac{2}{x} = x^2 - 3$ ;

б)  $\frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} = 1$ ;      г)  $x^2 + \frac{x}{3} + 2 = 0$ .

**●21.25.** Объясните, каким образом с помощью графиков параболы и гиперболы можно решить кубическое уравнение вида  $x^3 + ax + b = 0$ , где  $ab \neq 0$ .

**●21.26.** Решите графически уравнение:

а)  $x^3 + x - 10 = 0$ ;      в)  $2x^3 + x + 3 = 0$ ;

б)  $x^3 + 3x + 4 = 0$ ;      г)  $3x^3 + 2x - 5 = 0$ .

**●21.27.** Объясните, каким образом с помощью графиков параболы и гиперболы можно решить кубическое уравнение вида  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , где  $bcd \neq 0$ .

**●21.28.** Решите графически уравнение  $x^3 + x^2 - 2 = 0$ .

**О21.29.** При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x|$  и  $y = a - x^2$ :

а) не имеют общих точек;

б) имеют одну общую точку;

в) имеют две общие точки;

г) имеют бесконечно много общих точек?

## § 22. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Выделите целую часть алгебраической дроби:

**О22.1.** а)  $\frac{x+1}{x-1}$ ;      б)  $\frac{2x+1}{x+1}$ ;      в)  $\frac{x+4}{x+2}$ ;      г)  $\frac{3x-2}{x-2}$ .

**О22.2.** а)  $\frac{1-x}{x+1}$ ;      б)  $\frac{2-4x}{x-2}$ ;      в)  $\frac{-x-3}{x+4}$ ;      г)  $\frac{1-2x}{x-3}$ .

**○22.3.** Постройте график функции  $y = \frac{1}{x+3} - 1$  и найдите:

- а) её область определения и область значений;
- б) промежутки монотонности;
- в) центр симметрии и асимптоты;
- г) нули функции и промежутки знакопостоянства.

Приведите функцию к виду  $y = \frac{k}{x+l} + m$  и постройте её график:

**○22.4.** а)  $y = \frac{x-1}{x+2}$ ;      в)  $y = \frac{x+2}{x-3}$ ;

б)  $y = \frac{2-x}{x-1}$ ;      г)  $y = \frac{-x-2}{x-2}$ .

**○22.5.** а)  $y = \frac{2x-1}{x-2}$ ;      в)  $y = \frac{4x+3}{x+1}$ ;

б)  $y = \frac{3x-1}{1-x}$ ;      г)  $y = \frac{4x+5}{-x-3}$ .

**○22.6.** Постройте график функции  $y = \frac{x+4}{x+1}$ . По графику укажите:

- а) значение функции при значении аргумента, равного 0; 2; -3;
- б) значение аргумента, если значение функции равно -5; 0; -2;
- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [0; 2];
- г) значения аргумента, при которых  $y < 0$ ,  $y > 0$ .

**○22.7.** Постройте график функции  $y = \frac{2-2x}{x-2}$ . По графику укажите:

- а) значение функции при значении аргумента, равного 0; -2; 4;
- б) значение аргумента, если значение функции равно 2; 0; -4;
- в) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [0; 1];
- г) значения аргумента, при которых  $y < 0$ ,  $y > 0$ .

- 22.8. Постройте график функции  $y = \frac{3x+1}{x-1}$ . По графику определите:
- промежутки монотонности;
  - уравнения асимптот.
- 22.9. Не выполняя построения графика функции  $y = \frac{2x+3}{x+1}$ , определите:
- промежутки монотонности;
  - уравнения асимптот.
- 22.10. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \frac{x-4}{x+2}$ :
- на отрезке  $[-1; 1]$ ;
  - на луче  $(-\infty; -3]$ ;
  - на отрезке  $[-5; -4]$ ;
  - на полуинтервале  $(-2; 0]$ .
- 22.11. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \frac{2x+8}{x+1}$ :
- на отрезке  $[1; 2]$ ;
  - на полуинтервале  $(-1; 0]$ ;
  - на отрезке  $[-3; -2]$ ;
  - на луче  $(-\infty; -4]$ .
- 22.12. Дана функция  $y = \frac{3x}{x-1}$ . Найдите промежуток, которому принадлежит переменная  $x$ , если на этом промежутке:
- $y_{\text{наим}} = 4$ ,  $y_{\text{наиб}} = 6$ ;
  - $y_{\text{наим}} = 0$ ,  $y_{\text{наиб}} = 2$ .
- 22.13. а) Пусть  $A$  — наибольшее значение функции  $y = \frac{3-2x}{x}$  на отрезке  $[1; 3]$ , а  $B$  — наименьшее значение функции  $y = 1-x$  на отрезке  $[-4; 3]$ . Что больше:  $A$  или  $B$ ? Сделайте графическую иллюстрацию.
- б) Пусть  $K$  — наибольшее значение функции  $y = \frac{-x-2}{x}$  на луче  $(-\infty; -1]$ , а  $L$  — наименьшее значение функции  $y = (x-4)^2$  на отрезке  $[3; 5]$ . Что больше:  $L$  или  $K$ ? Сделайте графическую иллюстрацию.

**022.14.** Дана функция  $y = \frac{2x}{x+2}$ . При каких значениях переменной  $x$  выполняется условие:

- а)  $y \leq 0$ ;      б)  $0 < y < 2$ ;      в)  $y > 2$ ;      г)  $3 \leq y \leq 6$ ?

**022.15.** Дана функция  $y = \frac{2x-1}{1-x}$ . Какие значения принимает переменная  $y$ , если:

- а)  $x > 1$ ;      в)  $x < 0,5$ ;  
б)  $0 \leq x < 1$ ;      г)  $1 < x \leq 2$ .

**022.16.** Исследуйте функцию на монотонность:

- а)  $y = \frac{x+1}{x-3}$ ;      в)  $y = \frac{1-x}{x+4}$ ;  
б)  $y = \frac{2x-5}{x-2}$ ;      г)  $y = \frac{2x}{x-2}$ .

**022.17.** Найдите координаты центра симметрии гиперболы:

- а)  $y = \frac{x-3}{x+2}$ ;      в)  $y = \frac{1-x}{x+3}$ ;  
б)  $y = \frac{2x+3}{1-x}$ ;      г)  $y = \frac{4x+2}{x-2}$ .

**022.18.** Напишите уравнения осей симметрии гиперболы:

- а)  $y = \frac{x+3}{x-1}$ ;      в)  $y = \frac{3-x}{x+1}$ ;  
б)  $y = \frac{3x-1}{2-x}$ ;      г)  $y = \frac{2x+3}{x+3}$ .

**022.19.** Решите графически уравнение:

- а)  $\frac{x+4}{x-2} = (x-2)^2$ ;      в)  $\frac{2x+4}{x-1} = x^2 - 4$ ;  
б)  $\frac{2-x}{x+1} = |x+2| - 4$ ;      г)  $\frac{-4-2x}{x+2} = -|x-2|$ .

**022.20.** Решите графически систему уравнений:

- а)  $\begin{cases} y = \frac{-2x-4}{x+3}, \\ y = |x+4| - 4; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = \frac{3x+2}{x-2}, \\ y = 0,5x^2 - 1; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} y(x-3) = x+1, \\ y = 2x^2 - 8x + 5; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y(x-1) = 5-x, \\ y = 4x-5. \end{cases}$

Решите графически неравенство:

●22.21. а)  $\frac{x}{x+1} < 0$ ;      в)  $\frac{x}{1-x} > 0$ ;

б)  $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0$ ;      г)  $\frac{4-2x}{x+3} \leq 0$ .

●22.22. а)  $\frac{x+3}{x-1} > x$ ;      в)  $\frac{3x+1}{x+1} \leq -2x+1$ ;

б)  $\frac{x+4}{x-2} \geq 3x^2 - 6x - 2$ ;      г)  $\frac{3x+2}{2-x} < 1 - |x|$ .

●22.23. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -3 \leq x \leq 2; \\ \frac{x+2}{x-1}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ .

б) Постройте график функции.

в) Перечислите свойства функции.

●22.24. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } -2 \leq x \leq 2; \\ \frac{2x-1}{2-x}, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

а) Найдите  $f(-2)$ ,  $f(2)$ ,  $f(4)$ .

б) Постройте график функции.

в) Перечислите свойства функции.

●22.25. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -|x-4|, & \text{если } x \leq -2; \\ \frac{2x}{x+4}, & \text{если } x > -2. \end{cases}$

а) Постройте график функции.

б) При каких значениях  $x$  верно равенство  $f(x) = 0$ ?

в) При каких значениях  $a$  уравнение  $f(x) = a$  имеет три корня?

●22.26. Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4-x}, & \text{если } x < 3; \\ 2x^2 - 20x + 45, & \text{если } 3 \leq x \leq 5; \\ \frac{x}{4-x}, & \text{если } x > 5. \end{cases}$

а) Постройте график функции.

б) При каких значениях  $b$  уравнение  $f(x) = b$  имеет два корня?

●22.27. На рисунке 49, а—г изображены графики функций вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}. \text{ Задайте эти функции аналитически.}$$

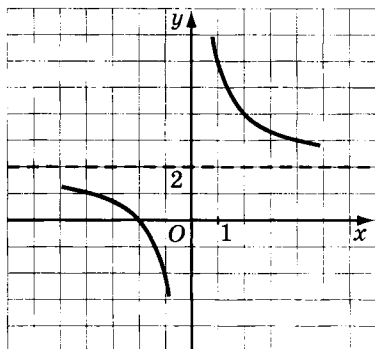
●22.28. Определите центр симметрии и асимптоты гиперболы, заданной уравнением:

а)  $xy + x + 2y = 0$ ;

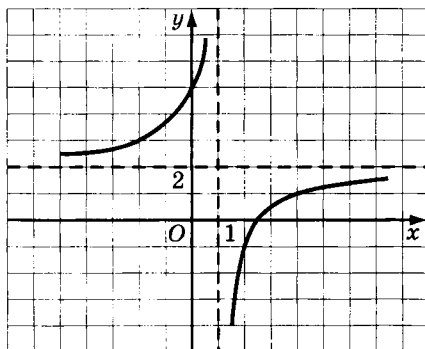
в)  $x - xy = 2y - 3$ ;

б)  $2xy + x + 2y = 1$ ;

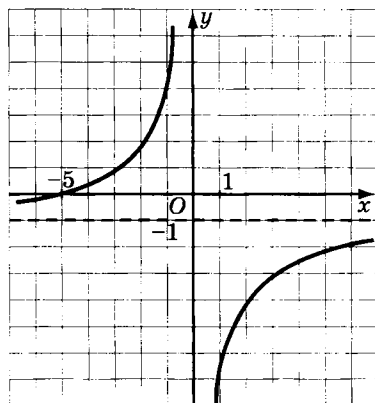
г)  $3x - 2xy = 0,5y$ .



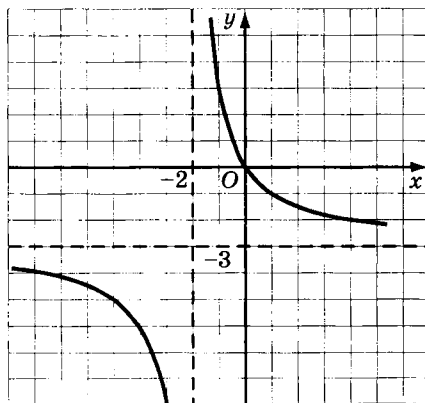
а



б



в



г

Рис. 49

●22.29. Постройте график уравнения:

а)  $(x - 1)(y + 2) = 1$ ;

в)  $(x + 1)(y - 2) = 2$ ;

б)  $xy - x + y + 1 = 0$ ;

г)  $xy + 3y + x + 1 = 0$ .

○22.30. При каких значениях  $a$  график функции  $y = \frac{x - a}{x}$  пересекает график функции  $y = x^4 - 4$  в точке с абсциссой 2?

○22.31. Задайте гиперболу в виде  $y = \frac{k}{x + a} + b$  и постройте её график, если она проходит через точку:

а)  $M(4; -1)$  и  $x = 1, y = -2$  — её асимптоты;

б)  $N(-1; 0)$  и  $x = -3, y = 1$  — её асимптоты.

## § 23. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y = |f(x)|$ И $y = f(|x|)$ , ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

23.1. Пусть  $M(x_0; y_0)$  точка графика функции  $y = f(x)$ . Найдите ординату точки  $M_1$  графика функции  $y = |f(x)|$  с абсциссой  $x_0$  и расположение этой точки относительно точки  $M$ . Рассмотрите два случая.

23.2. Постройте график функции  $y = |f(x)|$ , если график функции  $y = f(x)$  изображён:

а) на рис. 50;      в) рис. 52;

б) рис. 51;      г) рис. 53.

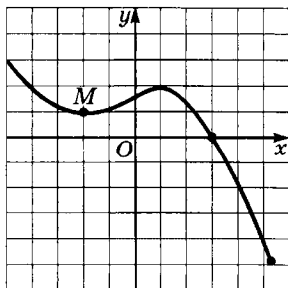


Рис. 50

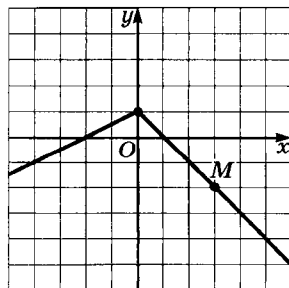


Рис. 51



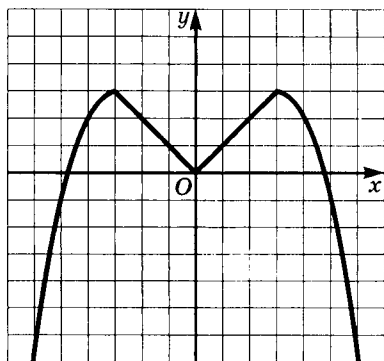


Рис. 52

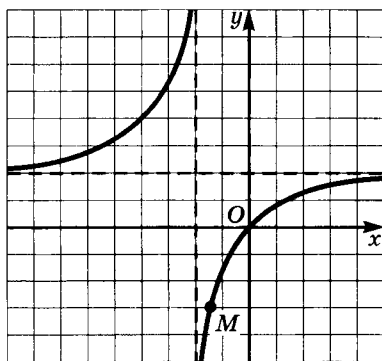


Рис. 53

В № 23.3—23.5 постройте на разных чертежах графики данных функций. Для функции, содержащей модуль, укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции.

- 23.3. а)  $y = x^2 - 9$  и  $y = |x^2 - 9|$ ;  
 б)  $y = x^2 - 4x$  и  $y = |x^2 - 4x|$ ;  
 в)  $y = x^2 + 2x - 3$  и  $y = |x^2 + 2x - 3|$ ;  
 г)  $y = -2x^2 + 6x$  и  $y = 2|-x^2 + 3x|$ .

- 23.4. а)  $y = \frac{1}{x-1}$  и  $y = \left| \frac{1}{x-1} \right|$ ;  
 б)  $y = \frac{x+2}{x+1}$  и  $y = \left| \frac{x+2}{x+1} \right|$ ;  
 в)  $y = \frac{2x}{x-2}$  и  $y = \left| \frac{2x}{2-x} \right|$ ;  
 г)  $y = \frac{1-3x}{1-x}$  и  $y = \left| \frac{3x-1}{x-1} \right|$ .

- 23.5. а)  $y = \sqrt{x} - 1$  и  $y = |\sqrt{x} - 1|$ ;  
 б)  $y = 2 - \sqrt{1-x}$  и  $y = |2 - \sqrt{1-x}|$ ;  
 в)  $y = \sqrt{-x} - 2$  и  $y = |\sqrt{-x} - 2|$ ;  
 г)  $y = -1 + 2\sqrt{4+x}$  и  $y = |-1 + 2\sqrt{4+x}|$ .

**23.6.** Постройте график функции  $y = f(|x|)$ , если график функции  $y = f(x)$  представлен:

а) на рис. 54;    в) рис. 56;

б) рис. 55;    г) рис. 57.

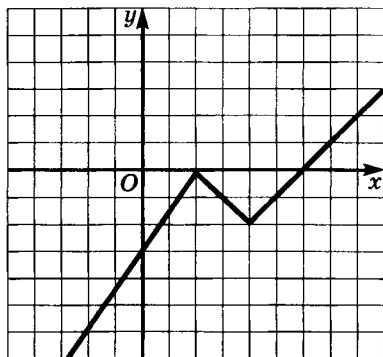


Рис. 54

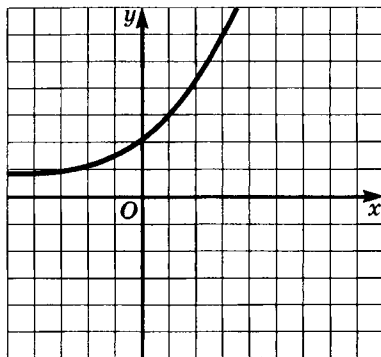


Рис. 55

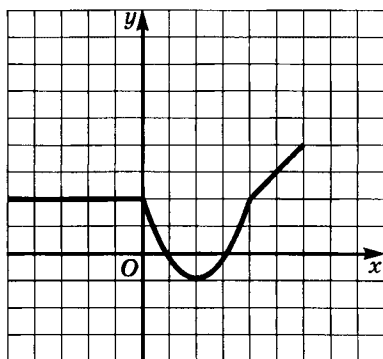


Рис. 56

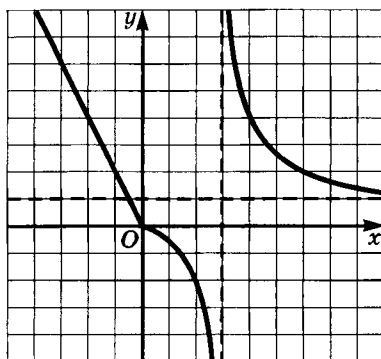


Рис. 57

В № 23.7—23.9 постройте на разных чертежах графики данных функций. Для функции, содержащей модуль, укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции.

- 23.7. а)  $y = x^2 - 2x$  и  $y = x^2 - 2|x|$ ;  
 б)  $y = x^2 + 4x - 5$  и  $y = x^2 + 4|x| - 5$ ;  
 в)  $y = x^2 - 2x - 3$  и  $y = x^2 - 2|x| - 3$ ;  
 г)  $y = -2x^2 + 8x$  и  $y = -2x^2 + 8|x|$ .

○23.8. а)  $y = \frac{1}{x-1}$  и  $y = \frac{1}{|x|-1}$ ;

б)  $y = \frac{x+2}{x+1}$  и  $y = \frac{|x|+2}{|x|+1}$ ;

в)  $y = \frac{2x}{x-2}$  и  $y = \frac{2|x|}{|x|-2}$ ;

г)  $y = \frac{1-3x}{1-x}$  и  $y = \frac{3|x|-1}{|x|-1}$ .

○23.9. а)  $y = \sqrt{x}$  и  $y = \sqrt{|x|}$ ;

б)  $y = \sqrt{x-1} - 1$  и  $y = \sqrt{|x|-1} - 1$ ;

в)  $y = \sqrt{4-x}$  и  $y = \sqrt{4-|x|}$ ;

г)  $y = -\sqrt{x+2} - 1$  и  $y = -\sqrt{|x|+2} + 1$ .

○23.10. Опишите процесс построения графика функции  $y = |f(|x|)|$ , если известен график функции  $y = f(x)$ .

●23.11. Постройте график функции:

а)  $y = |x| - 3$ ;      в)  $y = |x - 3|$ ;

б)  $y = ||x| - 3|$ ;      г)  $y = ||x| - 3| - 2|$ .

В № 23.12, 23.13 постройте на разных чертежах графики данных функций. Для функции, содержащей модули, укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции.

●23.12. а)  $y = x^2 - 4x$  и  $y = |x^2 - 4|x||$ ;

б)  $y = x^2 - 6x - 7$  и  $y = |x^2 - 6|x| - 7|$ ;

в)  $y = x^2 + 2x - 8$  и  $y = |x^2 + 2|x| - 8|$ ;

г)  $y = -0,5x^2 + x$  и  $y = |0,5x^2 - |x||$ .

●23.13. а)  $y = \sqrt{x-2} - 2$  и  $y = |\sqrt{|x|-2} - 2|$ ;

б)  $y = 2 - \sqrt{4-x}$  и  $y = |2 - \sqrt{4-|x|}|$ .

- 23.14. Постройте на разных чертежах графики данных функций. Для функции, содержащей модули, укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции; количество общих точек с прямой  $y = 1$ ; количество общих точек с прямой  $y = a$  (для каждого  $a$ ).

$$\text{а) } y = \frac{1}{x-2} \text{ и } y = \left| \frac{1}{|x|-2} \right|;$$

$$\text{б) } y = \frac{x+2}{x-1} \text{ и } y = \left| \frac{|x|+2}{|x|-1} \right|;$$

$$\text{в) } y = \frac{4x}{x-2} \text{ и } y = \left| \frac{4|x|}{2-|x|} \right|;$$

$$\text{г) } y = \frac{1-3x}{1-x} \text{ и } y = \left| \frac{3|x|-1}{|x|-1} \right|.$$

- 23.15. Убедитесь, что разными способами задана одна и та же функция, и постройте её график:

$$\text{а) } y = |x| + 3x - 2 \text{ и } y = \begin{cases} 2x - 2, & x \leq 0, \\ 4x - 2, & x > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = 3|x - 2| + 2x \text{ и } y = \begin{cases} 6 - x, & x \leq 2, \\ 5x - 6, & x > 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } y = 2|x + 1| - x + 2 \text{ и } y = \begin{cases} -3x, & x < -1, \\ x + 4, & x \geq -1; \end{cases}$$

$$\text{г) } y = |x + 3| + x \text{ и } y = \begin{cases} -3, & x < -3, \\ 2x + 3, & x \geq -3. \end{cases}$$

- 23.16. Постройте график данной функции и укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции.

$$\text{а) } y = 4 + 2x - |x|;$$

$$\text{б) } y = 3 - x - |x + 2|;$$

$$\text{в) } y = 0,5|x + 4| + 2,5x - 1;$$

$$\text{г) } y = 2|x - 3| + 2x + 6.$$

В № 23.17—23.22 постройте график функции и укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции; количество общих точек с прямой  $y = 1$ ; количество общих точек с прямой  $y = a$  (для каждого а).

●23.17. а)  $y = |x| \cdot x$ ;                      в)  $y = |x - 2| + x^2 - x$ ;  
б)  $y = |x - 3|(2 - x)$ ;              г)  $y = x - 2 + |x^2 - x|$ .

●23.18. а)  $y = \frac{x^2 - x}{|x|}$ ;              в)  $y = \frac{x - x^3}{|x - 1|}$ ;  
б)  $y = \frac{|x| - x^2}{x}$ ;              г)  $y = \frac{x - x^3}{|x| - 1}$ .

●23.19. а)  $y = |x^2 - 4x| + 6x$ ;              в)  $y = |x^2 - 4x| - 6|x|$ ;  
б)  $y = |x^2 - 4x| - 6x$ ;              г)  $y = |x^2 - 4x| - 6x$ .

●23.20. а)  $y = x^2 - 4|x - 1|$ ;              в)  $y = x^2 - 4x - 4|x + 1|$ ;  
б)  $y = |x^2 - 1| - 4x$ ;              г)  $y = |x^2| - 4|x - 2| + 6|2 - x|$ .

●23.21. а)  $y = x^2 - |x^2 - 1|$ ;              в)  $y = |x^2 - 4x| + |x^2 + 1|$ ;  
б)  $y = |x^2 - 2x| - 2x^2$ ;              г)  $y = |x^2 - 4| + |x^2 - 2x| + 2x^2$ .

●23.22. а)  $y = \frac{|x|}{x - 1}$ ;              в)  $y = \frac{x}{|x - 1|}$ ;  
б)  $y = \frac{x}{|x| - 1}$ ;              г)  $y = \frac{x}{|x| + 1}$ .

●23.23. Убедитесь, что двумя способами задана одна и та же функция, и постройте её график:  $y = |x| + |x - 1|$  и  $y = \begin{cases} 1 - 2x, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

●23.24. Постройте график данной функции и укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции.  
а)  $y = 4x + 3|x + 1| - |x|$ ;  
б)  $y = 3 - |x - 1| - |x + 2|$ ;  
в)  $y = 0,5|x| + 2,5|x - 1| + 2x$ ;  
г)  $y = 2|x - 3| + 2|x + 6| - 1$ .

- 23.25. Постройте график данной функции и укажите область определения; область значений; промежутки монотонности; точки экстремума и экстремумы функции; нули функции; количество общих точек с прямой  $y = 1$ ; количество общих точек с прямой  $y = a$  (для каждого  $a$ ).

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{|x-1|}{|x|-1}; & \text{в) } y = \frac{|x-1| + |x|}{x}; \\ \text{б) } y = \frac{|x-1|}{|x|+1}; & \text{г) } y = \frac{|x-1| + |x+1|}{x}. \end{array}$$

- 23.26. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x| + |x-4|$  и  $y = a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют бесконечно много общих точек?

- 23.27. При каких значениях параметра  $a$  графики функций  $y = |x+1| + |x-3|$  и  $y = 2x + a$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют бесконечно много общих точек?

- 23.28. При каких значениях параметра  $k$  графики функций  $y = |x+1| - |x+3|$  и  $y = kx - 4$ :

- а) не имеют общих точек;
- б) имеют одну общую точку;
- в) имеют две общие точки;
- г) имеют бесконечно много общих точек?

- 23.29. Найдите периметр и площадь треугольника, ограниченного графиками функций  $y = |x|$  и  $y = 4$ .

## § 24. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

**24.1.** Является ли квадратным уравнение:

- а)  $x^2 + 3x + 1 = 0$ ;      в)  $2x^2 + 3x - 7 = 0$ ;  
б)  $5x^3 - x^2 + 4 = 0$ ;      г)  $x^3 - x - 6 = 0$ ?

Преобразуйте уравнение к виду  $ax^2 + bx + c = 0$  и укажите старший коэффициент, второй коэффициент и свободный член:

- 24.2.** а)  $5x - 1 + 4x^2 = 0$ ;      в)  $-x^2 - x = 0$ ;  
б)  $15x^2 = 0$ ;      г)  $16 - 4x^2 - 7x = 0$ .

- 24.3.** а)  $(3x + 1)(2x - 3) + 4(x - 2) = 5(4 - 3x)$ ;  
б)  $2(x + 6)(x - 6) + 3(x + 6) = x^2 - 5x$ ;  
в)  $12 - 6(x + 3) - 7x = (x - 2)(x + 3)$ ;  
г)  $4(4 - 3x)^2 - 2(4 - 3x) = 12 - x$ .

**24.4.** Составьте квадратное уравнение, у которого:

- а) старший коэффициент равен 8, коэффициент при  $x$  равен 5, свободный член равен 1;  
б) старший коэффициент равен  $-12$ , коэффициент при  $x$  равен 3;  
в) старший коэффициент равен 1, свободный член равен 4;  
г) старший коэффициент равен 9, коэффициент при  $x$  равен  $-2$ , свободный член равен 3.

**24.5.** Какие из следующих квадратных уравнений являются приведёнными? Какое преобразование надо выполнить, чтобы неприведённое квадратное уравнение стало приведённым? Выполните это преобразование.

- а)  $x^2 - 4x + 35 = 0$ ;      в)  $12 - x^2 + 3x = 0$ ;  
б)  $-15x^2 + 4x - 2 = 0$ ;      г)  $18 - 9x + x^2 = 0$ .

**24.6.** Какие из следующих квадратных уравнений являются приведёнными? Какое преобразование надо выполнить, чтобы неприведённое квадратное уравнение стало приведённым? Выполните это преобразование.

а)  $-x^2 + 31x - 6 = 0$ ;      в)  $-2\frac{5}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - 4\frac{1}{12} = 0$ ;

б)  $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{14} = 0$ ;      г)  $x^2 - 7x + 16 = 0$ .

Какие из данных ниже квадратных уравнений являются полными? Решите неполное квадратное уравнение.

**24.7.** а)  $x^2 + 14x - 23 = 0$ ;      в)  $-x^2 + x = 0$ ;

б)  $16x^2 - 9 = 0$ ;      г)  $x + 8 - 9x^2 = 0$ .

**24.8.** а)  $3x^2 - 12x = 0$ ;      в)  $-2x^2 + 14 = 0$ ;

б)  $x^2 + 2x = 0$ ;      г)  $3 - x^2 + x = 0$ .

**24.9.** Составьте квадратное уравнение, которое является:

а) полным приведённым;

б) полным неприведённым;

в) неполным приведённым;

г) неполным неприведённым.

**24.10.** Определите, относительно какой переменной ( $x$ ,  $y$  или  $a$ ) уравнение является квадратным, и выпишите его коэффициенты:

а)  $x^2 + 2xy - 8y^2 = 0$ ;

б)  $ax^4 + a^2x^2 + 1 + 2a^2 = 0$ ;

в)  $(a + x)(a - 1) + x^2(x - a) = 1$ ;

г)  $x^2y^2 + 5x^2y - 4xy^2 - 6x^2 + 12xy - 7y - 1 = 0$ .

**24.11.** Докажите, что число:

а) 3 является корнем уравнения  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;

б) -7 не является корнем уравнения  $2x^2 + x - 3 = 0$ ;

в) -5 является корнем уравнения  $2x^2 - 3x - 65 = 0$ ;

г) 6 не является корнем уравнения  $x^2 - 2x + 6 = 0$ .

**24.12.** Докажите, что числа:

а) 5 и -5 являются корнями уравнения  $3x^2 - 75 = 0$ ;

б) 0 и -7 являются корнями уравнения  $2x^2 + 14x = 0$ ;

в) 12 и -12 являются корнями уравнения  $0,5x^2 - 72 = 0$ ;

г) 0 и 6 являются корнями уравнения  $3x^2 - 18x = 0$ .



**24.13.** Определите, какое из заданных чисел является корнем соответствующего квадратного уравнения:

а)  $0, \pm 1, \pm 2, \pm \sqrt{2}; 2x^2 + 15x + 22 = 0;$

б)  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm \sqrt{3}; \frac{1}{9}x^2 - 5x + 14 = 0;$

в)  $\pm 1, \pm 3, \sqrt{5}; x^2 - (1 + \sqrt{5})x + \sqrt{5} = 0;$

г)  $0, \pm 1, \pm 2, \pm \sqrt{2}; 4x^2 - 15\sqrt{2}x + 21 = 0.$

**24.14.** Найдите хотя бы один корень квадратного уравнения:

а)  $2x^2 + 15x + 22 = 2 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 22;$

б)  $\frac{7}{3}x^2 - 5x\sqrt{2} + 1 = \frac{7 \cdot (\sqrt{7})^2}{3} - 5\sqrt{14} + 1;$

в)  $5x^2 + x\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6};$

г)  $\frac{x^2}{\sqrt{7}} - 2x\sqrt{7} + 14 - \sqrt{7} = 0.$

**24.15.** а) Объясните, почему ни одно положительное число не может быть корнем уравнения  $3x^2 + 17x + 9 = 0$ .

б) Объясните, почему ни одно отрицательное число не может быть корнем уравнения  $3x^2 - 17x + 9 = 0$ .

**24.16.** а) Может ли корнем квадратного уравнения  $3x^2 - 17x + 9 = 0$  быть чётное число?

б) Может ли корнем квадратного уравнения  $15x^2 - 37x + 8 = 0$  быть нечётное число?

**24.17.** Может ли корнем квадратного уравнения  $x^2 - 17x + 9 = 0$  быть дробь  $\frac{1}{m}$ , где  $m \in \mathbb{N}$  и  $m > 1$ ?

Решите уравнение:

**24.18.** а)  $x^2 + 5x = 0;$                       в)  $x^2 - 12x = 0;$

б)  $2x^2 - 9x = 0;$                       г)  $3x^2 + 5x = 0.$

**24.19.** а)  $-x^2 + 8x = 0;$                       в)  $-x^2 + 7x = 0;$

б)  $3x - x^2 = 0;$                       г)  $19x - x^2 = 0.$

**24.20.** а)  $x^2 - 9 = 0;$                       в)  $x^2 - 64 = 0;$

б)  $x^2 - 5 = 0;$                       г)  $x^2 - 10 = 0.$

**24.21.** а)  $-2x^2 + 50 = 0;$                       в)  $-5x^2 + 45 = 0;$

б)  $-3x^2 + 4 = 0;$                       г)  $-9x^2 + 13 = 0.$

**24.22.** а)  $3x^2 + 7 = 0;$                       в)  $4x^2 + 17 = 0;$

б)  $6x^2 = 0;$                       г)  $15x^2 = 0.$

Решите уравнение:

24.23. а)  $(x - 2)(x + 4) = 0$ ;

б)  $(x + 3,5)(x - 7)(x^2 + 9) = 0$ ;

в)  $(x + 2,8)(x + 1,3) = 0$ ;

г)  $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right)(x^2 + 1) = 0$ .

24.24. а)  $x^2 + 12x + 36 = 0$ ;

в)  $x^2 - 16x + 64 = 0$ ;

б)  $4x^2 - 28x + 49 = 0$ ;

г)  $9x^2 + 30x + 25 = 0$ .

24.25. а)  $4x^2 - 3x + 7 = 2x^2 + x + 7$ ;

б)  $(2x + 3)(3x + 1) = 11x + 30$ ;

в)  $1 - 2x + 3x^2 = x^2 - 2x + 1$ ;

г)  $(5x - 2)(x + 3) = 13(x - 2)$ .

24.26. а)  $\frac{x^2 - 6x}{3} = x$ ;

в)  $\frac{x^2 - x}{6} - \frac{x^2 + x}{3} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2 - x}{2} + \frac{x}{3} = 0$ ;

г)  $\frac{x^2 - 4}{5} - \frac{x^2 - 1}{3} = -1$ .

○24.27. Произведение двух последовательных натуральных чисел в 2 раза больше меньшего из них. Найдите эти числа.

○24.28. Произведение двух последовательных натуральных чисел в 1,5 раза больше квадрата меньшего из них. Найдите эти числа.

○24.29. От вершины прямого угла по его сторонам одновременно начинают двигаться две материальные точки, скорости которых равны 5 см/с и 12 см/с. Через какое время расстояние между ними будет равно 52 см?

○24.30. Если от квадрата отрезать треугольник площадью  $59 \text{ см}^2$ , то площадь оставшейся части будет равна  $85 \text{ см}^2$ . Найдите сторону квадрата.

○24.31. Площадь квадрата больше площади круга на  $12 \text{ см}^2$ . Найдите сторону квадрата, если площадь круга равна  $36 \text{ см}^2$ .

○24.32. Катер, собственная скорость которого равна 15 км/ч, прошёл 36 км по течению и 24 км против течения, затратив на весь путь 4 ч. Чему равна скорость течения?

○24.33. При каких значениях параметра  $p$  заданное уравнение является неполным квадратным уравнением? Решите уравнение при найденных значениях параметра:

- а)  $6x^2 + (p - 1)x + 2 - 4p = 0$ ;
- б)  $(p - 2)x^2 + 3x + p = 0$ ;
- в)  $3x^2 - (2p + 3)x + 2 + p = 0$ ;
- г)  $(6 - p)x^2 + (2p + 6)(x + 12) = 0$ .

○24.34. При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $(2p - 3)x^2 + (3p - 6)x + p^2 - 9 = 0$  является:

- а) приведённым квадратным уравнением;
- б) неполным неприведённым квадратным уравнением;
- в) неполным приведённым квадратным уравнением;
- г) линейным уравнением?

○24.35. При каких значениях параметра  $p$  уравнение:

- а)  $x^2 + px + 24 = 0$  имеет корень, равный 6;
- б)  $2x^2 + px + 68 = 0$  имеет корень, равный 17;
- в)  $x^2 + px - 35 = 0$  имеет корень, равный 7;
- г)  $3x^2 + px - 54 = 0$  имеет корень, равный 9?

○24.36. При каких значениях параметра  $p$  уравнение:

- а)  $x^2 - 8x + p = 0$  имеет корень, равный 4;
- б)  $4x^2 - 24x + p = 0$  имеет корень, равный 0;
- в)  $x^2 + 15x + p = 0$  имеет корень, равный 10;
- г)  $6x^2 + 30x + p = 0$  имеет корень, равный -5?

Решите уравнение, разложив его левую часть на множители:

- 24.37. а)  $x^2 - 8x + 15 = 0$ ;      в)  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ;
- б)  $x^2 - 12x + 20 = 0$ ;      г)  $x^2 + 6x + 8 = 0$ .

- 24.38. а)  $x^2 + 3x - 10 = 0$ ;      в)  $x^2 + 9x + 14 = 0$ ;
- б)  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ;      г)  $4x^2 - 4x - 3 = 0$ .

○24.39. При каких значениях  $a$  равны значения выражений:

- а)  $a^2 + 6a$  и  $3a^2 - a$ ;      в)  $3a^2 + 2a$  и  $4a^2 - 5a$ ;
- б)  $5a^2 - 12$  и  $a^2 - 4$ ;      г)  $7a^2 - 9$  и  $a^2 + 9$ ?

○24.40. Решите уравнение:

- а)  $(3x - 1)(x - 9) = (x + 3)^2$ ;
- б)  $2x - (x + 1)^2 = 3x^2 - 5$ ;
- в)  $(3x - 4)^2 - (5x + 2)(2x + 8) = 0$ ;
- г)  $6x^2 - (x + 2)^2 = 4(4 - x)$ .

**024.41.** Решите уравнение:

а)  $\frac{x-2}{x-3} = \frac{x+2}{x+3}$ ;

в)  $\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = 0$ ;

б)  $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 3\frac{1}{3}$ ;

г)  $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1} = 2,5$ .

## **§ 25. ФОРМУЛА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ**

**25.1.** Найдите дискриминант квадратного уравнения:

а)  $x^2 + 5x - 6 = 0$ ;

в)  $3x^2 + 2x - 1 = 0$ ;

б)  $-x^2 + 4x + 3 = 0$ ;

г)  $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ .

**25.2.** Определите число корней квадратного уравнения:

а)  $x^2 - 8x - 84 = 0$ ;

в)  $x^2 - 22x - 23 = 0$ ;

б)  $36x^2 - 12x + 1 = 0$ ;

г)  $x^2 + 3x + 24 = 0$ .

Решите уравнение:

**25.3.** а)  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ;

в)  $x^2 + 6x + 8 = 0$ ;

б)  $x^2 - 2x - 15 = 0$ ;

г)  $x^2 - 3x - 18 = 0$ .

**25.4.** а)  $2x^2 + 3x + 1 = 0$ ;

в)  $5x^2 - 8x + 3 = 0$ ;

б)  $3x^2 - 3x + 4 = 0$ ;

г)  $14x^2 + 5x - 1 = 0$ .

**25.5.** а)  $3x^2 + 32x + 80 = 0$ ;

в)  $5x^2 + 26x - 24 = 0$ ;

б)  $100x^2 - 160x + 63 = 0$ ;

г)  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

**25.6.** а)  $-x^2 - 5x + 14 = 0$ ;

в)  $-x^2 + 26x - 25 = 0$ ;

б)  $-3x^2 - 2x + 5 = 0$ ;

г)  $-5x^2 - 9x + 2 = 0$ .

**25.7.** а)  $x^2 = 2x + 48$ ;

в)  $6x^2 + 7x = 5$ ;

б)  $-x^2 = 5x - 36$ ;

г)  $-5x^2 = 9x - 80$ .

**25.8.** а)  $x^2 + 7x + 2 = 0$ ;

в)  $x^2 + 6x + 3 = 0$ ;

б)  $5x^2 - 10x + 1 = 0$ ;

г)  $2x^2 + 3x - 1 = 0$ .

**25.9.** а)  $2x^2 + 10x + 12 = 0$ ;

в)  $6x^2 - 18x - 60 = 0$ ;

б)  $-3x^2 + 18x - 24 = 0$ ;

г)  $-4x^2 - 16x + 84 = 0$ .

**025.10.** а)  $x^2 - 52x - 285 = 0$ ;

в)  $x^2 + 108x - 2413 = 0$ ;

б)  $3x^2 + 130x - 133 = 0$ ;

г)  $17x^2 - 128x - 64 = 0$ .

**025.11.** а)  $0,6x^2 + 0,8x - 7,8 = 0$ ;

в)  $\frac{4}{5}x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{3}{2} = 0$ ;

б)  $\frac{1}{4}x^2 - x + 1 = 0$ ;

г)  $0,2x^2 - 10x + 125 = 0$ .

Решите уравнение:

○25.12. а)  $\frac{1}{3}x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$ ;      в)  $x^2 + 3x - 1\frac{1}{2} = 0$ ;

б)  $x^2 + 5x + 2\frac{1}{4} = 0$ ;      г)  $x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{6} = 0$ .

○25.13. а)  $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$ ;      в)  $x^2 + 6\sqrt{2}x + 18 = 0$ ;

б)  $x^2 + 2\sqrt{5}x - 20 = 0$ ;      г)  $x^2 - 4\sqrt{2}x + 4 = 0$ .

○25.14. а)  $6x(2x + 1) = 5x + 1$ ;      в)  $8x(1 + 2x) = -1$ ;

б)  $2x(x - 8) = -x - 18$ ;      г)  $x(x - 5) = 1 - 4x$ .

○25.15. а)  $(x - 2)^2 = 3x - 8$ ;

б)  $(3x - 1)(x + 3) + 1 = x(1 + 6x)$ ;

в)  $5(x + 2)^2 = -6x + 44$ ;

г)  $(x + 4)(2x - 1) = x(3x + 11)$ .

○25.16. а)  $(4x - 5)^2 - (2x + 3)^2 = 0$ ;

б)  $(x^2 + 4x + 11)^2 = (7x^2 + 2x + 3)^2$ ;

в)  $(4x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$ ;

г)  $(x^2 + 4x + 11)^2 = (3x + 1)^4$ .

○25.17. а)  $x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ ;      в)  $x^2 - 3\sqrt{5}x - 20 = 0$ ;

б)  $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 1 = 0$ ;      г)  $4x^2 - 2\sqrt{7}x + 1 = 0$ .

○25.18. а)  $(2x - 1)(2x + 1) + x(x - 1) = 2x(x + 1)$ ;

б)  $(3x + 1)^2 - x(7x + 5) = 4$ ;

в)  $(3x - 1)(3x + 1) - 2x(1 + 4x) = -2$ ;

г)  $(2x + 1)^2 + 2 = 2 - 6x^2$ .

○25.19. а)  $\frac{x^2 - x}{3} = \frac{2x + 4}{5}$ ;      в)  $\frac{2x^2 + x}{5} = \frac{4x - 2}{3}$ ;

б)  $\frac{x^2 - 3}{2} - 6x = 5$ ;      г)  $\frac{4x^2 + x}{3} - \frac{5x - 1}{6} = \frac{x^2 + 17}{9}$ .

○25.20. Найдите абсциссы общих точек графиков функций, не производя их построения:

а)  $y = x^2$  и  $y = 5x - 4$ ;

б)  $y = x^2 + x - 3$  и  $y = -x^2 - 5x - 4$ ;

в)  $y = 4x^2$  и  $y = -4x - 1$ ;

г)  $y = x^2 + 3x - 1$  и  $y = -x^2 - 5x - 9$ .

**025.21.** Найдите ординаты общих точек графиков функций, не производя их построения:

а)  $y = 3x^2 + 3x - 1$  и  $y = x^2 - 5x - 1$ ;

б)  $y = x^2 + x + \frac{1}{x-3}$  и  $y = 12 - \frac{1}{3-x}$ ;

в)  $y = 3x^2 + 3x - 1$  и  $y = -x^2 - x - 14$ ;

г)  $y = x^2 - 8 + \frac{3}{x+2}$  и  $y = \frac{3}{x+2} + 2x$ .

**025.22.** При каких значениях параметра  $p$  имеет один корень уравнение:

а)  $x^2 - px + 9 = 0$ ;      в)  $x^2 + px + 16 = 0$ ;

б)  $x^2 + 3px + p = 0$ ;      г)  $x^2 - 2px + 3p = 0$ ?

**025.23.** Докажите, что при любом значении параметра  $p$  уравнение  $3x^2 - px - 2 = 0$  имеет два корня.

**025.24.** Из данных уравнений укажите те, которые имеют два различных корня при любом значении параметра  $p$ :

а)  $x^2 + px = 0$ ;      в)  $x^2 + px + 5 = 0$ ;

б)  $x^2 - px - 5 = 0$ ;      г)  $px^2 - 2 = 0$ .

**025.25.** Докажите, что не существует такого значения параметра  $p$ , при котором уравнение  $x^2 - px + p - 2 = 0$  имело бы только один корень.

**025.26.** Найдите все значения параметра  $b$ , при которых параболы  $y = x^2 - 3b$  и  $y = 2x^2 - bx$  имеют единственную общую точку.

**025.27.** Через какую точку оси ординат проходит прямая, параллельная данной прямой и имеющая с данной параболой единственную общую точку, если:

а)  $y = 4x$  и  $y = x^2$ ;      б)  $y = -2x$  и  $y = x^2 - 4x + 7$ ?

**025.28.** Найдите уравнения всех прямых, не параллельных оси  $y$ , проходящих через начало координат и имеющих единственную общую точку с параболой:

а)  $y = 5x - x^2$ ;      б)  $y = x^2 + 1$ .

**025.29.** Найдите уравнения всех прямых, имеющих только одну общую точку с каждой из парабол:

а)  $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 2x - 5$ ;

б)  $y = -x^2 + 2x$ ,  $y = x^2 - 4x + 9$ .

- 25.30. Найдите натуральное число, квадрат которого на 56 больше самого числа.
- 25.31. Одна сторона прямоугольника на 5 см больше другой, а его площадь равна  $84 \text{ см}^2$ . Найдите стороны прямоугольника.
- 25.32. Представьте число 120 в виде произведения двух чисел, одно из которых на 2 меньше другого.
- 25.33. Площадь прямоугольного треугольника равна  $180 \text{ м}^2$ . Найдите катеты этого треугольника, если один больше другого на 31 м.
- 25.34. От квадратного листа картона отрезали полоску шириной 3 см. Площадь оставшейся части равна  $70 \text{ см}^2$ . Найдите первоначальные размеры листа картона.
- 25.35. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 271 больше их суммы. Найдите эти числа.
- 25.36. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 1201. Чему равна разность квадратов этих чисел?
- 25.37. Найдите три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 1589.
- 25.38. Гипотенуза прямоугольного треугольника больше одного из катетов на 32 см и больше другого на 9 см. Найдите стороны треугольника.
- 25.39. В прямоугольном треугольнике один катет меньше гипотенузы на 8 см, а другой — на 4 см. Найдите гипотенузу.
- 25.40. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел больше их произведения на 307. Найдите эти числа.
- 25.41. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 840. Найдите эти числа.
- 25.42. Вкладчик положил в банк 10 000 р. под некоторый процент годовых. В конце первого года банк увеличил процент годовых на 5 %. Под какой процент были положены деньги, если после двух лет хранения денег в банке вкладчик получил 11 550 р.?

**○25.43.** Завод выпускал миксеры по цене 2500 р. за штуку. Предполагалось, что при постепенном внедрении новой технологии производства стоимость изделия ежемесячно будет уменьшаться на один и тот же процент в течение нескольких месяцев. Однако оказалось, что за второй месяц стоимость изделия снизилась на 10 % больше, чем предполагалось. На сколько процентов предполагалось снижать стоимость миксера, если после двух месяцев его цена составила 1800 р.?

Решите уравнение с параметром  $p$ :

**○25.44.** а)  $x^2 - 2(p - 1)x + p^2 - 2p - 3 = 0$ ;

б)  $x^2 + 2(p + 1)x + p^2 + 2p - 8 = 0$ ;

в)  $x^2 - 2(p - 1)x + p^2 - 2p - 15 = 0$ ;

г)  $x^2 + 2(p + 3)x + p^2 + 6p - 7 = 0$ .

**●25.45.** а)  $x^2 - 2px + p^2 - 1 = 0$ ;

в)  $x^2 - 4px + 4p^2 - 1 = 0$ ;

б)  $px^2 - 4x + 1 = 0$ ;

г)  $px^2 - 12x + 4 = 0$ .

**●25.46.** а)  $(p - 4)x^2 + (2p - 4)x + p = 0$ ;

б)  $px^2 + 2(p + 1)x + p + 3 = 0$ .

**○25.47.** В чемпионате по волейболу было сыграно 66 матчей. Сколько команд участвовало в чемпионате, если каждая команда играла с каждой по одному разу?

**○25.48.** Несколько одноклассников после окончания школы решили обменяться фотокарточками (каждый с каждым). Сколько учащихся обменялись фотокарточками, если всего было роздано 210 фотографий?

**○25.49.** Задумали двузначное число. Оказалось, что если к квадрату этого числа прибавить 36, то получится число, большее задуманного в 20 раз. Какое число задумано?

**○25.50.** Из пункта А одновременно выехали грузовой и легковой автомобили, один на север, другой на восток. Скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости грузового. Через 1,5 ч расстояние между ними составило 150 км. Найдите скорости автомобилей.

**○25.51.** После двух последовательных повышений зарплаты она выросла на 32 % по сравнению с первоначальной. Найдите первоначальный процент повышения зарплаты, если второе повышение по количеству процентов было в 2 раза большим, чем первое.



○25.52. Найдите все пары чисел  $a$  и  $b$ , для которых уравнение  $(ax^2 - 6x + 3)(2x - b) = 0$  имеет ровно один корень, и для каждой такой пары укажите этот корень.

○25.53. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых прямая  $y = 2x + a$  имеет с параболой  $y = x^2 - 3$  единственную общую точку.

Решите уравнение:

○25.54. а)  $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 2 = 0$ ;      в)  $x^2 - 3(\sqrt{x})^2 - 4 = 0$ ;

б)  $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 4 = 0$ ;      г)  $x^2 + (\sqrt{x+3})^2 - 15 = 0$ .

○25.55. а)  $x^2 + 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$ ;      в)  $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} - 6 = 0$ ;

б)  $\frac{x^3}{|x|} - 7x + 12 = 0$ ;      г)  $x \cdot |x| + 7x + 12 = 0$ .

○25.56. а)  $\frac{6}{x+1} = \frac{x^2 - 5x}{x+1}$ ;      в)  $\frac{3x^2 - x}{1-x} = \frac{2}{1-x}$ ;

б)  $\frac{3x^2 - 14x}{x-4} = \frac{8}{4-x}$ ;      г)  $\frac{2x^2}{x-2} = \frac{-7x+6}{2-x}$ .

○25.57. а)  $\frac{5x-3}{x-3} = \frac{2x-3}{x}$ ;      в)  $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3x+2}{x}$ ;

б)  $\frac{4x+1}{x-3} = \frac{3x-8}{x+1}$ ;      г)  $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}$ .

○25.58. а)  $\frac{x+1}{x+5} - \frac{x-2}{x-5} = 1$ ;      в)  $\frac{3x-9}{x-1} + \frac{x+6}{x+1} = 3$ ;

б)  $\frac{36}{x(x-12)} - \frac{3}{x-12} = 3$ ;      г)  $\frac{45}{x(x+15)} + \frac{3}{x+15} = 1$ .

○25.59. а)  $\frac{2x-7}{x-4} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{x+6}{(x-4)(x+1)}$ ;

б)  $\frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}$ ;

в)  $\frac{6}{(5-x)(x+1)} + \frac{x}{x+1} = \frac{3}{x-5}$ ;

г)  $\frac{x}{x-5} - \frac{6}{x+5} = \frac{3x+35}{x^2-25}$ .

○25.60. а) При каких значениях  $a$  значения дробей  $\frac{a-3}{a+2}$  и  $\frac{3a-7}{a+5}$  равны?

б) При каких значениях  $a$  сумма дробей  $\frac{3a+9}{3a-1}$  и  $\frac{2a-13}{2a+5}$  равна 2?

○25.61. а) Существуют ли такие значения переменной, при которых сумма дробей  $\frac{x+7}{x-2}$  и  $\frac{x-1}{x+2}$  равна 1?

б) При каких значениях переменной разность дробей  $\frac{1-3x}{4x-3}$  и  $\frac{x+5}{x+2}$  равна их произведению?

Решите уравнение, используя метод введения новой переменной:

○25.62. а)  $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ ;      в)  $x^4 + 3x^2 - 10 = 0$ ;

б)  $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$ ;      г)  $9x^4 + 32x^2 - 16 = 0$ .

○25.63. а)  $(3x-4)^2 - 5(3x-4) + 6 = 0$ ;

б)  $3(2x+1)^2 + 10(2x+1) + 3 = 0$ ;

в)  $(5x+1)^2 - 3(5x+1) - 4 = 0$ ;

г)  $2(7x-6)^2 + 3(7x-6) + 1 = 0$ .

○25.64. а)  $(x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3 = 0$ ;

б)  $2(x^2+3)^2 - 7(x^2+3) + 3 = 0$ ;

в)  $(x^2+1)^2 - 6(x^2+1) + 5 = 0$ ;

г)  $2(x^2+4x)^2 + 17(x^2+4x) + 36 = 0$ .

○25.65. а)  $(x^2-9)^2 - 8(x^2-9) + 7 = 0$ ;

б)  $(x^2-4x+4)^2 + 2(x-2)^2 = 3$ ;

в)  $(x^2-3x)^2 + 3(x^2-3x) - 28 = 0$ ;

г)  $2(x^2+2x+1)^2 - (x+1)^2 = 1$ .

○25.66. а)  $48 - 14x^{-1} + x^{-2} = 0$ ;

б)  $9(x+2)^{-2} - 6(x+2)^{-1} + 1 = 0$ ;

в)  $24 - 10x^{-1} + x^{-2} = 0$ ;

г)  $16(x-3)^{-2} + 8(x-3)^{-1} + 1 = 0$ .

## § 26. ТЕОРЕМА ВЬЕТА

Не решая уравнения, определите, имеет ли оно корни; если имеет, то найдите их сумму и произведение:

26.1. а)  $x^2 + 2x - 5 = 0$ ;      б)  $x^2 - 15x + 16 = 0$ .

26.2. а)  $2x^2 + 9x - 10 = 0$ ;      б)  $5x^2 + 12x + 7 = 0$ .

26.3. а)  $x^2 - 6 = 0$ ;      б)  $2x^2 + 3x = 0$ .

26.4. а)  $0,2x^2 - 4x - 1 = 0$ ;      б)  $\sqrt{3}x^2 - 12x - 7\sqrt{3} = 0$ .

Используя теорему, обратную теореме Виета, найдите корни квадратного уравнения:

**26.5.** а)  $x^2 + 3x + 2 = 0$ ;      в)  $x^2 + 8x + 7 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - 15x + 14 = 0$ ;      г)  $x^2 - 19x + 18 = 0$ .

**26.6.** а)  $x^2 + 3x - 4 = 0$ ;      в)  $x^2 - 9x - 10 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - 10x - 11 = 0$ ;      г)  $x^2 + 8x - 9 = 0$ .

**26.7.** а)  $x^2 + 9x + 20 = 0$ ;      в)  $x^2 + 5x - 14 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - 15x + 36 = 0$ ;      г)  $x^2 - 7x - 30 = 0$ .

**26.8.** а)  $x^2 - 88x + 780 = 0$ ;      в)  $x^2 + 26x + 105 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - 26x - 120 = 0$ ;      г)  $x^2 + 35x - 114 = 0$ .

**26.9.** Выпишите формулы Виета для заданного уравнения и попытайтесь устно указать его корни:

а)  $2x^2 + 5x + 2 = 0$ ;      в)  $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$ ;      г)  $x^2 + (1 - \sqrt{5})x - \sqrt{5} = 0$ .

**26.10.** Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое корней уравнения:

а)  $x^2 - 14x + 4 = 0$ ;      в)  $3x^2 - 78x + 49 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - 4x + 49 = 0$ ;      г)  $x^2 - 72x + 0,04 = 0$ .

Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

**26.11.** а)  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 2$ ;      в)  $x_1 = -8$ ;  $x_2 = 1$ ;  
 б)  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = -5$ ;      г)  $x_1 = -6$ ;  $x_2 = -2$ .

**26.12.** а)  $x_1 = 2,5$ ;  $x_2 = -2$ ;      в)  $x_1 = -2,4$ ;  $x_2 = -1,5$ ;  
 б)  $x_1 = \frac{2}{3}$ ;  $x_2 = -1\frac{1}{2}$ ;      г)  $x_1 = \frac{3}{5}$ ;  $x_2 = -1\frac{2}{3}$ .

**26.13.** а)  $x_1 = \sqrt{2}$ ;  $x_2 = -\sqrt{2}$ ;      в)  $x_1 = \sqrt{7}$ ;  $x_2 = -\sqrt{7}$ ;  
 б)  $x_1 = 3\sqrt{5}$ ;  $x_2 = -3\sqrt{5}$ ;      г)  $x_1 = 9\sqrt{2}$ ;  $x_2 = -9\sqrt{2}$ .

**26.14.** а)  $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ ;  $x_2 = 3 - \sqrt{2}$ ;  
 б)  $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ ;  
 в)  $x_1 = 2 + \sqrt{5}$ ;  $x_2 = 2 - \sqrt{5}$ ;  
 г)  $x_1 = \frac{-4 - \sqrt{3}}{7}$ ;  $x_2 = \frac{-4 + \sqrt{3}}{7}$ .

**026.15.** Составьте квадратное уравнение, если известны среднее арифметическое  $A$  и среднее геометрическое  $\Gamma$  его корней (корни считаются положительными):

- а)  $A = 4$ ;  $\Gamma = 2$ ;      в)  $A = 16$ ;  $\Gamma = 12$ ;  
б)  $A = 2$ ;  $\Gamma = 4$ ;      г)  $A = 100$ ;  $\Gamma = 100$ .

**026.16.** а) Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого на 1 больше корней уравнения  $x^2 - 7x - 3 = 0$ .

б) Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого на 3 меньше корней уравнения  $x^2 + 8x - 1 = 0$ .

**026.17.** а) Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого противоположны корням уравнения  $8x^2 - 7x - 11 = 0$ .

б) Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, корни которого обратны корням уравнения  $5x^2 - 7x - 13 = 0$ .

**026.18.** а) Составьте квадратное уравнение, корни которого равны корням уравнения  $15x^2 - 7x - 3 = 0$ , умноженным на 3.

б) Составьте квадратное уравнение, корни которого равны корням уравнения  $7x^2 - 3x - 1 = 0$ , делённым на 5.

**26.19.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ . Найдите:

- а)  $b$  и  $c$ , если  $a = 2$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -0,5$ ;  
б)  $a$  и  $c$ , если  $b = -1$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -4$ ;  
в)  $a$  и  $b$ , если  $c = 4$ ,  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -0,25$ ;  
г)  $a$  и  $c$ , если  $b = 6$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -4$ .

**26.20.** Может ли квадратное уравнение  $x^2 + bx - 8 = 0$ :

- а) не иметь корней;  
б) иметь равные корни;  
в) иметь два различных корня разных знаков;  
г) иметь два различных корня одного и того же знака?

**26.21.** а) Не решая уравнения  $3x^2 - 135x - 141 = 0$ , докажите, что оно имеет два корня различных знаков. Сравните модули положительного и отрицательного корней (какой больше?).

б) Не решая уравнения  $7x^2 + 123x - 127 = 0$ , докажите, что оно имеет два корня разных знаков. Сравните модули положительного и отрицательного корней (какой больше?).

- 26.22. а) Не решая уравнения  $3x^2 - 135x + 1 = 0$ , докажите, что оно имеет два положительных корня.  
 б) Не решая уравнения  $3x^2 + 147,3x + 11 = 0$ , докажите, что оно имеет два отрицательных корня.
- 26.23. При каких значениях параметра  $p$  сумма корней квадратного уравнения  $x^2 + (p^2 + 4p - 5)x - p = 0$  равна нулю?
- 26.24. При каких значениях параметра  $p$  произведение корней квадратного уравнения  $x^2 + 3x + (p^2 - 7p + 12) = 0$  равно нулю?
- 26.25. При каких значениях  $a$  отношение корней уравнения  $x^2 - 8x + 3a + 1 = 0$  равно:
- а) 3;      б) 5;      в)  $\frac{7}{9}$ ;      г)  $-\frac{3}{7}$ .
- 26.26. а) Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 15.  
 б) Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 1.
- 26.27. а) Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 16.  
 б) Найдите все пары чисел, сумма которых равна 8, а произведение 17.
- 26.28. Докажите, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корень, равный 1, если  $a + b + c = 0$ .
- 26.29. Используя теорему Виета и утверждение, доказанное в упражнении 26.28, найдите корни уравнения:
- а)  $13x^2 + 18x - 31 = 0$ ;      в)  $6x^2 - 26x + 20 = 0$ ;  
 б)  $5x^2 - 27x + 22 = 0$ ;      г)  $3x^2 + 35x - 38 = 0$ .
- 26.30. Докажите, что уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корень, равный  $-1$ , если  $a - b + c = 0$ .
- 26.31. Используя теорему Виета и утверждение, доказанное в упражнении 26.30, найдите корни уравнения:
- а)  $3x^2 + 18x + 15 = 0$ ;      в)  $11x^2 + 17x + 6 = 0$ ;  
 б)  $67x^2 - 105x - 172 = 0$ ;      г)  $14x^2 - 37x - 51 = 0$ .

**О26.32.** Убедитесь, что число 1 или число  $-1$  является одним из корней данного квадратного уравнения, и найдите его второй корень:

а)  $x^2 - (2a + 1)x + 2a = 0$ ;

б)  $ax^2 - (1 - 2a)x + 1 - 3a = 0$ ;

в)  $x^2 + (3a - 2)x + 3(a - 1) = 0$ ;

г)  $(2 - a)x^2 - x - 3 + a = 0$ .

Пусть  $x_1 + x_2 = s$  и  $x_1 \cdot x_2 = m$ . Выразите через  $s$  и  $m$  выражение:

**О26.33.** а)  $x_1 + x_1x_2 + x_2$ ;                      в)  $2x_2^2x_1^3 + 2x_1^2x_2^3$ ;

б)  $2x_1 + 2x_2 + 3x_1x_2$ ;                      г)  $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ .

**О26.34.** а)  $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ;                      в)  $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$ ;

б)  $x_1^2 + x_2^2$ ;                      г)  $\left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right|$ .

**О26.35.** а)  $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ ;                      в)  $(x_1 - x_2)^2$ ;

б)  $\frac{x_1x_2}{x_1 + x_2}$ ;                      г)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ .

**О26.36.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - 9x - 17 = 0$ . Не решая уравнения, вычислите:

а)  $x_1^2 + x_2^2$ ;                      б)  $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ .

**О26.37.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $3x^2 + 8x - 1 = 0$ . Не решая уравнения, вычислите:

а)  $x_1^2 + x_2^2$ ;                      б)  $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$ .

**О26.38.** а) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $x^2 - 5x - 11 = 0$ . Не вычисляя  $x_1$  и  $x_2$ , найдите значение выражения  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 6$ .

б) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $x^2 + 10x - 15 = 0$ . Не вычисляя  $x_1$  и  $x_2$ , найдите значение выражения  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 10$ .

**О26.39.** а) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $5x^2 + 2x - 4 = 0$ . Не вычисляя  $x_1$  и  $x_2$ , найдите значение выражения  $\frac{7 - 2x_1}{x_1} + \frac{7 + 4x_2}{x_2}$ .

б) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $3x^2 - 5x - 4 = 0$ . Не вычисляя  $x_1$  и  $x_2$ , найдите значение выражения  $\frac{6 + 5x_1}{x_1} + \frac{6 - 7x_2}{x_2}$ .

- 26.40. Дано уравнение  $x^2 - (2p^2 - p - 6)x + (8p - 1) = 0$ . Известно, что сумма его корней равна  $-5$ . Найдите значения параметра  $p$  и корни уравнения.
- 26.41. Дано уравнение  $x^2 - (p + 1)x + (2p^2 - 9p - 12) = 0$ . Известно, что произведение его корней равно  $-21$ . Найдите значения параметра  $p$  и корни уравнения.
- 26.42. При некотором значении параметра  $p$  корни квадратного уравнения  $2px^2 + (p^2 - 9)x - 5p + 2 = 0$  являются противоположными числами. Найдите эти корни.
- 26.43. При некотором значении параметра  $p$  корни квадратного уравнения  $2px^2 + 5x + p + 1 = 0$  являются взаимно обратными числами. Найдите эти корни.
- 26.44. Дано уравнение  $x^2 + (3p - 5)x + (3p^2 - 11p - 6) = 0$ . Известно, что сумма квадратов его корней равна  $65$ . Найдите значение параметра  $p$  и корни уравнения.
- 26.45. Разность корней уравнения  $2x^2 - 15x + p = 0$  равна  $2,5$ . Найдите значение параметра  $p$  и корни уравнения.
- 26.46. Один из корней квадратного уравнения  $2x^2 - 14x + p = 0$  больше другого в  $2,5$  раза. Найдите значение параметра  $p$  и корни уравнения.
- 26.47. График функции  $y = ax^2 + bx + c$  пересекает ось абсцисс в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ . Докажите, что вершина параболы имеет координаты

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = -a(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2).$$

- 26.48. Докажите, что если система  $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$  имеет решения  $(m; n)$ , то числа  $m$  и  $n$  являются корнями уравнения  $x^2 - px + q = 0$  и, наоборот, если данное уравнение имеет корни  $m$  и  $n$  (не обязательно различные), то любая пара чисел  $(m; n)$  или  $(n; m)$  является решением системы. Сделайте вывод о возможности решения системы, сводящейся к виду  $\begin{cases} x + y = p, \\ xy = q \end{cases}$  при помощи теоремы Виета.

**О26.49.** Составляя вспомогательное квадратное уравнение, решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 12; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 3x - 4y = -5, \\ xy = 2; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 2x + y = 5, \\ xy = 2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x + 7y = 4, \\ 14xy = 3. \end{cases} \end{array}$$

**О26.50.** Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x + y + xy = 22, \\ xy = 15; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x + y = 12, \\ x + y + xy = 39; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + y - xy = -13, \\ x + y + xy = 35; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ 3x + 3y - xy = 7. \end{cases} \end{array}$$

## **§ 27. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ**

**27.1.** Найдите корни квадратного трёхчлена:

- а)  $x^2 - 3x + 2$ ;
- б)  $2x^2 + 3x + 1$ ;
- в)  $-x^2 + 7x - 12$ ;
- г)  $-12x^2 - 7x - 1$ .

**О27.2.** Не используя теорему Виета и формулу для корней квадратного трёхчлена, докажите, что если  $x_1$  — корень квадратного трёхчлена  $x^2 + px + q$ , то справедливо тождество  $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_2 = -p - x_1$ . При этом если  $x_1 = -\frac{p}{2}$ , то  $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ .

Разложите на множители квадратный трёхчлен:

- 27.3.** а)  $x^2 - 11x + 24$ ;      в)  $x^2 + 7x + 12$ ;
- б)  $x^2 - 2x - 15$ ;      г)  $x^2 + 3x - 10$ .
- 27.4.** а)  $-x^2 + 16x - 15$ ;      в)  $-x^2 + 5x - 6$ ;
- б)  $-x^2 - 8x + 9$ ;      г)  $-x^2 + 7x + 8$ .



Разложите на множители квадратный трёхч.

- 27.5.** а)  $3x^2 + 5x - 2$ ;      в)  $5x^2 + 2x - 3$ ;  
б)  $6x^2 + 5x + 1$ ;      г)  $15x^2 - 8x + 1$ .
- 27.6.** а)  $-3x^2 - 8x + 3$ ;      в)  $-2x^2 + 9x - 4$ ;  
б)  $-5x^2 + 6x - 1$ ;      г)  $-4x^2 - 3x + 85$ .
- 27.7.** а)  $x^2 - 12x + 24$ ;      в)  $x^2 - 6x + 1$ ;  
б)  $4x^2 - 4x - 1$ ;      г)  $4x^2 - 12x + 7$ .
- 27.8.** а)  $x^2 + 34x + 289$ ;      в)  $3x^2 + 30x + 75$ ;  
б)  $-x^2 + 24x - 144$ ;      г)  $-8x^2 + 40x - 50$ .

Разложите выражение на множители:

- 27.9.** а)  $x + 6\sqrt{x} + 8$ ;      в)  $x - 12\sqrt{x} + 35$ ;  
б)  $x - 7\sqrt{x} - 18$ ;      г)  $x + 3\sqrt{x} - 40$ .
- 27.10.** а)  $7x + 23\sqrt{x} + 16$ ;      в)  $9x + 4\sqrt{x} - 5$ ;  
б)  $3x^3 - 10x\sqrt{x} + 3$ ;      г)  $2x^3 - 5x\sqrt{x} + 2$ .
- 27.11.** а)  $x^4 - 13x^2 + 36$ ;      в)  $-x^4 + 20x^2 - 64$ ;  
б)  $-2x^6 + 9x^3 - 4$ ;      г)  $15x^6 - 8x^3 + 1$ .

Сократите дробь:

- 27.12.** а)  $\frac{x+4}{x^2+7x+12}$ ;      в)  $\frac{x+1}{x^2+4x+3}$ ;  
б)  $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-3x}$ ;      г)  $\frac{5x^2+x-4}{x^2+x}$ .
- 27.13.** а)  $\frac{2x^2+9x+7}{x^2-1}$ ;      в)  $\frac{2x^2+7x-4}{x^2-16}$ ;  
б)  $\frac{9x^2-1}{3x^2-8x-3}$ ;      г)  $\frac{4x^2-1}{2x^2-9x-5}$ .
- 27.14.** а)  $\frac{x^2-8x+15}{x^2+7x-30}$ ;      в)  $\frac{6x^2-19x+13}{2x^2+7x-9}$ ;  
б)  $\frac{6x^2+7x-3}{2-x-15x^2}$ ;      г)  $\frac{21x^2+x-2}{2+5x-3x^2}$ .
- 27.15.** а)  $\frac{x-5\sqrt{x}-14}{x-2\sqrt{x}-8}$ ;      в)  $\frac{2x+11\sqrt{x}-6}{x+3\sqrt{x}-18}$ ;  
б)  $\frac{x^4-10x^2+9}{x^2-2x-3}$ ;      г)  $\frac{x^3-4x}{x^4-3x^2-4}$ .

**027.16.** Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10}; & \text{в) } \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 + 3x + 2}; \\ \text{б) } \frac{x^3 - 2x^2 - 16x + 32}{x^2 - 6x + 8}; & \text{г) } \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2 - 2x - 3}. \end{array}$$

Упростите выражение:

**027.17.** а)  $\left( \frac{1}{x+2} + \frac{5}{x^2 - x - 6} + \frac{2x}{x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1};$

б)  $\left( \frac{2}{x+1} + \frac{10}{x^2 - 3x - 4} + \frac{3x}{x-4} \right) : \frac{3x+2}{3}.$

**027.18.** а)  $\frac{x+12}{x^3-9x} : \left( \frac{x-3}{2x^2+5x-3} - \frac{9}{9-x^2} \right);$

б)  $\left( \frac{3a-1}{a^2-4} - \frac{9a}{3a^2+5a-2} \right) \cdot \frac{15a^3-60a}{12a+1}.$

**027.19.** а)  $\left( \frac{4}{5a^2+a-4} - \frac{a+1}{9(5a-4)} \right) \cdot \frac{15a-12}{a+7};$

б)  $\frac{5(a+4)}{a-1} : \left( \frac{9(a-1)}{3a+4} - \frac{(2a-7)^2}{3a^2+a-4} \right).$

**027.20.** Докажите тождество:

а)  $\left( \frac{2x}{x+2} + \frac{4}{x^2+5x+6} - \frac{3}{x+3} \right) : \frac{2x-1}{3} + \frac{x}{3+x} = 1;$

б)  $\left( \frac{2x}{x-3} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x^2-2x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} + \frac{3}{3-x} = 1.$

**027.21.** Найдите значение выражения при  $x = 2007$ :

а)  $\left( \frac{3}{x-3} + \frac{4}{x^2-5x+6} + \frac{2x}{x-2} \right) : \frac{2x+1}{3} - \frac{x-12}{9-3x};$

б)  $\left( \frac{2x}{x+3} + \frac{1}{x-1} - \frac{4}{x^2+2x-3} \right) \cdot \frac{x}{2x+1} + \frac{3-x}{6+2x}.$

Решите уравнение:

**027.22.** а)  $\frac{x^2+1}{x^2-4x+3} + \frac{2}{x-1} = \frac{3}{x-3};$

б)  $\frac{18}{x-8} = \frac{x^2-7}{x^2-7x-8} - \frac{6}{x+1}.$

**027.23.** а)  $\frac{x^2+14}{x^2-x-2} + \frac{10}{x+1} = \frac{3x}{x-2};$

б)  $\frac{6}{x-4} - \frac{3x}{x+2} = \frac{x^2+20}{x^2-2x-8}.$

○27.24. Решите уравнение:

а)  $\frac{x^2 - 5}{x^2 - 3x + 2} - \frac{x + 3}{x - 1} = \frac{2x + 2}{x - 2}$ ;

б)  $\frac{2x^2 + 9x}{x^2 - x - 6} + \frac{3x + 2}{x + 2} = \frac{2x + 3}{x - 3}$ .

Составьте приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого являются числа:

○27.25. а)  $a$  и  $-8$ ;                      в)  $a$  и  $5a$ ;  
б)  $b + 1$  и  $-1$ ;                    г)  $a$  и  $2 - a$ .

○27.26. а)  $a + 5$  и  $a - 5$ ;              в)  $3c - 2$  и  $3c + 2$ ;  
б)  $3 - 7a$  и  $7a - 3$ ;              г)  $1 - 2b$  и  $2b + 3$ .

○27.27. а)  $a$  и  $\frac{1}{a}$ , где  $a$  — целое число,  $a \neq 0$ ;

б)  $\frac{a}{b}$  и  $\frac{b}{a}$ , где  $a, b$  — целые числа,  $a \neq 0, b \neq 0$ .

Разложите на линейные множители выражение:

○27.28. а)  $x^2 + (2m + 1)x + m(m + 1)$ ;  
б)  $mx^2 + (m^2 + 1)x + m$ ;  
в)  $m(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + 1$ ;  
г)  $mx^2 - (m^2 - 1)x - m$ .

○27.29. а)  $2x^2 + (a - 2)x - a$ ;  
б)  $b^2 + 3(p - 1)b + 2p^2 - 3p$ ;  
в)  $2x^2 - (a + 3)x + a + 1$ ;  
г)  $-5x^2 - (4y + 5)x + y(y + 1)$ .

○27.30. а)  $x^2 - 3xy + 2y^2$ ;              в)  $2p^2 + 3pq + q^2$ ;  
б)  $x^2 - 5xy + 6y^2$ ;              г)  $12s^2 + 7st + t^2$ .

## § 28. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

○28.1. Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше знаменателя.

Если эту дробь сложить с обратной ей дробью, то получится  $2\frac{1}{12}$ . Найдите исходную дробь.

○28.2. Знаменатель обыкновенной дроби больше её числителя на 3. Если к числителю прибавить 7, а к знаменателю 5, то дробь увеличится на  $\frac{1}{2}$ . Найдите эту дробь.

- 028.3.** Числитель несократимой обыкновенной дроби на 5 меньше её знаменателя. Если числитель уменьшить на 2, а знаменатель увеличить на 16, то дробь уменьшится на  $\frac{1}{3}$ . Найдите эту дробь.
- 028.4.** Числитель обыкновенной дроби на 1 меньше её знаменателя. Если из числителя и знаменателя вычесть 1, то дробь уменьшится на  $\frac{1}{12}$ . Найдите эту дробь.
- 028.5.** Велосипедист проехал 18 км с определённой скоростью, а оставшиеся 6 км со скоростью на 6 км/ч меньшей первоначальной. Найдите скорость велосипедиста на втором участке пути, если на весь путь он затратил 1,5 ч.
- 028.6.** Первый пешеход прошёл 6 км, а второй пешеход 5 км. Скорость первого пешехода на 1 км/ч меньше, чем скорость второго. Найдите скорость первого пешехода, если известно, что он был в пути на 30 мин больше второго.
- 028.7.** Расстояние 30 км один из двух лыжников прошёл за 20 мин быстрее другого. Скорость первого лыжника была на 3 км/ч больше скорости второго. Какая скорость была у каждого лыжника?
- 028.8.** Два автомобиля выезжают одновременно из одного города в другой. Скорость первого автомобиля на 10 км/ч больше скорости второго, и поэтому первый приезжает на место на 1 ч раньше второго. Найдите скорость каждого автомобиля, зная, что расстояние между городами равно 560 км.
- 028.9.** Из пункта *A* в пункт *B*, удалённый от *A* на расстояние 100 км, отправился междугородный автобус. Из-за ненастной погоды он ехал со скоростью на 10 км/ч меньшей, чем предполагалось по расписанию, и поэтому прибыл в пункт *B* с опозданием на 30 мин. С какой скоростью должен был ехать автобус по расписанию?
- 028.10.** Велосипедист ехал с постоянной скоростью 16 км от города до турбазы. Возвращаясь обратно, он снизил скорость на 4 км/ч. На весь путь туда и обратно велосипедист затратил 3 ч 20 мин. Найдите скорость, с которой велосипедист ехал от турбазы до города.

- 028.11.** Автобус-экспресс отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся от автовокзала на расстоянии 40 км. Через 10 мин вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорость такси и скорость автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.
- 028.12.** Через 2 ч после выхода из  $A$  автобус был задержан на 30 мин и, чтобы прибыть в  $B$  по расписанию, должен был увеличить скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость автобуса, если известно, что расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 260 км.
- 028.13.** Велосипедист проехал 30 км от города до турбазы. На обратном пути он ехал 2 ч с той же скоростью, а затем на 3 км/ч быстрее и затратил на обратный путь на 6 мин меньше, чем на путь из города до турбазы. Какое время затратил велосипедист на обратный путь?
- 028.14.** Велосипедист рассчитывал проехать по маршруту  $BC$  за 2 ч. Однако когда до пункта  $C$  оставалось 6 км, из-за встречного ветра он снизил скорость на 3 км/ч и прибыл в пункт  $C$  на 6 мин позже, чем рассчитывал. Чему равна длина маршрута  $BC$ ?
- 028.15.** Поезд должен был пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он прибыл на вокзал с опозданием на 2 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.
- 028.16.** Расстояние между станциями  $A$  и  $B$  равно 240 км. Из  $B$  по направлению к  $A$  вышел поезд. Через 30 мин навстречу ему из  $A$  вышел другой поезд, скорость которого на 12 км/ч больше скорости первого поезда. Найдите скорости поездов, если они встретились на середине пути между  $A$  и  $B$ .
- 028.17.** Расстояние между городами равно 44 км. Из этих городов навстречу друг другу выходят одновременно два пешехода и встречаются через 4 ч. Если бы первый вышел на 44 мин раньше второго, то их встреча произошла бы в середине пути. С какой скоростью идёт каждый пешеход?
- 028.18.** Велосипедист проехал 96 км на 2 ч быстрее, чем предполагал. При этом за каждый час он проезжал на 1 км больше, чем намеревался проезжать за 1 ч 15 мин. С какой скоростью ехал велосипедист?

- 28.19. Велосипедист проехал 40 км от города до фермы. Возвращаясь, он сначала 2 ч ехал с той же скоростью, а затем сделал остановку на 20 мин. После остановки велосипедист увеличил скорость на 4 км/ч и затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь от города до фермы. С какой скоростью двигался велосипедист после остановки?
- 28.20. Два парохода одновременно вышли из порта: один на север, другой на восток. Через 2 ч расстояние между ними оказалось равным 60 км. Найдите скорость каждого парохода, зная, что скорость одного из них на 6 км/ч больше скорости другого.
- 28.21. Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из пункта  $A$  на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в пункт  $A$  в тот момент, когда первый курьер достиг пункта  $B$ . Какова скорость первого курьера, если скорость второго 50 км/ч?
- 28.22. Два велосипедиста одновременно выехали из пункта  $A$  в одном и том же направлении. Скорость первого на 2 км/ч больше скорости второго. Через 12 мин первый велосипедист остановился на 6 мин, чтобы устранить неисправность, и, возобновив движение, догнал второго велосипедиста на расстоянии 14 км от места своей остановки. Определите скорость велосипедистов.
- 28.23. От пристани  $A$  до пристани  $B$ , расстояние между которыми 10 км, вниз по течению реки отправился плот. Через некоторое время вслед за ним отправился катер, который догнал плот через 15 мин и тут же, не меняя своей скорости, повернул обратно. Известно, что плот причалил к пристани  $B$  на 54 мин позже, чем катер к пристани  $A$ . Найдите собственную скорость катера и время движения плота до момента начала движения катера от пристани  $A$ , если скорость течения реки 2 км/ч, а собственная скорость движения катера больше 10 км/ч.\*
- 28.24. Автомобиль выехал из пункта  $A$  в пункт  $B$  и некоторое время двигался с постоянной скоростью. Проехав  $\frac{3}{4}$  пути, он увеличил скорость на 20 км/ч. Когда автомобиль прибыл в пункт  $B$ , оказалось, что его средняя скорость

---

\* Условие задачи изменено по сравнению с 9-м изданием задачника.

движения составила 64 км/ч. Найдите первоначальную скорость автомобиля.

- 28.25. Из пункта  $M$  в пункт  $N$  выходит первый пешеход, а через 2 ч навстречу ему из пункта  $N$  в пункт  $M$  выходит второй пешеход. К моменту встречи второй пешеход прошёл  $\frac{7}{9}$  от расстояния, пройденного к этому моменту первым пешеходом. Сколько времени требуется первому пешеходу на весь путь от  $M$  до  $N$ , если второй пешеход проходит путь от  $N$  до  $M$  за 7 ч?
- 28.26. Из пункта  $A$  выехал велосипедист. Через 1 ч одновременно вслед за ним выехали ещё два велосипедиста. Каждый велосипедист двигался с постоянной скоростью. Через некоторое время третий велосипедист догнал первого, а второй велосипедист догнал первого на 2 ч позже. Определите отношение скорости первого велосипедиста к скорости третьего, если отношение скорости второго к скорости третьего равно 2 : 3.\*
- 28.27. Моторная лодка прошла 5 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость движения лодки по течению реки.
- 28.28. Члены школьного кружка натуралистов отправились на катере собирать лекарственные травы. Проплыв вниз по течению реки 35 км, они сделали трёхчасовую остановку, после чего вернулись назад. Определите скорость катера в стоячей воде, если всё путешествие заняло 7 ч, а скорость течения реки равна 3 км/ч.
- 28.29. Моторная лодка прошла 54 км по течению реки и 42 км против течения за то же время, за которое она проходит 96 км в стоячей воде. Найдите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.
- 28.30. Турист проплыл на байдарке 24 км по озеру и 9 км против течения реки за то же время, какое понадобилось ему, чтобы проплыть по течению 45 км. С какой скоростью плыл турист по озеру, если скорость течения реки равна 2 км/ч?
- 28.31. Лодочник проплыл 3 км по течению реки и 3 км против течения за то же время, за которое плот мог бы проплыть 4 км. Собственная скорость лодки равна 6 км/ч. Найдите скорость течения реки.

---

\* Условие задачи изменено по сравнению с 9-м изданием задачника.

- 28.32. Прогулочный теплоход отправился от пристани *A* к пристани *B* вниз по течению реки. После получасовой стоянки в *B* он отправился обратно и через 8 ч после отплытия из *A* вернулся к той же пристани. Какова собственная скорость теплохода, если расстояние между пристанями *A* и *B* равно 36 км, а скорость течения реки равна 2 км/ч?
- 28.33. Моторная лодка прошла по течению реки расстояние 6 км, затем по озеру 10 км, затратив на весь путь 1 ч. С какой скоростью она шла по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч?
- 28.34. Моторная лодка прошла 20 км против течения реки и 14 км по озеру, затратив на путь по озеру на 1 ч меньше, чем на путь по реке. Скорость течения реки равна 4 км/ч. Найдите скорость хода лодки против течения.
- 28.35. Турист проплыл на байдарке 15 км против течения реки и 14 км по течению, затратив на всё путешествие столько же времени, сколько ему понадобилось бы, чтобы проплыть по озеру 30 км. Зная, что скорость течения реки равна 1 км/ч, найдите скорость движения туриста по озеру.
- 28.36. Катер прошёл 8 км по течению реки и 16 км против течения, затратив на весь путь  $\frac{4}{3}$  ч. Какова скорость движения катера по течению, если собственная скорость катера равна 20 км/ч?
- 28.37. Моторная лодка прошла 7 км по течению реки и 10 км против течения, затратив на путь по течению на 0,5 ч меньше, чем на путь против течения. Собственная скорость лодки равна 12 км/ч. Найдите скорость хода лодки против течения.
- 28.38. Пункты *A*, *B* и *C* расположены на реке в указанном порядке вниз по течению. Расстояние между *A* и *B* равно 4 км, а между *B* и *C* — 14 км. В 12 ч из пункта *B* отплыла лодка и направилась в пункт *A*. Достигнув пункта *A*, она сразу же повернула назад и в 14 ч прибыла в пункт *C*. Скорость течения реки 5 км/ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде.
- 28.39. Колонне автомашин было дано задание перевезти со склада в речной порт 60 т груза. В связи с неблагоприятной погодой на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, и поэтому колонну дополнили ещё четырьмя машинами. Сколько машин было в колонне первоначально?



- 28.40. Мастерская к определённому сроку должна была выпустить 5400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар больше плана и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?
- 28.41. Токарь должен был обработать 120 деталей к определённому сроку. Применяв новый резец, он стал обтачивать в час на 20 деталей больше и поэтому закончил работу на 1 ч раньше срока. Сколько деталей он должен был обрабатывать по плану?
- 28.42. Бригада должна была изготовить 120 изделий к определённому сроку. Однако она изготовляла в день на 2 изделия больше, чем предполагалось по плану, и поэтому закончила работу на 3 дня раньше срока. Сколько изделий в день должна была изготовлять бригада по плану?
- 28.43. Два поля имеют общую площадь 20 га. С первого поля убрали 550 т, а со второго 540 т картофеля. Сколько тонн картофеля собирали с 1 га каждого поля, если с 1 га первого поля собирали на 10 т меньше, чем с 1 га второго поля?
- 28.44. Для перевозки 180 туристов было заказано несколько автобусов. Однако два автобуса не прибыли, а туристов приехало на 8 человек больше, чем ожидалось. Поэтому пришлось в каждом автобусе разместить на 17 человек больше, чем предполагалось. Сколько туристов было размещено в каждом автобусе?
- 28.45. Бригада трактористов к определённому сроку должна была вспахать 1800 га. Ежедневно перевыполняя план на 25 га, уже за 4 дня до срока бригада не только выполнила задание, но и вспахала дополнительно 200 га. Какова была ежедневная норма работы бригады по плану?
- 28.46. В начале года завод выпускал 800 изделий в месяц. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. На сколько процентов завод увеличивал выпуск продукции каждый раз, если в конце года он выпускал уже 1152 изделия в месяц?
- 28.47. Для очистки пруда, содержащего  $2800 \text{ м}^3$  воды, предполагалось к определённому сроку выкачать всю воду с помощью насосов. Так как насосов было прислано меньше, чем ожидалось, то ежедневно выкачивали на

20 м<sup>3</sup> меньше предполагаемой нормы. Через день после истечения намеченного срока оставалось выкачать ещё 100 м<sup>3</sup> воды. За сколько дней предполагалось выкачать воду первоначально?

- О28.48.** Аквариум объёмом 54 м<sup>3</sup> заполняется при помощи двух кранов. При этом первый кран работает 3 ч, а второй — 2 ч. Какова пропускная способность первого крана, если 1 м<sup>3</sup> он заполняет на 1 мин медленнее, чем второй?
- О28.49.** Два комбайна, работая совместно, могут выполнить задание за 6 ч. Первый комбайн, работая один, может выполнить это задание на 5 ч быстрее, чем второй комбайн. За какое время может выполнить задание первый комбайн, работая один?
- О28.50.** Две бригады, работая вместе, могут выполнить задание за 8 ч. Первая бригада, работая одна, могла бы выполнить задание на 12 ч быстрее, чем вторая бригада. За сколько часов могла бы выполнить задание первая бригада, если бы она работала одна?
- О28.51.** Два экскаватора, работая одновременно, выполняют некоторый объём земляных работ за 3 ч 45 мин. Один экскаватор, работая отдельно, может выполнить этот объём работ на 4 ч быстрее, чем другой. Сколько времени требуется каждому экскаватору в отдельности для выполнения того же объёма земляных работ?
- О28.52.** Чан наполняется двумя кранами при совместной работе за 1 ч. Наполнение чана только через первый кран длится вдвое дольше, чем через второй кран. За какой промежуток времени каждый кран отдельно может наполнить чан?
- О28.53.** Два тракториста, работая совместно, вспахали поле за 48 ч. Если бы половину поля вспахал один из них, а затем оставшуюся половину другой, то работа была бы выполнена за 100 ч. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый тракторист, работая отдельно?
- О28.54.** Двое рабочих вместе могут справиться с заданием за 2 ч. Если один из них сделает 40 % задания, а затем второй — оставшуюся часть работы, то на выполнение задания понадобится 4 ч. За какое время сможет выполнить всё задание каждый рабочий, действуя в одиночку, если известно, что производительность труда у них различная?

- 28.55. За 4 дня совместной работы двух тракторов было вспахано  $\frac{2}{3}$  поля. За сколько дней можно вспахать всё поле только вторым трактором, если первым трактором можно вспахать всё поле на 5 дней быстрее, чем вторым?
- 28.56. Две бригады сельскохозяйственного предприятия должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, и поэтому вторая закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. За сколько дней могла бы убрать урожай каждая бригада, работая отдельно?
- 28.57. Двое рабочих выполняют некоторую работу. После 45 мин совместного труда первый рабочий был переведён на другую работу, а второй закончил оставшуюся часть работы за 2 ч 15 мин. За какое время мог бы выполнить всю работу каждый рабочий в отдельности, если известно, что второму на это понадобится на 1 ч больше, чем первому?
- 28.58. Однотипные детали обрабатываются на двух станках. Производительность первого станка на 40 % больше производительности второго. Сколько деталей было обработано за смену каждым станком, если первый работал в эту смену 6 ч, а второй — 7 ч, причём вместе они обработали 616 деталей?
- 28.59. Две трубы, работая одновременно, заполняют бассейн за 6 ч. За какое время наполнила бы бассейн каждая труба в отдельности, если известно, что первая труба подаёт в час воды на 50 % больше второй?
- 28.60. Университет в течение двух лет увеличивал количество принятых студентов на один и тот же процент. На сколько процентов увеличивался приём студентов ежегодно, если количество поступивших возросло с 2000 человек до 2880?
- 28.61. В сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота, добавили 100 г золота. В результате содержание золота в сплаве увеличилось на 20 %. Сколько граммов серебра в сплаве?
- 28.62. В сплав меди и цинка, содержащий 5 кг цинка, добавили 15 кг цинка, после чего содержание цинка в сплаве повысилось на 30 %. Какова первоначальная масса сплава, если известно, что в нём меди было больше, чем цинка?
- 28.63. Слиток сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45 % меди. Какую массу меди надо добавить к этому куску, чтобы полученный сплав содержал 60 % меди?

- 28.64. Морская вода содержит 5 % (по весу) соли. Сколько килограммов пресной воды надо прибавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составляло 2 % ?
- 28.65. Имеются два слитка, состоящие из цинка, меди и олова. Известно, что первый слиток массой 150 кг содержит 40 % олова, а второй массой 250 кг — 26 % меди. Процентное содержание цинка в обоих слитках одинаково. Сплавив первый и второй слитки, получили сплав, в котором оказалось 30 % цинка. Сколько килограммов олова содержится в полученном сплаве?
- 28.66. Имеются два сплава, состоящие из меди, цинка и олова. Известно, что первый сплав содержит 25 % цинка, а второй — 50 % меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в 2 раза меньше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28 % цинка. Определите, сколько килограммов меди содержится в новом сплаве.
- 28.67. Из сосуда ёмкостью 50 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой; затем опять вылили столько же литров раствора и опять долили водой. После этого в сосуде осталось 32 л чистой кислоты. Сколько кислоты было вылит в первый и во второй раз?
- 28.68. После двух последовательных снижений цен на одно и то же число процентов цена одной упаковки лекарства снизилась с 300 до 192 р. На сколько процентов снижалась цена одной упаковки лекарства каждый раз?
- 28.69. Население посёлка за два года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения города.
- 28.70. Первоначальная цена на некоторый товар была повышена на 44 %, затем 2 раза понижалась на одинаковое число процентов. В результате окончательная цена товара оказалась на 19 % меньше первоначальной. На сколько процентов производилось двукратное снижение цены?
- 28.71. Первый банк даёт 5 % годовых, а второй — 10 %. Вкладчик часть своих денег положил в первый банк, а остальные — во второй. Через 2 года суммарное число вложенных денег увеличилось на 18,85 %. Какую долю своих денег положил вкладчик в первый банк?\*

---

\* Условие задачи изменено по сравнению с 9-м изданием задачника.

## § 29. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

**29.1.** Является ли решением неравенства  $2a + 3 > 7a - 17$  значение  $a$ , равное:

- а) 2;      б) 6,5;      в)  $-\sqrt{2}$ ;      г)  $\sqrt{18}$ ?

**29.2.** Какое из чисел  $-1$ ,  $7$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\frac{3}{7}$  является решением неравенства  $3x > x + 2$ ?

Изобразите на числовой прямой точки, удовлетворяющие данному неравенству:

**29.3.** а)  $x > 5$ ;      б)  $x < 9$ ;      в)  $x \geq -2$ ;      г)  $x \leq 0$ .

**29.4.** а)  $-5 < x < 6$ ;      в)  $4,2 \leq x \leq 4,21$ ;  
б)  $-8 \leq x \leq 8$ ;      г)  $5 \geq x > -3$ .

**29.5.** Составьте аналитическую модель данного числового промежутка:

- а)  $(-\infty; 9,3)$ ;      в)  $(-\infty; -5]$ ;  
б)  $(0,3; 3,5)$ ;      г)  $(-2; -0,3]$ .

Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

**29.6.** а)  $x + 1 > 0$ ;      в)  $x - 3 \leq 0$ ;  
б)  $2x \geq 8$ ;      г)  $4x < 12$ .

**29.7.** а)  $11x > -33$ ;      в)  $-6x > -12$ ;  
б)  $-8x \geq 24$ ;      г)  $13x \leq -65$ .

**29.8.** а)  $3x + 2 > 0$ ;      в)  $-5x - 1 \leq 0$ ;  
б)  $-3x + 4 < 13$ ;      г)  $-x - 8 \leq 19$ .

**29.9.** а)  $5(x + 2) \geq 4$ ;      в)  $6(x - 1) \leq 11$ ;  
б)  $-2(x - 3) \leq 5$ ;      г)  $-3(x + 4) \geq -2$ .

- 29.10.** а) При каких значениях  $a$  двучлен  $5a - 3$  принимает положительные значения?  
 б) При каких значениях  $b$  двучлен  $23b + 11$  принимает отрицательные значения?
- 29.11.** а) При каких значениях  $c$  двучлен  $13c - 22$  принимает неотрицательные значения?  
 б) При каких значениях  $d$  двучлен  $2d + 4$  принимает неположительные значения?
- 29.12.** а) При каких значениях  $m$  двучлен  $5m + 8$  принимает значения большие, чем 2?  
 б) При каких значениях  $n$  двучлен  $7n + 1$  принимает значения меньшие, чем 1?
- 29.13.** а) При каких значениях  $p$  значения двучлена  $9p - 2$  не меньше значений двучлена  $3p + 4$ ?  
 б) При каких значениях  $q$  значения двучлена  $11q + 3$  меньше значений двучлена  $5q - 6$ ?

Решите неравенство:

- 29.14.** а)  $2a - 11 > a + 13$ ;      в)  $6 - 4c > 7 - 6c$ ;  
 б)  $8b + 3 < 9b - 2$ ;      г)  $3 - 2x < 12 - 5x$ .
- 29.15.** а)  $-2x + 12 > 3x - 3$ ;      в)  $5z - 14 < 8z - 20$ ;  
 б)  $6y + 8 \leq 10y - 8$ ;      г)  $3t + 5 \geq 7t - 7$ .
- 29.16.** а)  $10x + 9 > -3(2 - 5x)$ ;  
 б)  $-(6y + 2) + 3(y - 1) \geq 0$ ;  
 в)  $2(3 - 2z) + 3(2 - z) \leq 40$ ;  
 г)  $-(8t - 2) - 2(t - 3) > 0$ .
- 29.17.** а)  $2(x + 1) - 1 < 7 + 8x$ ;      в)  $-2(4z + 1) < 3 - 10z$ ;  
 б)  $3 - 11y \leq -3(y - 2)$ ;      г)  $4 - 3t > -4(2t + 2)$ .
- 29.18.** а)  $8 + 6p < 2(5p + 4)$ ;  
 б)  $-(6y + 2) + 6(y - 1) \geq 0$ ;  
 в)  $2(3 - 4q) - 3(2 - 3q) \leq 0$ ;  
 г)  $7 - 16r \leq -2(8r - 1) + 5$ .
- 29.19.** а)  $4(a + 1) + 3a > 7a + 2$ ;  
 б)  $7b - 3 \geq 7(1 + b)$ ;  
 в)  $4(2 + 3z) + 3(4 - 4z) \geq 0$ ;  
 г)  $5(4d - 3) + 5(3 - 4d) < 0$ .

Решите неравенство:

**29.20.** а)  $\frac{3a}{4} > 1$ ; б)  $-\frac{5b}{8} > 0$ ; в)  $\frac{8c}{11} > 2$ ; г)  $\frac{9d}{5} < 0$ .

**29.21.** а)  $\frac{3x+2}{5} < 0$ ; в)  $\frac{5x-7}{4} > 0$ ;

б)  $-\frac{3x-4}{3} \geq 0$ ; г)  $\frac{1+2x}{-2} \leq 0$ .

**29.22.** а)  $\frac{2x-1}{3} \geq 1$ ; в)  $\frac{3x+1}{4} \leq 15$ ;

б)  $\frac{12-9x}{7} \leq 7$ ; г)  $\frac{23-5x}{11} \leq 1$ .

**29.23.** а)  $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} > 7$ ; в)  $\frac{b}{6} - \frac{b}{4} \leq 1$ ;

б)  $\frac{2c}{9} - c \geq 3$ ; г)  $\frac{3d}{4} - 2d < 0$ .

○**29.24.** а)  $0,2m^2 - 0,2(m-6)(m+6) > 3,6m$ ;

б)  $(12n-1)(3n+1) < 1 + (6n+2)^2$ ;

в)  $(2p-5)^2 - 0,5p < (2p-1)(2p+1) - 15$ ;

г)  $(4q-1)^2 > (2q+3)(8q-1)$ .

○**29.25.** а)  $\frac{2a-1}{3} < \frac{5a-2}{2}$ ; в)  $\frac{2b-1}{5} - \frac{3-b}{3} < 2$ ;

б)  $2c - \frac{c+1}{2} \leq \frac{c-1}{3}$ ; г)  $\frac{d-1}{3} - d \geq \frac{d+1}{2}$ .

○**29.26.** а)  $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$ ; в)  $\frac{t-1}{2} - \frac{2t+3}{8} - t > -2$ ;

б)  $\frac{37-3z}{2} + 9 < \frac{2z-7}{4} - 2z$ ; г)  $\frac{8y+5}{4} - 1 \leq \frac{3y-2}{3} + y$ .

Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства:

○**29.27.** а)  $4(x-7) - 2(x+3) < 9$ ; б)  $5(x-1) + 7(x+2) < 3$ .

○**29.28.** а)  $\frac{2x-1}{3} + \frac{5x+7}{2} < 4$ ; б)  $\frac{3x+2}{5} - \frac{2x-4}{3} > 7$ .

Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства:

○**29.29.** а)  $7(x+2) - 3(x-8) > 10$ ; б)  $3(x-2) - 4 \geq 2(x+3)$ .

○**29.30.** а)  $\frac{2x-3}{5} + \frac{9-4x}{6} < 1$ ; б)  $\frac{3x-2}{4} + \frac{4x+1}{3} \geq 1$ .

**○29.31.** Решите неравенство:

- а)  $a(a - 2) - a^2 > 5 - 3a$ ;
- б)  $3x(3x - 1) - 9x^2 < 3x + 6$ ;
- в)  $5y^2 - 5y(y + 4) \geq 100$ ;
- г)  $7c(c - 2) - c(7c + 1) < 3$ .

**○29.32.** а) При каких значениях переменной произведение выражений  $3x + 8$  и  $x + 12$  больше утроенного квадрата второго из них?

б) При каких значениях переменной произведение выражений  $2x + 5$  и  $8x - 15$  меньше квадрата выражения  $4x - 3$ ?

**○29.33.** Решите неравенство  $4 - x - \frac{3 - x}{2} > \frac{1 - x}{4} - \frac{2 - x}{3}$  и найдите все его решения, являющиеся натуральными числами.

**29.34.** а) Какие из чисел  $-2$ ;  $0$ ;  $5$ ;  $6$  являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3x - 22 < 0, \\ 2x - 1 > 3? \end{cases}$$

б) Какие из чисел  $-3$ ;  $1,5$ ;  $4,8$  являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 4x - 7 < 0, \\ 3x + 2 > 5? \end{cases}$$

Решите систему неравенств:

**29.35.** а)  $\begin{cases} x > 5, \\ x > 7; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x > -3, \\ x < 1; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x \leq 1, \\ x < 5; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} x \geq 3, \\ x < -1. \end{cases}$

**29.36.** а)  $\begin{cases} 7y \leq 42, \\ 2y < 4; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} 8y < 48, \\ -3y < 12; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 7 - 2t \geq 0, \\ 5t - 20 < 0; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} 2t + 4 \leq 0, \\ 4 - 3t > 0. \end{cases}$

**29.37.** а)  $\begin{cases} 0,4x - 1 \leq 0, \\ 2,3x \geq 4,6; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} 0,3x > 4, \\ 0,2x + 1 < 6; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} 1,5t + 4,5 \leq 0, \\ \frac{1}{3}t > -1; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} \frac{5}{6}z - 10 \leq 0, \\ \frac{1}{9}z \geq 1\frac{1}{3}. \end{cases}$



**29.38.** Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 5x - 7 > -14 + 13x, \\ -4x + 5 > 29 + 2x; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 1 - 12x < 3x + 1, \\ 2 - 6x > 4 + 4x; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} 3x + 3 \leq 2x + 1, \\ 3x - 2 \leq 4x + 2; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 4x + 2 \geq 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x. \end{cases} \end{array}$$

Решите двойное неравенство:

**29.39.** а)  $3 < x + 5 < 6$ ;      в)  $0 < x + 4 \leq 5$ ;  
б)  $4 \leq 9 - x \leq 5$ ;      г)  $-2 < 4 - x < 4$ .

**29.40.** а)  $-2 \leq 3x \leq 6$ ;      в)  $3 < -6x < 18$ ;  
б)  $-1 < -\frac{x}{3} < 2$ ;      г)  $0 < \frac{x}{5} \leq 3$ .

**29.41.** а)  $-4 < 3x + 2 < 5$ ;      в)  $-5 \leq 2 - 7x < 9$ ;  
б)  $-1 \leq \frac{3 - 2x}{6} \leq 0$ ;      г)  $-3 < \frac{5x + 4}{2} < 2$ .

**29.42.** При каких значениях  $x$ :

- а) значения двучлена  $3 - 5x$  принадлежат интервалу  $(-6; 6)$ ;  
б) значения дроби  $\frac{2x + 1}{3}$  принадлежат отрезку  $[-4; 0]$ ?

**29.43.** а) Решите двойное неравенство  $0 < 1 + 4x < 17$  и укажите наименьшее и наибольшее целые числа, которые являются его решениями.

б) Решите двойное неравенство  $0 < 1 - 5x < 13$  и укажите наименьшее и наибольшее целые числа, которые являются его решениями.

**29.44.** Найдите область определения выражения:

- а)  $\sqrt{12 - 3x} + \sqrt{x + 2}$ ;  
б)  $\sqrt{15 - 3x} + \sqrt{4 + x}$ ;  
в)  $\sqrt{15x - 30} + \sqrt{4 - x}$ ;  
г)  $\sqrt{6x - 18} + \sqrt{x + 1}$ .

**29.45.** Даны два неравенства:  $x < 4$  (1) и  $x < 7$  (2). Какие из следующих утверждений верны?

- а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).
- б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).
- в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).
- г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).
- д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

**29.46.** Даны два неравенства:  $-2 < x \leq 14$  (1) и  $x > 14$  (2). Какие из следующих утверждений верны?

- а) Каждое решение неравенства (1) является решением неравенства (2).
- б) Существует решение неравенства (1), являющееся решением неравенства (2).
- в) Ни одно решение неравенства (1) не является решением неравенства (2).
- г) Ни одно решение неравенства (2) не является решением неравенства (1).
- д) Существует решение неравенства (2), являющееся решением неравенства (1).

**29.47.** Решите систему неравенств:

а) 
$$\begin{cases} 7x + 3 \geq 5(x - 4) + 1, \\ 4x + 1 \leq 43 - 3(7 + x); \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 3(x + 8) \geq 4(7 - x), \\ (x + 2)(x - 5) > (x + 3)(x - 4); \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 \leq 2(2x + 1) - x; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} (x + 2)(x - 6) \leq (x + 2)(x + 1) + 4, \\ 2(6x - 1) \geq 7(2x - 4). \end{cases}$$

**29.48.** Решите систему неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{x}{4} < 7, \\ 1 - \frac{x}{6} > 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 1 - \frac{x}{4} > x, \\ x - \frac{x-4}{5} > 1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x - \frac{x}{4} \geq 2, \\ \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{3} > 1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x - \frac{x-1}{2} > 1, \\ \frac{x}{3} < 5? \end{cases} \end{array}$$

**29.49.** Найдите середину промежутка, являющегося решением системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{3x-13}{4} \leq \frac{x-1}{4} - \frac{7}{8}, \\ 2 \geq \frac{x}{4} + \frac{3-2x}{3}; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{3}{5} + \frac{3x-1}{10} \geq \frac{2-x}{5} - 0,3, \\ 1 \geq \frac{x-1}{3} + 0,5(x+3). \end{cases} \end{array}$$

**29.50.** а) Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} 3 - \frac{3-7x}{10} + \frac{x+1}{2} < \frac{7+8x}{2}, \\ 7(3x-5) + 4(17-x) > 18 - \frac{5(2x-6)}{2}. \end{cases}$$

б) Найдите наименьшее и наибольшее целые числа, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{3x-1}{6} \leq \frac{2-x}{12} - \frac{x+1}{2} + 3, \\ x > \frac{5x-4}{10} - \frac{3x-1}{5} - 2,5. \end{cases}$$

**29.51.** Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} 0,2x > -1, \\ -\frac{x}{3} \geq 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 1 - 0,5x \geq 0, \\ -\frac{x+5}{5} < -1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{x-1}{2} < \frac{x}{3}, \\ \frac{x+1}{2} \geq \frac{x}{5}; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{x-1}{4} \leq \frac{x}{5}, \\ \frac{x}{3} > \frac{x+4}{7}. \end{cases} \end{array}$$

**029.52.** При каких значениях параметра  $p$  система неравенств имеет решения; не имеет решений:

а)  $\begin{cases} x < 3, \\ x > p; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} x \leq 7, \\ x \geq p; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} x \leq 5, \\ x > p; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} x \leq p, \\ x \geq 2? \end{cases}$

**029.53.** Укажите все значения параметра  $p$ , при которых решением системы неравенств  $\begin{cases} x > 3, \\ x > p \end{cases}$  является промежуток:

а)  $(5; +\infty)$ ;      б)  $[3; +\infty)$ ;      в)  $(3; +\infty)$ ;      г)  $[2; +\infty)$ .

**029.54.** При каких значениях параметра  $p$  отрезок  $[p; p + 3]$  содержится в решении системы неравенств

$$\begin{cases} x - \frac{x-1}{2} > 1, \\ \frac{x}{3} < 5? \end{cases}$$

**029.55.** Прежде чем разбить лагерь на берегу реки, туристы проплыли по реке и её притоку 10 км, причём часть пути они проплыли по течению, часть — против течения. Определите, какое расстояние проплыли туристы по течению, если известно, что в пути они были менее двух часов, собственная скорость лодки равна 5 км/ч, а скорость течения реки и её притока равна 1 км/ч.

**029.56.** Дачники прошли от посёлка до станции расстояние 10 км. Сначала они шли со скоростью 4 км/ч, а затем увеличили скорость на 2 км/ч. Какое расстояние они могли пройти со скоростью 4 км/ч, чтобы успеть на поезд, который отправляется со станции через 2 ч после их выхода из посёлка?

**029.57.** Чтобы попасть из посёлка  $A$  в посёлок  $B$ , нужно доехать по шоссе до пункта  $C$ , а затем свернуть на просёлочную дорогу. Путь от  $A$  до  $C$  на 15 км длиннее, чем путь от  $C$  до  $B$ . Скорость мотоциклиста на шоссе равна 50 км/ч, а на просёлочной дороге — 40 км/ч, причём на весь путь от  $A$  до  $B$  он тратит менее трёх часов. Чему равно расстояние от  $A$  до  $C$ , если известно, что оно выражается целым числом десятков километров?

**029.58.** Школьнику надо купить 5 ручек, 6 карандашей и один маркер. Цена ручки на 2 р. больше цены карандаша и на 3 р. меньше цены маркера. При какой цене ручки школьнику хватит на покупку 100 р., а сдача составит не более 15 р.?

○29.59. а) Найдите все те решения неравенства

$$x - \frac{x-1}{2} > \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3},$$

которые не являются решениями неравенства

$$\frac{5x-1}{4} - \frac{3x-13}{10} > \frac{5x+1}{3}.$$

б) Найдите все те решения неравенства

$$\frac{x}{2} - 3 > \frac{x+1}{4} + 5,$$

которые не являются решениями неравенства

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} < 1 - \frac{x}{7}.$$

○29.60. Докажите, что каждое решение неравенства

$$\frac{x-1}{3} - 2(1-4x) > \frac{1}{4}x - \frac{7-52x}{6}$$

является решением неравенства

$$\frac{3-2x}{5} + 8 > \frac{5x+2}{2} - x.$$

○29.61. Найдите сумму всех целочисленных решений неравенства

$$\frac{2x-7}{15} - \frac{2-x}{6} \geq \frac{x+3}{2} - \frac{5x+26}{4},$$

которые являются решениями неравенства

$$\frac{11x-32}{21} \leq \frac{x+11}{17}.$$

Для каждого значения параметра  $a$  решите неравенство:

○29.62. а)  $4x > a$ ;      в)  $ax > a$ ;

б)  $ax > 6$ ;      г)  $ax \leq a(a-17)$ .

○29.63. а)  $(a-1)x > 1-a^2$ ;

б)  $(2a+1)x < 4a^2+4a+1$ ;

в)  $(6a-1)x \leq 24a^2-10a+1$ ;

г)  $(9-a^2)x \geq a^2+2a-15$ .

○29.64. Для всех значений  $a$  и  $b$  решите неравенство:

а)  $ax + b < 0$ ;

в)  $5-2x \leq (a+2)x-b$ ;

б)  $2x+3 > ax+b$ ;

г)  $ax \geq ab-a$ .

- О29.65.** Найдите все значения  $a$ , при которых каждое решение неравенства  $3x + a > 1$  являлось бы решением неравенства  $x - 2 > a$ .
- О29.66.** Найдите все значения  $a$ , при которых каждое решение неравенства  $5x - 0,2a < 1 - x$  являлось бы решением неравенства  $4x - 23 \leq a + x$ .
- О29.67.** Найдите все значения  $a$ , при которых существует решение неравенства  $x + a > 1$ , которое являлось бы решением неравенства  $5x + a \leq 2$ .

## § 30. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

**30.1.** Какие из приведённых чисел удовлетворяют данному неравенству:

- а)  $-1$ ;  $3$ ;  $\pi$ ;  $6,5$ ;  $x^2 - 10x + 22 < 0$ ;  
 б)  $-2$ ;  $-0,8$ ;  $0$ ;  $0,3$ ;  $2x^2 + 2x - 1 < 0$ ;  
 в)  $\pi$ ;  $-3 - 2\sqrt{3}$ ;  $-3 - \sqrt{11}$ ;  $\sqrt{10}$ ;  $x^2 + 6x - 2 \geq 0$ ;  
 г)  $-1\ 234\ 567$ ;  $\sqrt{113} - 11$ ;  $237,001$ ;  $236,992$ ;  $x^2 - 237x > 0$ ?

**30.2.** Постройте график функции  $y = x^2 - 4x + 3$ . С помощью графика решите неравенство:

- а)  $x^2 - 4x + 3 > 0$ ;      б)  $x^2 - 4x + 3 \leq 0$ .

Решите неравенство:

- 30.3.** а)  $x^2 - 6x - 7 > 0$ ;      в)  $x^2 + 4x + 3 \geq 0$ ;  
 б)  $x^2 + 2x - 48 \leq 0$ ;      г)  $x^2 - 12x - 45 < 0$ .
- 30.4.** а)  $-x^2 + 6x - 5 < 0$ ;      в)  $-x^2 + 16x - 28 > 0$ ;  
 б)  $-x^2 - 2x + 8 \geq 0$ ;      г)  $-x^2 + 4x - 3 \leq 0$ .
- 30.5.** а)  $2x^2 - x - 6 > 0$ ;      в)  $2x^2 + 3x + 1 < 0$ ;  
 б)  $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$ ;      г)  $5x^2 - 11x + 2 \geq 0$ .
- 30.6.** а)  $-5x^2 + 4x + 1 > 0$ ;      в)  $-6x^2 + 13x + 5 < 0$ ;  
 б)  $-2x^2 - 5x + 18 \leq 0$ ;      г)  $-3x^2 + 5x - 2 \geq 0$ .

Решите неравенство:

**30.7.** а)  $(x - 2)(x + 3) > 0$ ;      в)  $(x + 7)(x - 5) < 0$ ;

б)  $(x + 5)(x + 1) \leq 0$ ;      г)  $(x - 4)(x - 6) > 0$ .

**30.8.** а)  $(2 - x)(x + 1) > 0$ ;      в)  $(1 - x)(x - 2) < 0$ ;

б)  $(x - 3)(4 - x) \leq 0$ ;      г)  $(3 - x)(5 + x) \geq 0$ .

**30.9.** а)  $(2x + 1)(3x + 2) < 0$ ;      в)  $(7x + 3)(4x - 1) > 0$ ;

б)  $(3 - 4x)(2x - 5) \leq 0$ ;      г)  $(1 - 2x)(3 + x) \leq 0$ .

**30.10.** а)  $6x^2 > 5x - 1$ ;      в)  $-2x^2 + x \leq -6$ ;

б)  $-5x^2 < 6 - 11x$ ;      г)  $5x^2 \geq 4 - 8x$ .

**30.11.** а)  $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ ;      в)  $x^2 - 16x + 64 \geq 0$ ;

б)  $-x^2 + 12x - 36 > 0$ ;      г)  $-x^2 + 4x - 4 < 0$ .

**30.12.** а)  $25x^2 + 30x + 9 \geq 0$ ;      в)  $-4x^2 + 12x - 9 > 0$ ;

б)  $-9x^2 + 12x - 4 < 0$ ;      г)  $36x^2 + 12x + 1 \leq 0$ .

**30.13.** а)  $3x^2 + x + 2 > 0$ ;      в)  $7x^2 - x + 3 \leq 0$ ;

б)  $5x^2 - 2x + 1 \geq 0$ ;      г)  $2x^2 + 5x + 10 < 0$ .

**30.14.** а)  $-7x^2 + 5x - 2 < 0$ ;      в)  $-2x^2 + 3x - 2 \geq 0$ ;

б)  $-3x^2 - 3x - 1 \leq 0$ ;      г)  $-5x^2 - x - 1 > 0$ .

**30.15.** а)  $x^2 - 2x - 1 > 0$ ;      в)  $-x^2 - 2x + 2 < 0$ ;

б)  $-4x^2 + 2x - \frac{1}{4} \leq 0$ ;      г)  $2x^2 + 2x - 1 \geq 0$ .

**30.16.** а)  $x^2 - 36 > 0$ ;      в)  $x^2 - 25 < 0$ ;

б)  $x^2 + 7 < 0$ ;      г)  $x^2 + 15 > 0$ .

**30.17.** а)  $4x^2 - 9 < 0$ ;      в)  $25x^2 - 36 > 0$ ;

б)  $16 - 25x^2 \leq 0$ ;      г)  $64 - 49x^2 \geq 0$ .

**30.18.** а)  $x^2 \leq 100$ ;      в)  $x^2 \geq 625$ ;

б)  $4x^2 > 25$ ;      г)  $16x^2 < 47$ .

**30.19.** а)  $x^2 - 5x > 0$ ;      в)  $x^2 + 8x < 0$ ;

б)  $x^2 + 0,5x \leq 0$ ;      г)  $x^2 - 2,3x \geq 0$ .

**30.20.** а)  $x^2 \geq 25x$ ;      в)  $x^2 \leq 36x$ ;

б)  $0,3x^2 < 0,6x$ ;      г)  $0,2x^2 > 1,8x$ .

**30.21.** При каких значениях  $x$ :

а) трёхчлен  $2x^2 + 5x + 3$  принимает положительные значения;

б) трёхчлен  $-x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$  принимает неотрицательные значения?

Установите, при каких значениях  $x$  имеет смысл выражение:

**30.22.** а)  $\sqrt{x^2 - 8x + 7}$ ;      в)  $\sqrt{x^2 - 6x + 5}$ ;

б)  $\sqrt{-x^2 + 3x + 4}$ ;      г)  $\sqrt{2 + x - x^2}$ .

**30.23.** а)  $\sqrt{9 - x^2}$ ;      в)  $\sqrt{9x^2 - 1}$ ;

б)  $\frac{1}{\sqrt{16x^2 - 81}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt{4 - 25x^2}}$ .

**30.24.** а)  $\sqrt{2x - x^2}$ ;      в)  $\sqrt{5x - x^2}$ ;

б)  $(\sqrt{6x^2 - 2x})^{-1}$ ;      г)  $(\sqrt{3x^2 - 12x})^{-1}$ .

**30.25.** а)  $\sqrt{(x - 3)(x + 2)}$ ;

б)  $(\sqrt{(x - 1)(2 - x)})^{-1}$ ;

в)  $\sqrt{(x + 5)(4 - x)}$ ;

г)  $(\sqrt{(x - 6)(2x + 3)})^{-1}$ .

**30.26.** а)  $\sqrt{(x^2 - 5x + 6)^{-1}}$ ;      в)  $\sqrt{(x^2 - x - 12)^{-1}}$ ;

б)  $\sqrt{(-2x^2 + 5x - 2)^{-1}}$ ;      г)  $\sqrt{(-3x^2 - 10x - 3)^{-1}}$ .

Решите неравенство:

○ **30.27.** а)  $2x(3x - 1) > 4x^2 + 5x + 9$ ;

б)  $3x^2 + 40x + 10 < 43 - x(x - 11)$ .

○ **30.28.** а)  $\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - 12 < 0$ ;      б)  $\frac{x^2}{5} + \frac{2x}{3} > \frac{8}{15}$ .



Решите неравенство:

- 30.29. а)  $x^4 + 16x^2 - 17 < 0$ ;      в)  $x^4 + 6x^2 - 7 > 0$ ;  
б)  $y^4 + 12y^2 - 64 \geq 0$ ;      г)  $z^4 + 3z^2 - 28 \leq 0$ .

- 30.30. а)  $\frac{1}{x^2 - 7x + 12} > 0$ ;      в)  $\frac{3}{42 - x^2 - x} < 0$ ;  
б)  $\frac{-3}{x^2 - x - 20} > 0$ ;      г)  $\frac{-5}{2x + 15 - x^2} < 0$ .

○30.31. Равносильны ли неравенства:

- а)  $\frac{1}{x^2 - 5x - 14} > 0$  и  $\frac{1}{x^2 - 5x - 14} \geq 0$ ;  
б)  $x^2 + 6x - 16 < 0$  и  $x^2 + 6x - 16 \leq 0$ ;  
в)  $x^2 - 6x + 8 \geq 0$  и  $(x^2 - 6x + 8)^{-1} \geq 0$ ;  
г)  $\frac{3}{x^2 - 7x - 10} < 0$  и  $\frac{x^2 - 7x - 10}{3} < 0$ ?

○30.32. а) Сколько целочисленных решений имеет неравенство  $x^2 + 5x - 8 < 0$ ?

б) Сколько целочисленных решений имеет неравенство  $15 - x^2 + 10x \geq 0$ ?

○30.33. а) Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства  $x^2 + 10x < -12$ .

б) Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства  $3x^2 + 5x \leq 4$ .

○30.34. При каких значениях параметра  $p$  квадратное уравнение  $3x^2 - 2px - p + 6 = 0$ :

- а) имеет два различных корня;  
б) имеет один корень;  
в) не имеет корней?

○30.35. При каких значениях параметра  $p$  квадратное уравнение  $2x^2 - 2px + p + 12 = 0$ :

- а) имеет два различных корня;  
б) имеет один корень;  
в) не имеет корней?

○30.36. При каких значениях параметра  $p$  квадратное уравнение  $x^2 + 6px + 9 = 0$ :

- а) имеет два различных корня;  
б) имеет один корень;  
в) не имеет корней?

- 30.37.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых не имеет действительных корней уравнение:
- $(p - 1)x^2 - 4x + 5 = 0$ ;
  - $(p - 15)x^2 + 4px - 3 = 0$ ;
  - $(2p + 3)x^2 - 6x + 8 = 0$ ;
  - $(3p - 5)x^2 - (6p - 2)x + 3p - 2 = 0$ .
- 30.38.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых имеет действительные корни уравнение:
- $x^2 - 6x + p^2 = 0$ ;
  - $x^2 - 12px - 3p = 0$ ;
  - $x^2 - 4x - 2p = 0$ ;
  - $x^2 + 2px + p + 2 = 0$ .
- 30.39.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых имеет действительные корни уравнение:
- $3px^2 - 6px + 13 = 0$ ;
  - $(1 - 3p)x^2 - 4x - 3 = 0$ ;
  - $px^2 - 3px - 2 = 0$ ;
  - $(p - 1)x^2 - (2p - 3)x + p + 5 = 0$ .
- 30.40.** При каких целочисленных значениях параметра  $p$  неравенство  $(x - 2)(x - p) < 0$  имеет три целочисленных решения?
- 30.41.** При каких значениях параметра  $p$  неравенство  $x^2 \leq 9p^2$  имеет одно целочисленное решение?
- 30.42.** Длина прямоугольника на 2 см больше его ширины. Чему равна длина прямоугольника, если известно, что его площадь не превосходит  $224 \text{ см}^2$ ?
- 30.43.** Непараллельные стороны квадрата увеличили на 6 см и 4 см. Чему равна сторона квадрата, если известно, что площадь полученного прямоугольника меньше удвоенной площади квадрата?
- 30.44.** Две группы туристов вышли с турбазы по направлениям, которые образуют прямой угол. Первая группа шла со скоростью 4 км/ч, а вторая со скоростью 5 км/ч. Группы поддерживали связь по радио, причём переговариваться можно было на расстоянии не более чем 13 км. Какое время после выхода второй группы могли поддерживать между собой связь туристы, если известно, что вторая группа вышла на маршрут через 2 ч после первой?

○30.45. Решите неравенство:

а)  $\left(\frac{2x+1}{3} - 2x\right)^2 \geq \left(x - \frac{1-2x}{2}\right)^2$ ;

б)  $\left(2 - x + \frac{3x+2}{4}\right)^2 < \left(\frac{1-x}{3} - x + 1\right)^2$ ;

в)  $\left(\frac{5x}{4} - \frac{3x-2}{5}\right)^2 \leq \left(\frac{x}{5} - \frac{2+3x}{2}\right)^2$ ;

г)  $\left(\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3}\right)^2 > \left(\frac{x+3}{4} - \frac{x+5}{6}\right)^2$ .

○30.46. Решите уравнение:

а)  $\frac{x^2 - 5x - 6}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$ ;

б)  $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{16 - x^2} = 0$ ;

в)  $\frac{x^2 + 4x - 5}{\sqrt{25 - x^2}} = 0$ ;

г)  $(x^2 - 3x - 10)\sqrt{6x - x^2} = 0$ .

○30.47. Укажите все значения  $x$ , при которых:

а)  $f(x-1) > 0$ , если  $f(x) = -x^2 + 10x$ ;

б)  $f(-x) \leq 0$ , если  $f(x) = x^2 - 6x + 9$ ;

в)  $f(x+1) \geq 0$ , если  $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ ;

г)  $f(-x-1) < 0$ , если  $f(x) = x^2 - x + 1$ .

○30.48. Найдите промежутки знакопостоянства следующих функций:

а)  $y = 7x - 3x^2 + 40$ ;

в)  $y = 4x^2 - 4x + 1$ ;

б)  $y = 4x^2 - x + 14$ ;

г)  $y = 5x - 2x^2 - 12$ .

○30.49. а) Среди всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$3x^2 - 111x > 0, 11,$$

найдите те, которые удовлетворяют неравенству

$$111x - 3x^2 < 0.$$

б) Среди всех чисел, удовлетворяющих неравенству

$$5x^2 - 3x < 100, 1,$$

найдите те, которые удовлетворяют неравенству

$$3x - 5x^2 < -8.$$

○30.50. Найдите абсциссы точек графика функции  $y = x^2 - 3x + 1$ , ординаты которых меньше 5.

○30.51. Найдите промежутки числовой прямой, на которых график функции  $y = -x^2$  расположен выше графика функции  $y = 3x - 40$ .

○30.52. Решите неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{23}{x^2 - 7x - 11} \leq 0; & \text{в) } \frac{\pi - 3}{x^2 - 110x - 111} < 0; \\ \text{б) } \frac{3 - \sqrt{15}}{x^2 + x - 1} \geq 0; & \text{г) } \frac{10 + x^2}{3x^2 - x - 7} > 0. \end{array}$$

○30.53. Найдите все значения  $a$ , при которых неравенство выполняется при всех значениях  $x$ :

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x^2 + 2x - 2 + a > 0; & \text{в) } ax^2 + 2x + 4a \leq 0; \\ \text{б) } x^2 + 2ax + a \geq 0; & \text{г) } ax^2 + 2ax - 1 \leq 0. \end{array}$$

○30.54. Найдите все значения  $a$ , при которых не существует ни одного значения  $x$ , при котором выполняется неравенство:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x^2 + 2x - 2 + a < 0; & \text{в) } ax^2 + 2x + 4a > 0; \\ \text{б) } x^2 + 2ax + a \leq 0; & \text{г) } ax^2 + 2ax - 1 \geq 0. \end{array}$$

○30.55. Найдите все значения  $a$ , при которых существует по крайней мере одно решение неравенства:

$$\text{а) } x^2 - ax + 4 < 0; \quad \text{б) } x^2 - ax + 3 > 0.$$

●30.56. а) Найдите все значения параметра  $b$ , при которых существует ровно одно число, удовлетворяющее одновременно неравенству  $x^2 - 7x - 18 < 0$  и уравнению  $x^2 - (1 + 2b)x + 2b = 0$ .

б) Найдите все значения параметра  $b$ , при которых существует ровно одно число, удовлетворяющее одновременно неравенству  $x^2 - 4x - 21 \geq 0$  и уравнению  $x^2 - (1 + 2b)x + b + b^2 = 0$ .

●30.57. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при которых неравенство выполняется на указанном промежутке:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x^2 - 3x - 10 < 0, & (-1; a]; \\ \text{б) } x^2 + 4x - 32 \leq 0, & (-8; a + 5]; \\ \text{в) } x^2 + 6x - 16 \geq 0, & (5; \frac{a}{2}]; \\ \text{г) } x^2 - 4x - 45 < 0, & (-5; a + 11]. \end{array}$$

●30.58. Докажите, что при  $b = 7$  неравенство  $3x^2 - 2x + b < 0$  не имеет решений, и найдите все такие положительные числа  $a$ , для которых данное неравенство не имеет решений для всех  $b$  из промежутка  $(7 - a; 7 + a)$ .

## § 31. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Докажите, что при любых значениях переменной справедливо неравенство:

**31.1.** а)  $3(x+1) + x < 4(2+x)$ ;      в)  $2y^2 - 6y + 1 > 2y(y-3)$ ;

б)  $m(m+n) \geq mn$ ;      г)  $c^2 - d^2 \geq -2d^2 - 1$ .

**31.2.** а)  $x^2 + 2xy + y^2 \geq 0$ ;      в)  $2pq \leq p^2 + q^2$ ;

б)  $9m^2 + 6mn \geq -n^2$ ;      г)  $4c^2 + 9d^2 \geq 12cd$ .

**31.3.** а)  $2x > 2(x-4) - a^2$ ;      в)  $4y^2 - 3y \geq 9(y-1)$ ;

б)  $z(z+1) + 5 \geq 1 - 3z$ ;      г)  $t(t+5) - 3 \geq 3t - 4$ .

**31.4.** а)  $(x+1)(x-4) > (x+2)(x-5)$ ;

б)  $(t-3)(t+4) < (t-1)(t+2)$ ;

в)  $(a+2)(a+6) < (a+5)(a+3)$ ;

г)  $(b-4)(b+6) < (b-3)(b-1)$ .

**31.5.** а)  $(7+2d)(7-2d) < 49 - d(4d+1)$ , где  $d < 0$ ;

б)  $(2q-3)(q-3) > (q-1)(q-8)$ .

Докажите, что при любых значениях переменных справедливо неравенство:

**31.6.** а)  $\frac{a^2 + b^2}{2ab} \geq 1$ , если  $ab > 0$ ;

б)  $25r + \frac{1}{r} \leq -10$ , если  $r < 0$ ;

в)  $y + \frac{9}{y} \geq 6$ , если  $y > 0$ ;

г)  $n + \frac{16}{n} \leq -8$ , если  $n < 0$ .

**31.7.** а)  $\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \leq 2$ , если  $pq < 0$ ;      б)  $\frac{(m+n)^2}{2} \leq m^2 + n^2$ .

Используя метод выделения квадрата двучлена, докажите неравенство:

**31.8.** а)  $x^2 - 6x + 14 > 0$ ;      в)  $y^2 + 70 > 16y$ ;

б)  $a^2 + 10 > -6a$ ;      г)  $b^2 + 20 > -8b$ .

**31.9.** а)  $(s-4)(2-s) < 2$ ;      в)  $(a+1)(3-a) < 5$ ;

б)  $z^2 + 6zt + 10t^2 \geq 0$ ;      г)  $m^2 - 12mn + 40n^2 \geq 0$ .

Докажите неравенство и найдите значения переменных, при которых неравенство обращается в равенство:

31.10. а)  $4x^2 + \frac{4}{1+4x^2} \geq 3$ ;

в)  $\frac{2a}{7} + \frac{81}{14a} \geq 1\frac{4}{7}$ ;

б)  $3a + \frac{3}{16a} \leq -1,5, a < 0$ ;

г)  $0,1x + \frac{5}{18x} \leq 0,2$ .

31.11. а)  $\sqrt{3+b^2} + \frac{9}{\sqrt{3+b^2}} \geq 6$ ;

в)  $\frac{25}{\sqrt{5+x^2}} + \sqrt{5+x^2} \geq 0$ ;

б)  $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} \geq 2$ ;

г)  $\frac{6\sqrt{3+c^2}}{12+c^2} \leq 1$ .

31.12. Докажите, что в любом треугольнике полупериметр больше любой его стороны.

О31.13. Пусть  $a + c = 8$ . Используя неравенство  $a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$ , докажите, что:

а)  $a^2 + c^2 \geq 32$ ;

б)  $a^4 + c^4 \geq 512$ .

При каких значениях  $a$  и  $c$  неравенство обращается в равенство?

О31.14. Известно, что  $m^2 + n^2 = 1$ , причём  $m \geq 0$ . Докажите неравенство:

а)  $n \geq n^2$ ;

в)  $m + n \leq \sqrt{2}$ ;

б)  $m + n \geq 1$ ;

г)  $\sqrt{m} + \sqrt{n} \geq 1$ .

При каких значениях  $m$  и  $n$  неравенство обращается в равенство?

О31.15. Докажите, что если произведение четырёх положительных чисел равно единице, то их сумма не меньше четырёх.

О31.16. Докажите, что  $\frac{1}{300} + \frac{1}{301} + \frac{1}{302} + \dots + \frac{1}{599} > 0,5$ .

О31.17. Докажите, что если произведение двух положительных чисел есть постоянное число, то их сумма достигает наименьшего значения, если эти числа равны.

О31.18. а) Найдите наименьшее значение суммы  $a + b$ , если  $ab = 25, a > 0$ .

б) Найдите наименьшее значение суммы  $s + 8t$ , если  $st = 50, t > 0$ .

**О31.19.** Докажите, что если сумма двух положительных чисел постоянна, то их произведение достигает наибольшего значения, если эти числа равны.

**О31.20.** а) Найдите наибольшее значение произведения положительных чисел  $a$  и  $b$ , если  $a + b = 100$ .

б) Найдите наибольшее значение произведения  $xy$ , если  $5x + y = 500$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

**О31.21.** а) Найдите наименьшее значение суммы  $5x + 3y$ , если  $xy = 60$ ,  $y > 0$ .

б) Найдите наибольшее значение произведения  $xy$ , если  $5x + 7y = 700$ ,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

**О31.22.** Пусть  $f(x) = 3x + 5$ . Докажите, что при любом значении  $x$   $f(x + 1) > f(x)$ .

**О31.23.** Докажите, что:

а) при  $x > 0$  все точки гиперболы  $xy = 4$  лежат выше точек прямой  $2x + 3y = 6$ ;

б) при  $x < 0$  все точки гиперболы  $xy = 6$  лежат ниже прямой  $3x + 4y = 8$ .

**О31.24.** Докажите, что все точки графика функции  $y = \frac{x^3 - x^2 + x}{x^2 + 1}$  лежат выше точек графика функции  $y = x - 1$ .

Докажите неравенство:

**О31.25.**  $\frac{5a}{3b} + \frac{12b}{5a} \geq 4$ , если  $a$  и  $b$  — числа одного знака.

**О31.26.**  $a^2 + 2b^2 + 2ab + 2b + 2 > 0$ .

**О31.27.**  $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ .

**О31.28.**  $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b + c)$ .

**О31.29.**  $(x^2 - y^2)^2 \geq 4xy(x - y)^2$ .

**О31.30.**  $a^3 + 1 \geq a^2 + a$ , если  $a \geq -1$ .

Докажите, что при любых значениях переменных справедливо неравенство:

○31.31. а)  $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1 \geq 0$ ;

б)  $9x^2 + 4y^2 + 4y - 12x + 5 \geq 0$ ;

в)  $a^2 + b^2 + 2ab(b - a) + 2a^2b^2 \geq 0$ ;

г)  $12p^2 + q^2 + 16p + 4q - 4pq + 22 \geq 0$ .

○31.32.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ , если  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

○31.33.  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq a + b$ , если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ .

○31.34.  $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ , если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $d \geq 0$ .

○31.35.  $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ , если  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

○31.36.  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ .

○31.37.  $\frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ; если  $a$  и  $c$  — положительные числа.

●31.38.  $a^4 + b^4 + c^4 + 16 \geq 8abc$ .

●31.39.  $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+ac+bc}{3}$ .

●31.40.  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{101}$ .

●31.41.  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < 1 - \frac{1}{100}$ .

●31.42. Найдите наименьшее значение выражения:

а)  $x^2 + \frac{4}{x^2}$ ;

в)  $\frac{(t^2 + 9)(t^2 + 16)}{t^2}$ ;

б)  $\frac{s^2 - 3s + 36}{s}$ ,  $s > 0$ ;

г)  $\frac{p^2 - 2p + 622}{p + 1}$ ,  $p > -1$ .

●31.43. Найдите наибольшее значение выражения:

а)  $\frac{x^2}{x^4 + 4}$ ;

в)  $\frac{19s}{64s^2 + 4}$ ,  $s > 0$ ;

б)  $\frac{17t^2}{t^4 + 7t^2 + 49}$ ;

г)  $\frac{11t}{t^2 - 6t + 225}$ ,  $t > 0$ .



## § 32. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Найдите приближённые значения заданного числа по недостатку и избытку с точностью до 0,1:

32.1. а) 2,734; б) 1,2(5); в) 3,9(42); г) 3,9(62).

32.2. а)  $\sqrt{6}$ ; б)  $|2 - \sqrt{7}|$ ; в)  $|12 - \sqrt{3}|$ ; г)  $\frac{45}{49}$ .

Найдите приближённые значения заданного числа по недостатку и избытку с точностью до 0,01:

32.3. а)  $\sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt{2} - 1$ ; в)  $5 - \sqrt{7}$ ; г)  $\frac{2}{3}$ .

32.4. а)  $\sqrt{17}$ ; б)  $\sqrt{11} - 3$ ; в)  $6 - \sqrt{8}$ ; г)  $\frac{15}{19}$ .

32.5. а)  $\sqrt{11}$ ; б)  $|2 - \sqrt{10}|$ ; в)  $|5 - \sqrt{2}|$ ; г)  $\frac{12}{17}$ .

32.6. Найдите приближённые значения заданного числа по недостатку и избытку с точностью до 0,001:

а)  $\sqrt{15}$ ; б)  $\sqrt{19} - 6$ ; в)  $1 - \sqrt{8}$ ; г)  $\frac{3}{19}$ .

32.7. Округлите числа до тысячных и укажите, в каких случаях приближение получается с избытком, а в каких — с недостатком:

а) 57,(34); б) 6,(0234); в) 9,(95); г) 0,(0007).

○32.8. Упростите и вычислите с точностью до 0,1:

а)  $\sqrt{18} + \sqrt{8} + \sqrt{32}$ ; б)  $\sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$ .

○32.9. Упростите и вычислите с точностью до 0,01:

а)  $\sqrt{27} + \sqrt{75} - \sqrt{147}$ ; б)  $0,5\sqrt{200} - \sqrt{98} + \frac{1}{3}\sqrt{162}$ .

Упростите и вычислите с точностью до 0,1:

○32.10. а)  $0,1\sqrt{200} - 2\sqrt{0,08} + 4\sqrt{0,5} - 0,4\sqrt{50}$ ;

б)  $5\sqrt{\frac{1}{5}} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + \sqrt{500} - 0,2\sqrt{3125}$ ;

в)  $\sqrt{176} - 2\sqrt{99} - \sqrt{891} + \sqrt{1584}$ ;

г)  $\sqrt{1,25} - \frac{1}{14}\sqrt{245} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$ .

○32.11. а)  $\sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}$ ; б)  $\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}$ .

Используя алгоритм, извлеките квадратный корень до второй после запятой цифры и округлите ответ до десятых:

○32.12. а)  $\sqrt{200}$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{0,2}$ ;      б)  $\sqrt{1,5}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{150}$ ,  $\sqrt{0,15}$ .

○32.13. а)  $\sqrt{3}$ ;      б)  $\sqrt{7}$ ;      в)  $\sqrt{11}$ ;      г)  $\sqrt{17}$ .

○32.14. а)  $\sqrt{2,3}$ ;      б)  $\sqrt{10,55}$ ;      в)  $\sqrt{5,4}$ ;      г)  $\sqrt{32,25}$ .

32.15. В каких границах заключено число  $x$ , если:

а)  $x = 37 \pm 1$ ;      в)  $x = 438 \pm 10$ ;

б)  $x = 8,9 \pm 0,1$ ;      г)  $x = 10,86 \pm 0,05$ .

32.16. Найдите абсолютную погрешность приближения, если:

а)  $2,87 \approx 2,9$ ;      в)  $0,659 \approx 0,6$ ;

б)  $\frac{3}{22} \approx \frac{1}{7}$ ;      г)  $\frac{1}{3} \approx 0,3$ .

32.17. Оцените абсолютную погрешность приближения:

а)  $\sqrt{2} \approx 1,4$ ;      в)  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$ ;

б)  $\pi \approx 3,14$ ;      г)  $\sqrt{3} \approx 1,73$ .

32.18. Известно, что  $x \approx a$ . Найдите абсолютную погрешность приближения, если:

а)  $x = 2,67$ ,  $a = 2,7$ ;      в)  $x = 9,65$ ,  $a = 9,7$ ;

б)  $x = 83,2$ ,  $a = 83$ ;      г)  $x = 24,561$ ,  $a = 24,56$ .

32.19. Запишите в виде двойного неравенства:

а)  $z = 2,3 \pm 0,1$ ;      в)  $y = 12,5 \pm 0,5$ ;

б)  $x = 30,43 \pm 0,04$ ;      г)  $m = 3,184 \pm 0,002$ .

32.20. Пусть  $x = 2,0 \pm 0,02$ . В каких пределах изменяется:

а)  $3x$ ;      б)  $x + 3$ ;      в)  $x^2$ ;      г)  $\frac{1}{x}$ ?

○32.21. Пусть  $x = 4,0 \pm 0,05$ , а  $y = 3,6 \pm 0,1$ . В каких пределах изменяется:

а)  $x + y$ ;      б)  $xy$ ;      в)  $x - y$ ;      г)  $\frac{x}{y}$ ?

○32.22. Пусть нам неизвестно точное значение числа  $x$ , но известно, что оно находится между числами  $a$  и  $b$ . Докажите, что если в качестве приближённого значения числа  $x$  взять

$$\frac{a+b}{2}, \text{ то абсолютная погрешность не превысит } \frac{|a-b|}{2}.$$

- 32.23.** Приближённое значение числа  $x$  по недостатку и избытку записано в виде  $a - h \leq x \leq a + h$ . Найдите  $x$  и  $h$ , если:
- а)  $5,8 \leq x \leq 6$ ;      в)  $4,58 \leq x \leq 4,66$ ;  
 б)  $20 \leq x \leq 21$ ;      г)  $4,3 \leq x \leq 4,6$ .
- 32.24.** Докажите, что при округлении числа до сотых абсолютная погрешность не превосходит 0,005, до десятых — 0,05, до целых — 0,5. Обобщите результат.
- 32.25.** В каких пределах находится число  $x$ , если известно его приближённое значение:
- а)  $x \approx 3,3$ ;      в)  $x \approx 9,800$ ;      д)  $x \approx 3300$ ;  
 б)  $x \approx 0,30$ ;      г)  $x \approx 0,01$ ;      е)  $x \approx 3300,00$ ?
- 32.26.** В каких пределах находятся коэффициенты  $p$  и  $q$  квадратного уравнения  $x^2 - px + q = 0$ , если  $x_1 \approx 3,2$ ;  $x_2 \approx 0,65$ ?
- 32.27.** Найдите приближённые значения корней уравнения:
- а)  $x^2 - 7x + 3 = 0$  с точностью до десятых;  
 б)  $2x^2 - 17x - 3 = 0$  с точностью до сотых;  
 в)  $-x^2 + 11x - 7 = 0$  с точностью до тысячных;  
 г)  $5x^2 - 9x - 13 = 0$  с точностью до целых.
- 32.28.** Пусть  $x \approx 5,12$ ;  $y \approx 0,65$ . В каких пределах изменяется:
- а)  $3x + y$ ;      б)  $x - 5y$ ;      в)  $x \cdot y$ ;      г)  $\frac{x}{y}$ ?
- 32.29.** Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной, округлите её до сотых и найдите абсолютную погрешность приближения:
- а)  $\frac{5}{6}$ ;      б)  $2\frac{5}{11}$ ;      в)  $\frac{2}{15}$ ;      г)  $1\frac{9}{17}$ .
- 32.30.** Найдите относительную погрешность приближения числа:
- а)  $12,1 \pm 4$ ;      в)  $23,0 \pm 0,1$ ;  
 б)  $20,52 \pm 0,05$ ;      г)  $27 \pm 3$ .
- 32.31.** Округлите число до десятых и найдите относительную погрешность приближения:
- а) 2,11;      б) 9,85;      в) 5,214;      г) 99,81.
- 32.32.** Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной, округлите её до десятых и найдите относительную погрешность приближения:
- а)  $\frac{2}{3}$ ;      б)  $3\frac{3}{14}$ ;      в)  $\frac{4}{7}$ ;      г)  $1\frac{5}{13}$ .

**О32.33.** Расстояние от Луны до Земли равно 356 400 км с точностью до 100 км. Оцените относительную погрешность приближения.

**О32.34.** Диаметр Земли равен 12 760 км с точностью до 10 км. Оцените относительную погрешность приближения.

**О32.35.** Сравните качество измерения длины  $L$  реки Волги и длины окружности  $C$  пятирублёвой монеты, если  $L \approx 3530$  км с точностью до 5 км, а  $C \approx 72$  мм с точностью до 1 мм.

**О32.36.** Сравните качество измерения массы  $M$  автомобиля и массы  $m$  капсулы лекарства, если  $M \approx 1495$  кг с точностью до 50 кг, а  $m \approx 0,24$  г с точностью до 0,01 г.

**О32.37.**  $x_1 \approx 3$ ;  $x_2 \approx -1$  — приближённые значения нулей квадратичной функции  $f(x) = x^2 - px + q$ . Верно ли, что:

а)  $f(1) < 0$ ;                      в)  $f(-0,97) < 0$ ;

б)  $f(\sqrt{10}) > 0$ ;            г)  $f\left(-\frac{10}{9}\right) < 0$ ?

**О32.38.** Школьник вычислял приближённое значение выражения  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$  исходя из того, что  $\sqrt{2} \approx 1,4$ . Сначала он вычислил его так:  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx \frac{1}{1,4-1} \approx 2,5$ . Затем, вспомнив, что от иррациональности в знаменателе можно избавиться, вычислил так:  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \approx 2,4$ . Какой результат точнее?

**О32.39.** Докажите, что при положительных значениях чисел  $a$  и  $b$

$$\left(a + \frac{b}{2a}\right) - \sqrt{a^2 + b} = \frac{\frac{b^2}{4a^2}}{a + \frac{b}{2a} + \sqrt{a^2 + b}} < \frac{b^2}{8a^2}.$$

**О32.40.** Вычислите, используя результаты № 32.39:

а)  $\sqrt{1+0,3}$ ;      б)  $\sqrt{9,2}$ ;      в)  $\sqrt{15,7}$ ;      г)  $\sqrt{127}$ .

## § 33. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Представьте в виде степени числа 10:

**33.1.** а) 100;      б) 10 000;      в) 1000;      г) 10 000 000.

**33.2.** а) 0,001;      б) 0,1;      в) 0,00001;      г) 0,0001.

Запишите число в стандартном виде и укажите порядок числа:

**33.3.** а) 2300;      б) 75 000;      в) 12;      г) 620 000.

**33.4.** а) 0,0035;      б) 0,00007;      в) 0,00024;      г) 0,91.

**33.5.** а)  $350 \cdot 10^2$ ;      в)  $85 \cdot 10^4$ ;  
б)  $0,67 \cdot 10^3$ ;      г)  $0,015 \cdot 10^2$ .

**33.6.** а)  $0,73 \cdot 10^5$ ;      в)  $0,43 \cdot 10^4$ ;  
б)  $512 \cdot 10^3$ ;      г)  $3900 \cdot 10^4$ .

**33.7.** Известно, что порядок числа  $b$  равен 2. Каков порядок числа:

а)  $100b$ ;      б)  $0,1b$ ;      в)  $10b$ ;      г)  $0,001b$ ?

**33.8.** Известно, что порядок числа  $m$  равен  $-4$ . Каков порядок числа:

а)  $10m$ ;      б)  $0,01m$ ;      в)  $1000m$ ;      г)  $10000m$ ?

**33.9.** Используя стандартный вид числа, запишите, что:

а) в сутках 86 400 с;

б) атмосферное давление на высоте 100 км равно  
0,000024 мм рт. ст.;

в) 1 калория равна 0,00419 кДж;

г) 1 с составляет 0,0002778 ч.

**33.10.** Выполните действия (ответ запишите в стандартном виде):

а)  $(0,2 \cdot 10^5) \cdot (1,4 \cdot 10^{-2})$ ;      в)  $(3,7 \cdot 10^{-1}) \cdot (7 \cdot 10^8)$ ;

б)  $(2,4 \cdot 10^3) \cdot (0,5 \cdot 10^{-3})$ ;      г)  $(5,2 \cdot 10^{14}) \cdot (3 \cdot 10^{-5})$ .

Выразите в километрах:

- 33.11. а) 1 световой год  $9,46 \cdot 10^{17}$  см;  
б) 1 астрономическая единица (расстояние от Земли до Солнца)  $1,50 \cdot 10^{13}$  см;  
в) расстояние от Земли до Луны  $3,84 \cdot 10^{10}$  см.

- 33.12. а) радиус Солнца  $6,96 \cdot 10^{10}$  см;  
б) радиус Земли  $6,38 \cdot 10^8$  см;  
в) радиус Луны  $1,74 \cdot 10^8$  см;  
г) радиус Юпитера  $7,14 \cdot 10^9$  см.

33.13. Выразите:

- а) в метрах в секунду среднюю орбитальную скорость Земли  $2,98 \cdot 10^6$  см/с;  
б) в метрах в секунду скорость света в пустоте  $2,998 \cdot 10^{10}$  см/с;  
в) в килограммах массу Земли  $5,98 \cdot 10^{27}$  г;  
г) в тоннах массу Луны  $7,35 \cdot 10^{25}$  г.

Выполните действия (ответ запишите в стандартном виде):

- 33.14. а)  $0,2 \cdot 10^5 + 1,4 \cdot 10^6$ ;      в)  $5,2 \cdot 10^3 - 0,5 \cdot 10^2$ ;  
б)  $7,8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^2$ ;      г)  $6,1 \cdot 10^{-3} - 9 \cdot 10^{-4}$ .

- 33.15. а)  $\frac{1,5 \cdot 10^{-23}}{0,06 \cdot 10^{-9}}$ ;      в)  $\frac{4,8 \cdot 10^{-4}}{0,24 \cdot 10^{-17}}$ ;  
б)  $\frac{2,7 \cdot 10^{15}}{3,6 \cdot 10^{-5}}$ ;      г)  $\frac{1,44 \cdot 10^{-7}}{1,8 \cdot 10^4}$ .

- 33.16. а)  $\frac{(2,89 \cdot 10^{-5}) \cdot (0,2 \cdot 10^3)}{3,4 \cdot 10^{-9}}$ ;      в)  $\frac{6,3 \cdot 10^{-20}}{(0,15 \cdot 10^{11}) \cdot (4,2 \cdot 10^{-16})}$ ;  
б)  $\frac{0,25 \cdot 10^{-15}}{(0,45 \cdot 10^9) \cdot (3 \cdot 10^{-3})^{-2}}$ ;      г)  $\frac{(2 \cdot 10^4)^{-3} \cdot (9,6 \cdot 10^7)}{0,24 \cdot 10^{20}}$ .

○33.17. Сравните числа  $a$  и  $b$ :

- а)  $a = (1,4 \cdot 10^{-2}) \cdot (5 \cdot 10^{-1})$  и  $b = 0,006$ ;  
б)  $a = \frac{3,6 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^{-4}}$  и  $b = 0,001$ ;  
в)  $a = (4,2 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^2)$  и  $b = 700\,000\,000$ ;  
г)  $a = \frac{5,4 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^7}$  и  $b = 70$ .

- 33.18. Пирамида египетского фараона Хеопса имеет массу, приближённо равную  $7,231 \cdot 10^6$  т. Сколько вагонов грузоподъёмностью 64 т каждый потребовалось бы для перевозки груза такой массы?
- 33.19. Численность населения государства Бенин составляет  $74,6 \cdot 10^5$  человек, а его площадь —  $112,6 \cdot 10^3$  км<sup>2</sup>. Вычислите плотность населения Бенина (чел./км<sup>2</sup>), ответ округлите до целых.
- 33.20. Известно, что порядок числа  $x$  равен 6. Каким может быть порядок числа:
- а)  $x^2$ ;      б)  $x^5$ ;      в)  $\sqrt{x}$ ;      г)  $\frac{1}{x}$ ?
- 33.21. Известно, что порядок числа  $m$  равен  $-4$ , а порядок числа  $n$  равен 3. Каким может быть порядок числа:
- а)  $nm$ ;      б)  $m + n$ ;      в)  $10n + m$ ;      г)  $0,1m + 10n$ ?
- 33.22. Известно, что порядок числа  $s$  равен 2, а порядок числа  $t$  равен 4. Каким может быть порядок числа:
- а)  $st$ ;      б)  $100s + t$ ;      в)  $0,01s + t$ ;      г)  $0,1st$ ?
- 33.23. Найдите порядок произведения, частного и суммы чисел:
- а)  $3,252 \cdot 10^9$  и  $2,165 \cdot 10^9$ ;  
б)  $4,435 \cdot 10^{-7}$  и  $7,098 \cdot 10^{-7}$ ;  
в)  $8,389 \cdot 10^5$  и  $9,762 \cdot 10^4$ ;  
г)  $7,987 \cdot 10^{-6}$  и  $3,157 \cdot 10^{-5}$ .

## § 34. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**34.1.** Назовите степень многочлена  $p(x)$ , его старший член и коэффициенты:

а)  $p(x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - x - 4$ ;

б)  $p(x) = x^5 - 2x^3 - x^2 - 3$ ;

в)  $p(x) = -6x^3 + 5x^2 + x - 1$ ;

г)  $p(x) = 2x^7 - x^5 + 2x^3 - x$ .

**34.2.** Укажите, какие многочлены являются приведёнными, а какие неприведёнными:

а)  $p(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 - x$ ;

б)  $p(x) = -x^3 - x - 4$ ;

в)  $p(x) = x^6 + 3x^2 - x + 1$ ;

г)  $p(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 8$ .

**34.3.** Приведите данное выражение к многочлену стандартного вида:

а)  $(x + 1)(x - 3)(x + 5)$ ;

б)  $2x(x - 4)(x + 2) + (x + 1)^2$ ;

в)  $(2x - 3)(2x + 3)(x - 1)$ ;

г)  $(x - 3)^2(x + 4) - 3x(x - 1)$ .

**34.4.** Преобразуйте произведение многочленов в многочлен стандартного вида:

а)  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 3)$ ;

б)  $(x^3 + 2x^2 - x + 1)(x + 5)$ ;

в)  $(x^2 - 4x + 5)(x^2 + x + 2)$ ;

г)  $(x^2 - 2)(2x^3 + x^2 - x + 3)$ .

**34.5.** Пусть  $f(x) = x^2 - x + 1$ ;  $\varphi(x) = 2x + 1$ . Найдите и запишите в стандартном виде:

а)  $f(x) \cdot \varphi(x)$ ;

б)  $f^2(x)$ ;

в)  $f(x) - \varphi^2(x)$ ;

г)  $\varphi^3(x)$ .



**34.6.** Какие из данных утверждений верны:

- а) сумма многочленов степени  $n$  есть многочлен степени не выше  $n$ ;
- б) разность многочленов степени  $n$  есть многочлен степени  $n$ ;
- в) произведение многочленов степени  $n$  есть многочлен степени не выше  $n$ ;
- г) произведение многочленов степени  $n$  есть многочлен степени  $2n$ ?

**○34.7.** При каких значениях  $a$ :

- а) коэффициент при  $x^2$  в стандартном виде многочлена  $(x^3 - 3x + a)(x^2 - ax + 2)$  равен 0;
- б) коэффициент при  $x^3$  в стандартном виде многочлена  $(x^2 - (a - 1)x + a)(x^2 + ax + 2)$  равен 7?

**○34.8.** Определите степень, старший коэффициент и свободный член многочлена:

- а)  $(3x^2 - x + 1)^{17} + (x^3 + 5x + 1)^{11}$ ;
- б)  $(x^6 - 2x + 64)^3 - (x^9 + x^8 - 512)^2$ ;
- в)  $(81x^4 - 36x^2 + 4)^5 - (9x^2 - 2)^{10} + (x - 1)^{13}$ ;
- г)  $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1) - (x - 1)^{16}$ .

**○34.9.** а) Докажите, что свободный член многочлена  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  равен  $p(0)$ .

- б) Докажите, что сумма всех коэффициентов многочлена  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  равна  $p(1)$ .

**○34.10.** Докажите, что:

- а) сумма всех коэффициентов при чётных степенях многочлена  $f(x)$  стандартного вида равна  $0,5(f(1) + f(-1))$ ;
- б) сумма всех коэффициентов при нечётных степенях многочлена  $f(x)$  стандартного вида равна  $0,5(f(1) - f(-1))$ .

**○34.11.** При каких значениях параметра  $a$  многочлен  $(3a - 4)x^4 - 2x^3 + (2a - 1)x - 4$  будет:

- а) приведённым;
- б) многочленом четвёртой степени;
- в) многочленом третьей степени;
- г) принимать одинаковые значения при  $x = 1$  и  $x = -1$ ?

**34.12.** Найдите все значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых многочлены  $p(x)$  и  $q(x)$  тождественно равны:

- а)  $p(x) = 2ax^2 - (a + b)x + 3$ ,  $q(x) = 4x^2 + 3bx + a + 1$ ;
- б)  $p(x) = (a^2 - 1)x^4 - 2x^3 + (2a - 1)x - 7$ ,  $q(x) = 8x^4 - 2x^3 - (a - 8)x - a - b - 4$ .

**34.13.** а) Выпишите все приведённые многочлены, являющиеся делителями многочлена  $3(x - 1)^2(x + 5)$ .

б) Выпишите все приведённые многочлены третьей степени, являющиеся делителями многочлена  $x^2(2x + 3)(x + 5)^3$ .

Выполните деление уголком многочлена  $p(x)$  на многочлен  $q(x)$ , если:

**34.14.** а)  $p(x) = x^2 - 4x - 5$ ,  $q(x) = x + 1$ ;

б)  $p(x) = -2x^2 + 5x - 3$ ,  $q(x) = x - 1$ ;

в)  $p(x) = x^2 - 15x + 36$ ,  $q(x) = x - 3$ ;

г)  $p(x) = -6x^2 - 24x - 7$ ,  $q(x) = 3x + 1$ .

○**34.15.** а)  $p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$ ,  $q(x) = x - 1$ ;

б)  $p(x) = -2x^3 + 5x + 6$ ,  $q(x) = x - 2$ ;

в)  $p(x) = x^3 - 6x^2 - 7x + 18$ ,  $q(x) = x + 2$ ;

г)  $p(x) = 3x^3 + 8x^2 + 2x + 15$ ,  $q(x) = x + 3$ .

○**34.16.** а)  $p(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ,  $q(x) = x^2 - 3x - 1$ ;

б)  $p(x) = 3x^4 - 2x^3 - 31x + 30$ ,  $q(x) = x^2 - 3x + 2$ ;

в)  $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ ,  $q(x) = 2x^2 - 3x - 4$ ;

г)  $p(x) = 5x^4 - 9x^3 + 3x - 1$ ,  $q(x) = -5x^2 + 4x - 1$ .

●**34.17.** При каких значениях  $a$  и  $b$ :

а) многочлен  $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$  делится на  $x^2 - 3x + 2$ ;

б) многочлен  $x^4 + 6x^3 + 5x^2 + ax + b$  делится на  $x^2 - 3x + 4$ ;

в) многочлен  $x^4 - 2x^3 + ax + 2$  делится на  $x^2 + x + b$ ;

г) многочлен  $x^4 + ax + b$  делится на  $x^2 + ax + 1$ ?

○**34.18.** Для многочленов  $f(x)$  и  $p(x)$  найдите такие многочлены  $q(x)$  и  $r(x)$ , что  $f(x) = p(x) \cdot q(x) + r(x)$  и степень  $r(x)$  меньше степени  $p(x)$  либо  $r(x)$  — нуль-многочлен, если:

а)  $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 3$ ,  $p(x) = x^2 - 3x - 2$ ;

б)  $f(x) = x^2 - 3x - 2$ ,  $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x - 3$ ;

в)  $f(x) = x^3 - 5x + 3$ ,  $p(x) = 3x - 1$ ;

г)  $f(x) = 12x^7 - 3x^5 + 6x^4 - 9x^2 + 33$ ,  $p(x) = 4x^7 - x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 11$ .

○**34.19.** Найдите остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $x - a$  и значение многочлена  $f(x)$  при  $x = a$ :

а)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 11$ ;  $a = -3$ ;

б)  $f(x) = x^7 + 3x^6 - x^3 - 12x^2 + 1$ ;  $a = -2$ ;

в)  $f(x) = 3x^4 - x^2 + x - 31$ ;  $a = 2$ ;

г)  $f(x) = 2x^6 - 3x^5 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 100$ ;  $a = -1$ .

- 34.20. Докажите, что остаток от деления многочлена  $f(x)$  на двучлен  $kx - p$  ( $k \neq 0$ ) равен значению этого многочлена при  $x = \frac{p}{k}$ .
- 34.21. Пусть  $f(x) = x^3 + 6ax^2 - 6x + b$ . Найдите все такие пары чисел  $a$  и  $b$ , что:
- остаток от деления  $f(x)$  на  $x - 1$  равен 5, а на  $x + 2$  равен 0;
  - остаток от деления  $f(x)$  на  $x^2 - 2x$  равен  $2x + 1$ .
- 34.22. Найдите корни многочлена:
- $13x + 2$ ;
  - $9x^2 - 6x + 1$ ;
  - $3x^2 + x$ ;
  - $64x^5 - 16x^4 + x^3$ .
- 34.23. Докажите, что 1 является корнем данного многочлена, разложите его на множители и найдите все его корни:
- $x^2 + 5x - 6$ ;
  - $8x^2 - x - 7$ ;
  - $3x^2 + 5x - 8$ ;
  - $-7x^2 + x + 6$ .
- 34.24. Разложите на множители многочлен:
- $x^2 + 6x - 7$ ;
  - $-x^2 + 5x - 6$ ;
  - $-x^3 - x^2 + 12x$ ;
  - $x^3 + 5x^2 - 6x$ .
- 34.25. Найдите целые корни многочлена и разложите его на множители:
- $x^3 - 4x^2 + x + 6$ ;
  - $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 5x + 2$ ;
  - $x^4 - 5x - 6$ ;
  - $x^3 + 3x - 234$ .
- 34.26. Разложите многочлен на линейные множители:
- $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ ;
  - $x^3 - 5x^2 - 3x + 9$ ;
  - $x^4 + 5x^3 - 20x - 16$ ;
  - $x^4 + 7x^3 - 15x^2 - 3x - 18$ .
- 34.27. При каких значениях  $a$  многочлен  $f(x)$  имеет ровно три различных корня:
- $f(x) = 3(x + 5)(x - 7)(x + 1)(x - a)$ ;
  - $f(x) = (2x - a)(x + a)(x - 4)$ ;
  - $f(x) = (x - a)(x + 2)(x^2 - x)$ ;
  - $f(x) = (x - a)^2(x + 2)(x^2 + 6x + 5)$ ?

**О34.28.** При каких значениях  $a$  данный многочлен имеет корни кратности больше 1? Для всех найденных  $a$  укажите кратные корни многочлена:

а)  $(2x + 5)(3x - 1)(x - a)(x - 2a)$ ;

б)  $(x^2 + 2x - 3)(x + a)$ ;

в)  $(2x^2 - 5x + 2)(x - a)(x + 2a)$ ;

г)  $(x^2 - 5x + 6)(x - a)(x - 3a + 4)$ .

**О34.29.** а) Найдите многочлен  $p(x)$  второй степени, если известно, что  $p(0) = 3$ ,  $p(1) = 5$ ,  $p(-2) = 2$ .

б) Найдите многочлен  $p(x)$  второй степени, если известно, что  $p(0) = -2$ ,  $p(1) = 1$ ,  $p(-1) = 3$ .

**О34.30.** а) Найдите приведённый многочлен  $p(x)$  третьей степени, если известно, что  $p(0) = -1$ ,  $p(1) = 4$ ,  $p(-1) = 0$ .

б) Найдите приведённый многочлен  $p(x)$  третьей степени, если известно, что  $p(0) = 2$ ,  $p(1) = -3$ ,  $p(2) = 8$ .

**О34.31.** Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , при которых справедливо тождество:

а)  $a(x - 5) + b(x + 3) = 2x + 11$ ;

б)  $a(x + 4) + bx = 3x - 17$ ;

в)  $a(x + 11) + b(x - 3) = 2x$ ;

г)  $a(x + 22) + b(x - 5) = 3x$ .

**О34.32.** Представьте данную алгебраическую дробь в виде суммы многочлена и дробей вида  $\frac{A_n}{x^n}$  и найдите её приближённое значение до целых при указанных значениях  $x$ :

а)  $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x}$ ;  $x = 10$ ,  $x = 0,01$ ;

б)  $f(x) = \frac{2x^3 - x^2 - x + 3}{x^2}$ ;  $x = 100$ ;  $x = 0,01$ .

**О34.33.** Представьте данную алгебраическую дробь в виде суммы многочлена и дроби вида  $\frac{A}{x - a}$  и с точностью до целых вычислите приближённые значения функции в указанных точках:

а)  $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 1}{x - 1}$ ;  $x = 100$ ,  $x = 1,001$ ;

б)  $f(x) = \frac{5x^2 + 3x - 7}{x + 3}$ ;  $x = -100$ ,  $x = -2,99$ .

●34.34. Представьте в виде суммы многочлена и дробей вида  $\frac{A}{x-a}$  и  $\frac{B}{(x-a)^2}$  алгебраическую дробь:

а)  $\frac{x^2 + 7x + 3}{(x-1)^2}$ ;      в)  $\frac{11x^3 + 3x^2 + 7x - 1}{(x-2)^2}$ ;

б)  $\frac{5x^3 + x^2 + 1}{(x+3)^2}$ ;      г)  $\frac{x^2 + 5x + 3}{(x+1)^2}$ .

Найдите такие числа  $a$  и  $b$ , при которых при всех допустимых значениях  $x$  выполняется равенство:

○34.35. а)  $\frac{x}{x^2 - 4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ ;      в)  $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ ;

б)  $\frac{2x+3}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ ;      г)  $\frac{13-17x}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$ .

○34.36. а)  $\frac{3}{x^2 - 4x} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x}$ ;      в)  $\frac{1}{(x-4)(x+2)} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2}$ ;

б)  $\frac{2x+3}{x^2+4x} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x}$ ;      г)  $\frac{13-17x}{(x-3)(x+2)} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+2}$ .

○34.37. а)  $\frac{3x-1}{x^2-9} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{x+3}$ ;

б)  $\frac{1}{x^2+4x-12} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+6}$ ;

в)  $\frac{3x-2}{x^2+2x-8} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x-2}$ ;

г)  $\frac{x}{2x^2+x-3} = \frac{a}{2x+3} + \frac{b}{x-1}$ .

○34.38. Найдите такие числа  $a$ ,  $b$  и  $c$ , при которых при всех допустимых значениях  $x$  выполняется равенство:

а)  $\frac{3}{x^3-4x^2} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ;

б)  $\frac{2x+3}{x^3+4x^2} = \frac{a}{x+4} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ ;

в)  $\frac{x^2}{(x-4)(x+2)^2} = \frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ ;

г)  $\frac{3-x}{x^3-6x^2+x} = \frac{a}{x-3} + \frac{b}{(x-3)^2} + \frac{c}{x}$ .

## § 35. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Решите уравнение:

○35.1. а)  $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$ ;                      в)  $3x^3 - 8x^2 + 14x = 0$ ;

б)  $x^4 + 11x^3 - 12x^2 = 0$ ;                      г)  $x^4 - 5x^3 + 4x^2 = 0$ .

○35.2. а)  $(2x - 1)^4 - x^2 = 0$ ;

б)  $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = (7x + 1)^2$ ;

в)  $(8x + 3)^2 - x^4 = 8x^2 + 16$ ;

г)  $x^4 - x^2 + 2x = 1$ .

○35.3. а)  $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ ;

б)  $x^8 + 11x^5 - 32x^3 - 352 = 0$ ;

в)  $5x^3 - 15x^2 - x + 3 = 0$ ;

г)  $x^3 - 2x^2 + x = (x^2 - 2x + 1)^2$ .

○35.4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых данное число  $p$  является корнем данного уравнения и для каждого такого  $a$  решите это уравнение:

а)  $x^3 + 3x^2 - 7x + a = 0$ ,  $p = 2$ ;

б)  $2x^3 - 5x^2 + ax - 4 = 0$ ,  $p = -1$ ;

в)  $x^3 - ax^2 - 5x + 4 = 0$ ,  $p = 1$ ;

г)  $ax^3 - 3x^2 - 5x - a^2 = 0$ ,  $p = -1$ .

○35.5. При каких значениях  $a$  уравнение имеет ровно три различных корня:

а)  $(x + 5)(x - 7)(x + 1)(x - a) = 0$ ;

б)  $(ax^2 + 5x + 1)(x^2 - x - 2) = 0$ .

○35.6. Докажите, что уравнение не имеет целочисленных корней:

а)  $x^{13} - 131 = 0$ ;

б)  $3x^5 - 2x + 2 = 0$ ;

в)  $x^5 + 7x^4 - 5x + 79 = 0$ ;

г)  $3x^{14} + 12x^{10} + 2x^6 + 7x^4 + 11x^2 + 120 = 0$ .

Решите уравнение, используя метод введения новой переменной:

35.7. а)  $x^4 - 10x^2 + 25 = 0$ ;                      в)  $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ ;

б)  $16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$ ;                      г)  $9x^4 - 32x^2 - 16 = 0$ .

35.8. а)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ ;                      в)  $x^6 + 7x^3 - 8 = 0$ ;

б)  $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ ;                      г)  $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$ .

Решите уравнение:

- 35.9. а)  $2x^3 + 7x^2 + 5x + 1 = 0$ ;  
б)  $2x^4 + 7x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$ .
- 35.10. а)  $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ ;  
б)  $x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = 0$ ;  
в)  $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ ;  
г)  $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$ .
- 35.11. а)  $10x^3 - 9x^2 - 3x + 2 = 0$ ;      в)  $6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = 0$ ;  
б)  $3x^3 + 10x^2 - x - 12 = 0$ ;      г)  $8x^3 - 26x^2 + 23x - 6 = 0$ .
- 35.12. а)  $4(x^2 - x)^2 + 9x^2 = 9x - 2$ ;  
б)  $(2x^2 - x + 1)^2 - 4x^2 = 1 - 2x$ .
- 35.13. а)  $(x^2 - 7x + 13)^2 - (x - 3)(x - 4) = 1$ ;  
б)  $(x^2 - 2x - 1)^2 + 3(x - 1)^2 = 16$ ;  
в)  $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 63$ ;  
г)  $(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 8x + 7) = 63$ .
- 35.14. а)  $2y^4 - y^2(y - 2) - 3(y - 2)^2 = 0$ ;  
б)  $(t^2 + 2t)^2 - (t + 2)(2t^2 - t) = 6(2t - 1)^2$ ;  
в)  $(x^2 + 6x - 9)^2 + x(x^2 + 4x - 9) = 0$ ;  
г)  $(z^2 - z)(z^2 - 5z + 6) = 15z^2 - 45z + 90$ .
- 35.15. а)  $(x + 1)^4 + (x - 1)^4 = 82$ ;  
б)  $(3x + 2)^4 + (3x - 2)^4 = 626$ ;  
в)  $(x + 3)^4 + (x - 1)^4 = 32$ ;  
г)  $(5x - 3)^4 + (5x - 1)^4 = 82$ .

35.16. Вычислите значение выражения  $x^2 + \frac{1}{x^2}$ , если:

- а)  $x + \frac{1}{x} = 3$ ;      в)  $x - \frac{1}{x} = 5$ ;  
б)  $x + \frac{1}{x} = t$ ;      г)  $x - \frac{1}{x} = t$ .

35.17. Вычислите значение выражения  $9x^2 + \frac{4}{x^2}$ , если:

- а)  $3x + \frac{2}{x} = -5$ ;      в)  $3x - \frac{2}{x} = -3$ ;  
б)  $3x + \frac{2}{x} = t$ ;      г)  $3x - \frac{2}{x} = t$ .

Решите уравнение:

●35.18. а)  $2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 10 = 0$ ;

б)  $2x^2 + \frac{2}{x^2} + x + \frac{1}{x} - 6 = 0$ ;

в)  $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$ ;

г)  $2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + x + \frac{1}{x} - 2 = 0$ .

●35.19. а)  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x + \frac{1}{x} - 12 = 0$ ;

б)  $4x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x + \frac{1}{x} - 8 = 0$ ;

в)  $4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + x + 1 = 0$ ;

г)  $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2x - \frac{1}{x} - 10 = 0$ .

●35.20. а)  $\left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + 3x - \frac{2}{x} - 2 = 0$ ;

б)  $9x^2 + \frac{4}{x^2} + 3x - \frac{2}{x} - 14 = 0$ ;

в)  $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4\left(3x + \frac{2}{x}\right) - 5 = 0$ ;

г)  $9x^4 + 3x^3 - 14x^2 - 2x + 4 = 0$ .

●35.21. а)  $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ ;

б)  $2x^4 - 7x^3 + 10x^2 - 7x + 2 = 0$ ;

в)  $9x^4 - 9x^3 - 16x^2 - 6x + 4 = 0$ ;

г)  $25x^4 - 50x^3 + 14x^2 + 10x + 1 = 0$ .

●35.22. Найдите все такие целочисленные значения параметра  $a$ , при которых многочлен  $x^3 - 3x^2 + ax - 1$  имеет хотя бы один целый корень. Для каждого такого  $a$  найдите количество разных целых корней.

●35.23. Найдите все такие целочисленные значения параметра  $a$ , при которых многочлен имеет хотя бы один рациональный корень. Для каждого такого  $a$  найдите количество разных рациональных корней многочлена:

а)  $x^3 + ax^2 - 3x + 2$ ;      б)  $3x^3 - ax - 1$ .



●35.24. Найдите все целочисленные значения параметров  $a$  и  $b$ , при которых все действительные корни многочлена  $x^3 + ax^2 + bx + 2$  — целые числа. Для полученных пар  $a$  и  $b$  найдите эти корни.

●35.25. Для каждого значения  $a$  решите уравнение

$$x^3 - (4 + a)x^2 + 5ax - a^2 = 0.$$

## § 36. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение:

○36.1. а)  $\frac{3x+3}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$ ;      в)  $\frac{2x-2}{x+3} + \frac{x+3}{x-3} = 5$ ;

б)  $\frac{3x}{x-1} - \frac{4}{x} = \frac{3}{x^2-x}$ ;      г)  $\frac{5x}{x+2} - \frac{20}{x^2+2x} = \frac{4}{x}$ .

○36.2. а)  $\frac{x-1}{x+3} + \frac{84}{(x+3)(x-4)} = \frac{3x}{x-4}$ ;

б)  $\frac{2x}{x+3} + \frac{30}{x^2-9} = \frac{5}{x-3}$ ;

в)  $\frac{2x}{x+2} - \frac{x-1}{x-3} = \frac{10}{(3-x)(x+2)}$ ;

г)  $\frac{2}{x-4} + \frac{x}{x+4} = \frac{20-3x}{x^2-16}$ .

○36.3. а)  $\frac{5}{x-2} + 1 = \frac{14}{x^2-4x+4}$ ;

б)  $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{9x^2+6x+1} = 2$ ;

в)  $\frac{2}{x-3} + 1 = \frac{15}{x^2-6x+9}$ ;

г)  $\frac{2}{5x+1} + \frac{3}{25x^2+10x+1} = 1$ .

○36.4. а)  $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{8}{x^3-4x}$ ;

б)  $\frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x-3} = \frac{5}{x^3-9x}$ ;

в)  $\frac{7}{x+1} - \frac{x+4}{2-2x} = \frac{3x^2-38}{x^2-1}$ ;

г)  $\frac{2x-5}{x^2-3x} - \frac{x+2}{x^2+3x} + \frac{x-5}{x^2-9} = 0$ .

○36.5. а)  $\frac{8x+4}{x^3+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{5x-1}{x^2-x+1}$ ;  
 б)  $\frac{a^2+56}{a^3+8} + \frac{3a+2}{a^2-2a+4} = \frac{5}{a+2}$ ;  
 в)  $\frac{16-a^2}{8a^3+1} - \frac{2a+1}{4a^2-2a+1} = \frac{2}{2a+1}$ ;  
 г)  $\frac{x+3}{9x^2+3x+1} + \frac{3}{27x^3-1} = \frac{1}{3x-1}$ .

○36.6. а)  $\frac{8}{16x^2-9} - \frac{8}{16x^2-24x+9} = \frac{1}{4x^2+3x}$ ;  
 б)  $\frac{18}{4x^2+4x+1} - \frac{1}{2x^2-x} = \frac{6}{4x^2-1}$ ;  
 в)  $\frac{x+3}{4x^2-9} - \frac{3-x}{4x^2+12x+9} = \frac{2}{2x-3}$ ;  
 г)  $\frac{1+2x}{6x^2-3x} - \frac{2x-1}{14x^2+7x} = \frac{8}{12x^2-3}$ .

○36.7. Найдите все неотрицательные корни уравнения:

а)  $\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-3} = x$ ;      б)  $\frac{x^2}{2x-1} - x = \frac{6x}{x-5}$ .

○36.8. Найдите все положительные корни уравнения:

а)  $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2-x-4} - \frac{x}{x^2-x-4}$ ;  
 б)  $\frac{x+2}{2x-1} - \frac{4}{2x-1} = -\frac{x}{x^2-2x-6} + \frac{2}{x^2-2x-6}$ .

○36.9. Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-0,5; 2]$ :

а)  $\frac{7}{x+2} + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{x+1} + \frac{7}{x-2}$ ;  
 б)  $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2}$ .

●36.10. Решите уравнение:

а)  $\frac{x+1}{x^3-3x^2+x-3} + \frac{1}{x^4-1} = \frac{x-2}{x^3-3x^2-x+3}$ ;  
 б)  $\frac{25}{4x^2+1} - \frac{8x+29}{16x^4-1} = \frac{18x+5}{8x^3+4x^2+2x+1}$ ;  
 в)  $\frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8} + \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8} = \frac{2x+2}{x^2-4}$ ;  
 г)  $\frac{5}{x^3-2x^2-2x+1} - \frac{2}{x^3-4x^2+4x-1} = \frac{1}{x^2-1}$ .

Решите уравнение:

●36.11. а)  $\frac{x^2}{x^2 - 7x + 10} + \frac{16}{3x^2 - 12} = 1;$

б)  $\frac{2x^2}{2x^2 + x - 3} - \frac{8}{2x^2 - 3x - 9} = 1.$

●36.12. а)  $\frac{10x + 5}{21x - 14} - \frac{x - 1}{2x + 3} = \frac{21}{6x^2 + 5x - 6};$

б)  $\frac{4}{6x^2 - 13x + 6} + \frac{x - 2}{6x - 4} = \frac{2x + 1}{10x - 15}.$

●36.13. а)  $\frac{2x - 1}{6x - 4} + \frac{13}{6x^2 + 5x - 6} = \frac{2x + 1}{4x + 6};$

б)  $\frac{8x - 1}{10x^2 - 19x + 6} + \frac{x - 1}{10x - 4} = \frac{2x + 1}{4x - 6}.$

●36.14. а)  $\frac{x - 1}{x^2 - 2x - 3} + \frac{x + 3}{x^2 - 2x - 8} = \frac{4x - 1}{2x^2 - 6x - 8};$

б)  $\frac{2}{2x^2 - x - 1} + \frac{x}{x^2 - x - 2} = \frac{3x + 1}{3x^2 - 3}.$

Решите уравнение, используя метод введения новой переменной (№ 36.15—36.17):

○36.15. а)  $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x + 3) = 3;$

б)  $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = 2,9;$

в)  $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1;$

г)  $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0.$

○36.16. а)  $x^2 + x + 1 = \frac{15}{x^2 + x + 3};$

б)  $\frac{x^2 - x}{x^2 - x + 1} - \frac{x^2 - x + 2}{x^2 - x - 2} = 1;$

в)  $x^2 + 3x = \frac{8}{x^2 + 3x - 2};$

г)  $\frac{1}{x^2 - 3x + 3} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4} = \frac{6}{x^2 - 3x + 5}.$

○36.17. а)  $x(x-1)(x-2)(x-3) = 15$ ;

б)  $x^2 + \frac{1}{x^2} + x + \frac{1}{x} = 4$ ;

в)  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 3$ ;

г)  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$ .

Решите уравнение:

●36.18. а)  $\frac{6}{(x+1)(x-3)} - \frac{24}{(x+2)(x-4)} = 1$ ;

б)  $2\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right) - 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 1$ .

●36.19. а)  $\frac{3x^2-6x}{x^2-2x+2} + \frac{x^2-2x+1}{2x^2-4x-1} = 3$ ;

б)  $\frac{\frac{3x}{x^2+5}}{\frac{x}{x^2+5}+2} + \frac{\frac{x}{x^2+5}+1}{\frac{2x}{x^2+5}-1} = 3$ .

●36.20. а)  $\frac{2x+7}{x^2+9x+14} + \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+1}$ ;

б)  $\frac{3x^2}{18x^2+9x+1} - \frac{7x^2+2x}{6x^2-5x-1} = \frac{x}{3x+1}$ ;

в)  $\frac{25}{x^2+1} + \frac{4x-29}{x^4-1} = \frac{5-9x}{1-x+x^2-x^3}$ ;

г)  $\frac{2x^2-x^3}{3x^3+2x^2+12x+8} + \frac{2x^2+x^3}{3x^3+2x^2-12x-8} = \frac{x^4}{x^4-16}$ .

●36.21. а)  $\frac{8}{x^3-8x^2+x} - \frac{6}{x^3+7x^2-7x-1} = \frac{1}{x^2-x}$ ;

б)  $\frac{x^2-x^3-x}{x^3-x^2+x-1} + \frac{x^2+x^3+x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{x^2+2x}{1-x^2}$ ;

в)  $\frac{38}{x^4-x^2+20x-100} + \frac{x+10}{x^2-x+10} = \frac{x+10}{x^2+x-10}$ ;

г)  $\frac{6x}{27x^3+1} + \frac{1}{81x^4-9x^2+6x-1} = \frac{2}{9x^2+3x-1}$ .

Решите уравнение:

●36.22. а)  $x^2 - 5x + 6 = 15 \cdot \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 - x}$ ;

б)  $(x^2 - 2x)^2 - (2 - x)(2x^2 + x) = 6(2x + 1)^2$ ;

в)  $x^2 - 10x + 24 = \frac{x^2 - 6x - 12}{x^2 - 2x}$ ;

г)  $\left(\frac{1 - 3x}{1 + 3x}\right)^2 + \frac{4 - 12x}{3x} + 3 \cdot \left(\frac{1 + 3x}{3x}\right)^2 = 0$ .

●36.23. а)  $\frac{9x^2 + 4}{3x} + \frac{3x}{9x^2 + 9x + 4} + 5,5 = 0$ ;

б)  $\frac{4(x^2 + 1)}{x^2 + 10x + 1} + \frac{5x}{x^2 + 1} + \frac{7}{2} = 0$ .

●36.24. а)  $\frac{(x^2 + 6x - 9)^2}{x^2 + 4x - 9} + x = 0$ ;

б)  $\frac{x^2 + 12x + 15}{x^2 + 6x + 15} + \frac{4x}{x^2 + 10x + 15} = 0$ .

●36.25. а)  $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$ ;

б)  $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2 + x)^2} = \frac{10}{9}$ .

●36.26. а)  $2\left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)^2 - \left(\frac{x + 1}{x - 2}\right)^2 = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ ;

б)  $\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 - \left(\frac{x}{x + 5}\right)^2 = \frac{2x^2 + 2x}{x^2 + 4x - 5}$ .

## § 37. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

Решите графически уравнение:

○37.1. а)  $|x| = 3$ ;

в)  $-|x| + 2 = 0$ ;

б)  $-|x + 2| + 4 = 0$ ;

г)  $|x - 3| = 2$ .

○37.2. а)  $|x| = x + 1$ ;

в)  $-|x| = 2x - 3$ ;

б)  $-|x - 1| = \frac{1}{2}x - 2$ ;

г)  $|x + 2| = -\frac{1}{3}x + 4$ ;

Решите графически уравнение:

○37.3. а)  $|x| = -x^2 + 2$ ;      в)  $|x - 2| = x^2$ ;  
б)  $|x| = \sqrt{x + 2}$ ;      г)  $-|x| + 3 = \sqrt{x + 3}$ .

○37.4. а)  $|x^2 - 4x + 3| = 3 - x$ ;  
б)  $|x^2 - 4| = 3|x|$ ;  
в)  $|x^2 - 2x - 3| = 2x + 2$ ;  
г)  $|x^2 + 2x| = -|x + 1| + 1$ .

Решите уравнение:

37.5. а)  $|x| = 1$ ;      в)  $|x| = 0$ ;  
б)  $|x - 2| = 1$ ;      г)  $|x + 4| = 3$ .

37.6. а)  $|2x - 1| = 5$ ;      в)  $|4 - x| = 10$ ;  
б)  $|3 + 2x| = 1$ ;      г)  $|2 - 3x| = 7$ .

37.7. а)  $|x| = -1$ ;      в)  $|x - \sqrt{2}| = 1 - \sqrt{2}$ ;  
б)  $|x + 1| = \sqrt{2} - 1$ ;      г)  $|x - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ .

○37.8. а)  $\left| \frac{2x + 1}{x - 1} \right| = 3$ ;      в)  $\left| \frac{5x + 1}{x + 3} \right| = 4$ ;  
б)  $\left| \frac{-2x}{x - 2} \right| = 2$ ;      г)  $\left| \frac{4x + 3}{2 - x} \right| = 1$ .

○37.9. Решите уравнение для каждого значения параметра  $p$ :

а)  $|x| = p$ ;      в)  $|x - 2| = -p$ ;  
б)  $|x + 3| = p + 1$ ;      г)  $|1 - x| = p - 1$ .

Решите уравнение:

○37.10. а)  $|x + 3| = 2x$ ;      в)  $|3x + 6| = 2x - 1$ ;  
б)  $|5 - 2x| = x + 1$ ;      г)  $|4x - 2| = x - 9$ .

○37.11. а)  $x^2 - 6|x| + 5 = 0$ ;  
б)  $x^2 + 5x + |x + 5| = 0$ ;  
в)  $13x^2 + 8|x| - 5 = 0$ ;  
г)  $5(3x - 1)^2 - 4|3x - 1| + 1 = 0$ .

○37.12. а)  $|x^2 - 5x| = 6$ ;      в)  $|x^2 - 3x| = 4$ ;  
б)  $|x^2 + 5| = 6x$ ;      г)  $|x^2 - 4| = 3x$ .

Решите уравнение:

○37.13. а)  $|x^2 - 4x + 3| = x - 1$ ;      в)  $|x^2 + 2x - 3| = -x + 1$ ;  
б)  $|x^2 - 4x| = 8 - 2x$ ;      г)  $|x^2 + 2x| = x + 2$ .

○37.14. а)  $|2 - 3x| = |2x + 3|$ ;      в)  $|8x - 3| = |9 - x|$ ;  
б)  $|3|2x - 3| = 5|7 - x|$ ;      г)  $|2 - x| = 2|x + 1|$ .

○37.15. а)  $|x^2 + x + 1| = |x^2 + 3x + 7|$ ;  
б)  $|x^2 - 4x + 3| + |x^2 - 3x + 2| = 0$ ;  
в)  $|x^2 + 3x - 7| = |3x^2 - 5x + 1|$ ;  
г)  $|x^2 - 2x| + |x^2 - x - 2| = 0$ .

○37.16. Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = |7x^2 - x + 3|$  и  $y = (2 - 5x)^2$ .

Решите уравнение:

○37.17. а)  $|x^2 - 5x| = 4|x|$ ;      в)  $|x^2 - 6x + 10| = |x + 10|$ ;  
б)  $|-2x^2 + 8x| = 2|x - 4|$ ;      г)  $|-x^2 + 4x - 8| = 2|-x|$ .

○37.18. а)  $|x - 3| + 3|x| = 17$ ;      в)  $|3x - 4| - |2 - x| = 18$ ;  
б)  $|4x - 5| = 6|-x| + 3$ ;      г)  $|x - 5| + |2x + 1| = 7$ .

○37.19. а)  $|x + 3| - |x - 1| = x + 2$ ;  
б)  $|x + 3| - |1 - x| = 2x - 1$ ;  
в)  $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 4$ ;  
г)  $|x + 3| + |x - 1| = 2x + 10$ .

●37.20. а)  $|x + 3| - |x - 1| = 2x + 7 + \frac{5x}{|x|}$ ;  
б)  $0,5(|x + 3| - |x - 1|) = |x + 4| - 3$ ;  
в)  $|x + 3| - |x - 1| = 3|x| - x + 2$ ;  
г)  $|5x - 2| - |7x - 3| + 2x = 1$ .

●37.21. а)  $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 12$ ;  
б)  $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 5$ ;  
в)  $|t^2 - 4| + |t^2 - 9| = 13$ ;  
г)  $|t^2 - 4| - |t^2 - 9| = 5$ .

●37.22. а)  $|x^2 + 3x - 7| + |x^2 - 6x + 7| = 5x$ ;  
б)  $|x^2 + 2x - 3| + |-x^2 + 2x + 8| = 4x + 5$ .

●37.23. а)  $|x^2 - 2|x| - 3| = 4$ ;      в)  $|x^2 - 2|x| - 8| = 7$ ;  
б)  $|x^2 - 4|x| - 5| = 5$ ;      г)  $|x^2 - 4|x| - 5| = 8$ .

Решите уравнение:

- 37.24. а)  $\frac{|x-2|}{|x-1|-1} = 1$ ;      в)  $\frac{|x-4|}{|2-x|-2} = 1$ ;  
б)  $\frac{|x-3|+|x-1|}{|x-2,5|+|x-3,5|} = 2$ ;      г)  $\frac{|x-3|+|x-1|}{|x-2|+|x-4|} = 1$ .
- 37.25. а)  $\frac{|x^2+x|+1}{|x-1|-x^2} = 1$ ;  
б)  $\frac{|x^2+2x|+4}{2|x-2|-x^2} = 1$ .
- 37.26. а)  $(3x-1)^2 - 5|12x^2+17x-7| + 4(4x+7)^2 = 0$ ;  
б)  $2(3x+2)^2 - 5|3x^2-13x-10| + 2(x-5)^2 = 0$ .

## § 38. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение:

- 38.1. а)  $\sqrt{x+2} = 3$ ;      в)  $\sqrt{7x-1} = 3$ ;  
б)  $\sqrt{x^2-1} = 2$ ;      г)  $\sqrt{3-2x^2} = 1$ .
- 38.2. а)  $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$ ;      в)  $\sqrt{23x-14-3x^2} = 0$ ;  
б)  $\sqrt{\frac{2x+3}{x-1}} = 1$ ;      г)  $\sqrt{\frac{x+5}{4x-1}} = 4$ .

○38.3. Докажите, что уравнение не имеет корней:

- а)  $\sqrt{5-x} + 2 = 0$ ;      в)  $\sqrt{3x-1} + 1 = 0$ ;  
б)  $\sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-3} = 0$ ;      г)  $\sqrt{x-8} + 3 = \sqrt{16-x}$ .

○38.4. Выясните, равносильны ли уравнения:

- а)  $\sqrt{x+1} = 2$  и  $x-2=1$ ;  
б)  $\sqrt{2x+1} = 3$  и  $x^2=16$ ;  
в)  $\sqrt{5-x} = 3$  и  $x^2=16$ ;  
г)  $\sqrt{3x+4} = 5$  и  $2(x-3)=15-x$ .



○38.5. Выясните, равносильны ли уравнения:

а)  $\sqrt{x+1} = 3$  и  $x^2 - 7x - 8 = 0$ ;

б)  $\sqrt{x} = x - 2$  и  $x^2 = 5x - 4$ ;

в)  $\sqrt{7-x} = -2$  и  $x^2 + 4x + 8 = 0$ ;

г)  $\sqrt{4x+1} = x - 1$  и  $x^2 - 12x + 36 = 0$ .

Решите уравнение:

○38.6. а)  $\sqrt{7x-4} = \sqrt{5x+2}$ ;      в)  $\sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+2}$ ;

б)  $\sqrt{2x-5} = \sqrt{4x-7}$ ;      г)  $\sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-3}$ .

○38.7. а)  $\sqrt{4x+3} = \sqrt{4x^2+5x-2}$ ;

б)  $\sqrt{5x^2-3x+1} = \sqrt{3x^2-4x+2}$ ;

в)  $\sqrt{2x^2+3x-1} = \sqrt{5x-1}$ ;

г)  $\sqrt{3x^2+5x-1} = \sqrt{2x^2+2x-3}$ .

Решите уравнение, используя метод введения новой переменной:

○38.8. а)  $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$ ;      в)  $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$ ;

б)  $x + \sqrt{x} = 30$ ;      г)  $x - 4\sqrt{x} - 12 = 0$ .

○38.9. а)  $\sqrt{x} - \frac{20}{\sqrt{x}} = 1$ ;      в)  $\sqrt{x} - \frac{6}{\sqrt{x}} = 1$ ;

б)  $\sqrt{x} + 3 = \frac{18}{\sqrt{x}}$ ;      г)  $\sqrt{x} + 4 = \frac{32}{\sqrt{x}}$ .

○38.10. а)  $(5x-1) + \sqrt{5x-1} = 12$ ;

б)  $(2x+3) + \sqrt{2x+3} = 2$ ;

в)  $(7x+4) - \sqrt{7x+4} = 42$ ;

г)  $(12x-1) + \sqrt{12x-1} = 6$ .

Решите уравнение:

○38.11. а)  $\sqrt{7-3x} = x+7$ ;      в)  $\sqrt{15+3x} = 1-x$ ;  
б)  $\sqrt{3-x} = 3x+5$ ;      г)  $\sqrt{34-5x} = 7-2x$ .

○38.12. а)  $\sqrt{8-2x} = x$ ;      в)  $\sqrt{3+2x} = x-6$ ;  
б)  $\sqrt{5-x} = x+15$ ;      г)  $\sqrt{1-5x} = 7+x$ .

○38.13. а)  $\sqrt{x-4} + x = 6$ ;      в)  $\sqrt{5x+1} + 1 = 2x$ ;  
б)  $5x - \sqrt{3x+4} = 2$ ;      г)  $\sqrt{7-3x} + 3 - x = 0$ .

○38.14. а)  $\sqrt{2x^2+3x+1} = x+1$ ;      в)  $\sqrt{x^2+x+1} = x+2$ ;  
б)  $\sqrt{5x^2-3x+2} = x-3$ ;      г)  $\sqrt{3x^2+x+30} = x-5$ .

○38.15. а)  $(x^2-1) \cdot \sqrt{2x-1} = 0$ ;  
б)  $\sqrt{x^2-1} \cdot \sqrt{x^2+x-2} = 0$ ;  
в)  $(16-x^2) \cdot \sqrt{3-x} = 0$ ;  
г)  $(x+8) \cdot \sqrt{5-|x-2|} = 0$ .

○38.16. а)  $(x-2) \cdot \sqrt{x+2} = x-2$ ;  
б)  $(x^2-9) \cdot \sqrt{2x+11} = 9-x^2$ ;  
в)  $(x-3) \cdot \sqrt{1-x} = x-3$ ;  
г)  $(x^2+x-2) \cdot \sqrt{x-4} = 2-x-x^2$ .

○38.17. а)  $\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{x-19}$ ;  
б)  $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$ ;  
в)  $\sqrt{x-13} = \sqrt{x+8} - 3$ ;  
г)  $\sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2$ .

○38.18. а)  $\sqrt{4-2x} + \sqrt{2+x} = \sqrt{2x}$ ;  
б)  $\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x} = \sqrt{2x-12}$ ;  
в)  $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$ ;  
г)  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{4-x} = \sqrt{7-x}$ .

Решите уравнение:

○38.19. а)  $\frac{x+3}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{3x+1}$ ;

б)  $\frac{x-2}{\sqrt{2x-5}} - \sqrt{x-3} = \sqrt{2x-5}$ ;

в)  $\sqrt{x+1} + \frac{2-x}{\sqrt{x+4}} = \sqrt{x+4}$ ;

г)  $\sqrt{x^2-1} + \frac{14-4x^2}{\sqrt{2x^2+5}} = \sqrt{2x^2+5}$ .

○38.20. а)  $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x-2}$ ;

б)  $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-3} = \sqrt{x^2-4x+3}$ ;

в)  $\frac{\sqrt{7x-2}}{3x+2} = \frac{\sqrt{3x+2}}{7x-2}$ ;

г)  $\frac{\sqrt{x^2+x-1}}{3x^2+x-4} = \frac{\sqrt{3x^2+2x-4}}{x^2+x-1}$ .

○38.21. а)  $(x^2+1) + 2\sqrt{x^2+1} = 15$ ;

б)  $\sqrt{x-2} - \frac{3}{\sqrt{x-2}} + 2 = 0$ ;

в)  $2(x^2-9) + 3\sqrt{x^2-9} - 5 = 0$ ;

г)  $\frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{x-1}-4} = \frac{\sqrt{x-1}-6}{\sqrt{x-1}-7}$ .

○38.22. а)  $\sqrt{\frac{3x+2}{2x-3}} + \sqrt{\frac{2x-3}{3x+2}} = 2,5$ ;

б)  $\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 2,5 = 3\sqrt{1-\frac{1}{x}}$ ;

в)  $\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = \frac{10}{3}$ ;

г)  $4\sqrt{3-\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{x}{3x-1}} = 3$ .

Решите уравнение:

●38.23. а)  $x \cdot \sqrt{x+1} = x+3$ ;

б)  $(x+1) \cdot \sqrt{x-1} = 2x-1$ ;

в)  $(x-2) \cdot \sqrt{x-3} = 3x-10$ ;

г)  $(x-3) \cdot \sqrt{x+2} = 3x-8$ .

●38.24. а)  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{3+\sqrt{2-x}} = 2$ ;      в)  $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = x-2\sqrt{x}+4$ ;

б)  $\frac{3}{\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x+1} = 5$ ;      г)  $\frac{14}{\sqrt{x^2+1}} - 3\sqrt{x^2+1} = 1$ .

●38.25. Для каждого значения  $b$  решите уравнение

$$\sqrt{x^2+b} = \sqrt{3x+b-2}.$$

●38.26. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(x-7)(\sqrt{x-a} + \sqrt{3a-x}) = 0$$

имеет хотя бы один корень?

## § 39. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

39.1. Для каждого из уравнений определите, при каких значениях параметра  $a$  число 5 является корнем уравнения:

а)  $ax = 7$ ;

в)  $2x = 3a$ ;

б)  $(5a-1)x = 2a+3$ ;

г)  $(3-a)x = 2-5a$ .

39.2. При каких значениях параметра  $a$  данное число  $x_0$  является корнем уравнения:

а)  $ax = 2a+4$ ,  $x_0 = -3$ ;

в)  $(a^2-1)x = a+5$ ,  $x_0 = 1$ ;

б)  $\frac{x+3}{a-2} = x$ ,  $x_0 = 5$ ;

г)  $(5a+3)x = 2a-1$ ,  $x_0 = 0,4$ ?

○39.3. При каких значениях параметра  $b$  имеют общий корень уравнения:

а)  $3x+7=0$  и  $2x-b=0$ ;

б)  $2x=3b-1$  и  $3x=5b+7$ ;

в)  $2x-5=0$  и  $5b-x=0$ ;

г)  $7x=7b-5$  и  $8x=8b+6$ ?

○39.4. При каких значениях параметра  $m$  графики функций  $y = x^2 - mx + 3$  и  $y = x^2 - 19x + 8$  не имеют общих точек?

Для каждого значения параметра  $b$  решите уравнение:

○39.5. а)  $x^2 = 3b$ ;                      в)  $(b - 1)x = 7$ ;  
б)  $(b^2 + 5b - 6)x = b - 1$ ;        г)  $(b - |b|)x = b + |b|$ .

○39.6. а)  $(b^2 + 9)x = b - 3$ ;        в)  $(b + 3)x = b + 3$ ;  
б)  $(b - 9)x = b + 3$ ;        г)  $(b^2 - 9)x = b + 3$ .

○39.7. Найдите все такие пары чисел  $(a; b)$ , при которых числа 2 и 9 являются корнями уравнения  $(a^2 + 3a - 4)x = b^2 + a$ .

○39.8. а) При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$(3x - a)^2 + (4x + 1)^2 = (5x - 1)^2$$

не имеет решений?

б) При каком значении параметра  $p$  уравнение

$$(2x - 3p)^2 + (x - 1)^2 = 5(x - 2)(x + 2)$$

не имеет решений?

○39.9. а) При каких значениях  $a$  и  $b$  уравнение

$$(2x - a)(18x + 1) = (6x - 1)^2 + b$$

имеет не менее трёх разных корней?

б) При каких значениях  $a$  и  $b$  уравнение

$$(2x + b)(8x - 2) = (4x + 1)^2 + a$$

имеет не менее трёх разных корней?

○39.10. При каких значениях  $a$  и  $b$  пара чисел  $(3; -1)$  является решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 5y = a, \\ 2x + y = b; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} ax + by = 2, \\ 5x + by = 3 + a? \end{cases}$$

○39.11. При каких значениях  $a$  и  $b$  пара чисел  $(2; 5)$  является решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 7x + y = a, \\ 8x - 3y = b; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} ax + by = 7, \\ 2x - ay = 2 - 3b? \end{cases}$$

○39.12. При каких значениях  $a$  и  $b$  прямая  $y = ax + b$  проходит через точки:

а)  $M(1; 5)$  и  $N(-5; -3)$ ;        б)  $M(-1; 5)$  и  $N(5; -3)$ ?

○39.13. При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx$  проходит хотя бы через одну точку прямой:

а)  $y = 7x - 5$ ;        б)  $y = -3x + 7$ ?

- О39.14.** При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx$  проходит хотя бы через одну точку отрезка с концами в точках:  
а) (2; 2) и (8; 2);      б) (2; 2) и (2; 4)?
- О39.15.** а) При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx$  проходит хотя бы через одну точку квадрата с вершинами в точках (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4)?  
б) При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx$  проходит хотя бы через одну точку прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8)?
- О39.16.** а) При каких значениях параметра  $b$  прямая  $y = 2x + b$  проходит хотя бы через одну точку, абсцисса которой положительна, а ордината отрицательна?  
б) При каких значениях параметра  $b$  прямая  $y = 3x + b$  проходит хотя бы через одну точку, абсцисса которой отрицательна, а ордината положительна?
- О39.17.** При каких значениях параметра  $b$  прямая  $y = 2x + b$  проходит хотя бы через одну точку отрезка с концами в точках:  
а) (2; 2) и (8; 2);      б) (4; 4) и (4; 8)?
- О39.18.** а) При каких значениях параметра  $b$  прямая  $y = 2x + b$  проходит хотя бы через одну точку квадрата с вершинами в точках (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4)?  
б) При каких значениях параметра  $b$  прямая  $y = 2x + b$  проходит хотя бы через одну точку прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8)?
- О39.19.** а) При каких значениях параметра  $k$  на прямой  $y = kx - 3$  есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?  
б) При каких значениях параметра  $k$  на прямой  $y = kx + 4$  есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?
- О39.20.** а) При каких значениях параметра  $b$  среди точек квадрата с вершинами (1; 1); (4; 1); (1; 4); (4; 4) есть хотя бы одна точка, сумма координат которой равна  $b$ ?  
б) При каких значениях параметра  $b$  среди точек прямоугольника с вершинами в точках (1; 2); (5; 2); (1; 8); (5; 8) есть хотя бы одна точка, модуль разности координат которой равен  $b$ ?

○39.21. а) При каких значениях  $a$  системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a, \\ \frac{1}{a}x + y = 9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого  $a$  найдите решение системы.

б) При каких значениях  $m$  системе уравнений

$$\begin{cases} 8x + y = 14m, \\ \frac{1}{m}x + 2y = 6 \end{cases}$$

удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого  $m$  найдите решение системы.

○39.22. Пусть  $(x_0; y_0)$  — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = -2a^2 + 12a + 3, \\ -2x + 3y = 8a^2 + 4a + 1. \end{cases}$$

При каких значениях параметра  $a$  сумма  $x_0 + y_0$  будет наименьшей?

○39.23. Пусть  $(x_0; y_0)$  — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x + 7y = 15 - 5b, \\ 3x - y = 4b - 12. \end{cases}$$

При каких значениях параметра  $b$  произведение  $x_0 \cdot y_0$  будет наибольшим?

○39.24. Найдите все целочисленные значения параметра  $a$ , при которых все корни уравнения — целые числа:

а)  $ax = a + 2$ ;

б)  $(a^2 - 3a + 5)x = a^2 - 3a + 6$ ;

в)  $(2a - 1)x = 4a + 2$ ;

г)  $(a^2 + 5a - 5)x = a^2 + 5a - 4$ .

○39.25. Найдите все целочисленные значения параметра  $a$ , при которых все корни уравнения — рациональные числа:

а)  $(1 - \sqrt{3})x = a + 5\sqrt{3}$ ;      в)  $(1 - a^2\sqrt{2})x = 1 + a\sqrt{2}$ ;

б)  $(3 - \sqrt{3})x = 6a + a^2\sqrt{3}$ ;      г)  $(a + 2)x = 4 - \sqrt{4 - a^2}$ .

○39.26. Для каждого значения параметра  $b$  решите уравнение:

а)  $\frac{x-3}{x-b} = 0$ ;      в)  $\frac{x-b}{x+2} = 0$ ;

б)  $\frac{bx-3}{x+2} = 2$ ;      г)  $\frac{bx+4}{x+2} = 2$ .

○39.27. Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение:

а)  $x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + a = 0$ ;

б)  $ax^2 - (a+5)x + 2 = 0$ .

Для каждого значения параметра  $m$  решите уравнение:

○39.28. а)  $\frac{x^2+5x+6}{x-m} = 0$ ;      б)  $\frac{x^2-3x-4}{x-m} = 0$ .

○39.29. а)  $\frac{x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + 2m}{x-2} = 0$ ;

б)  $\frac{x^2 - (2m-1)x + m^2 - m}{x+4} = 0$ .

При каких значениях параметра  $p$  имеют общий корень уравнения:

○39.30. а)  $x^2 + 2x - 3 = 0$ ;  $px^2 - x - 1 = 0$ ;

б)  $x^2 - x - 2 = 0$ ;  $px^2 + 2x - 1 = 0$ ?

○39.31. а)  $x^2 + 3x - p = 0$ ;  $2x^2 + x + p - 7 = 0$ ;

б)  $x^2 + 2x + p = 0$ ;  $3x^2 + x + p - 1 = 0$ ?

○39.32. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых длина отрезка, концами которого являются корни уравнения  $x^2 - bx + 4b + 16 = 0$ , равна 4.

○39.33. а) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $3x^2 - (a^2 - 5a + 6)x + 2a - 5 = 0$  имеет два разных корня, которые равны по абсолютной величине?

б) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 + (a+1)x - 7 = 0$  и уравнение  $3x^2 + ax - 8 = 0$  имеют хотя бы один общий корень?

○39.34. а) При каких значениях параметра  $a$  среднее арифметическое корней уравнения  $x^2 - (a^2 - 1)x + 7a = 0$  равно 4?

б) При каких значениях параметра  $m$  среднее арифметическое числа 9 и одного из корней уравнения  $x^2 - 27x + 3m + 144 = 0$  равно другому корню?



●39.35. При каких значениях параметра  $m$  для корней  $x_1$  и  $x_2$  уравнения  $x^2 + 2mx + m^2 - m - 12 = 0$  выполняется условие  $|x_1 - x_2| = |x_1| + |x_2|$ ?

○39.36. При каких значениях параметра  $a$  сумма квадратов корней уравнения  $x^2 + ax - a^2 - 5 = 0$  наименьшая?

○39.37. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x^2 - ax + 32| + |x^2 - 3x - 4| = 0$$

имеет корни? Для каждого такого значения  $a$  найдите эти корни.

○39.38. При каких значениях параметра  $k$  число  $-1$  является единственным корнем уравнения

$$|x^2 - 3x - 1| = |x^2 + 2x - k|?$$

○39.39. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых один из корней уравнения  $|x^2 + 3x - 1| = |x^2 - 2x + a|$  равен 1, и для каждого такого значения  $a$  решите уравнение.

○39.40. а) Найдите все такие пары чисел  $a$  и  $b$ , для которых уравнение  $|x - b| = a$  равносильно уравнению  $3x^2 + 5x - 8 = 0$ .

б) Найдите все такие пары чисел  $a$  и  $b$ , для которых уравнение  $|x - b| = a$  равносильно уравнению  $3x^2 - 5x - 8 = 0$ .

○39.41. Для каждого значения параметра  $c$  решите уравнение:

$$\text{а) } |3x - c| = |x + 2|; \quad \text{б) } |2x + c| = |x - 4|.$$

●39.42. Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором на графике функции  $y = |x - 4| + |x - 3| + a$  есть хотя бы одна точка с равными координатами.

●39.43. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x - 3| + |x - 10| + |2x - 43| = a$$

имеет наибольшее число целых корней?

●39.44. Для каждого значения параметра  $a$  найдите число корней уравнения  $|x^2 - 5x + 7| + |x^2 + 2x + 2| = x + a$ .

●39.45. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x^2 - 6x + 10| + |x^2 + 3x + 4| = 5|x| + a$$

имеет наибольшее число корней? Укажите это число.

●39.46. Для каждого значения параметра  $a$  найдите число различных корней уравнения:

а)  $(3x - 1)(ax^2 + 3x - 2) = 0$ ;

б)  $(2x + 1)(ax^2 + 2x - 3) = 0$ .

●39.47. При каких значениях параметра  $a$  имеет три разных корня уравнение:

а)  $(x^2 - (3a + 1)x + 2a^2 + a)(x^2 + (2a - 1)x - 3a^2 + a) = 0$ ;

б)  $(x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a)(x^2 + (4a + 1)x + 3a^2 + a) = 0$ ?

●39.48. а) При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\left| \frac{x+1}{x} \right| = a$  имеет ровно один корень?

б) При каких значениях параметра  $a$  график функции  $y = \left| \frac{x+1}{x} \right|$  имеет с прямой  $y = x + a$  ровно две общие точки? Для каждого значения  $a$  найдите эти точки.

●39.49. а) Найдите все прямые, параллельные прямой  $y = x$  и имеющие с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  ровно одну общую точку. Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

б) Найдите все прямые, параллельные прямой  $y = 1 - x$  и имеющие с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  ровно одну общую точку. Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

в) При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx$  имеет с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  ровно одну общую точку? Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

г) При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx + 2$  имеет с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  ровно одну общую точку? Для каждой такой прямой укажите координаты этой точки.

●39.50. а) При каких значениях параметра  $k$  прямая  $y = kx + 5$  имеет с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  ровно две общие точки?

б) При каких значениях  $a$  прямая  $y = 2x + a$  имеет с графиком функции  $y = |x - 1| + |x - 3|$  более двух общих точек?

●39.51. Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение:

а)  $|x + 2| - |x - 4| = a$ ;

б)  $|x + 2| + |x - 4| = 2x + a$ .

●39.52. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $|2x - a| + 1 = |x + 3|$  имеет единственный корень.

●39.53. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x^4 - 3x^2 + 7| = |x| - a$$

имеет нечётное число различных корней? Для каждого такого значения  $a$  укажите сумму и произведение этих корней.

●39.54. При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$|x^4 - 7x^2 + 6| = |x - a| + |x + a| + a$$

имеет нечётное число разных корней? Для каждого такого значения  $a$  укажите сумму и произведение этих корней.

●39.55. При каких значениях параметра  $a$  существует хотя бы одно значение  $b$ , при котором уравнение  $\sqrt{x - b} = -a^2$  имеет хотя бы одно решение?

●39.56. Найдите все пары чисел  $a$  и  $b$ , при которых уравнение  $\sqrt{x - b} = 2a - 1 - a^2 - 5b^4$  имеет хотя бы одно решение.

## § 40. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

**40.1.** Из чисел 124, 345, 570, 288, 441 и 729 укажите числа, кратные:

- а) 2;      б) 3;      в) 5;      г) 10.

**40.2.** Назовите делители числа:

- а) 24;      б) 54;      в) 75;      г) 90.

**40.3.** а) Число  $n$  кратно 3. Докажите, что число  $4n$  кратно 12.

б) Число  $m$  кратно 7. Докажите, что число  $2m$  кратно 14.

**○40.4.** а) Число  $a$  кратно 6. Докажите, что  $a^2 + 12a$  кратно 36.

б) Число  $a$  кратно 4. Докажите, что  $a^2 + 2a$  кратно 8.

**○40.5.** а) Число  $a$  кратно 2, а число  $b$  кратно 3. Докажите, что  $3a + 2b$  кратно 6.

б) Число  $a$  кратно 2, а число  $b$  кратно 5. Докажите, что  $2b + 5a$  кратно 10.

Докажите, что:

**○40.6.** а)  $23^6 + 23^7$  кратно 24;      в)  $37^8 - 37^7$  кратно 18;

б)  $8^9 - 22^2$  кратно 31;      г)  $3^{16} + 9^6$  кратно 41.

**○40.7.** а)  $21^4 - 7^5$  делится на 37;      в)  $15^4 - 9^3$  делится на 11;

б)  $10^5 + 5^7$  делится на 19;      г)  $72^2 + 6^5$  делится на 30.

**○40.8.** а)  $2137^2 - 953^2$  делится на 20;

б)  $3378^2 + 1284^2$  делится на 6;

в)  $8973^2 - 1737^2$  делится на 90;

г)  $546772^2 + 11112^2$  делится на 12.

**○40.9.** а)  $778^3 - 153^3$  делится на  $5^4$ ;

б)  $78^3 + 84^3$  делится на  $3^4$ ;

в)  $973^3 - 757^3$  делится на  $6^3$ ;

г)  $772^3 + 228^3$  делится на  $10^3$ .

Докажите, что:

- 40.10. а)  $3\,456\,728\,496 : 4$ ;      в)  $26\,354\,981\,175 : 25$ ;  
б)  $473\,928\,375 : 125$ ;      г)  $1\,736\,907\,064 : 8$ .

- 40.11. а)  $103\,211\,064 : 11$ ;      в)  $102\,257\,246 : 13$ ;  
б)  $110\,238\,072 : 7$ ;      г)  $1\,235\,234 : 1001$ .

- 40.12. Не производя вычислений, докажите, что  $a : b$ , если:

- а)  $a = 213 \cdot 488 \cdot 204 \cdot 315$ ,  $b = 120$ ;  
б)  $a = 276 \cdot 485 \cdot 204 \cdot 315$ ,  $b = 300$ ;  
в)  $a = 215 \cdot 497 \cdot 241 \cdot 335$ ,  $b = 175$ ;  
г)  $a = 549 \cdot 495 \cdot 204 \cdot 315$ ,  $b = 900$ .

- 40.13. Докажите, что следующее утверждение верно для любого натурального значения  $n$ :

- а)  $(3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}) : 13$ ;  
б)  $(7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2}) : 19$ ;  
в)  $(5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}) : 155$ ;  
г)  $(2^{2n} + 2^{2n+1} + 2^{2n+2}) : 28$ .

- 40.14. Докажите, что:

- а)  $(53^3 + 63^3)$  делится на 116;  
б)  $(18^3 + 26^3)$  делится на 176;  
в)  $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 181^3 + 182^3)$  делится на 183;  
г)  $(2^3 + 3^3 + \dots + 196^3 + 197^3)$  делится на 199.

- 40.15. а) Произведение двух идущих подряд натуральных чисел делится на 2;

б) произведение трёх идущих подряд натуральных чисел делится на 3 и на 6;

в) произведение четырёх идущих подряд натуральных чисел делится на 4, 12 и 24;

г) произведение пяти идущих подряд натуральных чисел делится на 5, 20 и 120.

- 40.16. а) Докажите, что произведение любых 100 последовательных натуральных чисел делится на 10 000.

б) Докажите, что произведение любых  $n$  ( $n > 1$ ) последовательных натуральных чисел делится на  $n$ .

- 40.17. Докажите, что:

- а)  $ad + bc + ac + bd$  делится на  $a + b$ ;  
б)  $ab + bc - ad - cd$  делится на  $b - d$ .

Докажите, что:

○40.18. а) Если  $ad + bc$  делится на  $a + b$ , то и  $ac + bd$  делится на  $a + b$ ;

б) если  $ad + bc$  не делится на  $a + b$ , то и  $ac + bd$  не делится на  $a + b$ .

○40.19. а)  $(\overline{ab} + \overline{ba}) : 11$ ;                      в)  $(\overline{ab} - \overline{ba}) : 9$ ;

б)  $(\overline{abcd} + \overline{dcba}) : 11$ ;                      г)  $(\overline{abc} - \overline{cba}) : 99$ .

○40.20. а) Число  $2a + 7b$  не делится на 13. Докажите, что и  $11a + 6b$  не делится на 13.

б) Число  $37a + 11b$  не делится на 19. Докажите, что число  $a + 8b$  не делится на 19.

Найдите все такие натуральные числа  $n$ , при которых является натуральным числом выражение:

○40.21. а)  $\frac{3n + 7}{n}$ ;                      в)  $\frac{7n + 27}{n}$ ;

б)  $\frac{3n + 14}{n + 2}$ ;                      г)  $\frac{8n + 77}{2n + 1}$ .

○40.22. а)  $\frac{5n^2 + 7n - 12}{n}$ ;                      в)  $\frac{6n^2 - 8n + 90}{2n}$ ;

б)  $\frac{n^7 + 3n^2 + 36}{n^2}$ ;                      г)  $\frac{n^5 + n^3 + 1000}{n^3}$ .

●40.23. а) На графике функции  $y = \frac{5x + 17}{x + 7}$  найдите все точки, обе координаты которых целые числа.

б) При каком наименьшем натуральном значении параметра  $a$  на графике функции  $y = \frac{a}{x + 113}$  есть ровно одна точка, координатами которой являются натуральные числа? Найдите координаты этой точки.

○40.24. Найдите все значения числа  $a$ , при которых числа:

а)  $\frac{3}{a} - 1$  и  $\frac{3}{a} + a$  — целые;

б)  $\frac{4}{a} + 3$  и  $\frac{8}{a} + a$  — натуральные.

○40.25. Докажите, что при любых целых значениях  $n$  число  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  делится:

а) на 4;      б) на 8;      в) на 12;      г) на 24.

○40.26. Докажите, что для любого натурального значения  $n$  верно утверждение:

а)  $(2n^3 + 3n^2 + n) \div 6$ ;      в)  $(n^3 + 3n^2 + 2n)(n + 7) \div 24$ ;  
б)  $(n^2 - 4n - 5) \div 8$ ;      г)  $n(n + 1)^2(n + 2) \div 12$ .

○40.27. а) Докажите, что если  $a + \frac{18}{a}$  — натуральное число, делящееся на 6, то  $a^2 + \frac{324}{a^2}$  — также натуральное число, делящееся на 36.

б) Докажите, что если  $a + \frac{45}{a}$  — натуральное число, делящееся на 15, то  $a^2 + \frac{2025}{a^2}$  — натуральное число, делящееся на 225.

○40.28. Используя обобщённую формулу сокращённого умножения  $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , докажите, что:

а)  $7^n - 2^n$  делится на 5;      в)  $15^n - 1$  делится на 7;  
б)  $17^{2n} - 9^n$  делится на 140;      г)  $2^{4n} - 1$  делится на 15.

○40.29. Используя обобщённую формулу сокращённого умножения  $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots - ab^{2n-1} + b^{2n})$ , докажите, что:

а)  $7^{33} + 2^{33}$  делится на 9;  
б)  $17 \cdot 17^{2n} + 3 \cdot 9^n$  делится на 20;  
в)  $13^{21} + 1$  делится на 7;  
г)  $49^n \cdot 7 + 5 \cdot 25^n$  делится на 12.

○40.30. Используя формулу из № 40.28, докажите, что:

а)  $235^7 - 1$  делится на 234;  
б)  $2001^{2007} - 1$  делится на 2000;  
в)  $343^{246} - 1$  делится на 344;  
г)  $111^{346} - 1$  делится на 123 320.

Докажите, что:

- 40.31. а)  $13^n + 7 \cdot 5^n$  делится на 8;  
б)  $31^n - 27 \cdot 5^n$  делится на 26;  
в)  $85^n + 44 \cdot 40^n$  делится на 45;  
г)  $85^n + 45 \cdot 3^n$  делится на 22 при  $n = 2k + 1$ .
- 40.32. а)  $(7 \cdot 11^6 - 7) : 84$ ;      б)  $(156 \cdot 13^5 - 12^7) : 75$ .

## § 41. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

- 41.1. а) Назовите двузначные числа, которые являются простыми.  
б) Приведите примеры составных двузначных чисел.
- 41.2. Докажите, что только одно число, состоящее из чётного количества одинаковых цифр, простое. Найдите это число.
- 41.3. а) Сумма двух чисел равна 149, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.  
б) Сумма двух чисел равна 101, а разность их квадратов — простое число. Найдите эти числа.
- 41.4. Найдите (если возможно) два трёхзначных числа таких, что:  
а) они взаимно просты;  
б) каждое из них — простое число;  
в) их сумма и их разность — простые числа;  
г) разность их квадратов — простое число.
- 41.5. Докажите, что являются составными числа:  
а) 34 765;      в) 975 312;  
б) 10 101;      г) 87 654 321.
- 41.6. Докажите, что число  $237^{231} + 732^{132}$  — составное.
- 41.7. Разложите на простые множители числа:  
а) 95 256;      б) 968 000;      в) 444 528;      г) 178 200.
- 41.8. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, делящихся:  
а) на 2;      б) на 3;      в) на 5;      г) на 6?
- 41.9. Может ли из 101 идущих подряд натуральных чисел быть ровно одно, делящееся:  
а) на 50;      б) на 51;      в) на 101;      г) на 100?



- 41.10.** Может ли произведение 101 идущих подряд натуральных чисел не делиться:
- а) на 51;      б) на 101;      в) на 606;      г) на 103?
- 41.11.** Докажите, что если натуральное число  $p$  ( $p > 1$ ) не делится на все натуральные числа  $n$  такие, что  $n^2 \leq p$ , то  $p$  — простое число.
- 41.12.** Докажите, что при любом натуральном  $n$  числа вида  $6n + 2$ ;  $6n + 3$  и  $6n + 4$  являются составными.
- 41.13.** Докажите, что если  $p$  — простое число больше 3, то  $p^2 - 1$  делится на 24.
- 41.14.** Докажите, что любое простое число больше 3 даёт при делении на 6 в остатке либо 1, либо 5, т. е. может быть представлено в виде  $6n + 1$  или  $6n - 1$ , где  $n$  — некоторое натуральное число. Представьте в данном виде простые числа 5; 13; 149; 259; 983. Подберите такие значения  $n$ , чтобы числа вида  $6n + 1$  и  $6n - 1$  не были простыми.
- 41.15.** Найдите все такие простые числа  $p$ , при каждом из которых является простым каждое из чисел:
- а)  $p$ ,  $p + 10$  и  $p + 14$ ;  
 б)  $p - 2$ ,  $p + 24$ ,  $p + 26$ .
- 41.16.** Существуют ли такие значения  $p$ , при которых числа:
- а)  $p$  и  $8p^2 + 1$  — простые;  
 б)  $p$  и  $2p + 1$  — простые ( $p > 3$ ).
- 41.17.** Докажите, что четвёртая степень любого натурального числа, большего единицы, увеличенная на 4, не может быть простым числом.
- 41.18.** Найдите все простые числа  $p$  и  $q$  такие, что:
- а)  $5p + 17q = 140$ ;      б)  $7p + 3q = 86$ .
- 41.19.** Определите, является ли простым число  $2^{110} + 7^{52}$ .
- 41.20.** Докажите, что натуральное число, следующее за произведением четырёх последовательных натуральных чисел, не может быть простым.

## § 42. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

**42.1.** Найдите остаток от деления числа:

- а) 43 215 436 на 10;      в) 1 234 567 на 9;  
б) 1 234 321 на 3;      г) 3 456 785 на 6.

**42.2.** Назовите все остатки, которые могут получиться при делении на число: а) 5; б) 7; в) 4; г) 10.

**42.3.** Составьте формулу натурального числа, которое:

- а) при делении на 5 даёт остаток 4;  
б) при делении на 7 даёт остаток 3;  
в) при делении на 11 даёт остаток 7;  
г) при делении на 6 даёт остаток 1.

**42.4.** Составьте формулу натурального числа  $a$ , которое при делении на  $n$  даёт неполное частное  $b$  и остаток  $r$ . Используя эту формулу, заполните таблицу:

$a$	$n$	$b$	$r$
2469	11		
3528		15	
	53	106	15
	28	47	19

**42.5.** Число  $x$  при делении на 12 даёт остаток 7. Чему может быть равен остаток от деления числа  $x$ :

- а) на 2;      б) на 3;      в) на 6;      г) на 8?

**42.6.** а) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 5 равен остатку от деления его последней цифры на 5.

б) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления суммы всех его цифр на 3.

**42.7.** а) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 4 равен остатку от деления числа, образованного двумя его последними цифрами, на 4.

б) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 25 равен остатку от деления числа, образованного двумя его последними цифрами, на 25.

**42.8.** Найдите остатки от деления:

- а) на 5 чисел 123; 167; 205; 20 009;  
б) на 4 чисел 2345; 678; 3457; 2 323 232.

○42.9. Найдите остатки от деления:

а) на 3 чисел 232 332; 768 900 001;  $\overline{777 \dots 777}$  ;  
всего 836 семёрок

б) на 9 чисел 1372; 232 332; 5632;  $\overline{111 \dots 111}$  .  
всего 256 единиц

○42.10. а) Докажите, что остаток от деления числа (не меньшего 100) на 25 равен остатку от деления на 25 числа, соответствующего двум последним цифрам данного числа.

б) Найдите остатки от деления на 8 чисел 454 548; 1 234 567;  $\overline{777 \dots 777}$  .  
всего 8226 семёрок

42.11. В числе 23□47 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

- а) делилось на 3;
- б) делилось на 9.

42.12. В числе 233□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

- а) делилось на 4;
- б) делилось на 11.

42.13. В числе 3423□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

- а) делилось на 3 и на 2;
- б) делилось на 3 и на 4.

42.14. В числе 735□4 заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

- а) при делении на 3 давало в остатке 2;
- б) при делении на 4 давало в остатке 2.

42.15. В числе 7345□ заполните пропуск такой цифрой, чтобы число:

- а) при делении на 9 давало в остатке 2;
- б) при делении на 5 давало в остатке 3;
- в) при делении на 25 давало в остатке 7;
- г) при делении на 11 давало в остатке 10.

●42.16. Докажите, что найти остаток от деления числа на 11 можно следующим образом:

- 1) вычислить сумму всех его цифр в разрядах единиц, сотен, десятков тысяч и т. д.;
- 2) вычесть из неё сумму цифр в разрядах десятков, тысяч и т. д.;

- 3) если полученная разность положительна, то остаток от её деления на 11 равен искомому остатку;  
 4) если полученная разность отрицательна, то остаток от деления её модуля на 11 равен разности числа 11 и искомого остатка.

●42.17. Найдите остатки от деления на 11 чисел 3718; 7381; 1937; 9281;  $\overbrace{777 \dots 777}^{\text{всего 856 семёрок}}$ ;  $\overbrace{333 \dots 333}^{\text{всего 3333 троек}}$ .

Найдите последнюю цифру числа:

○42.18. а)  $2^{1707}$ ; б)  $3^{1918}$ ; в)  $7^{1812}$ ; г)  $9^{1941}$ .

○42.19. а)  $2001^{2002^{2003}}$ ; в)  $1345^{6789^{12345}}$ ;  
 б)  $1999^{2002^{1333}}$ ; г)  $23456^{78901^{2345}}$ .

○42.20. а)  $221^{132} + 255^{243} + 236^{637} - 359^{346}$ ;  
 б)  $435^{435} + 616^{616} - 2337^4$ .

●42.21. Докажите, что сумма всех остатков, которые могут получиться при делении:

- а) на 2011, делится на 2011;  
 б) на 2012, не делится на 2012.

○42.22. а) Докажите, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на 97.

б) Можно ли утверждать, что произведение любых 97 последовательных натуральных чисел делится на  $97^2$ ?

●42.23. Укажите какое-либо трёхзначное число  $n$ , при котором число:

- а)  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  не делится на 5;  
 б)  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  не делится на 24.

○42.24. Пусть числа  $n_1$  и  $n_2$  дают при делении на число  $m$  остатки соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Докажите, что остаток от деления суммы чисел  $n_1$  и  $n_2$  на число  $m$  равен остатку от деления суммы  $r_1$  и  $r_2$  на число  $m$ .

○42.25. Пусть числа  $n_1$  и  $n_2$  дают при делении на число  $m$  остатки соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Докажите, что остаток от деления произведения чисел  $n_1$  и  $n_2$  на число  $m$  равен остатку от деления произведения  $r_1$  и  $r_2$  на число  $m$ .

○42.26. Пусть числа  $n_1 > n_2$  дают при делении на число  $m$  остатки соответственно  $r_1$  и  $r_2$ . Докажите, что остаток от деления разности  $n_1 - n_2$  на число  $m$  равен  $r_1 - r_2$ , если  $r_1 \geq r_2$ , и  $m + r_1 - r_2$ , если  $r_1 < r_2$ .

●42.27. Остаток от деления числа  $n$  на 24 равен 7. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 12;      б) на 48;      в) на 8;      г) на 72?

●42.28. Остаток от деления числа  $n$  на 50 равен 17. Каким может быть остаток от деления этого числа:

а) на 25;      б) на 100;      в) на 10;      г) на 125?

○42.29. Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 3		
	0	1	2
$n$			
$9n$			
$7n$			
$2n$			
$n^2$			
$n^3$			
$n^3 + n^2 + 201n$			

○42.30. Докажите, что если  $a$  и  $b$  не делятся на 3, то и  $a^2 + b^2$  не делится на 3.

○42.31. Заполните таблицу:

Число	Остаток от деления на 5				
	0	1	2	3	4
$n$					
$5n$					
$3n$					
$7n$					
$n^2$					
$n^3$					
$n^3 + n^2 + 2000n$					

●42.32. Рассмотрите три утверждения:

- а) сумма квадратов двух чисел делится на 3 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 3;
- б) сумма квадратов двух чисел делится на 5 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 5;
- в) сумма квадратов двух чисел делится на 7 тогда и только тогда, когда оба эти числа делятся на 7.

Два из них являются верными, а одно нет. Докажите верные утверждения и опровергните примером неверное утверждение.

○42.33. а) Докажите, что дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами либо делится на 4, либо при делении на 4 даёт в остатке 1.

б) Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами равняться 2003?

●42.34. а) Найдите остаток при делении на 4 суммы всех различных чисел, в записи каждого из которых есть 127 раз цифра 4 и один раз цифра 1.

б) Найдите остаток при делении на 9 суммы всех разных десятизначных чисел, в записи каждого из которых любая из 10 цифр есть ровно по одному разу.

○42.35. а) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Найдите это число.

б) Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 4. Найдите это число.

○42.36. а) Докажите, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 даёт остаток 1.

б) Докажите, что если число  $a$  — чётное, но не кратное 4, то число  $a^2$  при делении на 32 даёт остаток 4.

в) Докажите, что квадрат нечётного числа при делении на 8 даёт остаток 1.

г) Докажите, что если число  $a$  — чётное, но не кратное 6, то число  $a^2$  при делении на 12 даёт остаток 4.

○42.37. а) Известно, что число  $a$  при делении на 5 даёт остаток 1, а при делении на 3 даёт остаток 2. Найдите остаток от деления числа  $a$  на 15.

б) Известно, что число  $a$  при делении на 4 даёт остаток 3, а при делении на 3 даёт остаток 1. Найдите остаток от деления числа  $a$  на 12.

## § 43. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

**43.1.** Из отрезка натурального ряда чисел от 1 до 20 выпишите:

- а) пары взаимно простых составных чисел;
- б) пары составных чисел, в которых одно число кратно другому;
- в) пары чисел, общим делителем которых является составное число;
- г) пары простых чисел, наименьшее общее кратное которых принадлежит данному ряду чисел.

**43.2.** Представьте данные дроби как сумму или разность двух дробей, знаменателями которых служат простые числа.

Например:  $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ;  $\frac{3}{14} = \frac{5}{7} - \frac{1}{2}$  или  $\frac{71}{105} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ .

- а)  $\frac{8}{15}$ ;      в)  $\frac{3}{35}$ ;      д)  $\frac{7}{30}$ ;
- б)  $\frac{7}{22}$ ;      г)  $\frac{20}{143}$ ;      е)  $\frac{13}{70}$ .

**43.3.** Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел:

- а) 154 и 210;      в) 105 и 165;
- б) 240, 360 и 900;      г) 144, 216 и 324.

**43.4.** Найдите наименьшее общее кратное (НОК) чисел:

- а) 120 и 144;      в) 132 и 242;
- б) 255, 510 и 153;      г) 156, 195 и 390.

**43.5.** Найдите НОД и НОК чисел:

- а) 84 и 56;      в) 96 и 144;
- б) 66, 99 и 132;      г) 39, 65 и 156.

**О43.6.** а) Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 35, а наименьшее общее кратное равно 42.

б) Найдите два натуральных числа, разность которых равна 66, а наименьшее общее кратное равно 360.

Найдите НОД и НОК чисел:

- 43.7.** а)  $2^{14} \cdot 3^7$  и  $2^{11} \cdot 3^{15}$ ;  
б)  $2^{20} \cdot 5^{13} \cdot 7^7$  и  $2^{11} \cdot 5^{14} \cdot 7^6$ ;  
в)  $2^{124} \cdot 3^7$  и  $2^{111} \cdot 5^5$ ;  
г)  $2^{12} \cdot 3^{11} \cdot 5^{16}$ ;  $2^9 \cdot 3^{14} \cdot 5^{26}$  и  $2^{11} \cdot 3^7 \cdot 5^{20}$ .

- 43.8. а)  $4^{12} \cdot 6^{14} \cdot 9^{10}$  и  $8^8 \cdot 12^6 \cdot 10^{10}$ ;  
б)  $15^5 \cdot 10^8 \cdot 6^7$  и  $25^8 \cdot 40^4 \cdot 27^6$ .

- 43.9. а)  $5^n$  и  $5^{n+2}$ ;      в)  $7^{n^2}$  и  $7^n$ ;  
б)  $6^{3n+2}$  и  $5^{n+3}$ ;      г)  $13^{5n}$  и  $13^7$ .

Существуют ли такие числа  $a$  и  $b$ , что:

- 43.10. а) НОК ( $a$ ;  $b$ ) =  $a$ ;  
б) НОД ( $a$ ;  $b$ ) =  $b$ ;  
в) НОД ( $a$ ;  $b$ ) = НОК ( $a$ ;  $b$ );  
г) НОК ( $a$ ;  $b$ ) не делится на НОД ( $a$ ;  $b$ )?

- 43.11. а) НОК ( $a$ ;  $b$ ) · НОД ( $a$ ;  $b$ ) >  $a \cdot b$ ;  
б) НОК ( $a$ ;  $b$ ) · НОД ( $a$ ;  $b$ ) <  $a \cdot b$ ?

Для каждого натурального  $n$  найдите НОД и НОК следующих чисел:

- 43.12. а)  $n$  и  $n + 1$ ;      в)  $n + 170$  и  $n + 171$ ;  
б)  $n$  и  $n + 5$ ;      г)  $n$  и  $n + 6$ .

- 43.13. а)  $n^2 + n$  и  $n + 1$ ;      в)  $n^3 + 1$  и  $n$ ;  
б)  $n^3 + 1$  и  $n + 1$ ;      г)  $n^2 + 1$  и  $2n$ .

- 43.14. Найдите НОД чисел:

- а)  $2n$  и  $4n + 2$ ;      в)  $6n + 3$  и  $3n$ ;  
б)  $30n + 25$  и  $20n + 15$ ;      г)  $14n + 35$  и  $7n + 21$ .

- 43.15. Докажите, что НОД ( $n$ ;  $n + k$ ) = НОД ( $n$ ;  $k$ ).

## § 44. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

- 44.1. Разложите число на простые множители:

- а) 24 500;      б) 10 368;      в) 24 200;      г) 97 344.

Представьте данное число в виде произведения степеней различных простых чисел:

- 44.2. а) 680;      б) 2012;      в) 946;      г) 3125.

- 44.3. а)  $6^3 \cdot 10^{11} \cdot 15^{27}$ ;      б)  $20^3 \cdot 250^{13} \cdot 75^{28}$ .

- 44.4. Найдите количество различных натуральных делителей числа:

- а) 12;      б) 80;      в) 45;      г) 120.



Найдите количество различных натуральных делителей числа:

- 44.5.** а)  $2^{13} \cdot 5$ ;                      в)  $2^{99} \cdot 3^{99}$ ;  
б)  $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$ ;                      г)  $2^5 \cdot 6^7 \cdot 12^{11}$ .

- 44.6.** а)  $4^{17}$ ;              б)  $1001^{99}$ ;              в)  $80^{23}$ ;              г)  $120^{11}$ .

- 44.7.** Произведение натуральных чисел  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$  обозначают  $n!$ . Символ  $n!$  читают  $n$ -факториал;  $1! = 1$ . Представьте в виде произведения и вычислите:  
а)  $3!$ ;              б)  $4!$ ;              в)  $5!$ ;              г)  $6!$ .

- 44.8.** С каким показателем входит число 2 в разложение на простые множители числа:  
а)  $10!$ ;              б)  $20!$ ;              в)  $40!$ ;              г)  $100!$ ?

- 44.9.** С каким показателем входит число 5 в разложение на простые множители числа:  
а)  $10!$ ;              б)  $20!$ ;              в)  $40!$ ;              г)  $100!$ ?

- 44.10.** Сколькими нулями оканчивается число:  
а)  $10!$ ;              б)  $20!$ ;              в)  $40!$ ;              г)  $100!$ ?

Найдите НОД и НОК чисел:

- 44.11.** а)  $2^{14}$  и  $25!$ ;                      в)  $3^{71}$  и  $1891!$ ;  
б)  $2^{100}$  и  $100!$ ;                      г)  $5^{207}$  и  $676!$ .

- 44.12.** а)  $6^{14}$  и  $75!$ ;              б)  $21^{100}$  и  $1000!$ .

- 44.13.** а)  $134! - 1$  и  $133$ ;              б)  $255! - 9$  и  $9009$ .

- 44.14.** Найдите (можно использовать микрокалькулятор) наименьший простой делитель числа:  
а)  $5! + 1$ ;                      в)  $7! + 1$ ;  
б)  $11! + 1$ ;                      г)  $13! + 1$ .

- 44.15.** Докажите, что число  $p! + 1$  не делится ни на одно простое число, не превосходящее простое число  $p$ , а значит, либо делится на какое-либо простое число, большее  $p$ , но меньшее  $p! + 1$ , либо само является простым.

- 44.16.** Докажите, что среди ста чисел  $101! + 2$ ;  $101! + 3$ ;  $101! + 4$ ; ...;  $101! + 101$  нет ни одного простого.

Охарактеризуйте график данной функции и постройте его:

1. а)  $y = 2x^2$ ;      б)  $y = -\frac{4}{x}$ ;      в)  $y = -\frac{1}{3}x^2$ ;      г)  $y = \frac{8}{x}$ .
2. а)  $y = \frac{3}{x} - 1$ ;      в)  $y = -\frac{6}{x-2}$ ;  
б)  $y = -(x+1)^2$ ;      г)  $y = 3x^2 - 4$ .
3. а)  $y = 0,5(x-2)^2 - 4$ ;      в)  $y = 9 - (x+1)^2$ ;  
б)  $y = \frac{8}{x+2} + 1$ ;      г)  $y = \frac{6}{x-3} - 4$ .
4. Напишите уравнение квадратичной функции, полученной путём параллельного переноса:  
а) параболы  $y = x^2$  на 5 единиц влево;  
б) параболы  $y = x^2$  на 1 единицу вниз;  
в) параболы  $y = x^2$  на 1 единицу вправо и на 3 единицы вверх;  
г) вершины параболы  $y = x^2$  в точку  $(2; -4)$ .
5. Напишите уравнение квадратичной функции, полученной путём параллельного переноса:  
а) параболы  $y = 2x^2$  на 4 единицы вправо и на 3 единицы вверх;  
б) вершины параболы  $y = -\frac{1}{2}x^2$  в точку  $(-3; 2)$ ;  
в) параболы  $y = -\frac{2}{3}x^2$  на 1 единицу влево и на 4 единицы вниз;  
г) вершины параболы  $y = 1,5x^2$  в точку  $(2; 1)$ .

Постройте график полученной функции.

6. Напишите уравнение гиперболы, полученной путём параллельного переноса графика функции  $y = \frac{6}{x}$ :
- а) на 2 единицы вправо;
  - б) на 3 единицы вверх;
  - в) на 3 единицы влево и на 1 единицу вверх;
  - г) на 1 единицу вправо и на 2 единицы вниз.
7. Напишите уравнение параболы, заданной:
- а) на рис. 58;      в) рис. 60;
  - б) рис. 59;      г) рис. 61.

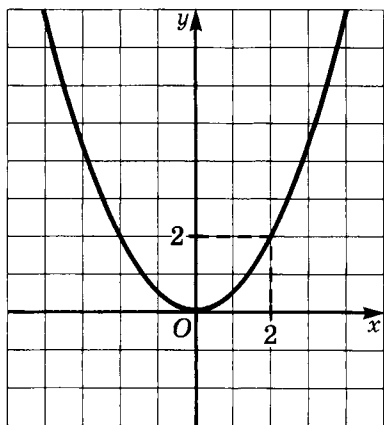


Рис. 58

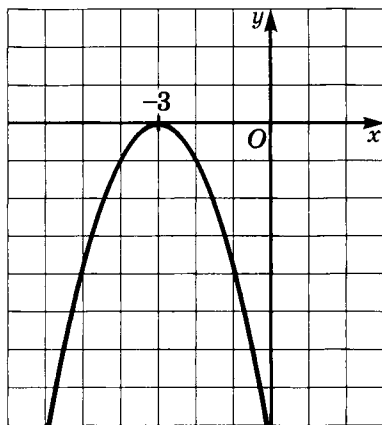


Рис. 59

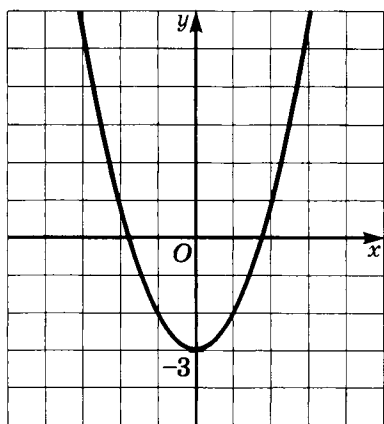


Рис. 60

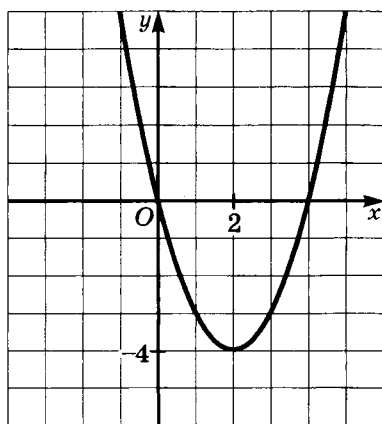


Рис. 61

8. Напишите уравнение гиперболы, заданной:

- а) на рис. 62;      в) рис. 64;  
б) рис. 63;      г) рис. 65.

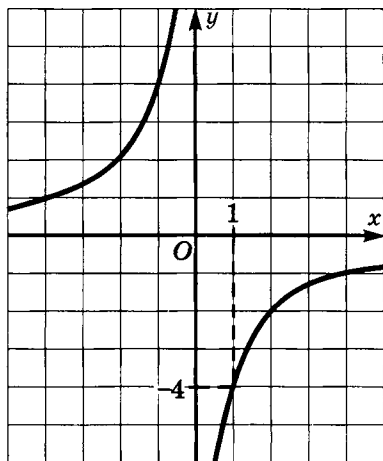


Рис. 62

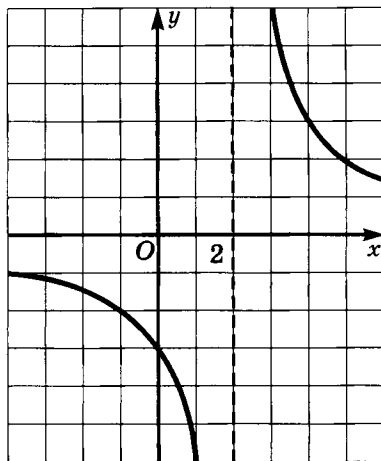


Рис. 63

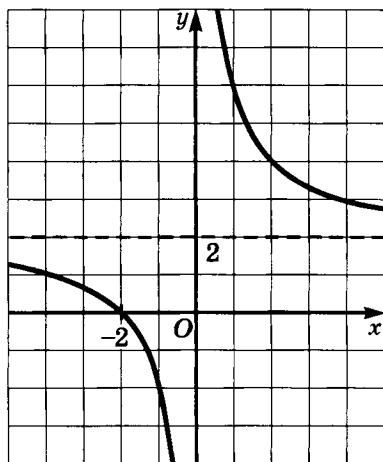


Рис. 64

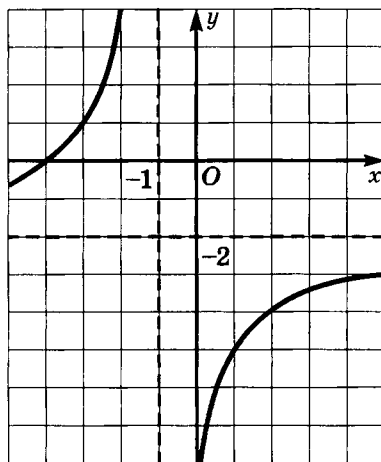


Рис. 65

9. Определите координаты вершины параболы и составьте уравнение оси симметрии данной параболы:

- а)  $y = x^2 - 4x + 5$ ;      в)  $y = -2x^2 + 12x - 10$ ;  
б)  $y = -3x^2 - 6x$ ;      г)  $y = 2x^2 - 8x$ .

10. а) Найдите значение параметра  $a$ , если известно, что прямая  $x = -3$  является осью симметрии параболы

$$y = ax^2 + (a - 5)x + 10.$$

б) Найдите значение параметра  $a$ , если известно, что прямая  $x = 2$  является осью симметрии параболы

$$y = ax^2 - (a + 9)x - 15.$$

11. а) При каких значениях  $b$  и  $c$  точка  $M(2; -8)$  является вершиной параболы  $y = 2x^2 + bx + c$ ?

б) При каких значениях  $b$  и  $c$  точка  $N(-4; 3)$  является вершиной параболы  $y = -3x^2 + bx + c$ ?

12. Постройте график функции  $y = 0,5x^2 - x - 1,5$ . С помощью графика найдите:

а) промежутки возрастания и убывания функции;

б) наименьшее значение функции.

13. Постройте график функции  $y = -x^2 + 8x - 12$ . С помощью графика найдите:

а) наибольшее значение функции;

б) множество значений функции.

14. Постройте график функции  $y = x^2 - 6x$ . С помощью графика найдите:

а) корни уравнения  $x^2 - 6x = -5$ ;

б) решение неравенства  $x^2 - 6x \geq 0$ .

15. Квадратичная функция задана уравнением:

а)  $y = 12 - 3x^2$ ;      в)  $y = -(x - 1)^2 + 4$ ;

б)  $y = 0,5(x - 2)^2$ ;      г)  $y = 2x^2 - 4x + 5$ .

Не выполняя построения графика, определите:

1) координаты вершины параболы;

2) ось симметрии параболы;

3) промежутки возрастания и убывания функции;

4) наибольшее либо наименьшее значение функции;

5) множество значений функции.

16. Используя график квадратичной функции, определите, при каких значениях  $x$  выполняется условие  $y = 0$ ,  $y > 0$ ,  $y < 0$ :

а)  $y = -2x^2 + 12x - 10$ ;      в)  $y = 3x^2 + 12x + 9$ ;

б)  $y = 0,5(x + 5)^2 - 8$ ;      г)  $y = -(x - 2)^2 + 9$ .

**17.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на данном промежутке:

а)  $y = 2x^2 + 4x - 6$  на отрезке  $[-3; -1]$ ;

б)  $y = -\frac{1}{3}(x + 4)^2$  на отрезке  $[-7; -4]$ ;

в)  $y = 3x^2 - 6$  на луче  $[-1; +\infty)$ ;

г)  $y = -2x^2 + 8x$  на интервале  $(0; 4)$ .

**18.** Решите графически систему уравнений:

а)  $\begin{cases} y = (x + 3)^2 - 3, \\ y = x + 6; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = -x^2 + 8x - 3; \end{cases}$

б)  $\begin{cases} y = -x^2 - 4x, \\ y = (x + 1)^2 - 1; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 6, \\ y = -(x - 4)^2 + 2. \end{cases}$

Решите графически квадратное неравенство:

**19.** а)  $0,5(x + 3)^2 - 8 > 0$ ;      в)  $\frac{1}{4}(x - 1)^2 - 4 \leq 0$ ;

б)  $-3x^2 + 6x + 9 \geq 0$ ;      г)  $-2x^2 - 6x + 8 < 0$ .

**20.** а)  $x^2 + 4x + 4 > 0$ ;      в)  $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$ ;

б)  $3x^2 - 6x + 5 > 0$ ;      г)  $-2x^2 + 4x - 7 > 0$ .

**21.** а) При каких значениях  $m$  уравнение  $2x^2 - 8x + 5 = m$  имеет один корень, два корня, не имеет корней?

б) При каких значениях  $k$  уравнение  $-3x^2 - 12x - 7 = k$  имеет один корень, два корня, не имеет корней?

**22.** Постройте график функции  $y = \frac{3}{x}$ . По графику определите:

а) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[1; 6]$ ;

б) значения аргумента, при которых  $y > 1$ .

**23.** Постройте график функции  $y = \frac{3}{x - 3}$ . С помощью графика найдите:

а) координаты центра симметрии гиперболы;

б) промежутки монотонности функции.

**24.** Постройте график функции  $y = -\frac{4}{x} + 3$ . С помощью графика найдите:

- а) асимптоты гиперболы;
- б) множество значений функции.

**25.** Используя график функции  $y = -\frac{6}{x+3} - 2$ , найдите:

- а) область определения и множество значений функции;
- б) промежутки монотонности функции;
- в) координаты центра симметрии гиперболы;
- г) асимптоты гиперболы.

**26.** Функция задана формулой:

- а)  $y = \frac{1}{x} + 4$ ;
- в)  $y = -\frac{2}{x-5}$ ;
- б)  $y = -\frac{4}{x-3} + 5$ ;
- г)  $y = \frac{3}{x+1} - 2$ .

Не выполняя построения графика, найдите:

- 1) область определения функции;
- 2) множество значений функции;
- 3) промежутки монотонности функции;
- 4) координаты центра симметрии гиперболы;
- 5) асимптоты гиперболы.

**27.** Задайте гиперболу  $y = \frac{k}{x}$  формулой, если известно, что она проходит через точку:

- а)  $\left(-\frac{1}{4}; 12\right)$ ;
- в)  $\left(\frac{1}{8}; -4\right)$ ;
- б)  $\left(6\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ ;
- г)  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\sqrt{27}\right)$ .

**28.** Определите, принадлежит ли графику данной функции точка А, если:

- а)  $y = \frac{10}{x+4}$ ,  $A(-3, 9; 100)$ ;
- б)  $y = -x^2 - \sqrt{2}x + 15$ ,  $A(-\sqrt{2}; 15)$ ;
- в)  $y = -\frac{18}{x+15}$ ,  $A(0; 1, 2)$ ;
- г)  $y = \frac{x^2}{7} + x\sqrt{7}$ ,  $A(-\sqrt{7}; 6)$ .

**29.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на указанном промежутке:

а)  $y = -\frac{6}{x}$  на луче  $[1; +\infty)$ ;

б)  $y = \frac{4}{x+1}$  на отрезке  $[0; 3]$ ;

в)  $y = \frac{8}{x} - 2$  на отрезке  $[-4; -1]$ ;

г)  $y = -\frac{4}{x-3} + 1$  на полуинтервале  $(3; 7]$ .

**30.** а) Докажите, что функция  $y = x^2 - 6x - 7$  убывает на отрезке  $[-1; 2]$  и возрастает на отрезке  $[4; 6]$ .

б) Докажите, что функция  $y = -x^2 + 2x + 5$  убывает на отрезке  $[1; 4]$  и возрастает на отрезке  $[-3; 0]$ .

**31.** Используя свойство монотонности, определите наибольшее и наименьшее значения данной функции на указанном промежутке:

а)  $y = -\frac{6}{x} + 1$  на отрезке  $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ;

б)  $y = -1,5x^2 + 6x$  на отрезке  $[\sqrt{5}; \sqrt{6}]$ ;

в)  $y = \frac{4}{x+1}$  на отрезке  $[0; \sqrt{3}]$ ;

г)  $y = (x+3)^2 - 5$  на отрезке  $[-3; -\sqrt{6}]$ .

**32.** Решите графически уравнение:

а)  $\frac{3}{x-3} = x - 5$ ;      в)  $2x - 6 = -\frac{6}{x+1}$ ;

б)  $-\frac{4}{x} = \frac{6}{x+2} - 2$ ;      г)  $\frac{3}{x} + 2 = -\frac{5}{x-2}$ .

**33.** Решите графически систему уравнений:

а)  $\begin{cases} y = -0,5x^2 + 2x + 1, \\ y = \frac{5}{x+1}; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} y = -\frac{6}{x} + 1, \\ y = x^2 - 2x - 4. \end{cases}$



**34.** Используя график данной функции, определите, при каких значениях  $x$  выполняется условие  $y = m$ ,  $y > m$ ,  $y < m$ , если:

а)  $y = \frac{4}{x-1} - 4$ ,  $m = 0$ ;      в)  $y = \frac{3}{x} + 3$ ,  $m = 0$ ;  
 б)  $y = -\frac{6}{x-2}$ ,  $m = 3$ ;      г)  $y = -\frac{8}{x+2} + 2$ ,  $m = -2$ .

**35.** Решите графически неравенство:

а)  $\frac{2}{x+2} + 1 \leq 0$ ;      в)  $\frac{4}{x-1} + 2 > 0$ ;  
 б)  $-\frac{5}{x+1} < 1$ ;      г)  $-\frac{3}{x-3} \geq 1$ .

**36.** Постройте и задайте уравнениями оси симметрии данной гиперболы:

а)  $y = \frac{4}{x}$ ;      в)  $y = \frac{4}{x} + 3$ ;  
 б)  $y = \frac{4}{x-2}$ ;      г)  $y = \frac{4}{x+2} - 1$ .

Найдите область определения функции и постройте её график:

**37.** а)  $y = \sqrt{x} + 4$ ;      в)  $y = -\sqrt{x} + 1$ ;  
 б)  $y = \sqrt{x+6}$ ;      г)  $y = \sqrt{x-2} - 2$ .

**38.** а)  $y = \sqrt{-x}$ ;      в)  $y = \sqrt{-x} + 2$ ;  
 б)  $y = \sqrt{3-x}$ ;      г)  $y = -\sqrt{2-x}$ .

**39.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

а)  $y = \sqrt{x}$  на луче  $[4; +\infty)$ ;  
 б)  $y = -\sqrt{x+2}$  на отрезке  $[0; 3]$ ;  
 в)  $y = -\sqrt{x} + 4$  на полуинтервале  $(0; 4]$ ;  
 г)  $y = \sqrt{x-3} + 1$  на отрезке  $[6; 9]$ .

**40.** Постройте график функции  $y = \sqrt{x+4} - 1$ . По графику определите:

- а) точки пересечения с осями координат;  
 б) значения аргумента, при которых  $y < 0$ ,  $y > 0$ ;  
 в) промежуток, которому принадлежит переменная  $x$ , если  $y_{\text{наим}} = 1$ ,  $y_{\text{наиб}} = 3$ ;  
 г) значения функции, если  $0 \leq x \leq 5$ .

**41.** Постройте график функции  $y = -\sqrt{x-1} + 2$ . По графику найдите:

- а) область определения и множество значений функции;
- б) наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке  $[5; 10]$ ;
- в) корни уравнения  $y(x) = 1$ ;
- г) решение неравенства  $y(x) < 0$ .

**42.** Решите графически уравнение:

- а)  $\sqrt{x-3} = 1$ ;                      в)  $3 - \sqrt{x+2} = 0$ ;
- б)  $-\sqrt{x+1} = 4 - 2x$ ;            г)  $\sqrt{x+3} = \frac{1}{3}x + 1$ .

**43.** Решите графически систему уравнений:

- а)  $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5, \\ y = \sqrt{x-3} - 4; \end{cases}$             б)  $\begin{cases} y = -\sqrt{x+1} - 1, \\ y = \frac{2}{x-1}. \end{cases}$

**44.** Используя график данной функции, определите, при каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $y \geq b$ ,  $y < b$ , если:

- а)  $y = \sqrt{x+3} - 1$ ,  $b = 0$ ;            в)  $y = -\sqrt{x} + 2$ ,  $b = 0$ ;
- б)  $y = -\sqrt{x-1}$ ,  $b = -2$ ;            г)  $y = \sqrt{x} + 3$ ,  $b = 5$ .

Постройте график функции:

- 45.** а)  $y = |x|$ ;                      в)  $y = |x| - 3$ ;  
б)  $y = |x+1|$ ;                    г)  $y = |x-3| + 1$ .
- 46.** а)  $y = -|x|$ ;                      в)  $y = -|x-2|$ ;  
б)  $y = -|x+4| - 2$ ;            г)  $y = 2 - |x|$ .
- 47.** Постройте график функции  $y = |x-4| - 5$ . Найдите:
  - а) наименьшее значение функции;
  - б) промежутки монотонности функции;
  - в) нули функции;
  - г) значения аргумента, при которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ .
- 48.** Постройте график функции  $y = -|x+3| + 4$ . Найдите:
  - а) наибольшее значение функции;
  - б) промежутки монотонности функции;
  - в) нули функции;
  - г) значения аргумента, при которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ .

**49.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

- а)  $y = |x|$  на отрезке  $[-\sqrt{2}; 1]$ ;  
б)  $y = -|x + 4|$  на отрезке  $[-\sqrt{2}; 1]$ ;  
в)  $y = -|x| + 5$  на отрезке  $[-1; \sqrt{3}]$ ;  
г)  $y = |x - 1| - 3$  на отрезке  $[2; \sqrt{5}]$ .

**50.** Решите графически уравнение:

- а)  $|x - 2| - 4 = 0$ ;      в)  $3 - |x + 1| = 0$ ;  
б)  $|x + 3| = 5$ ;      г)  $|x - 4| = 3$ .

**51.** Решите графически систему уравнений:

- а)  $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x + 3, \\ y = -|x - 2| - 2; \end{cases}$       в)  $\begin{cases} y = 0,5x - 1, \\ y = -|x - 3| + 2; \end{cases}$   
б)  $\begin{cases} y = \frac{8}{x + 2}, \\ y = |x + 4| - 4; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} y = \sqrt{x - 1}, \\ y = |x| - 1. \end{cases}$

**52.** Решите графически неравенство:

- а)  $|x - 1| - 2 \geq 0$ ;      в)  $4 - |x - 2| > 0$ ;  
б)  $|x + 1| < 1$ ;      г)  $|x - 4| \geq 2$ .

**53.** Постройте график функции:

- а)  $y = \sqrt{x^2}$ ;      в)  $y = \sqrt{(x - 3)^2}$ ;  
б)  $y = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$ ;      г)  $y = -\sqrt{x^2 - 8x + 16}$ .

**54.** а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ . Найдите  $f(0)$ ,  $f(-3)$ ,  $f(2t)$ ,  $f(x + 2)$ .

б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = -4x^2 + 3x - 1$ . Найдите  $f(1)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(3x)$ ,  $f(x - 1)$ .

**55.** а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x - 1}$ . Найдите  $f(1)$ ,  $f(8)$ ,  $f(0,5x)$ ,  $f(x^2 + 1)$ .

б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x + 4}$ . Найдите  $f(0)$ ,  $f(-2)$ ,  $f(4x)$ ,  $f(x^2 + 4x)$ .

**56.** а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x + 2) = f(x - 1)$ ?

б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x + 1) = f(x - 3)$ ?

57. а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x-1}$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x^2 - 2x) = f(x + 4)$ ?
- б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x+4}$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x^2 - 5x) = f(x - 5)$ ?
58. а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{1}{x}$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x^2 - 1) = f(3x^2 - 3x)$ ?
- б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ . При каком значении  $x$  выполняется равенство  $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$ ?
59. а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 8x - 9$ . При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $f(x+1) < f(x-2)$ ?
- б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 6x + 8$ . При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $f(x-4) \geq f(x+2)$ ?
60. а) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 + 7x + 12$ . При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $f(x+3) > f(0)$ ?
- б) Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ . При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $f(x-1) \leq f(1)$ ?
61. Сравните  $y(a)$  и  $y(b)$ , если  $y = x^2 - 6x + 1$  и:
- а)  $a = 3, b = 1,72$ ;                      в)  $a = 4, b = 3\sqrt{2}$ ;
- б)  $a = 3 - \sqrt{2}, b = 3 + \sqrt{2}$ ;            г)  $a = 0,8, b = 5$ .
62. Постройте график функции  $y = f(x)$  и опишите её свойства, если:
- а)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{если } 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{6}{x}, & \text{если } 2 < x \leq 6; \end{cases}$
- б)  $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x+1}, & \text{если } x < -1, \\ -3x^2 + 3, & \text{если } -1 \leq x \leq 2. \end{cases}$
63. Дана функция  $y = f(x)$ , где
- $$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } -3 < x \leq 0, \\ -2x^2 + 4x - 4, & \text{если } 0 < x \leq 3. \end{cases}$$
- а) Найдите  $f(-2), f(0), f(3)$ .
- б) Установите, принадлежит ли графику функции точка  $A(-1; -3), B(1; -3), C(1; -2)$ .
- в) Постройте график данной функции.

64. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, & \text{если } x < -1, \\ -x^2 + 1, & \text{если } x \geq -1. \end{cases}$$

С помощью графика определите, при каких значениях  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет один корень, два корня, три корня.

65. Задайте аналитически кусочную функцию  $y = f(x)$ , график которой изображён:

а) на рис. 66;

б) рис. 67.

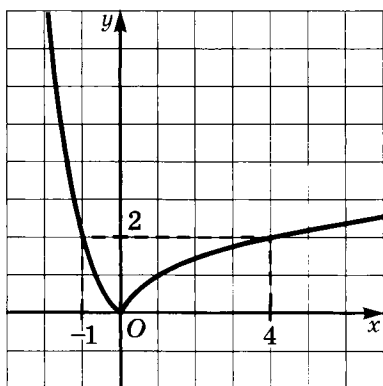


Рис. 66

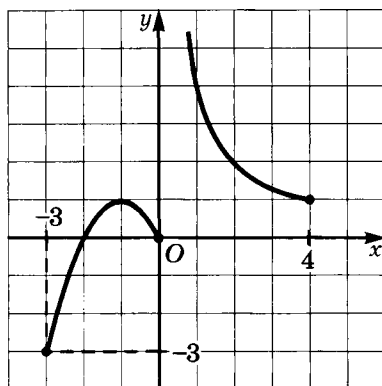


Рис. 67

66. Постройте график уравнения:

а)  $(xy - 6)(\sqrt{x + 4} + y) = 0$ ;

в)  $(y - 2x^2 + 1)(xy + 8) = 0$ ;

б)  $(y + x^2 - 3)(y^2 - x) = 0$ ;

г)  $(\sqrt{x^2} - y)(x^2 - 4x + y) = 0$ .

67. Постройте график функции  $y = f(x)$ , где:

а)  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \leq -2 \text{ и } x \geq 2, \\ -(x^2 - 4), & \text{если } -2 < x < 2; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 9), & \text{если } -3 \leq x \leq 3, \\ x^2 - 9, & \text{если } x < -3 \text{ и } x > 3. \end{cases}$

Используя определение модуля, запишите заданную кусочную функцию в виде  $y = |f(x)|$ .

**68.** Представьте функцию  $y = f(x)$  в виде кусочной функции и постройте её график, если:

а)  $f(x) = |x^2 - 1|$ ;      б)  $f(x) = -|x^2 - 4|$ .

Постройте график функции:

**69.** а)  $y = (x + 4)^{-1}$ ;      в)  $y = (\sqrt{x + 2})^{-2}$ ;

б)  $y = \left( \frac{1}{\sqrt{(x - 3)^2}} \right)^{-1}$ ;      г)  $y = \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} \right)^{-1}$ .

**70.** а)  $y = -\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$ ;

в)  $y = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}$ ;

б)  $y = \frac{|x + 1|}{x + 1} (x^2 - 2x - 3)$ ;

г)  $y = \frac{5 - x}{|x - 5|} (-x^2 + 6x - 5)$ .

**71.** а)  $y = \frac{4}{|x|}$ ;

б)  $y = \frac{3}{|x + 1|}$ ;

в)  $y = \frac{12}{|x|} - 3$ ;

г)  $y = -\frac{2}{|x|}$ .

**72.** а)  $y = 2x|x| + 2$ ;

в)  $y = -x|x| + 2x^2$ ;

б)  $y = -2x^2 - \frac{x^2}{|x|}$ ;

г)  $y = \frac{|x|}{x^2} + 1$ .

**73.** Решите графически уравнение:

а)  $\frac{8}{x + 2} + 0,5x^2 - 4x^0 = 0$ ;

б)  $2x - 4 + \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^0} = 0$ .

На каждом из рисунков **68—81** на отрезке  $[-5; 7]$  изображён график функции  $y = f(x)$ . В некоторых случаях функция  $y = f(x)$  не определена в одной или нескольких точках данного отрезка. Рассмотрите данный график и определите:

а) возрастает ли функция на отрезке  $[-5; 7]$ ;

б) убывает ли функция на отрезке  $[-5; 7]$ ;

в) сколько корней имеет уравнение  $f(x) = p$  (значения  $p$  указаны на рисунке);

г) промежутки монотонности функции  $y = f(x)$ ;

д) точки экстремума и их виды (точки максимума и точки минимума);

е) экстремумы и их виды (максимумы и минимумы).

**74.** а) Рис. 68;      б) рис. 69;      в) рис. 70;      г) рис. 71.

75. а) Рис. 72;      б) рис. 73;      в) рис. 74;      г) рис. 75.  
 76. а) Рис. 76;      б) рис. 77;      в) рис. 78;      г) рис. 79.  
 77. а) Рис. 80;      б) рис. 81.

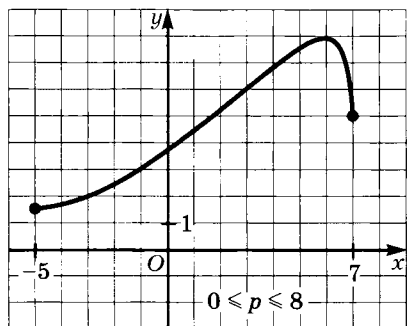


Рис. 68

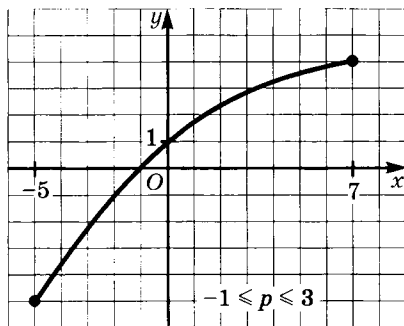


Рис. 69

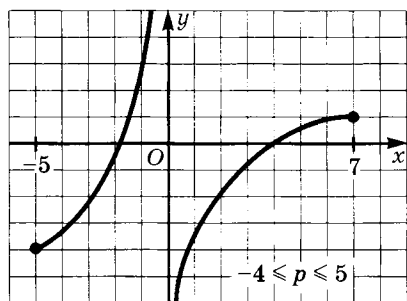


Рис. 70

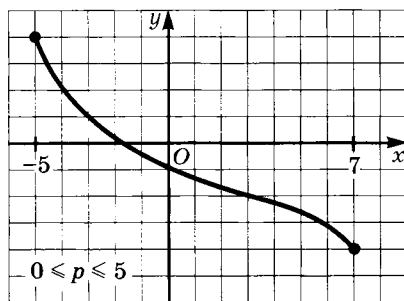


Рис. 71

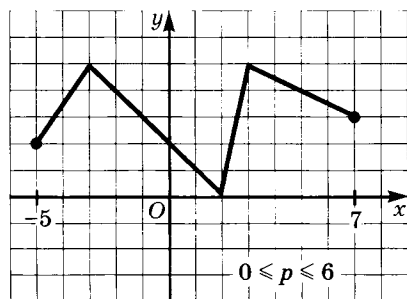


Рис. 72

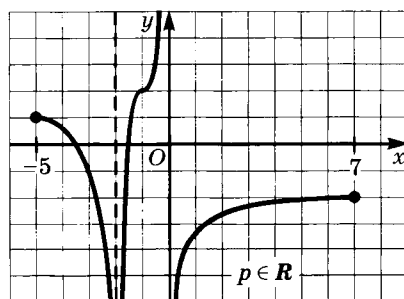


Рис. 73

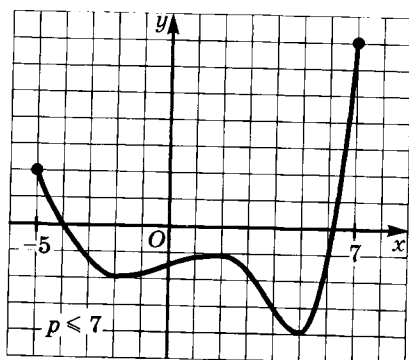


Рис. 74

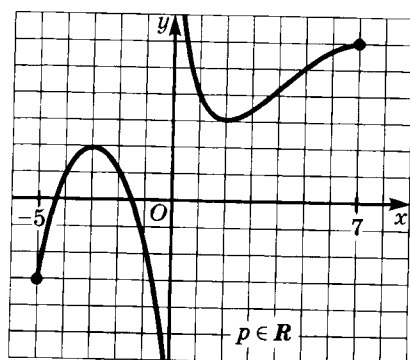


Рис. 75

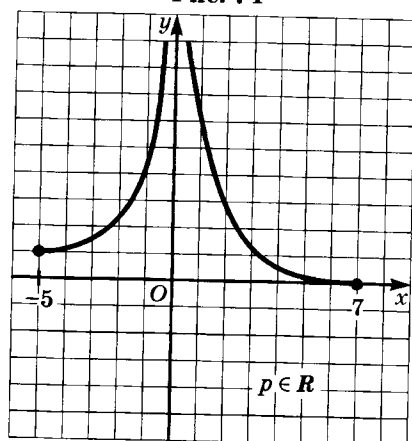


Рис. 76

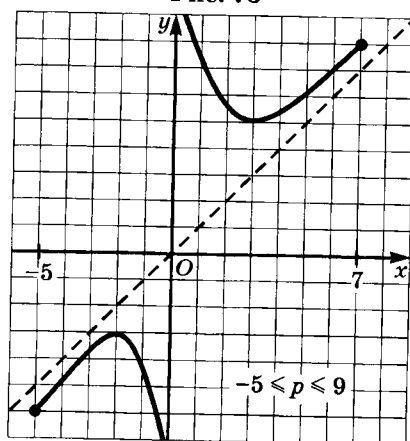


Рис. 77

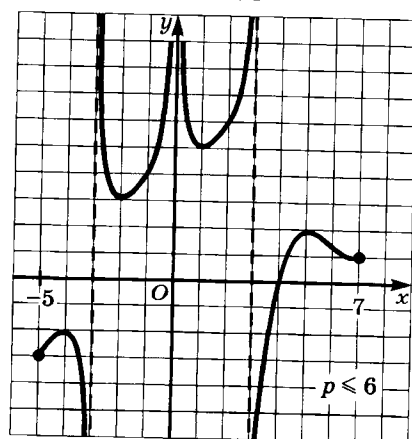


Рис. 78

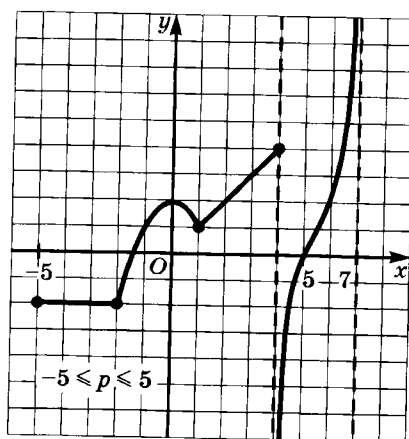


Рис. 79



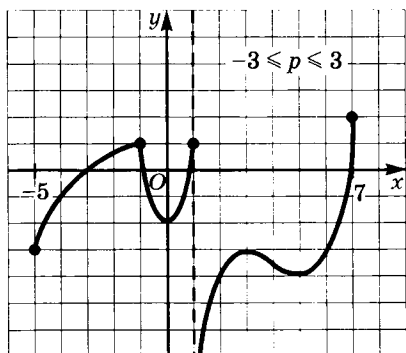


Рис. 80

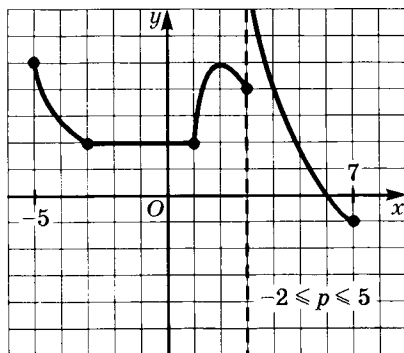


Рис. 81

Решите уравнение:

78. а)  $x^2 + 6x = 0$ ;      в)  $-x^2 - 12x = 0$ ;  
 б)  $-3x^2 = 18x$ ;      г)  $4x^2 = 28x$ .
79. а)  $3x^2 - 27 = 0$ ;      в)  $24 - 6x^2 = 0$ ;  
 б)  $18 - 6x^2 = 0$ ;      г)  $5x^2 - 30 = 0$ .
80. а)  $-5x^2 = 0$ ;      в)  $(3x + 4)^2 = 0$ ;  
 б)  $32 + 8x^2 = 0$ ;      г)  $-4x^2 = 40$ .
81. а)  $6x^2 - 13x - 15 = 0$ ;      в)  $9x^2 + 40x + 16 = 0$ ;  
 б)  $-5x^2 - 27x + 56 = 0$ ;      г)  $-3x^2 + 16x + 75 = 0$ .
82. а)  $-x^2 + 4x - 1 = 0$ ;      в)  $x^2 + 6x + 2 = 0$ ;  
 б)  $4x^2 - 10x + 5 = 0$ ;      г)  $-5x^2 - 6x + 1 = 0$ .
83. а)  $4x^2 + 28x + 49 = 0$ ;      в)  $-25x^2 + 80x - 64 = 0$ ;  
 б)  $-3x^2 - 24x - 49 = 0$ ;      г)  $2x^2 - 8x + 11 = 0$ .
84. а)  $(x - 1)(x - 2) = (3x + 2)(3 - x) + 2$ ;  
 б)  $(x + 4)(4x - 3) = x^2 + 5x + 4$ ;  
 в)  $x^2 + x + 12 = 2(x + 1)(x - 5)$ ;  
 г)  $19 - (x - 6)(2x + 1) = (x - 5)(x - 1)$ .
85. а)  $\frac{8x^2 + x}{8} = \frac{15}{32}$ ;  
 б)  $\frac{2x^2 - 3x}{2} + \frac{9x + 2}{3} = \frac{3 - 2x^2}{6}$ ;  
 в)  $\frac{10x^2 - 3x}{2} = \frac{7}{5}$ ;  
 г)  $\frac{7x + 15}{12} - \frac{6x^2 + 1}{6} = \frac{3 - 6x^2}{2}$ .

86. Одно из двух положительных чисел на 4 больше другого. Найдите эти числа, если их произведение равно 96.
87. Одна сторона прямоугольника в 3 раза больше, а другая на 8 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата, если она больше площади прямоугольника на  $54 \text{ см}^2$ .
88. Прямоугольный участок земли обнесён забором, длина которого 80 м. Площадь участка  $175 \text{ м}^2$ . Найдите стороны участка.
89. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 17 см, а один из катетов на 7 см меньше другого. Найдите площадь треугольника.
90. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 2 см больше одного катета и на 16 см больше другого. Найдите стороны треугольника.
91. Стороны двух квадратов пропорциональны числам 3 и 4. Если сторону второго квадрата уменьшить на 2 см, а сторону первого квадрата увеличить на 2 см, то разность площадей полученных квадратов будет равна  $35 \text{ см}^2$ . Найдите стороны данных квадратов.
92. Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, а его гипотенуза 20 см. Найдите катеты треугольника.
93. Диагональ прямоугольника равна 34 см, а его периметр 92 см. Найдите площадь прямоугольника.
94. При каком значении  $c$  вершина параболы  $y = x^2 - 10x + c$  отстоит от начала координат на 13 единичных отрезков?
95. При каком значении  $a$  вершина параболы  $y = ax^2 + 6x - 5$  отстоит от начала координат на 5 единичных отрезков?
96. а) Найдите значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ , если известно, что её график проходит через точки  $D(3; -2)$ ,  $F(0; 4)$ ,  $K(2; -4)$ .  
 б) Найдите значения  $p$  и  $q$  квадратичной функции  $y = x^2 + px + q$ , если известно, что её график проходит через точки  $A(2; -3)$ ,  $B(-3; 7)$ .
97. Решите уравнение методом введения новой переменной:
- а)  $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$ ;      в)  $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ ;  
 б)  $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$ ;      г)  $3x^4 - 13x^2 + 4 = 0$ .

**98.** Решите уравнение методом введения новой переменной:

а)  $(x^2 + 3)^2 - 7(x^2 + 3) + 12 = 0$ ;

б)  $3(6x^2 - x)^2 - 4(6x^2 - x) + 1 = 0$ ;

в)  $2(x^2 - 1)^2 - 13(x^2 - 1) - 24 = 0$ ;

г)  $(x^2 - 4x)^2 + 9(x^2 - 4x) + 20 = 0$ .

Составьте квадратное уравнение, зная его корни:

**99.** а)  $x_1 = -9$ ,  $x_2 = 4$ ;      в)  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = -3$ ;

б)  $x_1 = \frac{1}{6}$ ,  $x_2 = -\frac{2}{3}$ ;      г)  $x_1 = \frac{5}{6}$ ,  $x_2 = \frac{2}{15}$ .

**100.** а)  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ ;      в)  $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{5}$ ;

б)  $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{7}}{2}$ ;      г)  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{6}$ .

**101.** а) Вычислите  $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $3x^2 - 2x - 6 = 0$ .

б) Вычислите  $x_1^3 + x_2^3$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + x - 5 = 0$ .

**102.** а) Известно, что  $x_1^2 + x_2^2 = 13$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + bx + 6 = 0$ . Определите  $b$ .

б) Известно, что  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + x + c = 0$ . Определите  $c$ .

**103.** а) Разность корней квадратного уравнения  $-x^2 + 11x + q = 0$  равна 3. Найдите значение параметра  $q$ .

б) Один из корней квадратного уравнения  $3x^2 - 18x + c = 0$  в 5 раз больше другого. Найдите значение параметра  $c$ .

**104.** а) Найдите значение параметра  $m$  в уравнении  $x^2 - (m - 1)x + (4m^2 - 45m - 8) = 0$ , если произведение корней уравнения равно 28.

б) Найдите значение параметра  $m$  в уравнении  $x^2 - (3m^2 + 16m - 8)x + (m + 9) = 0$ , если сумма корней уравнения равна 4.

**105.** Не находя корней и дискриминанта квадратного уравнения  $147x^2 - 3x - 922 = 0$ , докажите, что оба его корня не могут быть одновременно натуральными числами.

**106.** Докажите, что если корни приведённого квадратного трёхчлена — натуральные числа, то все его коэффициенты — целые числа.

**107.** Пусть  $f(x) = x^2 + px + q$  и существуют два разных натуральных числа  $n_1$  и  $n_2$  такие, что  $f(n_1) = f(n_2) = 0$ . Докажите, что при любом натуральном  $n$  число  $f(n)$  — целое.

**108.** Пусть  $f(x) = ax^2 + bx + c$  и существуют два разных натуральных числа  $n_1$  и  $n_2$  такие, что  $f(n_1) = f(n_2) = 0$ . Верно ли, что при любом натуральном  $n$  число  $f(n)$  — целое?

**109.** Разложите квадратный трёхчлен на множители:

- а)  $x^2 + 22x - 23$ ;      в)  $-x^2 + 18x - 77$ ;  
б)  $-3x^2 - 8x + 3$ ;      г)  $7x^2 + 9x + 2$ .

**110.** Сократите дробь:

- а)  $\frac{x^2 + 2x - 63}{49 - x^2}$ ;      в)  $\frac{8x - x^2}{x^2 - 3x - 40}$ ;  
б)  $\frac{6x^2 + x}{6x^2 - 17x - 3}$ ;      г)  $\frac{5x^2 - 12x + 4}{25x^2 - 4}$ .

Упростите выражение:

**111.** а)  $\frac{4-a}{a} + \frac{a}{4+a}$ ;      в)  $\frac{1+x}{x} - \frac{x+2}{1+x}$ ;

б)  $\frac{2-c}{2+c} - \frac{2+c}{2-c}$ ;      г)  $\frac{3}{3+y} + \frac{y}{3-y}$ .

**112.** а)  $\frac{4a}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}$ ;      в)  $\frac{12x}{x^2-9} + \frac{x-3}{x+3}$ ;

б)  $\frac{2b-5}{b^2-5b} + \frac{1}{5-b}$ ;      г)  $\frac{m+2}{3m^2-3m} - \frac{1}{m-1}$ .

**113.** а)  $\frac{x^2-9}{2x+x^2} \cdot \frac{x^2-4}{5x+15}$ ;      в)  $\frac{x-x^2}{25-x^2} \cdot \frac{2x+10}{x^2-1}$ ;

б)  $\frac{4y^2}{y^2-4y+4} : \frac{y}{y-2}$ ;      г)  $\frac{a}{a+6} : \frac{6a^2}{a^2+36+12a}$ .

**114.** а)  $(5a-b)^2 \cdot \frac{5b}{25a^2-b^2}$ ;      в)  $\frac{8b}{b^2-16} \cdot (b^2-8b+16)$ ;

б)  $\frac{4ax+4a^2+x^2}{3x} : (2a^2+ax)$ ;      г)  $(3xy-y^2) : \frac{y^2-9x^2}{3y}$ .

**115.** а)  $\left( \frac{b}{b-3} - \frac{b}{b+3} - \frac{b^2+9}{9-b^2} \right) \cdot \frac{(3-b)^2}{3b+b^2}$ ;

б)  $\frac{y^2+5y}{(y-5)^2} : \left( \frac{5}{y+5} + \frac{y^2+25}{y^2-25} - \frac{5}{5-y} \right)$ .

Упростите выражение:

116. а)  $\frac{x+40}{x^3-16x} : \left( \frac{x-4}{3x^2+11x-4} - \frac{16}{16-x^2} \right);$

б)  $\frac{y^3-y}{y-4} \cdot \left( \frac{y-1}{2y^2+3y+1} - \frac{1}{y^2-1} \right).$

117. а)  $\left( \frac{1}{2-4m} + \frac{m+1}{8m^3-1} \cdot \frac{4m^2+2m+1}{1+2m} \right) : \frac{1}{4m-2};$

б)  $\frac{2+6p}{p} \cdot \left( \frac{1}{2-6p} + \frac{1}{27p^3-1} : \frac{1+3p}{1+3p+9p^2} \right).$

118. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения не зависит от значения переменной:

а)  $\frac{c+5}{c^2-64} : \left( \frac{4}{c+8} - \frac{12}{c^2+16c+64} \right) + \frac{4}{8-c};$

б)  $\left( \frac{4}{x-7} + \frac{14}{x^2-14x+49} \right) \cdot \frac{x^2-49}{2x-7} - \frac{7x-21}{x-7}.$

119. Найдите частное двух многочленов методом деления уголком:

а)  $\frac{5x^2+xy-4y^2}{x+y};$

в)  $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2};$

б)  $\frac{x^3+3x^2y+4xy^2+4y^3}{x+2y};$

г)  $\frac{y^3-5x^2y+4xy^2+3xy+15x^2}{5x+y}.$

120. Вычислите  $x^2 + y^2$ , если  $xy = 1$ ,  $x + y = 12$ .

121. Пусть  $xy = q$ ,  $x + y = p$ . Найдите:

а)  $x^2 + y^2;$

б)  $x^4 + y^4;$

в)  $x^5 + y^5.$

122. При каких значениях переменных многочлен принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение:

а)  $x^2 + 4xy + 4y^2 + 1;$

б)  $x^2 + 4xy + 5y^2 + 4y + 2;$

в)  $x^2 + 4xy + 4y^2 + 2x + 4y + 2;$

г)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2x + 2y - 4z + 12.$

123. Пусть  $x + y = 6$ . Докажите, что  $x^2 + y^2 = 2(18 - xy)$ .

124. Пусть  $x - y = 1$ . Докажите, что  $x^3 - y^3 = 1 + 3xy$ .

125. Пусть  $5x - 3y = 0$ . Найдите значение выражения:

а)  $25x^2 + 9y^2 + 70x - 42y - 30xy - 1;$

б)  $10x^2 - xy - 3y^2 + 2.$

**126.** При каких значениях  $x$  и  $y$  многочлен

$$11x^2 + 4xy + y^2 - 4y + 1$$

принимает наименьшее значение, если  $x - y = 2$ ?

**127.** При каких значениях  $x$  и  $y$  многочлен

$$x^2 + 2xy - 3y^2 - 5x - y + 1$$

принимает наибольшее значение, если  $x + y = 1$ ?

**128.** При каких значениях  $x$  и  $y$  многочлен

$$x^2 - 11xy + y^2 + 2x + 4y + 10$$

принимает наименьшее значение, если  $x + y = 2$ ?

**129.** Пусть  $3x - 2y - z = 1$ ,  $x + 2y + 2z = 5$ . Найдите значение выражения  $4z + 6y - 5x$ .

Решите уравнение:

**130.** а)  $\frac{7x+12}{x^2+x} = \frac{7}{x} + \frac{5x}{x+1}$ ;      в)  $\frac{x}{x-2} - \frac{5}{x+2} = \frac{10-x}{x^2-4}$ ;

б)  $\frac{x}{x+5} - \frac{x+5}{5-x} = \frac{50}{x^2-25}$ ;      г)  $\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2-3x} = \frac{3x-7}{3-x}$ .

**131.** а)  $\frac{6}{x^2-4x+3} - \frac{13-7x}{1-x} = \frac{3}{x-3}$ ;

б)  $\frac{8}{x^2-6x+8} + \frac{1-3x}{2-x} = \frac{4}{x-4}$ .

**132.** а)  $2x + \frac{2}{x} - 5 = 0$ ;      в)  $3x + \frac{3}{x} + 10 = 0$ ;

б)  $3x - 2x^{-1} - 1 = 0$ ;      г)  $4x + 5 - 6x^{-1} = 0$ .

**133.** Решите уравнение методом введения новой переменной:

а)  $\frac{3}{x^2-2x-2} - x^2 + 2x = 0$ ;

б)  $\frac{x}{x^2-2} + \frac{6(x^2-2)}{x} = 7$ ;

в)  $1 - \frac{15}{(x^2-4x)^2} = \frac{2}{x^2-4x}$ ;

г)  $\frac{x-3}{x^2+10x+27} + \frac{x^2+10x+27}{x-3} = -2$ .

- 134.** Туристы, совершая путешествие, проплыли на лодке по течению горной реки 54 км, а затем ещё 6 км по озеру за такое же время, за которое плот проплывает по этой реке 21 км. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки 12 км/ч.
- 135.** Катер проплывает 8 км против течения реки и ещё 30 км по течению за то же время, за которое он может проплыть по озеру 36 км. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч.
- 136.** Велосипедист проехал от города до поворота на турбазу 24 км с одной скоростью, а после поворота снизил скорость на 3 км/ч и проехал до турбазы ещё 6 км. Найдите скорость велосипедиста от города до поворота, если на весь путь он затратил 2 ч 40 мин.
- 137.** Автогонщик на ралли из-за поломки автомобиля потерял 4 мин, а затем на оставшихся 120 км пути наверстал потерянное время, увеличив скорость на 20 км/ч. Найдите первоначальную скорость автогонщика.
- 138.** В состязании по скалолазанию на трассе длиной 10 м соревнуются два спортсмена; скорость одного из них на 0,2 м/с больше скорости другого. Найдите скорости движения спортсменов, если один из них финишировал на 2,5 с быстрее другого.
- 139.** Из города  $N$  в город  $M$ , находящийся на расстоянии 60 км от  $N$ , выехал автобус, а через 20 мин вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 40 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорости легкового автомобиля и автобуса, если автобус прибыл в город  $M$  на 12 мин позже автомобиля.
- 140.** Из пункта  $A$  в пункт  $B$ , находящийся на расстоянии 20 км от  $A$ , выехал автобус, а через 7 мин вслед за ним выехал грузовой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найдите скорости каждого участника движения, если грузовой автомобиль прибыл в пункт  $B$  на 3 мин раньше автобуса.
- 141.** Выпишите в порядке возрастания все пятизначные числа, в десятичную запись которых входят пять разных цифр: 3; 4; 6; 8 и 9.

- 142.** Выпишите в порядке убывания все шестизначные числа, в десятичную запись которых входят шесть различных цифр: 0; 3; 5; 6; 8 и 9.
- 143.** Придумайте какой-либо квадратный трёхчлен, между корнями которого заключено ровно 77 натуральных чисел.
- 144.** Сколько существует разных целых чисел, квадрат которых не превосходит 10 003? Сколько среди них натуральных?
- 145.** Какой процент среди трёхзначных чисел составляют полные квадраты?
- 146.** Какой процент среди четырёхзначных чисел составляют полные кубы?
- 147.** Покажите, что среди 98 двузначных натуральных чисел есть хотя бы два равных.
- 148.** Какое наименьшее количество различных трёхзначных чисел нужно взять, чтобы среди них наверняка было бы одно число:  
 а) оканчивающееся не на нуль;  
 б) со средней цифрой нуль;  
 в) без нулей в их десятичной записи?
- 149.** Какое наименьшее количество натуральных чисел надо выписать, чтобы среди них наверняка были бы два числа с одинаковой последней цифрой?
- 150.** Какое наименьшее количество натуральных чисел нужно выписать, чтобы среди них наверняка были бы два числа с одинаковой первой цифрой?

Вычислите:

**151.** а)  $2^{-3} \cdot 2^5 \cdot (2^{-2})^4$ ;      в)  $(5^{-1})^4 \cdot 5^9 \cdot 5^{-2}$ ;

б)  $\frac{3^3 \cdot 9^{-3}}{(3^4)^{-2}}$ ;      г)  $\frac{(7^{-2})^3 \cdot 7^{-7}}{49^{-6}}$ .

**152.** а)  $\frac{5^{-4} \cdot 15^6}{(3^{-5})^{-2}}$ ;      в)  $\frac{3^5 \cdot 6^{-6}}{(2^3)^{-4}}$ ;

б)  $\frac{4^3 \cdot 14^{-3}}{7^{-5} \cdot 2^7}$ ;      г)  $\frac{8^{-3} \cdot 10^5}{5^6 \cdot 2^{-2}}$ .



**153.** Найдите значение выражения:

а)  $\frac{m^6(m^{-2})^5}{m^{-3}m^7}$  при  $m = 0,5$ ;

б)  $\frac{a^{-3}b^{-5}(a^2b)^{-1}}{(a^{-3})^2b^{-4}}$  при  $a = 15$ ,  $b = 5$ ;

в)  $\frac{n^{-5}(n^{-1})^{-9}}{n^{-4}n^{10}}$  при  $n = 10$ ;

г)  $\frac{(cd^3)^{-2}c^{-8}}{(c^{-5})^2(d^{-3})^3}$  при  $c = 6$ ,  $d = 3$ .

**154.** Упростите выражение:

а)  $\left(\frac{x}{x^2 - 2x + 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x - 2}\right) \cdot \frac{1}{(2x - 2)^{-2}}$ ;

б)  $\left(\frac{y + 2}{y^2 - y - 6} - \frac{y}{y^2 - 6y + 9}\right)^{-1} : (3y - 9)^2$ .

Решите иррациональное уравнение:

**155.** а)  $\sqrt{x + 4} = 3$ ;      в)  $\sqrt{3x - 1} = 2\sqrt{2}$ ;

б)  $\sqrt{\frac{x + 7}{x + 2}} = 3$ ;      г)  $\sqrt{\frac{2x - 8}{6 - x}} = 2$ .

**156.** а)  $\sqrt{x^2 - 5x} = 6$ ;      в)  $\sqrt{x^2 + 6x} = 4$ ;

б)  $\sqrt{x^2 - 5x + 5} = 1$ ;      г)  $\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 4$ .

**157.** а)  $\sqrt{x} = 2 - x$ ;      в)  $\sqrt{x + 2} = x$ ;

б)  $\sqrt{7 - x} = x - 1$ ;      г)  $\sqrt{12 - x} = x$ .

**158.** а)  $2\sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 4} = 1$ ;

б)  $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x - 2}$ ;

в)  $\sqrt{x + 6} - 2\sqrt{x - 2} = 1$ ;

г)  $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 2} = \sqrt{2x - 5}$ .

**159.** а)  $\sqrt{2x^2 + 8x + 7} - 2 = x$ ;      в)  $\sqrt{2x^2 + 8x + 1} - x = 3$ ;

б)  $x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 1$ ;      г)  $x + \sqrt{2x^2 - 8x + 1} = 3$ .

Решите уравнение методом введения новой переменной:

160. а)  $x^2 + 2x - 2\sqrt{x^2 + 2x} = 3$ ;

б)  $x^2 + 6x + 24 = 10\sqrt{x^2 + 6x}$ .

161. а)  $\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$ ;

б)  $\frac{3}{\sqrt{x+1}+1} + 2\sqrt{x+1} = 5$ .

162. а)  $10\sqrt{x^2 - x - 1} - \frac{3}{\sqrt{x^2 - x - 1}} = 7$ ;

б)  $2\sqrt{x^2 - 9x + 23} - 5 = \frac{3}{\sqrt{x^2 - 9x + 23}}$ .

163. Сравните значения выражений:

а)  $\sqrt{192}$  и  $\frac{1}{7-4\sqrt{3}} - \frac{1}{7+4\sqrt{3}}$ ;

б)  $3 + 2\sqrt{2}$  и  $\sqrt{7} + \sqrt{10}$ ;

в)  $\sqrt{198}$  и  $\frac{1}{5\sqrt{2}-7} - \frac{1}{5\sqrt{2}+7}$ ;

г)  $2\sqrt{5} + 3$  и  $\sqrt{10} + \sqrt{19}$ .

164. Упростите выражение и найдите его значение:

а)  $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+4} + \frac{4\sqrt{m}}{m-16}$  при  $m = \frac{16}{9}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-5} - \frac{5\sqrt{n}}{n-25}$  при  $n = \frac{25}{4}$ .

165. Упростите выражение:

а)  $\left(\sqrt{x} + \frac{3-x}{\sqrt{x}+1}\right) : \frac{\sqrt{x}+3}{1-x}$ ;

в)  $\left(\frac{6-y}{1+\sqrt{y}} + \sqrt{y}\right) : \frac{6+\sqrt{y}}{y-1}$ ;

б)  $(2 + \sqrt{b})\left(\frac{b-\sqrt{b}}{\sqrt{b}-1} - 2\sqrt{b} + 2\right)$ ;

г)  $\left(1 + 2\sqrt{a} - \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}+1}\right)(1 - \sqrt{a})$ .

**166.** Докажите тождество:

а)  $\left( \frac{\sqrt{x^3} - 1}{\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} \right) : \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} + 1;$

б)  $\frac{1 + \sqrt{a}}{1 - a} \cdot \left( \frac{1 + \sqrt{a^3}}{1 + \sqrt{a}} - \sqrt{a} \right) = 1 - \sqrt{a}.$

**167.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной  $x$  значение выражения не зависит от  $x$ :

а)  $\left( \frac{3\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{3 - x} - 2 \right)^{-1} : \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4};$       б)  $\left( \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} + 1 \right)^{-1} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}.$

**168.** Найдите значение выражения:

а)  $\sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2} + 3\sqrt{2};$

б)  $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{7})^2};$

в)  $\sqrt{(2\sqrt{15} - 3\sqrt{7})^2} - 3\sqrt{7};$

г)  $\sqrt{(\sqrt{10} - 3)^2} + \sqrt{(\sqrt{10} - 4)^2}.$

**169.** Решите уравнение:

а)  $x^2 - 5(\sqrt{x})^2 - 6 = 0;$       в)  $x^2 + (\sqrt{x - 3})^2 - 9 = 0;$

б)  $x^2 + \sqrt{(x + 1)^2} - 3 = 0;$       г)  $x^2 + \sqrt{(x - 3)^2} - 9 = 0.$

Решите неравенство:

**170.** а)  $3 + 2x < -4;$       в)  $2 + 5x > -3;$

б)  $1 - 3x \geq 2;$       г)  $1 - 2x \leq 3.$

**171.** а)  $\frac{x - 2}{12} \geq \frac{3x - 5}{15};$       в)  $\frac{2 + x}{10} > \frac{3x - 1}{15};$

б)  $\frac{3 - 2x}{9} \leq \frac{2x + 7}{6};$       г)  $\frac{3x - 1}{8} > \frac{3 - 5x}{20}.$

**172.** а)  $(x - 3)(x + 3) > x^2 + 5x - 4;$

б)  $(x + 4)^2 \leq x^2 + 6x + 10;$

в)  $(3 - 2x)(3 + 2x) \leq 10 - 4x^2 + 5x;$

г)  $(1 - 3x)^2 > 9x^2 + 3x - 8.$

**173.** а) При каких значениях  $q$  уравнение  $x^2 + 5x + q = 0$  не имеет корней? Укажите такое наименьшее целое значение  $q$ .

б) При каких значениях  $q$  уравнение  $x^2 - 7x + q = 0$  имеет два корня? Укажите такое наибольшее целое значение  $q$ .

174. а) При каких значениях  $a$  уравнение  $ax^2 + 6x - 3 = 0$  имеет два корня?

б) При каких значениях  $a$  уравнение  $ax^2 + 5x + 15 = 0$  не имеет корней?

175. а) Найдите наименьшее целое значение  $p$ , при котором разность дробей  $\frac{3-p}{4}$  и  $\frac{5-2p}{18}$  отрицательна.

б) Найдите наибольшее целое значение  $k$ , при котором сумма дробей  $\frac{5-2k}{4}$  и  $\frac{9+2k}{6}$  положительна.

Решите неравенство:

176. а)  $x^2 + 3x + 2 < 0$ ;      в)  $x^2 - 7x + 12 > 0$ ;

б)  $-x^2 - x + 12 \leq 0$ ;      г)  $-x^2 + 3x + 4 \geq 0$ .

177. а)  $2x^2 - 9x + 4 \geq 0$ ;      в)  $3x^2 - 4x + 1 \leq 0$ ;

б)  $-9x^2 - 8x + 1 > 0$ ;      г)  $-2x^2 + x + 1 < 0$ .

178. а)  $x^2 - 81 \leq 0$ ;      в)  $121 \leq x^2$ ;

б)  $-x^2 > 4x$ ;      г)  $x^2 - 2x < 0$ .

179. а)  $4x^2 - 12x + 9 > 0$ ;      в)  $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ ;

б)  $-2x^2 + x - 1 < 0$ ;      г)  $x^2 - 2x + 5 < 0$ .

Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

180. а)  $\sqrt{4x-9}$ ;      б)  $\frac{1}{\sqrt{5-7x}}$ ;      в)  $\sqrt{3-9x}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt{5x+3}}$ .

181. а)  $\sqrt{x^2-3x}$ ;      в)  $\sqrt{36-x^2}$ ;

б)  $\frac{1}{\sqrt{12-3x^2}}$ ;      г)  $\frac{1}{\sqrt{4x^2-8x}}$ .

182. а)  $\sqrt{x^2-8x+15}$ ;      в)  $\sqrt{(x^2+7x+12)^{-1}}$ ;

б)  $\sqrt{(-x^2+9x-20)^{-1}}$ ;      г)  $\sqrt{-x^2-11x-28}$ .

183. а)  $\sqrt{(x^2+8x+16)^{-1}}$ ;      в)  $\sqrt{x^2+6x+10}$ ;

б)  $\sqrt{(-x^2+2x-3)^{-1}}$ ;      г)  $\sqrt{-x^2+2x-1}$ .

**184.** Найдите, при каких значениях переменной имеет смысл выражение:

а)  $\frac{\sqrt{3-5x-2x^2}}{7x}$ ;      в)  $\frac{\sqrt{2-5x-3x^2}}{9x}$ ;

б)  $\frac{\sqrt{3x^2-x-14}}{2x+5}$ ;      г)  $\frac{\sqrt{3x^2-4x-15}}{7-2x}$ .

**185.** Найдите область определения функции:

а)  $y = \sqrt{2x+8}$ ;      в)  $y = \sqrt{(3x-18)^{-1}}$ ;

б)  $y = \frac{1}{\sqrt{10x^2-3x-1}}$ ;      г)  $y = \sqrt{10+3x-x^2}$ .

**186.** Найдите значение  $k$ , при котором квадратное уравнение:

а)  $5x^2 - kx + 5 = 0$  имеет два корня;

б)  $3x^2 + 2kx - (k-6) = 0$  имеет корни;

в)  $3x^2 + 2kx + 12 = 0$  не имеет корней;

г)  $2x^2 - kx + k + 6 = 0$  имеет не более одного корня.

**187.** а) Одна сторона прямоугольника на 3 см больше другой, а его площадь больше 70 см<sup>2</sup>. Какую длину может иметь меньшая сторона прямоугольника?

б) Один из катетов прямоугольного треугольника на 5 см меньше другого, а площадь этого треугольника больше 25 см<sup>2</sup>. Какую длину может иметь больший катет?

## Приложение

### ПРОСТЕЙШИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ОРГАНИЗОВАННЫЙ ПЕРЕБОР ВАРИАНТОВ. ДЕРЕВО ВАРИАНТОВ

#### К главе 1 «Алгебраические дроби»

**П.1.** Значение переменной  $d$  случайно выбирают среди целых чисел от  $-5$  до  $4$  включительно. Определите, для скольких значений  $d$  значение дроби  $\frac{d(4 + d^2)}{d^3(16 - d^4)}$ :

- а) не определено;                      в) отрицательно;  
б) отлично от нуля;                    г) положительно.

**П.2.** Значение переменной  $a$  случайно выбирают среди целых чисел от  $0$  до  $9$  включительно.

а) Для скольких значений переменной  $a$  значение дроби  $\frac{a^2(a^2 - 4)}{a(a - 2)}$  не определено?

Упростите дробь и найдите вероятность того, что значение дроби является:

- б) не целым числом; в) двузначным числом; г) чётным числом.

**П.3.** Заполните таблицу значений дроби (если дробь при соответствующем значении  $t$  не имеет смысла, ставьте прочерк):

$t$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{t^2 - 3t}{t^2 - 9}$										

Какова вероятность того, что при случайном выборе значения переменной  $t$  из первой строки таблицы значение дроби будет:

- а) отрицательным числом;  
б) целым числом;  
в) удалено от числа  $0$  менее чем на  $3$ ?

**П.4.** Числитель дроби равен  $1$ ,  $3$ ,  $7$  или  $10$ , а знаменатель меньше числителя на  $2$  или на  $5$ .

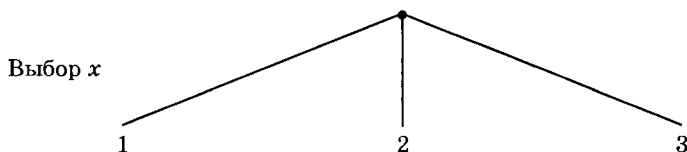
- а) У скольких дробей знаменатель равен  $5$ ?

- б) Запишите все составленные обыкновенные дроби в виде десятичных дробей и составьте упорядоченный ряд данных.
- в) Найдите объём и размах полученного ряда.
- г) Постройте круговую диаграмму распределения данных.

**П.5.** Знаменатель дроби выбирают из чисел  $-10, -4, 4, 10$ , а её числитель отличается от квадрата выбранного знаменателя на 3.

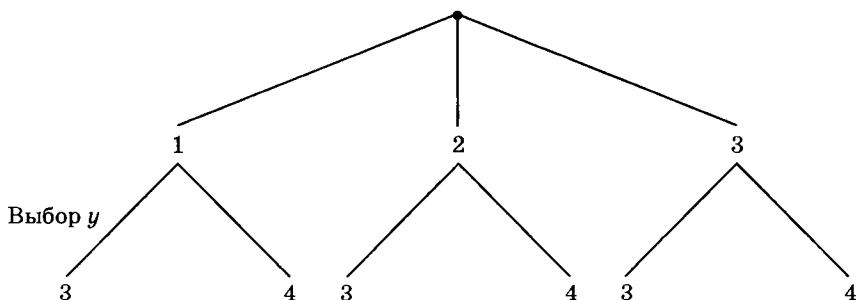
- а) Выпишите все возможные значения числителя дроби.
- б) Сколько всего дробей можно составить?
- в) Выпишите все полученные положительные числа.
- г) Укажите наибольшее отрицательное число.

Перебор всех возможных вариантов целесообразно организовать каким-либо способом. Одним из наиболее распространённых приёмов является так называемое *дерево вариантов*. Покажем, как это выглядит, на конкретном примере. Рассмотрим дробь  $\frac{2x - y}{x + y}$ . Допустим, что следует найти все её значения, если переменная  $x$  принимает значения 1, 2, 3, а переменная  $y$  — значения 3 или 4. Сначала изобразим выбор  $x$  (рис. 82).



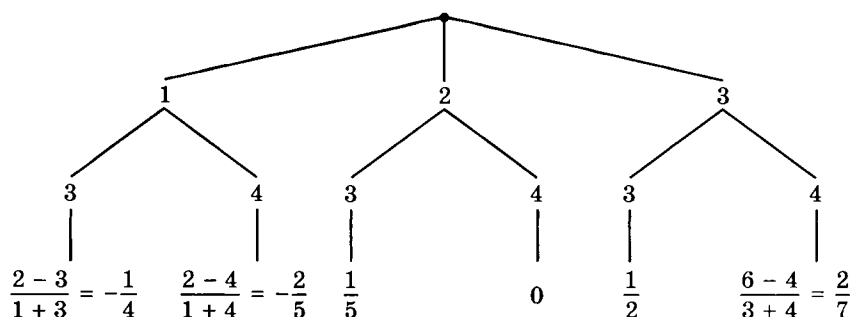
**Рис. 82**

Для каждого из значений  $x$  можно выбрать одно из двух значений  $y$  (3 или 4). Этот выбор удобно изобразить, как показано на рис. 83.



**Рис. 83**

И теперь остаётся вычислить значения числовых дробей. На рис. 84 представлен итог (некоторые промежуточные вычисления пропущены).



**Рис. 84**

Дерево вариантов занимает много места на листе бумаги. Зато на нём, как на картинке, хорошо виден весь процесс перебора вариантов. Дерево вариантов можно рисовать и снизу вверх, и из центра в стороны, а можно собрать всё в таблицы.

$\frac{2x - y}{x + y}$					
$x = 1$		$x = 2$		$x = 3$	
$y = 3$	$y = 4$	$y = 3$	$y = 4$	$y = 3$	$y = 4$
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$

**П.6.** Нарисуйте дерево вариантов значений дроби  $\frac{ab}{b-a}$ , если переменная  $a$  принимает значения 2 или 4, а переменная  $b$  — значения 2, 3 или 4. В скольких случаях дробь не имеет смысла?

Какова вероятность того, что при случайном выборе значений  $a$  и  $b$  значение дроби будет:

- а) положительным;
- б) меньше 5?

**П.7.** Нарисуйте дерево вариантов значений дроби  $\frac{k+n+m}{k(n-m)}$ , если каждая из переменных  $k$ ,  $n$ ,  $m$  принимает значения  $-1$  или  $2$ .

Какова вероятность того, что при случайном выборе значений переменных значение дроби будет:

- а) не определено;
- б) целым числом;
- в) положительным числом?



**П.8.** Выпускник школы собирается поступать на физический или на математический факультет федерального, технического или педагогического университета одного из городов *A, B, C*. Нарисуйте дерево возможных вариантов выбора университета и факультета, если известно, что:

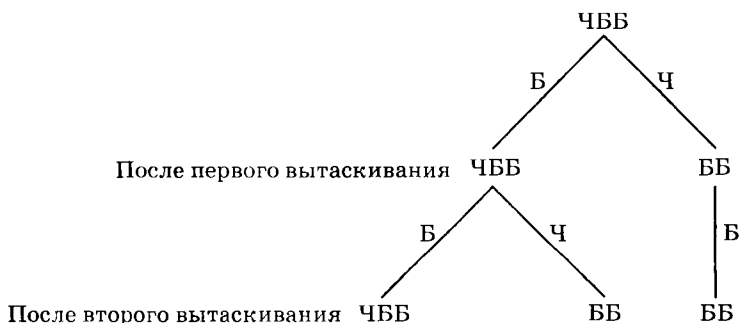
- а) в городе *B* нет федерального университета;
- б) в городе *A* в педагогическом университете нет физического факультета;
- в) технический университет есть только в городе *C*, но там нет математического факультета;
- г) во всех городах есть все указанные университеты, а в университетах — указанные факультеты.

**П.9.** Учительница сказала, что на следующем уроке вызовет к доске Олю, а потом её соседа по парте Толю для решения задач из домашней работы. За ответ у доски, как обычно, можно получить отметку 2, 3, 4 или 5.

- а) Нарисуйте дерево возможных вариантов получения отметок Олей и Толей.
- б) Сколько всего вариантов получения отметок Олей и Толей?
- в) Сколько всего вариантов, при которых получены только «четвёрки» и «пятерки»?
- г) Сколько всего вариантов, в которых нет «двоек»?

В некоторых случаях дерево вариантов может оказаться не таким симметричным, как в задачах П.6, П.7, П.8, П.9. Рассмотрим пример.

В непрозрачном пакете лежат одинаковые по размеру шары: один чёрный и два белых. Наудачу вытаскивают один шар. Если он окажется белым, то его возвращают обратно. Если он окажется чёрным, то его выкладывают на стол. Требуется нарисовать дерево вариантов состава шаров в пакете после двух вытаскиваний. Ответ приведён на рис. 85.



**Рис. 85**

- П.10. На столе рублями вверх лежат 4 неразличимые по виду рублёвые монеты. Три из них настоящие, а одна — фальшивая, у которой на обороте ничего не изображено. Наудачу берут поочерёдно три монеты. Настоящую монету кладут в кошелёк, а фальшивую — выбрасывают.
- а) Нарисуйте дерево вариантов состава монет на столе.
  - б) В скольких случаях в кошелёк будет добавлено 3 рубля?
  - в) Какова вероятность того, что в кошелёк ничего не будет добавлено?
  - г) Какова вероятность того, что в кошелёк будет добавлено ровно 2 рубля?

**К главе 2 «Функция  $y = \sqrt{x}$ .  
Свойства квадратного корня»**

- П.11. В записи  $* \in \blacksquare$  вместо  $*$  можно поставить одно из чисел:  $-19, -0, (19), \frac{19}{91}, \sqrt{19}$ , а вместо  $\blacksquare$  — один из символов числовых множеств:  $N, Z, Q$ . Будут получаться различные утверждения (верные или неверные), например:  $-19 \in N, -0, (19) \in Q$  и т. п.
- а) Сколько получится утверждений, у которых на первом месте стоит  $\sqrt{19}$ ?
  - б) Изобразите дерево вариантов составления всевозможных утверждений.
  - в) Сколько всего утверждений получится?
  - г) Сколько среди них верных утверждений?
- П.12. В записи  $* \notin \blacksquare$  вместо  $*$  можно поставить одно из чисел:  $-3, 0, (317), \frac{17}{3}, \sqrt{3}$ , а вместо  $\blacksquare$  — один из символов числовых множеств:  $N, Z, Q$ . Будут получаться различные утверждения (верные или неверные), например:  $-3 \in N, \sqrt{3} \notin Q$  и т. п.
- а) Сколько получится утверждений, у которых на последнем месте стоит  $Z$ ?
  - б) Изобразите дерево вариантов составления всевозможных утверждений.
  - в) Сколько всего утверждений получится?
  - г) Сколько среди них верных утверждений?

**П.13.** В записи  $* \Omega \blacksquare$  вместо  $*$  можно произвольно поставить одно из чисел:  $-\sqrt{25}$ ,  $\sqrt{2,5}$ ,  $\sqrt{0,25}$ , вместо  $\Omega$  — поставить  $\in$  или  $\notin$ , а вместо  $\blacksquare$  — символ числового множества  $Q$  или  $R$ .

- Изобразите дерево вариантов составления таких утверждений.
- Сколько получится утверждений, содержащих символ  $\notin$ ?
- Сколько всего утверждений получится?
- Сколько среди них верных утверждений?

**П.14.** а) Между любыми цифрами числа 123 456 789 можно поставить запятую. Сколько при этом получится десятичных дробей?

Какова вероятность того, что после вставки запятой получится число:

- больше миллиона;
- меньше ста;
- дробная часть которого больше 0,3?

**П.15.** Заполните таблицу значений выражения (если выражение при соответствующем значении  $t$  не имеет смысла, ставьте прочерк):

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{1 + (t - 2)(6 - t)}$										

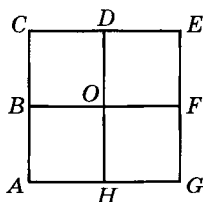
Какова вероятность того, что при случайном выборе значения переменной  $t$  из первой строки таблицы значение выражения:

- не будет существовать;
- будет целым числом;
- будет больше двух?

**П.16.** Дано выражение  $\sqrt{n + 1}$ . Значение переменной  $n$  случайно выбирают среди целых чисел от 0 до 99 включительно.

- Сколько всего значений может принять данное выражение?
- Сколько среди них целых чисел?
- Сколько среди них иррациональных чисел?
- Сколько среди них чисел больше семи?

- П.17.** Дано выражение  $\sqrt{n+1}$ . Значение переменной  $n$  случайно выбирают среди целых чисел от 0 до 99 включительно. Какова вероятность того, что значение выражения при этом будет:
- а) не определено;
  - б) меньше десяти;
  - в) принадлежать интервалу  $(7; 10)$ ;
  - г) принадлежать отрезку  $[2; 6]$ ?
- П.18.** Рассматриваются отличные от нуля целые числа, модуль которых меньше 11.
- а) Сколько всего существует таких чисел?
  - б) Сколько среди них отрицательных чисел?
  - в) Сколько среди них чисел, модуль которых больше 7?
  - г) Сколько среди них чисел из промежутка  $(-10; -1)$ ?
- П.19.** В прямоугольнике с вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(9; 3)$ ,  $D(9; 0)$  отметили все точки с целочисленными координатами.
- а) Сколько всего отметили точек (включая точки, лежащие на сторонах)?
  - б) Сколько таких точек лежит внутри (не на сторонах) прямоугольника?
  - в) Сколько таких точек лежит на графике функции  $y = \sqrt{x}$ ?
  - г) Сколько таких точек лежит выше графика функции  $y = \sqrt{x}$ ?
- П.20.** В квадрате  $ACEG$  надо пройти по отмеченным линиям (см. рис. 86) из вершины  $A$  в вершину  $E$ , двигаясь только вверх или вправо.



**Рис. 86**

- а) Выпишите все пути, проходящие через вершину  $G$ .
- б) Сколько путей проходит через точку  $H$ ?
- в) Сколько путей проходит через точку  $B$ ?
- г) Сколько всего имеется таких путей?

### К главе 3 «Квадратичная функция.

$$\text{Функция } y = \frac{k}{x} \text{ »}$$

- П.21.** Нарисуйте график функции  $y = 0,5x^2$  на отрезке  $[0; 4]$ . Сколько точек с целыми координатами:
- а) принадлежит этому графику;
  - б) лежит ниже графика и выше оси абсцисс;
  - в) лежит выше графика и ниже прямой  $y = 5$ ;
  - г) лежит ниже графика и выше прямой  $y = 0,5x$ ?
- П.22.** Сколько точек, координаты которых — натуральные числа, лежит на графике функции:
- а)  $y = \frac{1}{x}$ ;    б)  $y = \frac{5}{x}$ ;    в)  $y = \frac{6}{x}$ ;    г)  $y = \frac{12}{x}$ ?
- П.23.** Сколько точек с целочисленными координатами лежит:
- а) ниже графика функции  $y = \frac{4}{x}$  в первой координатной четверти\*;
  - б) выше графика функции  $y = \frac{5}{x}$  в третьей координатной четверти\*;
  - в) ниже графика функции  $y = -\frac{3}{x}$  во второй координатной четверти\*;
  - г) между графиками функций  $y = \frac{2}{x}$  и  $y = -\frac{2}{x}$  (не включая точки на координатных осях)?
- П.24.** Для контрольной работы составляют различные квадратичные функции вида  $y = ax^2 + bx + c$ . Коэффициент  $a$  произвольно выбирают из чисел 2 или 3, а коэффициенты  $b$  и  $c$  произвольно выбирают из чисел  $-3, -4$  (совпадения допустимы). Нарисуйте дерево вариантов составления таких квадратичных функций.
- а) Сколько всего таких функций можно составить?
  - б) Сколько среди них функций, у которых  $b = c$ ?
  - в) Сколько среди них функций, у которых коэффициенты  $a, b, c$  попарно различны?

---

\* Не на осях координат.

- П.25.** Для контрольной работы составляют различные функции вида  $y = \frac{1}{x+a} + b$ .
- Коэффициенты  $a$  и  $b$  произвольно выбирают из чисел  $-1, 1, 2$  (совпадения допустимы).
- Нарисуйте дерево вариантов составления таких функций.
  - Сколько всего таких функций можно составить?
  - Сколько среди них функций, у которых  $a \neq b$ ?
  - Сколько функций вида  $y = \frac{k}{x+a} + b$  можно составить, если коэффициент  $k$  произвольно выбирают из чисел  $-3$  или  $3$ ?
- П.26.** В уравнении параболы  $y = -x^2 + c$  коэффициент  $c$  случайным образом выбирают из чисел  $-1, 1, 2, 3, 4$ . Какова вероятность того, что эта парабола:
- не пересечёт четвёртую координатную четверть;
  - будет расположена ниже прямой  $y = \sqrt{10}$ ;
  - пересечёт ось абсцисс в двух точках;
  - будет иметь хотя бы одну общую точку с прямой  $y = 2$ ?
- П.27.** Коэффициент  $k$  случайным образом выбирают из чисел  $-2, -1, 1, 2, 3$ . Какова вероятность того, что график функции  $y = \frac{k}{x}$ :
- пересекает и первую, и вторую координатную четверть;
  - симметричен относительно начала координат;
  - проходит через точку  $(-1, -2)$ ;
  - содержит ровно две точки с целочисленными координатами?
- П.28.** Коэффициент  $b$  случайным образом выбирают из чисел  $-5, -4, \dots, 3, 4$ . Какова вероятность того, что график функции  $y = x^2 + bx$ :
- пройдёт через начало координат;
  - симметричен относительно оси ординат;
  - содержит точки, у которых обе координаты положительны;
  - не содержит точек, у которых обе координаты отрицательны?
- П.29.** Случайным образом выбирают точку с целочисленными координатами так, чтобы она лежала выше графика

функции  $y = 2x^2$  и ниже графика прямой  $y = 9$ . Какова вероятность того, что эта точка лежит:

- а) выше оси абсцисс;
- б) на оси ординат;
- в) левее оси ординат;
- г) выше прямой  $y = 7$ ?

**П.30.** В прямоугольнике  $АСКМ$  (рис. 87) надо пройти по отмеченным линиям из вершины  $A$  в вершину  $K$ , двигаясь только вверх или вправо. Сколько всего путей:

- а) проходит через вершину  $M$ ;
- б) проходит через точку  $H$ ;
- в) проходит через точку  $B$ ;
- г) можно проложить из вершины  $A$  в вершину  $K$ ?

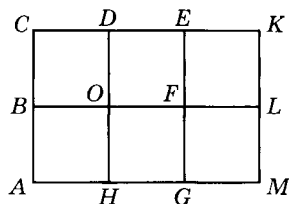


Рис. 87

#### К главе 4 «Квадратные уравнения»

**П.31.** Для контрольной работы составляют различные квадратные уравнения вида  $x^2 + bx + c = 0$ . Коэффициент  $b$  произвольно выбирают из чисел  $-2, -4, -6$ , а коэффициент  $c$  — из чисел  $4, 9$ .

- а) Нарисуйте дерево вариантов составления таких квадратных уравнений.
- б) Сколько всего таких уравнений можно составить?
- в) Сколько среди них уравнений, дискриминант которых равен нулю?
- г) Сколько среди них уравнений, которые имеют хотя бы один корень?

**П.32.** Для контрольной работы составляют различные квадратные уравнения вида  $ax^2 + bx + 1 = 0$ . Коэффициент  $a$  произвольно выбирают из чисел  $4, 8, 9$ , а коэффициент  $b$  — из чисел  $2, 4, 6$ .

- а) Нарисуйте дерево вариантов составления таких квадратных уравнений.
- б) Сколько всего таких уравнений можно составить?
- в) Сколько среди них уравнений, дискриминант которых равен нулю?
- г) Сколько среди них уравнений, которые имеют хотя бы один корень?

**П.33.** Для составления квадратного уравнения с заранее заданными корнями  $x_1$  и  $x_2$  поступают так. Сначала составляют произведение  $(x - x_1)(x - x_2)$ . Затем раскрывают скобки и приводят подобные члены. Полученный квадратный трёхчлен приравнивают нулю. Сколько различных квадратных уравнений можно составить таким образом, выбирая:

- а) корень  $x_1$  из чисел 1, 2, а корень  $x_2$  из чисел 5, 6;
- б) корень  $x_1$  из чисел 1, 2, 3, а корень  $x_2$  из чисел 4, 5, 6;
- в) оба корня из чисел 2, 3, 4, если совпадение корней допустимо;
- г) оба корня из чисел 2, 3, 4, если корни должны быть различными?

**П.34.** Заполните таблицу значений дискриминанта для уравнений вида  $ax^2 + bx + c = 0$ :

Уравнение	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
$a$	3	7	9	-1	4	-1	4	-3	-1	1
$b$	7	7	6	0	5	6	7	-5	2	3
$c$	4	2	1	3	2	-8	4	4	-1	0
$D$										

Какова процентная частота уравнений:

- а) не имеющих корней;
- б) имеющих единственный корень;
- в) имеющих хотя бы один корень?

**П.35.** а) Откройте задачник на с. 171. В каждом из заданий № 25.3—25.6 определите количество корней квадратного уравнения. Результаты поочерёдно внесите во



вторую строку таблицы и подведите в ней же числовой итог.

Кол-во уравнений, имеющих 2 корня	Кол-во уравнений, имеющих 1 корень	Кол-во уравнений, не имеющих корней

- б) Каков объём проведённого измерения?
- в) Какова процентная частота уравнений, не имеющих корней?

**П.36.** Уравнение относительно переменной  $x$  имеет вид  $ax + \frac{b}{x} + c = 0$ , где коэффициенты  $a, b$  — натуральные числа от 1 до 5 (совпадения допустимы), а коэффициент  $c$  равен 6 или 7.

- а) Изобразите схематично дерево вариантов составления уравнений такого вида.
- б) Сколько различных уравнений такого вида можно составить?
- в) Сколько среди них уравнений, у которых  $a = b$ ?
- г) Сколько среди них уравнений, у которых  $c = 2a$ ?

**П.37.** Из графиков функций  $y = \sqrt{x + a}$ , где  $a$  — некоторое целое число из отрезка  $[-2; 2]$ , случайным образом выбрали один. Какова вероятность того, что выбранный график:

- а) пересечёт ось абсцисс;
- б) пересечёт обе координатные оси;
- в) пройдёт через точку  $(0; 1)$ ;
- г) не пересечёт ось ординат?

**П.38.** Вот что прочёл богатырь на камне у распутия: «Налево, прямо или направо пойдёшь — к таким же распутиям придёшь, а от каждого из них опять к таким же распутиям придёшь, но потом всё равно в тридевятое царство попадёшь».

- а) По скольким путям богатырь может доехать до тридевятого царства?
- б) Сколько имеется путей, по которым придётся один раз поворачивать влево и два раза — вправо?
- в) Сколько имеется путей, по которым придётся один раз поворачивать вправо и два раза — влево?

- г) Сколько имеется путей, по которым придётся поворачивать ровно два раза?

**П.39.** X-файл расположен в директории «Мои документы», где-то в папках *A*, *B*, *C* или *D* первого уровня. Папка *A* содержит «подпапки» *AA*, *AB*, *AC* второго уровня. Папки *B* и *D* также содержат по три «подпапки»: *BA*, *BB*, *BC*, *DA*, *DB*, *DC*, а в папке *C* содержатся «подпапки» *CA*, *CB*, *CC*, *CD*, *CE* второго уровня. Каждая из папок второго уровня содержит по 7 папок третьего уровня, кроме папки *BC*, в которой 8 папок третьего уровня. Все папки третьего уровня содержат только файлы. «Юзер» решил найти X-файл прямым перебором всех файлов во всех папках.

- а) Изобразите схематично соответствующее дерево вариантов прохождения путей до файла.
- б) Сколькими путями можно из папки *A* дойти до файла?
- в) Сколькими путями можно из папки «Мои документы» дойти до файла?
- г) Какова вероятность того, что нужный файл окажется в папке *C*?

**П.40.** На левом берегу реки — три деревни, а на правом — два села. Реку можно перейти вброд в пяти местах. Нарисуйте дерево вариантов пути из сёл в деревни и дерево вариантов пути из деревень в сёла. Сколькими способами можно пройти:

- а) из деревни, где живёшь, в какое-нибудь село и потом вернуться в ту же деревню;
- б) из села, в котором живёшь, в какую-нибудь деревню и потом вернуться, но в другое село?

### К главе 5 «Неравенства»

**П.41.** В неравенстве  $a \geq b$  можно вместо  $a$  и  $b$  поставить 1, 2, 3, 4 или 5.

- а) Сколько всего числовых неравенств можно получить?
- б) В скольких случаях полученное неравенство окажется неверным?
- в) В скольких случаях верным окажется неравенство  $a > b$ ?
- г) В скольких случаях верным окажется неравенство  $a > b + 2$ ?

- П.42.** В записи  $* \Omega \blacksquare$  вместо  $*$  можно поставить  $\sqrt{2}$  или  $\sqrt{5}$ , вместо  $\Omega$  поставить знак  $<$  или  $>$ , а вместо  $\blacksquare$  поставить 1, 2 или 3. Будут получаться различные неравенства, например  $\sqrt{2} > 1$ ,  $\sqrt{5} < 2$  и т. п.
- Нарисуйте дерево вариантов составления таких неравенств.
  - Сколько всего неравенств можно составить?
  - Сколько будет верных неравенств со знаком  $<$ ?
  - Сколько всего будет верных неравенств?
- П.43.** В записи  $* \Omega \blacksquare$  вместо  $*$  можно поставить  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  или  $\sqrt{5}$ , вместо  $\Omega$  поставить знак  $\leq$  или знак  $\geq$ , а вместо  $\blacksquare$  поставить 1,5, 1,7 или 2,3. Будут получаться различные неравенства, например:  $\sqrt{2} \geq 1,5$ ,  $\sqrt{5} \leq 2,3$  и т. п.
- Нарисуйте дерево вариантов составления таких неравенств.
  - Сколько всего неравенств можно составить?  
Какова вероятность того, что случайным образом выбранное неравенство:
  - со знаком  $\geq$  окажется неверным;
  - со знаком  $\leq$  окажется верным?
- П.44.** Функция  $y = f(x)$  задана равенством  $y = \sqrt{ax + b}$ . Коэффициент  $a$  произвольно выбирают из чисел  $-2, -1, 1, 2$  или  $3$ , а слагаемое  $b$  — из чисел  $2, 3, 4$  или  $5$ .
- Нарисуйте дерево вариантов составления функций указанного вида.
  - Сколько всего функций такого вида можно получить?  
Какова вероятность того, что случайным образом выбранная функция будет:
  - возрастающей;
  - убывающей?
- П.45.** Выбрали произвольное целое число, которое является решением неравенства  $3 < 2x < 43$ . Какова вероятность того, что выбранное число будет:
- чётным;
  - кратным трём;
  - кратным пяти;
  - двузначным?
- П.46.** Выбрали произвольное целое число, которое является решением неравенства  $|3x| < 8$ . Какова вероятность того, что выбранное число будет также и решением неравенства:
- $x < -1$ ;
  - $|x + 1| > 0$ ;
  - $x > -1$ ;
  - $|x| < \sqrt{2}$ ?

**П.47.** Выбрали произвольное целочисленное решение неравенства  $x^2 + 5x - 14 \leq 0$ . Какова вероятность того, что выбранное число будет также и решением неравенства:

- а)  $x^2 \leq 1$ ;      в)  $x^2 \geq 4$ ;  
б)  $x^2 \leq 3$ ;      г)  $5x + x^2 \geq 0$ ?

**П.48.** Выбрали произвольное целочисленное решение неравенства  $48 - 13x - x^2 \geq 0$ . Какова вероятность того, что выбранное число будет также и решением неравенства:

- а)  $x^2 > 0$ ,      в)  $x^2 < 101$ ;  
б)  $x^2 + 10x \leq 0$ ;      г)  $4x^2 - 20x + 21 < 0$ ?

**П.49.** На форзаце задачника приведена таблица квадратов двузначных чисел. По этой таблице нашли первые цифры всех записанных в ней чисел.

- а) Каков объём проведённого ряда данных?  
б) Заполните таблицу результатов:

Первая цифра квадрата числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сколько раз она встретилась									

- в) Какова процентная частота цифры «5»?  
г) Чему равна мода и какова её процентная частота?

**П.50.** Точки  $A, B, C, D$  — вершины квадрата. Надо провести три отрезка с концами в этих точках (порядок проведения отрезков не важен). Сколько у задачи существует решений:

- а) если все отрезки проводить по сторонам квадрата;  
б) если один из отрезков — диагональ  $AC$ , а два других не имеют общих точек;  
в) если один из отрезков — диагональ  $BD$ , а два других имеют общие точки;  
г) всего?

## К главе 6 «Алгебраические уравнения»

**П.51.** а) Заполните таблицу в задании № 34.07, сверьте свой ответ с ответом из задачника.  
б) Запишите полученные числа в виде упорядоченного ряда чисел.  
в) Найдите объём и размах этого ряда чисел.  
г) Найдите моду этого ряда чисел и её процентную частоту.

**П.52.** а) Заполните таблицу.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Степень многочлена $(x^{10-n} + 1)^n + x^{2n}$										

Какова вероятность того, что при случайном выборе  $n$  степень этого многочлена будет:

б) меньше 40; в) меньше 20; г) нечётна?

**П.53.** а) Заполните таблицу.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Степень многочлена $(x^{10-n} - x^n + 1)^n$										

Какова вероятность того, что при случайном выборе  $n$  степень этого многочлена будет:

б) положительна; в) полным квадратом; г) чётна?

**П.54.** В произведение  $(x - a)(x - b)(x - c)$  вместо  $a, b, c$  подставляют три разных числа из множества  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Скобки раскрывают, приводят подобные и получают многочлен третьей степени относительно  $x$ . Сколько таким образом можно получить различных многочленов:

- а) с нулевым свободным коэффициентом;
- б) с положительным свободным коэффициентом;
- в) у которых есть два корня одинакового знака?
- г) Найдите количество всех таких многочленов.

**П.55.** На основе уравнения  $x^4 + x^3 + x^2 + x = 1$  составляют уравнения с модулем, расставляя для этого в левой части две вертикальные черты в допустимых местах. Например,  $|x^4| + x^3 + x^2 + x = 1$ ,  $|x|^4 + x^3 + x^2 + x = 1$ ,  $|x^4 + x|^3 + x^2 + x = 1$  и т. д. Сколько получится уравнений, в которых:

- а) под знаком модуля стоит одночлен;
- б) правая вертикальная черта стоит сразу после  $x^2$ ;
- в) левая вертикальная черта стоит перед  $x^3$ ;
- г) под знаком модуля стоит сумма трёх одночленов?

**П.56.** На основе уравнения  $(x^2 + x)(x^3 + x^2 + x) = 6$  составляют иррациональные уравнения, ставя для этого в левой части один знак  $\sqrt{\quad}$  квадратного корня в допус-

тимых местах. Например,  $(\sqrt{x^2} + x)(x^3 + x^2 + x) = 6$ ,

$$(x^2 + x)\left(\left(\sqrt{x^3 + x}\right)^2 + x\right) = 6, \quad \sqrt{x^2 + x}(x^3 + x^2 + x) = 6 \text{ и}$$

т. д. Сколько получится уравнений, в которых:

- а) левая часть содержит  $\sqrt{x}$ ;
- б) в левой части останется неизменным множитель  $(x^3 + x^2 + x)$ ;
- в) в левой части останется неизменным множитель  $(x^2 + x)$ ?
- г) Сколько всего таких иррациональных уравнений?

**П.57.** Значение параметра  $p$  наудачу выбирают из множества  $\{-9, -8, \dots, -1, 0\}$ . Найдите вероятность того, что уравнение  $x(x - 3) = p + 3x$ :

- а) не имеет корней;
- б) имеет два разных корня одинакового знака;
- в) имеет единственный корень;
- г) имеет корень, больший 5.

**П.58.** В контрольной работе должно быть по одной задаче на каждую из четырёх тем: тема № 1 «Уравнения третьей степени», тема № 2 «Рациональные уравнения», тема № 3 «Уравнения с модулем», тема № 4 «Иррациональные уравнения». Учитель подготовил по 4 задачи по темам № 2 и 3, 6 задач по теме № 1 (в двух из них в ответе один корень) и 5 задач по теме № 4 (в трёх из них уравнение не имеет решений). Найдите общее число:

- а) всех возможных вариантов контрольной работы;
- б) тех вариантов, в которых по теме № 1 будет уравнение, имеющее более одного корня;
- в) тех вариантов, в которых у иррационального уравнения будут корни;
- г) тех вариантов, которые удовлетворяют условию или из пункта б), или из пункта в).

**П.59.** На шахматную доску  $8 \times 8$  ставят белую и затем чёрную пешки так, чтобы они не били друг друга, т. е. не стояли бы в соседних по диагонали клетках. Сколько имеется способов расстановки, если белая пешка стоит:

- а) в угловой клетке;
- б) в крайней левой, но не в угловой клетке;
- в) в крайней вертикали или горизонтали;
- г) не в крайней клетке?

- П.60.** Гирлянда состоит из красных и синих лампочек, распределённых так, чтобы рядом с каждой красной лампочкой была хотя бы одна синяя. Докажите, что в гирлянде из:
- а) трёх лампочек всегда есть синяя лампочка;
  - б) восемнадцати лампочек всегда есть не менее шести синих лампочек;
  - в) двадцати лампочек всегда есть не менее семи синих лампочек;
  - г) двадцати лампочек наибольшее возможное число красных лампочек равно 13.

### К главе 7 «Элементы теории делимости»

- П.61.** Найдите количество всех двузначных чисел, которые:
- а) делятся на 15;
  - б) делятся на 25;
  - в) делятся и на 15, и на 25;
  - г) делятся или на 15, или на 25.
- П.62.** Из цифр {1, 4, 5, 9} составили все двузначные числа (повторения цифр допускаются).
- а) Сколько всего чисел составили?
  - б) Сколько среди них чётных чисел?
  - в) Сколько среди них чисел, кратных числу 3?
  - г) Сколько среди них чисел, кратных числу 9?
- П.63.** Из цифр {1, 4, 5, 9} составляют трёхзначные числа без повторений цифр. Нарисуйте дерево вариантов для поочерёдного выбора цифр, начиная с первой. Какую часть от общего количества таких чисел составляют:
- а) нечётные числа;
  - б) числа, кратные числу 3;
  - в) числа, кратные числу 9?
- П.64.** Все делители числа 100 имеют вид  $2^k \cdot 5^n$ . Следует организовать перебор этих делителей.
- а) Нарисуйте дерево вариантов для поочерёдного выбора показателей степени  $k$  и  $n$ .
  - б) Найдите количество всех делителей числа 100.
  - в) Найдите количество всех чётных делителей числа 100.
  - г) Какова вероятность того, что при случайном выборе делитель числа 100 окажется больше 22?

*Полным квадратом* называется натуральное число, которое является квадратом какого-то натурального числа.

- П.65.** а) Докажите, что если  $N$  является полным квадратом, то:
- 1) количество его делителей, меньших чем  $\sqrt{N}$ , равно количеству делителей, больших чем  $\sqrt{N}$ ;
  - 2) количество его делителей — нечётное число.
- б) Докажите, что если  $N$  не является полным квадратом, то:
- 1) количество его делителей — чётное число;
  - 2) вероятность того, что случайно выбранный делитель будет меньше чем  $\sqrt{N}$ , равна 0,5.

**П.66.** Наудачу выбирают натуральное число  $N$ , являющееся полным квадратом. Является ли каждое из перечисленных ниже событий достоверным? Ответ обоснуйте.

- а) Последняя цифра числа  $N$  не равна 7.
- б) Остаток от деления числа  $N$  на 3 равен 0 или 2.
- в) Остаток от деления числа  $N$  на 3 равен 0 или 1.
- г) Остаток от деления числа  $N$  на 4 равен 0 или 2.

**П.67.** Сколькими способами можно разложить в произведение двух чисел, первое из которых меньше второго:

- а) число 143;
- б) число 145;
- в) число 144;
- г) число 450?

**П.68.** а) Заполните таблицу:

Число	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Остаток от деления на 13														

- б) Какова мода ряда чисел из второй строки таблицы?
- в) Продолжите ряд из остатков от деления на 13 чисел вида  $5n$ ,  $n \in N$ . Докажите, что в этом ряду после числа 11 всегда стоит число 3.
- г) Какова процентная частота числа 12 в ряду из остатков от деления на 13 чисел 5, 10, 15, ..., 995, 1000?

**П.69.** У двух начинающих коллекционеров по 20 марок, по 10 значков и по 10 наклеек. Каждый из них наудачу выбрал один предмет своей коллекции, после чего коллекционеры совершили обмен. Какова вероятность того, что:



- а) они обменялись значками;
- б) они обменялись марками;
- в) марку обменяли на значок;
- г) наклейку поменяли на другой предмет коллекции (не наклейку)?

**П.70.** На шахматную доску  $8 \times 8$  ставят белого и затем чёрного короля так, чтобы они не били друг друга, т. е. не стояли бы в соседних (по стороне или диагонали) клетках. Сколько имеется способов расстановки, если белый король стоит:

- а) в угловой клетке;
- б) в крайней левой, но не в угловой клетке;
- в) в крайней вертикали или горизонтали;
- г) не в крайней клетке?

## ОТВЕТЫ

**Глава 1. 1.17.** а)  $f(0) = -0,4$ ;  $f(1) = -\frac{1}{3}$ ;  $f(-3) = 5$ ; б)  $f(a) = \frac{a^2 - a - 2}{a + 5}$ ;

$$f(3a) = \frac{9a^2 - 3a - 2}{3a + 5}; \quad f(a - 3) = \frac{a^2 - 7a + 10}{a + 2}; \quad \text{в) } f(x^2) = \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^2 + 5};$$

$$f(x + 1) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 6}; \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 - x - 2x^2}{x + 5x^2}; \quad \text{г) } f(ab) = \frac{a^2b^2 - ab - 2}{ab + 5};$$

$$f(a + b) = \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a - b - 2}{a + b + 5}; \quad f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a^2 - ab - 2b^2}{ab + 5b^2}. \quad \mathbf{1.20.} \quad 2 \text{ км/ч.}$$

**1.21.** 40 км/ч. **1.23.** а)  $a \neq -3$ ; б)  $a = 0$ ; в)  $a \neq 2; -2$ ; г) при  $x \neq -1$   $a = -1$ ; при  $x \neq 1$   $a = 1$ . **1.24.** а)  $a < 0$ ; б)  $a \in \mathbb{R}$ ; в) ни при каких значениях  $a$ ;

г)  $a = 0$ . **1.25.** а)  $\frac{1}{3}$ ; б) 18; в)  $-\frac{4}{15}$ ; г)  $\frac{1}{3}$ . **1.26.** а) -3; б)  $\frac{1}{3}$ ; в) 4; г)  $2\frac{1}{3}$ .

**1.27.** а) 0,1; б) 6; в) 2,5; г) -0,8. **1.28.** а) 6; б) -6,8. **1.29.** а) 5; б) 4,5;

в) 13; г) -0,1. **1.30.** а) 15; б)  $10\frac{1}{3}$ ; в)  $\frac{1}{15}$ ; г)  $1\frac{7}{15}$ . **1.31.** а) 1; 3;

б) 1; 5; в) 1; 2; 3; г) 1; 3; 5. **1.32.** 1. **1.34.** а)  $y = \frac{23 - 4x}{x - 2}$ ;

$$\text{б) } k = \frac{x + 4}{x^2 - x}; \quad \text{в) } x = \frac{5 + yz - 2y^2}{2y - z + 1}; \quad \text{г) } z = \frac{1 - x}{1 + yx - y}. \quad \mathbf{1.36.} \quad \text{а) } \frac{c - d}{f - d};$$

$$\text{б) } \frac{a - b + c}{b - a + c}; \quad \text{в) } \frac{2 - x - y}{xy(x - y)}; \quad \text{г) } \frac{c - b}{b - a}. \quad \mathbf{1.38.} \quad \text{а) } 1; \text{ б) } 2. \quad \mathbf{1.39.} \quad \text{а) } 1,5; \text{ б) } -4;$$

в) -2; г) -4,5. **1.40.** а)  $\frac{x}{a}$ ; не изменилось; б)  $\frac{x - 1}{x + 1}$ ; не изменилось;

в)  $\frac{1}{5x}$ ; не изменилось; г)  $\frac{2}{x}$ ; не изменилось. **1.41.** а)  $\frac{1}{x}$ ; изменилось;

б)  $\frac{x - 2y}{2}$ ; изменилось; в)  $\frac{4n - d}{3}$ ; изменилось; г)  $\frac{y - 1}{y + 1}$ ; измени-

лось. **1.42.** а)  $x \neq 1$ ; б)  $x \neq 2$ ; в)  $x \neq -1; 1$ ; г)  $x \neq 0; 1$ . **1.43.** а) При  $a = 3$  значение дроби равно 1 при всех  $t \neq 3$ ; б) при  $a = -3$  значение дроби

равно -1 при всех  $t \neq -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}$ ; в) при  $a = 2$  значение дроби равно 2 при

всех  $t \neq 0$ ; 6; г) при  $a = 1$  значение дроби равно -1 при всех  $t \neq -2$ .

**1.45.** а)  $(t; t)$ , где  $t$  — любое число; б)  $(t; 2t)$ , где  $t$  — любое число; в)  $(-t; t)$ , где  $t$  — любое число; г)  $(-2t; t)$ , где  $t$  — любое число. **1.46.** а)  $(1; t)$  или  $(t; 1)$ , где  $t$  — любое число; б)  $(-4; t)$  или  $(t; -2t)$ , где  $t$  — любое

число; в)  $(5; t)$  или  $(t; -2)$ , где  $t$  — любое число; г)  $(t; 3)$  или  $(3t; 4t)$ , где  $t$  — любое число. **1.68.** а)  $\frac{1}{15}$ ; б)  $\frac{1}{15}$ . **2.11.** а)  $7x$ ; 0,25; б)  $\frac{1}{m+3}$ ; -2; в)  $3c$ ;  $\frac{2}{3}$ ; г)  $\frac{1}{n-2}$ ;  $-\frac{1}{6}$ . **2.12.** а)  $\frac{3x-2}{3x+2}$ ; б)  $\frac{5a-1}{5a+1}$ . **2.13.** а)  $\frac{1}{(x-2)^2}$ ; б)  $\frac{4m}{2m+1}$ . **2.14.** а)  $\frac{1}{b-5}$ ; б)  $\frac{1}{a-3}$ . **2.15.** а)  $\frac{1}{4-x}$ ; 20; б)  $\frac{2}{(y-2)(1-y)}$ ; 12,5. **2.16.** а)  $6-6a$ ; б)  $3x$ ; в)  $-3y-4$ ; г)  $28b+20$ . **2.28.** а)  $\frac{(5y+4x)^2}{20x^2y^2}$ ; 45; б)  $\frac{(3m-2n)^2}{18m^2n^2}$ ; 0,5. **2.38.** а)  $\frac{x-y}{x+y}$ ; б)  $\frac{2a}{a+c}$ ; в)  $\frac{b+m}{b-m}$ ; г)  $\frac{2d}{d-4}$ . **2.39.** а)  $-\frac{1}{2x+3}$ ; б)  $\frac{2a+1}{2a-1}$ ; в)  $\frac{1}{3y-5x}$ ; г)  $\frac{3x-2}{3x+2}$ . **2.40.** а)  $\frac{a+b}{a(a-b)}$ ; б)  $\frac{2}{x(x+1)}$ ; в)  $\frac{c-2}{c(c+2)}$ ; г)  $\frac{4}{a(a-3)}$ . **2.41.** а)  $\frac{12-3c}{(c-2)^2}$ ; б)  $\frac{a^2+b^2}{2(a-b)^2}$ ; в)  $\frac{5m+10}{(m+5)^2}$ ; г)  $\frac{4x^2-y^2}{3(x-y)^2}$ . **2.42.** а)  $\frac{a}{a+b}$ ; б)  $-\frac{1}{6}$ ; в)  $-\frac{c}{d+c}$ ; г)  $\frac{1}{10}$ . **2.43.** а)  $-\frac{2}{ab}$ ; б)  $\frac{b-a}{ba}$ ; в)  $\frac{3}{cd}$ ; г)  $-\frac{q+p}{qp}$ . **2.44.** а)  $-\frac{6}{c+6}$ ; б)  $-\frac{5}{x+4}$ ; в)  $-\frac{3}{m+4}$ ; г)  $\frac{6}{n+7}$ . **2.45.** а)  $-\frac{1}{xy}$ ; б)  $\frac{p+q}{2p(p-q)}$ ; в)  $-\frac{3}{cd}$ ; г)  $\frac{3m-n}{3m(3m+n)}$ . **2.46.** а)  $\frac{2x-5}{2x+5}$ ; б)  $\frac{x-4a}{x(x+4a)}$ ; в)  $\frac{3z+4}{3z-4}$ ; г)  $\frac{c-10d}{c(c+10d)}$ . **2.47.** а)  $\frac{x^2}{y(x-y)^2}$ ; б)  $\frac{7n}{n-m}$ ; в)  $-\frac{b^2}{a(a-b)^2}$ ; г)  $\frac{5}{3p+1}$ . **2.48.** а)  $\frac{1}{x-1}$ ; б)  $\frac{y+2}{y^2-2y+4}$ ; в)  $\frac{3}{c+4}$ ; г)  $\frac{b-3}{b^2+3b+9}$ . **2.49.** а)  $\frac{2d^3}{c+d}$ ; б)  $-\frac{2b^3}{a^2-ab+b^2}$ ; в)  $\frac{2n^3}{m-n}$ ; г)  $\frac{2x^3}{x^2+xy+y^2}$ . **2.50.** а)  $\frac{2m^3}{m^2-4n^2}$ ; б)  $\frac{16l^3}{4l^2-9k^2}$ . **2.51.** а)  $\frac{a^2-a}{a^3+1}$ ; б)  $-\frac{6}{c^2+3c+9}$ ; в)  $\frac{2-2d}{8d^3+1}$ ; г)  $\frac{4}{2b-b^2-4}$ . **2.52.** а)  $\frac{2(b-1)}{b^2+b+1}$ ; б)  $\frac{2(a-2)}{a^2+2a+4}$ . **2.53.** а)  $\frac{m^2+mn+n^2}{m^3+n^3}$ ; б)  $\frac{x^2-xy+y^2}{y^3-x^3}$ . **2.54.** а)  $\frac{100}{(b^2-25)^2}$ ; б)  $\frac{16m^2}{(4m^2-25n^2)^2}$ . **2.59.** а)  $a=-2$ ;  $a=3$ ; б)  $z=-2$ ;  $z=1$ ;  $z=10$ ; в)  $a=b$ ;  $a=-b$ ; г)  $y=0$ ;  $y=x$ ;  $y=-x$ .

**2.60.** а)  $\frac{1}{x-1}$ ; 125; б)  $(x+1)^2 + 2$ ; 3,21. **2.61.** 0. **2.62.** 0. **2.64.**  $a + b + c$ .

**2.65.** а) 4; б) 0. **2.66.** б) 0,99. **2.67.** б)  $\frac{50}{101}$ . **3.8.** а)  $x + y$ ;

б)  $\frac{1}{(x-y)(2x+y)}$ ; в)  $2a + b$ ; г)  $(a-b)(a-2b)$ . **3.9.** а)  $\frac{3}{a^2x}$ ; б)  $\frac{am}{4b}$ ;

в)  $\frac{m}{y^2}$ ; г)  $\frac{4}{n^2}$ . **3.10.** а)  $-\frac{1}{2}$ ; б)  $-2$ ; в)  $-\frac{c}{d}$ ; г)  $-xn$ . **3.11.** а)  $\frac{x+y}{x}$ ;

б)  $\frac{a}{a-4}$ ; в)  $\frac{c-7}{4c}$ ; г)  $\frac{3b}{b+d}$ . **3.12.** а)  $x^2 - xy + y^2$ ; б)  $a + b$ ;

в)  $\frac{1}{n-m}$ ; г)  $p^2 + pq + q^2$ . **3.13.** а)  $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ ; б)  $n(2a+1)$ ; в)  $\frac{2}{x-3}$ ;

г)  $\frac{m-4}{3}$ . **3.14.** а)  $\frac{(x-5)(x-4)}{6}$ ; б)  $\frac{a+2b}{12}$ ; в)  $\frac{3(c-5)}{2(c+6)}$ ; г)  $\frac{15}{2n-m}$ .

**3.18.** а)  $\frac{x^3}{a^4}$ ; б)  $\frac{1}{x^3p}$ ; в)  $\frac{c}{b}$ ; г)  $\frac{x^{20}y^{27}}{z^{17}}$ . **3.19.** а)  $4ab$ ; б)  $-\frac{5ax}{2y}$ ; в)  $-\frac{10a^2x}{9by^2}$ ;

г)  $\frac{24}{5bc^2}$ . **3.20.** а)  $\frac{q^3}{a^2p}$ ; б)  $-\frac{6n^7}{35m^3a^2b^4}$ ; в)  $\frac{x}{15a^2y}$ ; г)  $-12pq$ . **3.21.** а)  $2ay$ ;

б)  $2y$ ; в)  $\frac{ax}{9}$ ; г)  $6t$ . **3.22.** а)  $\frac{2}{a}$ ; б)  $-\frac{c}{8b}$ ; в)  $\frac{64a^{10}}{b^{20}}$ ; г)  $-\frac{x^{13}y^{12}}{3a^{24}}$ .

**3.23.** а)  $a \neq 0$ ;  $b \neq 0$ ; б)  $a \neq \frac{b}{2}$ ;  $a \neq -2$ ; в)  $a \neq -3$ ;  $a \neq 3$ ;  $a \neq 0$ ; г)  $a \neq 4$ ;

$a \neq -4$ ;  $a \neq 3$ ;  $a \neq -3$ . **3.24.** а)  $\frac{9(a-1)}{a}$ ; б)  $\frac{(y-5)(y-6)}{6}$ ; в)  $\frac{(x+4)(x+3)}{9}$ ;

г)  $\frac{2b}{b-4c}$ . **3.25.** а)  $\frac{x}{y(5y-2)}$ ; б)  $-\frac{b}{2a(2x+7)}$ ; в)  $\frac{m}{5(8n-3)}$ ;

г)  $-\frac{2c}{a^2(3p+5)}$ . **3.26.** а)  $\frac{p(p+q)}{p-q}$ ; б)  $\frac{x-3}{x^2(x+3)}$ ; в)  $\frac{9(x+y)}{y(x-y)}$ ; г)  $\frac{2(5+y)}{5(5-y)}$ .

**3.27.** а)  $\frac{a^2-ab+b^2}{ab}$ ; б)  $\frac{1}{x^2-9}$ ; в)  $\frac{2x}{x^2+2x+4}$ ; г)  $(x+y)^2$ . **3.28.** а)  $\frac{1}{x-1}$ ;

б)  $\frac{t+2}{3t}$ ; в)  $\frac{1}{3}$ ; г)  $\frac{y-2}{y-3}$ . **3.29.** а)  $\frac{(3-a)(b+1)}{2(b^2+b+1)}$ ; б)  $-\frac{c^2+2cd+4d^2}{2}$ ;

в)  $\frac{(3-b)(3+2b)}{2}$ ; г)  $\frac{1-m}{1-m+m^2}$ . **3.30.** а)  $(5-2a)(1+4a)$ ;

б)  $-(3b+4a)$ ; в)  $(2+3c)(3c+4)$ ; г)  $2q-5p$ . **3.31.** а)  $\frac{1}{2x}$ ; б)  $-\frac{4b^2}{a(a+4)}$ ;

в)  $\frac{5-b}{25}$ ; г)  $\frac{a(a-3)}{3}$ . **3.32.** а)  $(c-a)^3$ ; б)  $\frac{a^4}{b^8(b-a)(a+b)^2}$ ; в)  $\frac{(x-a)^2}{(a-b)^2}$ ;

$$\text{г) } \frac{(x-2y)(x+y)}{x^5}. \quad \mathbf{3.34.} \text{ а) } \frac{2}{9}; \text{ б) } \frac{1}{12}. \quad \mathbf{3.36.} \quad R_{\text{общ}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

$$\mathbf{3.37.} \text{ а) } x \neq 1; y = 2x - 1; \text{ б) } x \neq 0, x \neq -1,5; y = \frac{5}{2}x; \text{ в) } x \neq 0,$$

$$x \neq 4; y = \frac{1}{2}x + 2; \text{ г) } x \neq -2; y = x + 1. \quad \mathbf{3.38.} \text{ а) } x \neq 0, x \neq 2;$$

$$y = 2x + 6; \text{ б) } x \neq 1, x \neq -3; y = 6x - 24. \quad \mathbf{4.7.} \text{ а) } 7; \text{ б) } 5,6. \quad \mathbf{4.10.} \text{ а) } x \neq -1; 1;$$

$$\text{б) } x \neq -\frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{3}; x. \quad \mathbf{4.11.} \quad \frac{2v_1 v_2 k}{(v_1 + v_2)(k + 1)}. \quad \mathbf{4.13.} \text{ а) } \frac{a(b-a)}{b+a}; \text{ б) } \frac{z}{4(z+2)}.$$

$$\mathbf{4.14.} \text{ а) } 1 - 2m; \text{ б) } 2 - 3n. \quad \mathbf{4.15.} \text{ а) } d + 2; \text{ б) } 0. \quad \mathbf{4.16.} \text{ а) } a \neq -1, a \neq 1; 2;$$

$$\text{б) } b \neq 0, b \neq 4, b \neq -4; 0; \text{ в) } y \neq 2, y \neq -2; 0; \text{ г) } x \neq 0, x \neq 5, x \neq -5; 0.$$

$$\mathbf{4.17.} \text{ а) } (a+2)^2; 0,25; \text{ б) } \frac{a-1}{a+1}; \frac{19}{11}; \text{ в) } \frac{n+2}{n-2}; -0,6; \text{ г) } -\frac{a(a-b)}{a+b}; \frac{5}{3}.$$

$$\mathbf{4.18.} \text{ а) } -\frac{1}{2(1+3a)}; \text{ б) } \frac{2a}{a^2+a+1}. \quad \mathbf{4.19.} \text{ а) } \frac{2n-2}{n}; \text{ б) } \frac{9}{x-y}. \quad \mathbf{4.24.} \quad \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{4.25.} \quad -\frac{1}{3}. \quad \mathbf{4.26.} \quad 1. \quad \mathbf{4.27.} \quad a + b. \quad \mathbf{4.30.} \text{ а) } \frac{1-x}{3x-1}; \text{ б) } \frac{(a+1)x-a}{a-x};$$

$$\text{в) } \frac{9-5x}{14x-25}; \text{ г) } \frac{(a^2+bk)x+k(a+m)}{bx(a+m)+bk+m^2}. \quad \mathbf{4.31.} \text{ а) } \frac{1}{1-x}; \text{ б) } \frac{4}{2-x}.$$

$$\mathbf{5.7.} \text{ а) } 11; \text{ б) } 0; 1; \text{ в) } -1; 1; \text{ г) } -1; 1. \quad \mathbf{5.8.} \text{ а) } 2; \text{ б) } 0; \text{ в) } 0; \text{ г) } -4.$$

$$\mathbf{5.9.} \text{ а) Нет корней. } \mathbf{5.10.} \text{ а) Нет корней. } \mathbf{5.11.} \text{ а) } 0,4; \text{ б) } 0,2; \text{ в) } 6;$$

$$\text{г) } -22. \quad \mathbf{5.12.} \quad 12 \text{ км/ч, } 30 \text{ км/ч. } \mathbf{5.13.} \quad 30 \text{ км/ч. } \mathbf{5.14.} \quad 8 \text{ км/ч. } \mathbf{5.15.} \quad 6 \text{ км/ч.}$$

$$\mathbf{5.16.} \quad 40 \text{ км/ч. } \mathbf{5.17.} \quad 60 \text{ км/ч. } \mathbf{5.18.} \text{ а) } -1; 1; \text{ б) } 6; \text{ в) } \frac{2}{3}; \text{ г) } -3; 3.$$

$$\mathbf{5.19.} \text{ а) } -8; 0; \text{ б) } -0,5; \text{ в) } 0; 19; \text{ г) } \frac{2}{11}. \quad \mathbf{5.20.} \text{ а) } 0; -5; \text{ б) } 0,8; \text{ в) } 0; 9; \text{ г) } -\frac{1}{3}.$$

$$\mathbf{5.21.} \text{ а) } 3; \text{ б) } 4; \text{ в) } 1; \text{ г) } 2. \quad \mathbf{5.22.} \text{ а) } -3; \text{ б) } 1; \text{ в) } 2; \text{ г) } 6. \quad \mathbf{5.23.} \text{ а) } 0; \text{ б) } -3;$$

$$\text{в) } 0; \text{ г) } -2. \quad \mathbf{5.24.} \text{ а) Нет корней; б) } -7; \text{ в) } 40; \text{ г) нет корней. } \mathbf{5.25.} \text{ а) } 3\frac{1}{3};$$

$$\text{б) нет корней; в) } 0,5; \text{ г) нет корней. } \mathbf{5.26.} \text{ а) } -\frac{5}{9}; \text{ б) } -0,5. \quad \mathbf{5.27.} \text{ а) } \frac{3}{4};$$

$$\text{б) } 34. \quad \mathbf{5.28.} \text{ а) } \frac{13}{27}; \text{ б) } -\frac{7}{8}. \quad \mathbf{5.29.} \text{ а) } -3; \text{ б) } 0; -3; \text{ в) } 1; \text{ г) } 0; -\frac{5}{7}. \quad \mathbf{5.30.} \text{ а) Нет$$

$$\text{корней; б) } -3; \text{ в) } 0; \text{ г) решений нет. } \mathbf{5.31.} \text{ а) } 1; 6; \text{ б) } 2; 3. \quad \mathbf{5.32.} \text{ а) } 1;$$

$$\text{б) } 3. \quad \mathbf{5.33.} \text{ а) } 3; \text{ б) } 2. \quad \mathbf{5.34.} \text{ а) } 3; \text{ б) } -3; \text{ в) решений нет; г) если } a \neq -6,$$

$$\text{то } x = a; \text{ если } a = -6, \text{ то нет решений. } \mathbf{5.35.} \text{ а) } 2; \text{ б) } 2; \text{ в) решений нет; г) если } a \neq 2, \text{ то } x = 2; \text{ если } a = 2, \text{ то нет решений. } \mathbf{5.36.} \text{ а) } 3;$$

$$\text{б) } -1; \text{ в) решений нет; г) если } a \neq 2, a \neq -2, \text{ то } x = a; \text{ если } a = 2,$$

$a = -2$ , то нет решений. **5.37.** -5. **5.38.** а) Если  $c \neq -1$ , то  $x = -1$ ; если  $c = -1$ , то нет решений; б) если  $c \neq 8$ , то  $x = c - 4$ ; если  $c = 8$ , то нет решений; в) если  $c \neq 5$ , то  $x = c$ ; если  $c = 5$ , то нет решений; г) если  $c \neq 2$ , то  $x = 0$ ; если  $c = 2$ , то  $x$  — любое число, кроме  $-2$ . **5.39.**  $a = 3$ ;  $b = -2$ . **5.40.**  $a = -0,5$ ;  $b = 1,5$ . **5.41.**  $a = -2,5$ ;  $b = 4,5$ . **5.42.** а) Если  $a \neq 5$ ,  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{5-4a}{a-5}$ ; если  $a = 5$ ,  $a = 0$ , то нет решений; б) если  $a \neq 1$ ,  $a \neq 3$ , то  $x = \frac{a-5}{a-1}$ ; если  $a = 1$ ,  $a = 3$ , то нет решений; в) если  $a \neq 4$ ; 8; 6, то  $x = 0$  и  $x = \frac{6-a}{a-4}$ ; если  $a = 4$ ; 8; 6, то  $x = 0$ ; г) если  $a \neq 4,5$ ,  $a \neq 3$ ,  $a \neq 6$ , то  $x = 0$  и  $x = \frac{6-a}{2a-9}$ ; если  $a = 4,5$ ,  $a = 3$ ,  $a = 6$ , то  $x = 0$ . **5.43.** а) При  $a = -17$   $x = 3$ ; б) при  $a = 1$   $x = 1$ ; в) при  $a = 3$   $x = 3$ ; г) при  $a = 18$   $x = 2$ . **6.14.** а) 13,7; б) -3,5; в) 25,9; г) 2,35. **6.21.** а)  $\frac{1}{ab}$ ; б)  $-\frac{x+y}{x^2y^2}$ ; в)  $\frac{1}{m^2n^2}$ ; г)  $a^3 + b^3$ . **6.22.** а)  $\frac{1}{ab}$ ; б)  $st(s-t)$ . **6.30.**  $2\frac{2}{3}$ . **6.31.** а)  $\frac{1}{a}$ ; б)  $-\frac{1}{a}$ ; в)  $\frac{1}{a}$ ; г)  $\frac{1}{a^2}$ . **6.32.** а)  $\frac{1}{ab}$ ; б)  $\frac{1}{ab}$ ; в)  $\frac{1}{ab}$ ; г)  $\frac{1}{ab}$ . **6.33.** а)  $\frac{ab}{b-a}$ ; б)  $-\frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$ ; в)  $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3b^3}$ ; г)  $\frac{a-b}{ab}$ . **6.34.** а)  $\frac{6}{4x^4-1}$ ;  $\frac{2}{21}$ ; б)  $\frac{18}{4x^2-1}$ ;  $\frac{2}{11}$ . **6.35.** а) 6; б) 5. **6.36.** а)  $-\frac{1}{5}$ ; б)  $\frac{1}{7}$ . **6.37.** а)  $\frac{2}{5}$ ; б)  $-\frac{1}{9}$ . **6.38.** а) 23; б) 110; в) 527; г) 2525. **6.39.** а) 2; б) -0,5; 0,5; в) -3; г)  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$ . **6.40.** а)  $\frac{1}{x-1}$ ; б)  $\frac{1}{x+5}$ . **6.41.** а)  $a-2$ ; б)  $\frac{1}{1-x}$ . **6.45.** а)  $x \neq 2$ ;  $x \neq -2$ ; б)  $x \neq 0$ ; 1; 2; в)  $x \neq -\frac{1}{2}$ ; 0;  $\frac{1}{2}$ ; г)  $x \neq 0$ ; 1; 2.

**Глава 2. 7.20.** Только одна дробь  $\frac{1}{53}$ . **7.21.**  $\frac{2}{3}$ . **7.24.** а) 0; б) 1; в) 2; г) 5. **7.25.** а) 0,(3); 3; б) 0,(13); 3; в) 0,(127); 2; г) 0,(4236); 6. **7.26.** 1. **7.29.** а)  $\frac{4}{165}$ ; б)  $\frac{1}{300}$ ; в)  $\frac{1}{15}$ ; г)  $\frac{1}{550}$ . **7.30.** а)  $1\frac{11}{18}$ ; б)  $2\frac{8}{225}$ ; в)  $3\frac{301}{330}$ ; г)  $\frac{17}{22}$ . **7.31.** а)  $\frac{23}{150}$ ; б)  $2\frac{16}{99}$ ; в)  $6\frac{29}{225}$ ; г)  $\frac{367}{1110}$ . **7.32.** а)  $1\frac{56}{99}$ ; б)  $4\frac{62}{99}$ ;

- в)  $2\frac{38}{81}$ ; г) 2. **7.33.** 1197. **7.34.** 7. **8.4.**  $b^2 = -(a-1)^2 - 1 < 0$ ,  $b^2 \geq 0$ , значит,  $a$  и  $b$  не существуют. **8.25.** а) 4; б) 5; в) 135; г) 0. **8.52.** а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{3}$ . **8.53.** а)  $-\frac{5}{3}$ ; б)  $-\frac{5}{3}$ ;  $\frac{31}{3}$ . **8.54.** а)  $(-3; 4)$ ; б)  $(-1,5; 7)$ ; в)  $(-3; 2)$ ;  $(-3; -2)$ ; г)  $(1; 1)$ . **9.15.** а) Могут, например, для чисел  $2 - \sqrt{5}$  и  $2 + \sqrt{5}$ ; б) не могут. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  — иррациональные числа и  $\alpha - \beta = a$  — рациональное число. Тогда  $\frac{\alpha - \beta}{\beta}$  — иррациональное число.
- 9.20.** а) Например, 1,2; 1,3;  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ; б) например, 1,5; 1,6;  $\sqrt{2,2}$ ;  $\sqrt{2,3}$ ; в) например, 5,1; 5,2;  $\sqrt{26}$ ;  $\sqrt{31}$ ; г) например, 1,1; 1,11;  $\sqrt{1,22}$ ;  $\sqrt{1,23}$ . **9.22.** Например,  $1 - \sqrt{0,00001}$ ;  $1 + \sqrt{0,00001}$ . **9.23.** а) Могут, например,  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{8}$ ; б) могут, например,  $4 - \sqrt{15}$  и  $4 + \sqrt{15}$ . **9.24.** а), б), г) Да; в) нет. **9.25.** а), в) Нет; б), г) да. **9.26.** Нет. **9.27.** Указание. Используйте теоремы Пифагора и Фалеса. **9.28.** а) Только одна точка  $(0; 5)$ . **10.13.** а) 0;  $\frac{13}{6}$ ;  $\sqrt{5}$ ; б) 3; 3,1;  $\pi$ ; в) 0,3; 0,5;  $\frac{\pi}{6}$ ; г)  $-3,2$ ;  $-\sqrt{10}$ ;  $-3$ . **10.14.** а) 5,81;  $2\pi$ ; 6,3; б)  $-\frac{4}{\sqrt{2}}$ ;  $-\frac{15}{7}$ ; 0; в) 1,5;  $\frac{\pi}{2}$ ; 1,6; г)  $-1$ ;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $-0,5$ . **10.17.** а)  $K(-2)$ ;  $L(-\sqrt{3})$ ;  $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ ; б)  $K\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ;  $L(1)$ ;  $M(\sqrt{3})$ ; в)  $K(\sqrt{5})$ ;  $L\left(\frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ ;  $M(2,5)$ ; г)  $K(\sqrt{20})$ ;  $L(4,5)$ ;  $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ . **10.21.** а) 3;  $-1$ ; б)  $-3$ ; 1. **10.22.** а)  $\frac{2}{5}$ ; б) 10. **11.6.** а)  $a < b$ ; б)  $a > b$ ; в)  $a > b$ ; г)  $a < b$ . **11.14.** а)  $a - c^2 - 11 < a - \sqrt{11} < a - 3 < a + 8 < \frac{3a + 25,7}{3}$ ; б)  $c^2 + \sqrt{c^2 + 3} > c^2 > c^2 - 0, (3) > c^2 - \frac{101}{301} > c^2 - 8\sqrt{c^2 + 3}$ . **11.19.** а), в) Да; б), г) нет. **11.20.** а), г) Да; б), в) нет. **11.21.** а)  $2k + 3l > 27$ ; б)  $12 - 4n - 3m < -7$ ; в)  $s - 3p < -1$ ; г)  $16 - 3y + 4x > 4$ . **11.22.** а)  $5 < 0,5a < 8$ ; б)  $-6 < a - 16 < 0$ ; в)  $-48 < -3a < -30$ ; г)  $21 < 2a + 1 < 33$ . **11.23.** а)  $5,2 < 2\sqrt{7} < 5,4$ ; б)  $7,2 < 2 + 2\sqrt{7} < 7,4$ ; в)  $-2,7 < -\sqrt{7} < -2,6$ ; г)  $0,3 < 3 - \sqrt{7} < 0,4$ . **11.24.** а)  $3 < \frac{1}{4}a + b < 4\frac{1}{2}$ ; б)  $7 < a - \frac{1}{2} < 9\frac{1}{2}$ ;

- в)  $8 < ab < 20$ ; г)  $4 < \frac{a}{b} < 10$ . **11.28.** а) — г) Нет. **11.29.** а), г) Нет; б), в) да. **11.30.** а), в) Да; б), г) нет. **11.31.** а)  $a < b$ ; б)  $a < b$ ; в)  $a > b$ ; г)  $a > b$ . **11.32.** а)  $a > b$ ; б)  $a < b$ ; в)  $a < b$ ; г)  $a < b$ . **11.35.** а)  $0 \leq b^2 < 16$ ; б)  $\frac{1}{4} < b^{-2} < \frac{9}{4}$ . **11.36.** а)  $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$ ; б)  $(-\infty; -2) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$ . **11.37.** а)  $\frac{8}{9} < \frac{8}{6-s} < 8$ ; б)  $-4 < \frac{8}{t-5} < -\frac{8}{3}$ . **11.38.** а) 235; б) 96. **11.39.** а) 20; б) 31. **11.40.** а) -18; б) -1. **11.41.** а) 3 и -10,75; б)  $143\frac{1}{2}$  и  $7\frac{3}{8}$ ; в) 182 и -12; г) 26 и -164. **11.42.** а)  $-24 \leq 2x^2 - 3y \leq 47$ ; б)  $-24 \leq 4x + y^2 \leq 33$ . **12.27.** а) 1; 2; б)  $\sqrt{5}$ ; 3; в)  $\sqrt{6}$ ; 4; г)  $\sqrt{2}$ ; не существует. **12.28.** а) -4; -2; б) не существует; -1; в)  $-2\sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{5}$ ; г) не существует; -3. **12.32.** 1. **12.33.** 4. **12.34.** (4; 6). **12.35.** а)  $\frac{4}{3}$ ; б)  $\frac{1}{3}$ . **13.20.** а)  $\frac{5}{16}$ ; б)  $3\frac{1}{6}$ ; в)  $\frac{17}{36}$ ; г) 3. **13.24.** а)  $8\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{15}{29}$ ; в)  $\frac{7}{96}$ ; г)  $\frac{77}{135}$ . **13.28.** а)  $a = 59$ ;  $b = -30$ ; б)  $a = 31$ ;  $b = 12$ ; в)  $a = 149$ ;  $b = 14$ ; г)  $a = 240$ ;  $b = -120$ . **13.29.** а)  $a = 6$ ;  $b = 109$ ; б) таких чисел нет; в)  $a = -2$ ;  $b = 49$ ; г) таких чисел нет. **13.30.** а) (1; 1); (-1; -1); б) (2; 1); (-2; -1); в) (2; 1); (-2; -1); г) (1; 2). **13.31.** а)  $\sqrt{2} - 1$ ; б)  $2 + \sqrt{3}$ ; в)  $\sqrt{6} - 1$ ; г)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ . **13.32.** а)  $\sqrt{x} + \sqrt{x-1}$ ; б)  $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ . **13.38.** а)  $m = n = 1$ ;  $a = b$ ; б)  $m = 1$ ,  $n = 3$ ;  $a = 18$ ; в)  $m = n = 1$ ;  $a = 28$ ; г)  $m = 1$ ,  $n = 997$ ;  $a = 997$ . **13.47.** а)  $a > 0$ ; б)  $a \geq 0$ ,  $a \neq 4$ . **13.48.** а)  $a < 0$  и  $a = 1$ ; б)  $a \leq 0$ ,  $a \neq -4$ . **14.27.** а)  $6 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$ ; б)  $8 - 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$ ; в)  $9 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$ ; г)  $10 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{10}$ . **14.33.** а)  $\frac{p\sqrt{p} + q\sqrt{q}}{p - q}$ ; б)  $\frac{8 - t\sqrt{t}}{4 - t}$ ; в)  $\frac{x\sqrt{x} + 27}{x - 9}$ ; г)  $\frac{a\sqrt{a} - 8b\sqrt{b}}{a - 4b}$ . **14.34.** а)  $2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$ ; б)  $\frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ ; в)  $-\frac{2 + \sqrt{2}}{3}$ ; г)  $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$ . **14.57.** а)  $\frac{5(\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 5)}$ ; б)  $\frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$ ; в)  $\frac{6}{\sqrt{b}(\sqrt{b} - 2)}$ ; г)  $\frac{d}{\sqrt{c}(\sqrt{c} - \sqrt{d})}$ . **14.58.** а)  $-\frac{1}{6}$ ; б)  $-\frac{1}{\sqrt{pq}}$ ; в)  $-\frac{2}{21}$ ; г)  $\frac{3}{\sqrt{cd}}$ . **14.59.** а), в), г) Верно; б) неверно. **14.67.** а)  $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ;



- 6)  $\frac{(3 + \sqrt{z})(5 - \sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ ; в)  $\frac{4}{\sqrt{an}}$ ; г)  $-\frac{\sqrt{c} + \sqrt{d}}{2\sqrt{c}}$ . **14.68.** а)  $\frac{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 4)}{6}$ ;
- 6)  $\frac{(1 + \sqrt{a})(\sqrt{a} + 2\sqrt{b})}{12}$ ; в)  $\frac{3(\sqrt{c} - 5)}{2(\sqrt{c} + 6)}$ ; г)  $\frac{15}{2\sqrt{n} - \sqrt{m}}$ . **14.69.** а)  $\frac{4x - y}{2x}$ ;
- 6) -1. **14.70.** а)  $\frac{3\sqrt{t}}{4}$ ; б)  $\sqrt{xy}$ . **14.71.** а)  $\sqrt{a} - 1$ ; б)  $\frac{6\sqrt{b} - 1}{4b - 1}$ ; в)  $\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{c} + \sqrt{d}}$ ;
- г)  $-\frac{14}{a - 9}$ . **14.74.** а)  $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ; б)  $\frac{1}{\sqrt{c}}$ . **14.75.** а)  $\frac{x}{x - \sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{1}{a}$ .
- 14.76.** -1. **14.77.**  $\sqrt{13} - 1$ . **14.79.** а)  $\frac{a^2}{4(a^2 - x)}$ ; б)  $\frac{\sqrt{a - b}}{b}$ . **14.80.** а)  $\frac{a + 2b}{a - b}$ ;
- б)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ . **14.81.**  $a + b$ . **14.82.** а) 1; б)  $2 + 6\sqrt{5}$ ; в) 100; г) 39.
- 14.83.** а)  $A < B$ ; б)  $A < B$ ; в)  $A > B$ ; г)  $A < B$ . **14.84.** а)  $5 - \sqrt{11}$ ;
- б)  $\sqrt{17} + 2\sqrt{2}$ . **14.85.** а) Верно; б) верно. **14.86.** Верно. **14.87.**  $4 + \sqrt{2}$ .
- 15.10.** а)  $\pm 169,5$ ; б)  $\pm 147\frac{1}{3}$ ; в) -258; 200; г)  $\frac{1}{107}$ . **15.11.** а) -156;
- 156; б) -11; в) -315; 315; г) -17; 17. **15.12.** 1260 м. **15.13.** 22,1 мм.
- 15.14.** 1960 мм. **15.15.** 202 мм; 303 мм; 505 мм. **16.13.** а) 2; б)  $8 - 3\sqrt{7}$ ;
- в) -1; г)  $3\sqrt{3} - 5$ . **16.14.** а) 2; б) 21; в) 38; г) 66. **16.21.** а) 6, такое число
- единственное; б) таких чисел нет. **16.22.** а) 116 или 106; б) 3 или 11.
- 16.23.** а) 486 или 560; б) 437 или 363. **16.24.** а) 12 или 22; б) 30 или
184. **16.41.** а) 22; например, при  $x = 1$ ; б) 446; например, при  $x = 1$ ;
- в) 18; например, при  $x = -2$ ; г) 26; например, при  $x = 5$ . **16.50.** а) -8; 28;
- б)  $\frac{1}{3}$ ;  $3\frac{2}{3}$ ; в) -1,2;  $2\frac{12}{35}$ ; г)  $-8\frac{1}{4}$ ;  $3\frac{1}{4}$ . **16.53.** а)  $x \leq -3$ ,  $x \geq 3$ ;
- б)  $x < -1$ ,  $x > 1$ ; в)  $x$  — любое действительное число; г)  $0 \leq x \leq 1$ .
- 16.54.** а)  $x \leq 2$ ; б)  $x$  — любое действительное число; в)  $x > 2$ ; г) нет
- решений. **16.57.** а) 1, если  $x > 2$ ; -1, если  $x < 2$ ; б) 1, если  $x > -3$ ;
- 1, если  $x < -3$ ; в) 1, если  $x > -5$ ; -1, если  $x < -5$ ; г) 1, если  $x > 6$ ;
- 1, если  $x < 6$ . **16.58.** а)  $2\sqrt{5} - 1$ ; б) 6; в)  $2\sqrt{7}$ ; г)  $-2\sqrt{10}$ . **16.59.** а) 1;
- б) 1; в) 1; г) 1. **16.60.** а) -5; б)  $2x - 1$ ; в) 5; г) -5. **16.61.** а) -9; б)  $2x - 7$ ;
- в)  $4x - 11$ ; г) 9. **16.62.** а) -1; б) 10; в) -1; г) 2. **16.63.** а) 1; 2; 3; б) 4;
- в) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; г) 1; 2; 3. **16.69.** -6; -7; -8; ... **16.70.** а)  $a < 0$ ;
- б)  $a = 0$ ; в)  $a > 0$ . **16.71.** а)  $a < 0$ ; б)  $a > 0$ ; в) таких значений нет;
- г)  $a = 0$ . **16.72.** а) Таких значений нет; б)  $a \in (-\infty; +\infty)$ ; в) таких значений нет.
- 16.73.** а)  $a < 0$ ; б)  $a = 0$ ; в)  $a > 0$ ; г) таких значений нет.

**Глава 3. 17.11.** а) Нет; б) да. **17.34.** а)  $1 < y < 12$ ; б)  $0 \leq y \leq 3$ ; в)  $0 \leq y < 3$ ; г)  $y \geq 0$ . **17.35.** а)  $x \leq -3$  или  $x \geq 3$ ; б)  $1 < x < 3$  или  $-3 < x < -1$ ; в)  $-3 < x < 3$ ; г)  $3 \leq x \leq 6$  или  $-6 \leq x \leq -3$ . **17.36.** а)  $x < -2$  или  $x > 2$ ; б)  $-2 \leq x < -1$  или  $1 < x \leq 2$ ; в)  $-2 \leq x \leq 2$ ; г)  $-3 < x \leq -2$  или  $2 \leq x < 3$ . **17.39.** а)  $0 < x < 3$ ; б)  $-3 \leq x \leq 1$ . **17.43.** а)  $f(x^2) = 1,5x^4$ ; б)  $f(2x^2) = 6x^4$ ; в)  $f(x) = 1,5x^4$ ; г)  $f(2x^2) = 6x^4$ . **17.44.**  $-0,5$ . **17.45.**  $-2$ . **17.46.**  $-1$ . **17.56.** а)  $-1 \leq p < 0$ ; б)  $p = 2$ ; в)  $p = 0$ ; г)  $0 < p < 2$ . **17.59.** а) 1, если  $a = 0$ ; 2, если  $a \neq 0$ ; б), в) 1, если  $a \leq 0$ ; 2, если  $a = 1$ ; 3, если  $0 < a < 1$ ;  $a > 1$ ; г) 1, если  $a = 0$ ; 2, если  $a = \pm 1$ ; 4, если  $a \neq 0, \pm 1$ . **17.60.** а) 1, если  $a = 0$ ; 2, если  $a \neq 0$ ; б), в) 1, если  $a \leq 0$ ; 2, если  $a = 1$ ; 3, если  $0 < a < 1$ ;  $a > 1$ ; г) 1, если  $a = 0$ ; 2, если  $a = \pm 1$ ; 4, если  $a \neq 0, \pm 1$ . **17.61.** При  $a = 0$ . **17.62.** а)  $a < 0$ ; б)  $a \geq 0$ ; в)  $a = 0$ ; г)  $a > 0$ . **17.63.** а)  $k < 0$ ; б)  $k > 0$ ; в) таких значений  $k$  нет; г)  $k > 0$ . **18.19.** а)  $0,25$ ; б)  $\frac{2}{11}$ . **18.20.** а)  $\frac{7}{72}$ ; б)  $\frac{11}{15}$ . **18.21.** а) При  $a = -1$ ,  $a = 1$ ; б) при  $b = -1$ ,  $b = 1$ . **18.22.** а)  $(1; 1)$ ;  $(-1; -1)$ ; б)  $(3; -3)$ ;  $(-3; 3)$ . **18.24.**  $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$ ;  $B\left(2; -\frac{1}{3}\right)$ . **18.26.** а)  $(-1; -2)$ ;  $(1; 2)$ ; б)  $(1; -5)$ ; в)  $(-1; 3)$ ;  $(1; -3)$ ; г)  $(4; 1)$ . **18.45.**  $-1$ . **18.47.** а)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ; б)  $f(x) = -\frac{2}{x}$ . **18.54.** а) 1, если  $a = 1$ ; 2, если  $a \neq 1$ ; б) 0, если  $a = 1$ ; 2, если  $a \neq 1$ ; в) 2; г) 2, если  $a = 1$ ; 3, если  $a \neq 1$ . **18.55.** а) 2; б) 0, если  $a = 2$ ; 1, если  $a \neq 2$ ; в) 2; г) 2, если  $a = 1$ ; 3, если  $a \neq 1$ . **18.56.** а)  $k = 0$ ; б)  $k \neq 0$ ; в)  $k \neq 0$ . **18.57.** а)  $a = 0$ ; б)  $a > 1$ ; в)  $a \leq -1$  или  $a \geq 1$ . **19.15.** а)  $y = -2(x + 1)^2$ ; б)  $y = 3(x + 2)^2$ ; в)  $y = \sqrt{x - 2}$ ; г)  $y = -\sqrt{x + 4}$ . **19.16.** а)  $y = \frac{1}{x - 1}$ ; б)  $y = \frac{2}{x + 2}$ ; в)  $y = |x - 1|$ ; г)  $y = -|x + 2|$ . **19.17.** а) 0; 2; б) не существует; 4; в) не существует; 0; г)  $-2$ ;  $-1$ . **19.18.** а) 1; 2; б) 0; 2; в) не существует; 0; г) 0; не существует. **19.29.** а) 0; 3; б) 0; не существует. **19.30.** а)  $A < B$ ; б)  $M < N$ . **19.31.** а)  $K < L$ ; б)  $P = Q$ . **19.32.** а) Нет корней; б)  $-3$ ; в) 2, 5; г) 2. **19.33.** а) 2; б) 2; в)  $-4, -2$ ; г)  $-1$ . **19.34.** а) Нет решений; б)  $(3; 0)$ ,  $(4; 1)$ ; в)  $(0; -1)$ ,  $(-3; -4)$ ; г)  $(-1; 0)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(-3; 2)$ . **19.35.** а) 3; б) 2. **19.36.** а)  $0 < x < 2$ ,  $x > 3$ ; б)  $x \geq 3$ . **19.38.** б) Один корень, если  $p = 0$ ,  $2 < p \leq 8$ ; два корня, если  $0 < p \leq 2$ . **19.52.** а)  $y = 3x^2 + 1$ ; б)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ ; в)  $y = \frac{1}{x} + 2$ ; г)  $y = -\frac{2}{x} - 3$ . **19.53.** а)  $y = \sqrt{x} + 2$ ; б)  $y = -\sqrt{x} - 2$ ; в)  $y = |x| - 4$ ; г)  $y = -|x| + 3$ . **19.56.** а)  $A > B$ ; б)  $K > L$ . **19.62.** а), в) Нет решений; б)  $(1; -2)$ ; г)  $(4; 5)$ . **19.67.** а)  $-2 \leq x \leq 1$ ; б)  $-2 < x < 2$ . **19.74.** а)  $y = -2(x + 2)^2 + 2$ ; б)  $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 3$ ; в)  $y = \frac{1}{x - 1} + 2$ ; г)  $y = -\frac{1}{x - 4} - 3$ . **19.75.** а)  $y = \sqrt{x + 1} - 1$ ; б)  $y = 4 - |x - 2|$ ;

в)  $y = 2 - \sqrt{x-1}$ ; г)  $y = |x-3| + 1$ . **19.85.** а)  $-1 < p \leq 4$ ; б)  $p = -1$ ,  $p = -4$ ; в)  $-4 < p < -1$ ; г)  $p < -4$ ,  $p > 4$ . **20.7.** а)  $y \leq 5$ ; б)  $y \leq 4$ ; в)  $y \geq 1$ ; г)  $y \leq 4$ . **20.8.** а)  $c = 10$ ; б)  $c = -2$ . **20.9.** а) (3; -2); б) (1; 2). **20.10.** а) 15; б) 1. **20.11.** а) 1; б) 5. **20.12.** а) -3; -1; б) 3; 4; в) -11; не существует;

г) не существует; -1. **20.16.** а)  $x = \frac{1}{4}$ ; б)  $x = \frac{1}{5}$ ; в)  $x = -\frac{6}{7}$ ; г)  $x = 1$ .

**20.17.** а)  $x = -2$ ; б)  $x = -\frac{2}{3}$ ; в)  $x = 1$ ; г)  $x = 4$ . **20.19.** а) (1; 0); (5; 0);

б) (-2; 0); (6; 0); в) (-3; 0); (-1; 0); г) (1; 0); (7; 0). **20.20.** а)  $1 < x < 5$ ; б)  $x \leq 2$  или  $x \geq 4$ ; в)  $x \leq 1$  или  $x \geq 5$ ; г)  $0 < x < 6$ . **20.21.** а)  $x \leq -3$  или  $x \geq -1$ ; б) таких значений  $x$  нет; в)  $-3 < x < -1$ ; г)  $x \leq -4$  или  $x \geq 0$ . **20.23.** а)  $y = 0$  при  $x = 0$ ;  $x = 6$ ; функция возрастает при  $x \in [3; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; 3]$ ; б)  $y = 0$  при  $x = 4$ ;  $x = -4$ ; функция возрастает при  $x \in [0; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; 0]$ ; в)  $y = 0$  при  $x = 0$ ;  $x = -2$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; -1]$ ; функция убывает при  $x \in [-1; +\infty)$ ; г)  $y = 0$  при  $x = 3$ ;  $x = -3$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; 0]$ ; функция убывает при  $x \in [0; +\infty)$ . **20.24.** а)  $y = 0$  при  $x = 2$ ;  $x = 4$ ; функция возрастает при  $x \in [3; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; 3]$ ; б)  $y = 0$  при  $x = -1$ ;  $x = 2$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; 0,5]$ ; функция убывает при  $x \in [0,5; +\infty)$ ; в)  $y = 0$  при  $x = -3$ ;  $x = 1$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; -1]$ ; функция убывает при  $x \in [-1; +\infty)$ ; г)  $y = 0$  при  $x = -3$ ;  $x = 1$ ; функция возрастает при  $x \in [-1; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; -1]$ . **20.25.** а)  $y = 0$  при  $x = 5$ ;  $x = -1$ ; функция возрастает при  $x \in [2; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; 2]$ ; б)  $y = 0$  при  $x = 1$ ;  $x = 5$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; 3]$ ; функция убывает при  $x \in [3; +\infty)$ ; в)  $y = 0$  при  $x = -3$ ;  $x = -1$ ; функция возрастает при  $x \in [-2; +\infty)$ ; функция убывает при  $x \in (-\infty; -2]$ ; г)  $y = 0$  при  $x = -1$ ;  $x = 3$ ; функция возрастает при  $x \in (-\infty; 1]$ ; функция убывает при  $x \in [1; +\infty)$ .

**20.26.** а) Два; б) три; в) два; г) три. **20.27.** а) Два; б) два; в) два; г) два.

**20.28.** а), г) Нет решений; б), в) два. **20.32.** а)  $f(x^2) = 2x^4 - 5x^2 + 3$ ;

б)  $f(-x-1) = -x^2 - 4x - 7$ . **20.36.** а)  $f(2x) = 20x^2 + 6x - 2$ ;

б)  $f(x-1) = 5x^2 - 7x$ ; в)  $f(x^3) = 5x^6 + 3x^3 - 2$ ; г)  $2f(3x) = 90x^2 + 18x - 4$ .

**20.37.** а)  $f(-x) = -2x^2 - x - 4$ ; б)  $f(x+5) = -2x^2 - 19x - 49$ ;

в)  $f(-x^2) = -2x^4 - x^2 - 4$ ; г)  $3f(2x) = -24x^2 + 6x - 12$ . **20.38.** 0,75.

**20.39.** 0, 4. **20.40.** 0, 6. **20.44.** а)  $-1 < x < 0$ ;  $1 < x < 2$ ; б)  $0 < x < 2$ ;

$3 < x < 5$ . **20.45.**  $a = -4$ . **20.46.**  $a = -2$  или  $a = -6$ . **20.47.**  $a = 2$ .

**20.48.**  $c = 5$ ;  $c = 13$ . **20.49.**  $c = -1$ ;  $b = -2$ . **20.50.**  $c = 2$ ;  $a = 4$ ;  $b = -8$ .

**20.51.**  $y = 0,75x^2 - 1,5x + 2,75$ . **20.52.**  $y = -4x^2 - 8x$ . **20.53.**  $y = x^2 + 2x - 3$

или  $y = 0,25x^2 + 0,5x - 3,75$ . **20.54.**  $b = -6$ ;  $c = 8$ . **20.55.**  $b = 4$ ;  $c = 1$ .

**20.56.** а)  $y = -3x^2 - 12x - 9$ ; б)  $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{3}x + 1$ . **20.57.** а)  $y = 2x^2 - 3x$ ;

б)  $y = -x^2 + 3x + 1$ . **20.59.** а) При  $a \geq 5$ ; б) при  $a \leq -4$ . **20.60.** а) При

$a \geq 3,5$ ; б) при  $a \leq -16$ . **20.61.** а)  $b = -5$ ; б)  $b = 3$ . **20.62.** а) 11; б) 4,5.

**20.63.** а) 7; б) 5. **20.64.** а) 2; б) 2. **20.65.** а) 11; б) 5. **20.66.** а) (-1; 4);

б) (3; 9). **20.67.** а)  $K\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ ; б)  $K\left(-3; \frac{6}{5}\right)$ . **20.68.** а)  $K(-0,5; 0,25)$ ; б)  $K(0,5; 1)$ . **20.69.** а)  $(-2; -13)$ ; б)  $\left(\frac{41}{32}; -\frac{9}{8}\right)$ . **20.70.**  $-\frac{8}{5}$ . **20.71.** б) (1; 1); (-1; 5); в) 0,75; г) (0; 2);  $\left(0; 2\frac{3}{4}\right)$ . **20.73.** Знак «-». **20.76.** а) 6 и 6; б) 5 и 5. **20.77.** а) 0,5 и 9,5; б) 12,5 и -0,5. **20.78.** а) 12,25; б) 32. **20.79.** а) 1,225; б)  $\frac{150}{87}$ . **20.80.** а) -23; б) -4. **20.81.** а) -10; б) 34. **20.82.**  $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)^2 + y_0$ . **21.9.** 2 см и 4 см. **21.10.** 4 см и 3 см. **21.11.** 3 см и 4 см. **21.12.** 4 м и 6 м. **21.13.** 2 см и 6 см. **21.14.** 3 м; 4 м и 5 м. **21.15.**  $\frac{3}{5}$ . **21.16.** 4 км/ч и 6 км/ч. **21.17.**  $p = 0$ . **21.18.**  $p < 2$ . **21.19.**  $p > 0$ . **21.20.**  $p \geq -10$ . **21.21.** а)  $p < -1$ ; б)  $p = -1$ ; в)  $p > -1$ . **21.22.**  $0 < a < 16$ . **21.24.** а), б) -2; в) 1; г) решений нет. **21.26.** а) 2; б), в) -1; г) решений нет. **21.28.** 1. **21.29.** а)  $a < 0$ ; б)  $a = 0$ ; в)  $a > 0$ ; г) таких значений  $a$  нет. **22.10.** а) -5; -1; б) не существует; 7; в) 3; 4; г) не существует; -2. **22.11.** а) 4; 5; б) 8; не существует; в) -4; -1; г) 0; не существует. **22.12.** а)  $2 \leq x \leq 4$ ; б)  $-2 \leq x \leq 0$ . **22.13.** а)  $A > B$ ; б)  $K > L$ . **22.14.** а)  $-2 < x \leq 0$ ; б)  $x > 0$ ; в)  $x < -2$ ; г)  $-6 \leq x \leq -3$ . **22.15.** а)  $y < -2$ ; б)  $y \geq -1$ ; в)  $-2 < y < 0$ ; г)  $y \leq -3$ . **22.17.** а) (-2; 1); б) (1; -2); в) (-3; -1); г) (2; 4). **22.18.** а)  $y = x$ ,  $y = -x + 2$ ; б)  $y = x + 1$ ,  $y = -x + 5$ ; в)  $y = x$ ,  $y = -x + 2$ ; г)  $y = x + 5$ ,  $y = -x - 1$ . **22.19.** а) 4; б) 2, -2, -4; в) 0, 3, -2; г) 4, 0, -2. **22.20.** а) (-4; -4), (-5; -3); б) (1; -1), (2; -3), (4; 5); в) (-2; 1), (0; -1), (4; 7); г) (0; -5), (2; 3). **22.21.** а)  $-1 < x < 0$ ; б)  $x \leq -1$ ;  $x > 2$ ; в)  $0 < x < 1$ ; г)  $x < -3$ ;  $x \geq 2$ . **22.22.** а)  $x < 0$ ;  $1 < x < 2$ ; б)  $0 \leq x < 1$ ;  $2 < x \leq 3$ ; в)  $x \leq -2$ ;  $-1 < x \leq 0$ ; г)  $2 < x < 6$ ;  $-2 < x < 0$ . **22.25.** б) 0; в) нет таких значений. **22.26.** б)  $-5 < b < -1$ ;  $-1 < b < 3$ . **22.27.** а)  $y = \frac{2x + 4}{x}$ ; б)  $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$ ; в)  $y = \frac{-x - 5}{x}$ ; г)  $y = -\frac{3x}{x + 2}$ . **22.28.** а) (-2; -1);  $x = -2$ ;  $y = -1$ ; б) (-1; 1);  $x = -1$ ,  $y = 1$ ; в) (-2; 1);  $x = -2$ ;  $y = 1$ ; г) (-3; -1);  $x = -3$ ,  $y = -1$ . **22.30.**  $a = -22$ . **22.31.** а)  $y = \frac{3}{x - 1} - 2$ ; б)  $y = -\frac{2}{x + 3} + 1$ . **23.26.** а)  $a < 4$ ; б) таких значений  $a$  нет; в)  $a > 4$ ; г)  $a = 4$ . **23.27.** а)  $a < -2$ ; б)  $a > -2$ ; в) таких значений  $a$  нет; г)  $a = -2$ . **23.28.** а)  $k = 0$ ; б)  $k < -2$ ,  $-2 < k < 0$ ,  $k > 0$ ; в) таких значений  $k$  нет; г)  $k = -2$ . **23.29.** а)  $P = 8(1 + \sqrt{2})$ ;  $S = 16$ ; б)  $P = 12\sqrt{2}$ ;  $S = 12$ .

**Глава 4. 24.27.** 1 и 2. **24.28.** 2 и 3. **24.29.** Через 4 с. **24.30.** 12 см. **24.31.**  $4\sqrt{3}$  см. **24.32.** 3 км/ч. **24.33.** а) 1; 0,5; б) 0; в) -1,5; -2; г) -3. **24.34.** а) 2; б) -3; 3; в) 2; г) 1,5. **24.35.** а) -10; б) -38; в) -2; г) -21. **24.36.** а) 16; б) 0; в) -250; г) 0. **24.37.** а) 3; 5; б) 2; 10; в) 1; 3; г) -4; -2. **24.38.** а) -5; 2; б)  $\frac{1}{2}$ ; 2; в) -7; -2; г) 1,5; -0,5. **24.39.** а) 0; 3,5; б)  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ; в) 0; 7; г) 0;  $\frac{5}{3}$ . **24.40.** а) 0; 17; б) -1; 1; в) -68; 0; г) -2; 2. **24.41.** а) 0; б) -4; 4; в) 0; г)  $\pm 1,5$ . **25.10.** а) -5; 57; б) -1;  $\frac{133}{3}$ ; в) -127; 19; г)  $-\frac{8}{17}$ ; 8. **25.11.** а)  $-\frac{13}{3}$ ; 3; б) 2; в)  $-\frac{3}{4}$ ;  $\frac{5}{2}$ ; г) 25. **25.12.** а)  $\frac{-3-\sqrt{6}}{2}$ ;  $\frac{-3+\sqrt{6}}{2}$ ; б)  $-\frac{9}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{-3+\sqrt{15}}{2}$ ;  $\frac{-3-\sqrt{15}}{2}$ ; г)  $-\frac{1}{4}$ ;  $\frac{2}{3}$ . **25.13.** а)  $2\sqrt{3}$ ; б)  $-\sqrt{5}-5$ ;  $-\sqrt{5}+5$ ; в)  $-3\sqrt{2}$ ; г)  $2\sqrt{2}-2$ ;  $2\sqrt{2}+2$ . **25.14.** а)  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{4}$ ; б) 1,5; 6; в) -0,25; г)  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ;  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . **25.15.** а) 3; 4; б)  $\frac{1}{3}$ ; 2; в) нет корней; г) -2. **25.16.** а)  $\frac{1}{3}$ ; 4; б) -1;  $\frac{4}{3}$ ; в) корней нет; г)  $-\frac{5}{2}$ ; 1. **25.17.** а)  $-2\sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{2}$ ; б)  $\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ ;  $\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $-\sqrt{5}$ ;  $4\sqrt{5}$ ; г)  $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{4}$ ;  $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{4}$ . **25.18.** а)  $\frac{3-\sqrt{21}}{6}$ ;  $\frac{3+\sqrt{21}}{6}$ ; б) -1,5; 1; в) 1; г) нет корней. **25.19.** а) Нет корней; б) -1; 13; в) 2;  $\frac{5}{6}$ ; г) -1;  $\frac{31}{22}$ . **25.20.** а) 1; 4; б)  $\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ ;  $\frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ ; в)  $-\frac{1}{2}$ ; г) -2. **25.21.** а) -1; 35; б)  $11\frac{6}{7}$ ; в) общих точек нет; г)  $8\frac{1}{2}$ . **25.22.** а) -6; 6; б) 0;  $\frac{4}{9}$ ; в) -8; 8; г) 0; 3. **25.26.** 0; 12. **25.27.** а) (0; -4); б) (0; 6). **25.28.** а)  $y = 5x$ ; б)  $y = 2x$ ;  $y = -2x$ . **25.29.** а)  $y = 4x - 4$ ;  $y = -2x - 1$ ; б)  $y = 2x$ ;  $y = -4x + 9$ . **25.30.** 8. **25.31.** 7 см и 12 см. **25.32.** 10 и 12 или -12 и -10. **25.33.** 9 м и 40 м. **25.34.**  $10 \times 10$  см. **25.35.** 17 и 18. **25.36.** 49. **25.37.** 22; 23; 24. **25.38.** 33 см; 56 см; 65 см. **25.39.** 20 см. **25.40.** 17; 18. **25.41.** 20; 21. **25.42.** 5 %. **25.43.** 10 %. **25.44.** а)  $x_1 = p + 1$ ;  $x_2 = p - 3$  при всех значениях  $p$ ; б)  $x_1 = -p - 4$ ;  $x_2 = 2 - p$  при всех значениях  $p$ ; в)  $x_1 = p - 5$ ;  $x_2 = p + 3$  при всех значениях  $p$ ; г)  $x_1 = 1 - p$ ;  $x_2 = -p - 7$  при всех значениях  $p$ . **25.45.** а)  $x_1 = p - 1$ ;  $x_2 = p + 1$  при всех значениях  $p$ ; б) при  $p = 0$   $x = 0,25$ ; при  $p = 4$   $x = 0,5$ ; при  $p < 0$ ,  $0 < p < 4$   $x = \frac{2 \pm \sqrt{4-p}}{p}$ ;

при  $p > 4$  нет решений; в)  $x_1 = 2p - 1$ ;  $x_2 = 2p + 1$  при всех значениях  $p$ ;  
 г) при  $p = 0$   $x = \frac{1}{3}$ ; при  $p = 9$   $x = \frac{2}{3}$ ; при  $p < 9, p \neq 9$   $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{9-p}}{p}$ ;  
 при  $p > 9$  нет решений. **25.46.** а) При  $p = 4$   $x = -1$ ; при  $p \neq 4$   $x_1 = -1$ ;  
 $x_2 = \frac{p}{4-p}$ ; б) при  $p = 0$   $x = -1,5$ ; при  $p = 1$   $x = -2$ ; при  $p < 1, p \neq 0$   
 $x = \frac{-p-1 \pm \sqrt{1-p}}{p}$ ; при  $p > 1$  нет решений. **25.47.** 12 команд.  
**25.48.** 15 учащихся. **25.49.** 18. **25.50.** 60 км/ч и 80 км/ч. **25.51.** 10 %.  
**25.52.**  $x = \frac{b}{2}$ , если  $a > 3$ ,  $b$  — любое число;  $x = 1$ , если  $a = 3$ ,  $b = 2$ .  
**25.53.**  $a = -4$ . **25.54.** а) 1; б) 2; в) 4; г) 3. **25.55.** а) -3; -2; 1; б)  $\frac{-7 - \sqrt{97}}{2}$ ;  
 3; 4; в) -1; 1; г)  $\frac{7 - \sqrt{97}}{2}$ . **25.56.** а) 6; б)  $\frac{2}{3}$ ; в)  $-\frac{2}{3}$ ; г) 1,5. **25.57.** а) -3; 1;  
 б) -23; 1; в) -4; -1; г) -27; -1. **25.58.** а) -10; 3; б) -1; в) -3; 4; г) 3.  
**25.59.** а) 5; б)  $-\frac{10}{3}$ ; в) 9; г) -1. **25.60.** а) 0,5; 1; б) 2. **25.61.** а) Нет;  
 б) -3; 1. **25.62.** а) -4; -1; 1; 4; б) -3;  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$ ; 3; в)  $-\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2}$ ; г)  $-\frac{2}{3}$ ;  $\frac{2}{3}$ .  
**25.63.** а) 2;  $\frac{7}{3}$ ; б) -2;  $-\frac{2}{3}$ ; в)  $-\frac{2}{5}$ ;  $\frac{3}{5}$ ; г)  $\frac{5}{7}$ ;  $\frac{11}{14}$ . **25.64.** а) -3; -1; 1;  
 б) 0; в) -2; 0; 2; г) -2. **25.65.** а)  $-\sqrt{10}$ ;  $\sqrt{10}$ ; -4; 4; б) 1; 3; в) -1; 4;  
 г) -2; 0. **25.66.** а)  $\frac{1}{8}$ ;  $\frac{1}{6}$ ; б) 1; в)  $\frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{4}$ ; г) -1. **26.15.** а)  $x^2 - 8x + 4 = 0$ ;  
 б) не существует; в)  $x^2 - 32x + 144 = 0$ ; г)  $x^2 - 200x + 10000 = 0$ .  
**26.16.** а)  $x^2 - 9x + 5 = 0$ ; б)  $x^2 + 14x + 32 = 0$ . **26.17.** а)  $8x^2 + 7x - 11 = 0$ ;  
 б)  $13x^2 + 7x - 5 = 0$ . **26.18.** а)  $5x^2 - 7x - 9 = 0$ ; б)  $175x^2 - 15x - 1 = 0$ .  
**26.23.** 1. **26.24.** 3; 4. **26.25.** а)  $\frac{11}{3}$ ; б)  $\frac{71}{27}$ ; в)  $\frac{59}{12}$ ;  
 г)  $-\frac{85}{3}$ . **26.26.** а) (3; 5); (5; 3); б)  $(4 + \sqrt{15}; 4 - \sqrt{15})$ ;  $(4 - \sqrt{15}; 4 + \sqrt{15})$ .  
**26.27.** а) (4; 4); б) не существуют. **26.29.** а) 1;  $-\frac{31}{13}$ ; б) 1;  $\frac{22}{5}$ ;  
 в) 1;  $\frac{10}{3}$ ; г) -1;  $-\frac{38}{3}$ . **26.31.** а) -1; -5; б) -1;  $\frac{172}{67}$ ; в) -1;  $-\frac{6}{11}$ ; г) -1;  $\frac{51}{14}$ .  
**26.32.** а) 1 и  $2a$ ; б) 1 и  $\frac{1-3a}{a}$ ; в) -1 и  $3(1-a)$ ; г) -1 и  $\frac{3-a}{2-a}$ .

- 26.33.** а)  $s + m$ ; б)  $2s + 3m$ ; в)  $2m^2s$ ; г)  $s^2$ . **26.34.** а)  $s^2 - m$ ; б)  $s^2 - 2m$ ;  
 в)  $s^2 - 3m$ ; г)  $\left| \frac{s\sqrt{s^2 - 4m}}{m} \right|$ . **26.35.** а)  $s^2 - 4m$ ; б)  $\frac{m}{s}$ ; в)  $s^2 - 4m$ ;  
 г)  $\frac{s^2 - 2m}{m}$ . **26.36.** а) 115; б) -153. **26.37.** а)  $\frac{70}{9}$ ; б)  $\frac{8}{9}$ . **26.38.** а)  $\frac{19}{11}$ ; б)  $\frac{4}{3}$ .  
**26.39.** а) 5,5; б) -9,5. **26.40.**  $p = -\frac{1}{2}$ ,  $x_1 = \frac{-5 - 3\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-5 + 3\sqrt{5}}{2}$ .  
**26.41.**  $p = 1,5$ ,  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = -3,5$ ;  $p = 3$ ,  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = -3$ .  
**26.42.**  $\pm\sqrt{\frac{13}{6}}$ ;  $\pm\sqrt{\frac{17}{6}}$ . **26.43.** -2;  $-\frac{1}{2}$ . **26.44.** 4; 7 при  $p = -2$ ; -8; -1  
 при  $p = 4\frac{2}{3}$ . **26.45.** 5; 2,5 при  $p = 25$ . **26.46.** 2 и 5 при  $p = 20$ .  
**26.49.** а) (3; 4), (4; 3); б) (0,5; 4), (2; 1); в) (1; 2),  $\left(-\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ ;  
 г)  $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{7}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{7}\right)$ . **26.50.** а) Решений нет; б) (3; 8); (8; 3); в) (3; 9);  
 (9; 3); г) (1; 2); (2; 1). **27.9.** а)  $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} + 4)$ ; б)  $(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 9)$ ;  
 в)  $(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 7)$ ; г)  $(\sqrt{x} + 8)(\sqrt{x} - 5)$ . **27.10.** а)  $(\sqrt{x} + 1)(7\sqrt{x} + 16)$ ;  
 б)  $(x\sqrt{x} - 3)(3x\sqrt{x} - 1)$ ; в)  $(\sqrt{x} + 1)(9\sqrt{x} - 5)$ ; г)  $(x\sqrt{x} - 2)(2x\sqrt{x} - 1)$ .  
**27.11.** а)  $(x - 2)(x - 3)(x + 2)(x + 3)$ ; б)  $(2x^3 - 1)(4 - x^3)$ ;  
 в)  $(2 - x)(2 + x)(x - 4)(x + 4)$ ; г)  $(3x^3 - 1)(5x^3 - 1)$ . **27.12.** а)  $\frac{1}{x + 3}$ ;  
 б)  $\frac{3x - 1}{x}$ ; в)  $\frac{1}{x + 3}$ ; г)  $\frac{5x - 4}{x}$ . **27.13.** а)  $\frac{2x + 7}{x - 1}$ ; б)  $\frac{3x - 1}{x - 3}$ ; в)  $\frac{2x - 1}{x - 4}$ ;  
 г)  $\frac{2x - 1}{x - 5}$ . **27.14.** а)  $\frac{x - 5}{x + 10}$ ; б)  $-\frac{2x + 3}{5x + 2}$ ; в)  $\frac{6x - 13}{2x + 9}$ ; г)  $\frac{7x - 2}{2 - x}$ .  
**27.15.** а)  $\frac{\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x} - 4}$ ; б)  $(x - 1)(x + 3)$ ; в)  $\frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 3}$ ; г)  $\frac{x}{x^2 + 1}$ .  
**27.16.** а)  $x + 2$ ; б)  $x + 4$ ; в)  $x - 2$ ; г)  $x - 1$ . **27.17.** а)  $\frac{x}{x - 3}$ ;  
 б)  $\frac{3}{x - 4}$ . **27.18.** а)  $\frac{2x - 1}{x^2}$ ; б)  $\frac{15a}{3a - 1}$ . **27.19.** а)  $\frac{5 - a}{3(a + 1)}$ ; б)  $\frac{3a + 4}{a - 2}$ .  
**27.21.** а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ . **27.22.** а) -1; 2; б) 1; 23. **27.23.** а) 1,5; б)  $\frac{1}{2}$ .  
**27.24.** а)  $-\frac{3}{2}$ ; б)  $-\frac{4}{3}$ . **27.25.** а)  $x^2 - (a - 8)x - 8a$ ; б)  $x^2 - bx - b - 1$ ;

в)  $x^2 - 6ax + 5a^2$ ; г)  $x^2 - 2x + 2a - a^2$ . **27.26.** а)  $x^2 - 2ax + a^2 - 25$ ; б)  $x^2 - 49a^2 + 42a - 9$ ; в)  $x^2 - 6c + 9c^2 - 4$ ; г)  $x^2 - 4x + 3 - 4b^2 - 4b$ .

**27.27.** а)  $x^2 - \frac{a^2 + 1}{a}x + 1$ ; б)  $x^2 - \frac{a^2 + b^2}{ab}x + 1$ . **27.28.** а)  $(x + m) \times$

$\times (x + m + 1)$ ; б)  $(x + m)(xm + 1)$ ; в)  $(x(m + 1) - 1)(xm - 1)$ ; г)  $(mx + 1) \times$   
 $\times (x - m)$ . **27.29.** а)  $(x - 1)(2x + a)$ ; б)  $(b + p)(b + 2p - 3)$ ; в)  $(x - 1) \times$   
 $\times (2x - a - 1)$ ; г)  $-(5x - y)(x + y + 1)$ . **27.30.** а)  $(x - y)(x - 2y)$ ; б)  $(x - 2y)(x - 3y)$ ;

в)  $(p + q)(2p + q)$ ; г)  $(3s + t)(4s + t)$ . **28.1.**  $\frac{3}{4}$ . **28.2.**  $\frac{2}{5}$ . **28.3.**  $\frac{3}{8}$ .

**28.4.**  $\frac{3}{4}$ . **28.5.** 12. **28.6.** 4. **28.7.** 15 км/ч и 18 км/ч. **28.8.** 70 км/ч и 80 км/ч.

**28.9.** 50 км/ч. **28.10.** 8 км/ч. **28.11.** 80 км/ч и 60 км/ч. **28.12.** 40 км/ч.

**28.13.** 2 ч 24 мин. **28.14.** 30 км. **28.15.** 50 км/ч. **28.16.** 48 км/ч и 60 км/ч.

**28.17.** 5 км/ч и 6 км/ч. **28.18.** 16 км/ч. **28.19.** 16 км/ч. **28.20.** 18 км/ч

и 24 км/ч. **28.21.** 30 км/ч. **28.22.** 20 км/ч и 18 км/ч. **28.23.** 12 км/ч;

1 ч 20 мин. **28.24.** 60 км/ч. **28.25.** 9 ч. **28.26.** 1 : 2. **28.27.** 15 км/ч.

**28.28.** 18 км/ч. **28.29.** 24 км/ч. **28.30.** 8 км/ч. **28.31.** 3 км/ч.

**28.32.** 10 км/ч. **28.33.** 15 км/ч. **28.34.** 10 км/ч. **28.35.** 6 км/ч. **28.36.** 24 км/ч.

**28.37.** 10 км/ч. **28.38.** 10 км/ч. **28.39.** 20 машин. **28.40.** 36 дней.

**28.41.** 40 деталей. **28.42.** 8 изделий в день. **28.43.** 50 т и 60 т.

**28.44.** 47 туристов. **28.45.** 75 га в день. **28.46.** 20 %. **28.47.** 14 дней.

**28.48.** 10 м<sup>3</sup>/ч. **28.49.** 10 ч. **28.50.** 12 ч. **28.51.** 6 ч и 10 ч. **28.52.** 1,5 ч

и 3 ч. **28.53.** 80 ч и 120 ч. **28.54.**  $3\frac{1}{3}$  ч и 5 ч. **28.55.** 15 дней.

**28.56.** 28 дней и 21 день. **28.57.** 3 ч и 4 ч. **28.58.** 336 деталей и 280 де-

талей. **28.59.** 10 ч и 15 ч. **28.60.** 20 %. **28.61.** 120 г. **28.62.** 25 кг.

**28.63.** 13,5 кг. **28.64.** 60 кг. **28.65.** 170 кг. **28.66.** 280 кг. **28.67.** 10 л,

8 л. **28.68.** 20 %. **28.69.** 5 %. **28.70.** 25 %. **28.71.**  $\frac{1}{5}$ .

**Глава 5. 29.24.** а)  $m < 2$ ; б)  $n > -\frac{2}{5}$ ; в)  $p > 2$ ; г)  $q < \frac{2}{15}$ . **29.25.** а)  $a > \frac{4}{11}$ ;

б)  $c \leq \frac{1}{7}$ ; в)  $b < \frac{48}{11}$ ; г)  $d \leq -\frac{5}{7}$ . **29.26.** а)  $x \in (-\infty; +\infty)$ ; б), г) нет решений;

в)  $t < -\frac{23}{6}$ . **29.27.** а) 21; б) -1. **29.28.** а) 0; б) -80. **29.29.** а) -6;

б) 16. **29.30.** а) 0; б) 1. **29.31.** а)  $a > 5$ ; б)  $x > -1$ ; в)  $y \leq -5$ ; г)  $c > -\frac{1}{5}$ .

**29.32.** а)  $x < -12$ ; б)  $x < \frac{42}{17}$ . **29.33.** 1; 2; 3; 4. **29.48.** а)  $x < 6$ ; б)  $x \geq \frac{8}{3}$ ;

в)  $\frac{1}{4} < x < \frac{4}{5}$ ; г)  $1 < x < 15$ . **29.49.** а) 0,925; б) -0,5. **29.50.** а) 1; б) -2; 6.



**29.51.** а)  $-4; -3$ ; б)  $-1; 0; 1; 2$ ; в)  $1; 2$ ; г) нет решений. **29.52.** а) Имеет решения при  $p < 3$ ; не имеет решений при  $p \geq 3$ ; б) имеет решения при  $p \leq 7$ ; не имеет решений при  $p > 7$ ; в) имеет решения при  $p < 5$ ; не имеет решений при  $p \geq 5$ ; г) имеет решения при  $p \geq 2$ ; не имеет решений при  $p < 2$ . **29.53.** а) При  $p = 5$ ; б), г) не существуют; в) при  $p \leq 3$ . **29.54.**  $1 < p < 12$ . **29.55.** Больше 6 км, но меньше 10 км. **29.56.** Менее 4 км. **29.57.** 20, 30, 40, 50, 60 или 70 км. **29.58.** 9 или 8 р. **29.59.** а)  $-1 < x \leq 1$ ; б)  $x > 33$ . **29.61.** 0. **29.62.** а) При всех значениях  $a$   $x > 0,25a$ ; б) при  $a > 0$   $x > \frac{6}{a}$ ; при  $a = 0$  решений нет; при  $a < 0$   $x < \frac{6}{a}$ ; в) при  $a > 0$   $x > 1$ ; при  $a = 0$  решений нет; при  $a < 0$   $x < 1$ ; г) при  $a > 0$   $x \leq a - 17$ ; при  $a = 0$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $a < 0$   $x \geq a - 17$ . **29.63.** а) При  $a > 1$   $x > -1 - a$ ; при  $a = 1$  решений нет; при  $a < 1$   $x < -1 - a$ ; б) при  $a > -0,5$   $x < 2a + 1$ ; при  $a = -0,5$  решений нет; при  $a < -0,5$   $x > 2a + 1$ ; в) при  $a > \frac{1}{6}$   $x \leq 4a - 1$ ; при  $a = \frac{1}{6}$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $a < \frac{1}{6}$   $x \geq 4a - 1$ ; г) при  $a < -3$  или  $a > 3$   $x \leq -\frac{5+a}{3+a}$ ; при  $a = -3$  решений нет; при  $a = 3$  решений нет; при  $-3 < a < 3$   $x \geq -\frac{5+a}{3+a}$ . **29.64.** а) При  $a > 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x < -\frac{b}{a}$ ; при  $a < 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x > -\frac{b}{a}$ ; при  $a = 0$ ,  $b < 0$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $a = 0$ ,  $b \geq 0$  решений нет; б) при  $a > 2$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x < \frac{b-3}{2-a}$ ; при  $a < 2$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x > \frac{b-3}{2-a}$ ; при  $a = 2$ ,  $b < 3$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $a = 2$ ,  $b \geq 3$  решений нет; в) при  $a > -4$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x \geq \frac{5+b}{a+4}$ ; при  $a < -4$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x \leq \frac{5+b}{a+4}$ ; при  $a = -4$ ,  $b \leq -5$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $a = -4$ ,  $b > -5$  решений нет; г) при  $a > 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x \geq b - 1$ ; при  $a < 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x \leq b - 1$ ; при  $a = 0$ ,  $b \in \mathbf{R}$   $x \in \mathbf{R}$ . **29.65.**  $a \geq -1,25$ . **29.66.**  $a \geq -50$ . **29.67.**  $a > 0,75$ . **30.27.** а)  $x < -1$ ;  $x > 4,5$ ; б)  $-\frac{33}{4} < x < 1$ . **30.28.** а)  $-8 < x < 6$ ; б)  $x < -4$ ;  $x > \frac{2}{3}$ . **30.29.** а)  $-1 < x < 1$ ; б)  $y \leq -2$ ;  $y \geq 2$ ; в)  $x < -1$ ;  $x > 1$ ; г)  $-2 \leq z \leq 2$ . **30.30.** а)  $x < 3$ ;  $x > 4$ ; б)  $-4 < x < 5$ ; в)  $x < -7$ ;  $x > 6$ ; г)  $-3 < x < 5$ . **30.31.** а), г) Да; б), в) нет. **30.32.** а) Восемь; б) семь. **30.33.** а)  $-8$ ; б) 0. **30.34.** а)  $p < -6$ ;  $p > 3$ ; б)  $-6$ ; 3; в)  $-6 < p < 3$ . **30.35.** а)  $p < -4$ ;  $p > 6$ ; б)  $-4$ ; 6; в)  $-4 < p < 6$ . **30.36.** а)  $p < -1$ ;  $p > 1$ ; б)  $-1$ ; 1; в)  $-1 < p < 1$ . **30.37.** а)  $p > 1,8$ ; б)  $-\frac{15}{4} < p < 3$ ; в)  $p > -\frac{15}{16}$ ; г)  $p < 0,6$ . **30.38.** а)  $-3 \leq p \leq 3$ ; б)  $p \leq -\frac{1}{12}$ ;  $p \geq 0$ ; в)  $p \geq -2$ ; г)  $p \leq -1$ ;  $p \geq 2$ . **30.39.** а)  $p \leq 0$ ;  $p \geq \frac{13}{3}$ ;

б)  $p \leq \frac{7}{9}$ ; в)  $p \leq -\frac{8}{9}$ ;  $p > 0$ ; г)  $p \leq \frac{29}{28}$ . **30.40.** -2; 6. **30.41.**  $-\frac{1}{3} < p < \frac{1}{3}$ .  
**30.42.** Больше 2 см, но не более 16 см. **30.43.** Больше 12 см.  
**30.44.** Не более одного часа. **30.45.** а)  $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{5}{12}$ ; б)  $x < -\frac{14}{13}$  и  $x > -\frac{49}{19}$ ; в)  $x < -\frac{12}{13}$  и  $x > -\frac{28}{39}$ ; г)  $x < \frac{2}{3}$  и  $x > 1$ . **30.46.** а) -1; б) -1; -4; 4; в) 1; г) 0; 5; 6. **30.47.** а)  $1 < x < 11$ ; б) -3; в)  $-5 \leq x \leq 1$ ; г) нет решений. **30.48.** а)  $y > 0$  при  $-\frac{8}{3} < x < 5$ ;  $y < 0$  при  $x < -\frac{8}{3}$ ;  $x > 5$ ; б)  $y > 0$  при  $x \in \mathbf{R}$ ;  $y < 0$  не существует; в)  $y > 0$  при  $x < \frac{1}{2}$  и  $x > \frac{1}{2}$ ;  $y < 0$  не существует; г)  $y > 0$  не существует;  $y < 0$  при  $x \in \mathbf{R}$ . **30.49.** а)  $x < \frac{1 - \sqrt{69}}{2}$ ;  $x > \frac{1 + \sqrt{69}}{2}$ ; б)  $x < 0$ ;  $x > \frac{111}{3}$ .  
**30.50.**  $-4 < x < 1$ . **30.51.** (-1; 5). **30.52.** а)  $\frac{7 - \sqrt{93}}{2} < x < \frac{7 + \sqrt{93}}{2}$ ; б)  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ ; в)  $-1 < x < 111$ ; г)  $x < \frac{1 - \sqrt{85}}{6}$ ;  $x > \frac{1 + \sqrt{85}}{6}$ .  
**30.53.** а)  $a > 3$ ; б)  $0 \leq a \leq 1$ ; в)  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ ; г)  $-1 \leq a < 0$ . **30.54.** а)  $a \geq 3$ ; б)  $0 < a < 1$ ; в)  $-\frac{1}{2} < a < 0$ ; г)  $-1 < a \leq 0$ . **30.55.** а)  $|a| > 4$ ; б)  $a \in \mathbf{R}$ .  
**30.56.** а)  $b \leq -1$ ;  $b \geq 4,5$ ,  $b = 0,5$ ; б)  $(-4; -3] \cup [6; 7)$ . **30.57.** а)  $a < 5$ ; б)  $a < -1$ ; в)  $a > 5$ ; г)  $a < -2$ . **30.58.**  $0 < a \leq 6\frac{2}{3}$ . **31.18.** а) 10; б) 40.  
**31.20.** а) 2500; б) 12 500. **31.21.** а) 60; б) 3500. **31.42.** а) 4; б) 9; в) 49; г) 46. **31.43.** а) 0,25; б)  $\frac{17}{21}$ ; в)  $\frac{19}{32}$ ; г)  $\frac{11}{24}$ . **32.8.** а)  $9\sqrt{2} \approx 12,7$ ; б)  $\sqrt{3} \approx 1,7$ . **32.9.** а)  $\sqrt{3} \approx 1,73$ ; б)  $\sqrt{2} \approx 1,41$ . **32.10.** а) 0,8; б) 11,2; в) 3,3; г) 4,5. **32.11.** а)  $\sqrt{5} - 1 \approx 1,24$ ; б)  $\sqrt{3} - 1 \approx 0,73$ .  
**32.25.** а)  $3,25 \leq x \leq 3,35$ ; б)  $3,295 \leq x \leq 3,305$ ; в)  $9,7995 \leq x \leq 9,8005$ ; г)  $0,005 \leq x \leq 0,015$ ; д)  $3299,5 \leq x \leq 3300,5$ ; е)  $3299,995 \leq x \leq 3300,005$ .  
**32.28.** а)  $15,99 \leq 3x + y \leq 16,03$ ; б)  $1,84 \leq x - 5y \leq 1,90$ ; в)  $3,30 \leq x \cdot y \leq 3,36$ ; г)  $7,83 \leq \frac{x}{y} \leq 7,94$ . **32.37.** а), б) Да; в), г) нет. **32.40.** а) 1,15; б)  $3\frac{1}{30}$ ; в) 3,9625; г)  $11\frac{3}{11}$ . **33.14.** а)  $1,42 \cdot 10^6$ ; б)  $7,0078 \cdot 10^2$ ; в)  $5,15 \cdot 10^3$ ;

г)  $7 \cdot 10^{-3}$ . **33.15.** а)  $2,5 \cdot 10^{15}$ ; б)  $7,5 \cdot 10^{19}$ ; в)  $2 \cdot 10^{14}$ ; г)  $8 \cdot 10^{-12}$ . **33.16.** а)  $1,7 \cdot 10^6$ ; б)  $5 \cdot 10^{-30}$ ; в)  $1 \cdot 10^{-14}$ ; г)  $5 \cdot 10^{-25}$ . **33.17.** а)  $a > b$ ; б)  $a > b$ ; в)  $a < b$ ; г)  $a < b$ . **33.18.** 112 985. **33.20.** а) 12 или 13; б) 30; 31; 32; 33; 34; в) 3; г) -7 или -6. **33.21.** а) -1 или 0; б) 3; в) 4; г) 4. **33.22.** а) 6 или 7; б) 4 или 5; в) 4 или 5; г) 5 или 6. **33.23.** а) 18; 0; 9; б) -13; -1; -6; в) 10; 0; 5; г) -10; -1; -5.

**Глава 6.** **34.7.** а)  $a = 0$ ; б) нет таких значений  $a$ . **34.8.** а) Степень 34, старший коэффициент  $3^{17}$ , свободный член 1; б) степень 17, старший коэффициент -2, свободный член 0; в) степень 13, старший коэффициент 1, свободный член -1; г) степень 15, старший коэффициент 16, свободный член 0. **34.11.** а)  $a = \frac{5}{3}$ ; б)  $a \neq \frac{4}{3}$ ; в)  $a = \frac{4}{3}$ ; г)  $a = \frac{3}{2}$ . **34.12.** а)  $a = 2$ ;  $b = -0,5$ ; б)  $a = 3$ ;  $b = 0$ . **34.17.** а)  $a = -3$ ;  $b = 2$ ; б)  $a = -48$ ;  $b = 112$ ; в)  $a = -1$ ;  $b = 1$  или  $a = -5$ ;  $b = 2$ ; г)  $a = 0$ ;  $b = -1$  или  $a = \sqrt{3}$ ;  $b = 2$  или  $a = -\sqrt{3}$ ;  $b = 2$ . **34.19.** а) -61; б) 25; в) 15; г) 101. **34.21.** а)  $a = -\frac{7}{9}$ ;  $b = \frac{44}{3}$ ; б)  $a = \frac{1}{3}$ ;  $b = 1$ . **34.27.** а)  $a = -5$ ; -1; 7; б)  $a \neq -4$ ;  $a \neq 0$ ;  $a \neq 8$ ; в)  $a = -2$ ; 1; 0; г)  $a = -2$ ; -1; -5. **34.28.** а)  $a = \frac{1}{6}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $-\frac{5}{2}$ ;  $-\frac{5}{4}$ ; б)  $a = -3$ ;  $a = 1$ ; в)  $a = -\frac{1}{2}$ ;  $-\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{2}$ ; 1; г)  $a = 2$ ; 3;  $\frac{7}{3}$ . **34.29.** а)  $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ ; б)  $p(x) = 4x^2 + x - 2$ . **34.30.** а)  $x^3 + 3x^2 + x - 1$ ; б)  $x^3 + 5x^2 - 11x + 2$ . **34.31.** а)  $a = -\frac{5}{8}$ ;  $b = \frac{21}{8}$ ; б)  $a = -\frac{17}{4}$ ;  $b = \frac{29}{4}$ ; в)  $a = \frac{3}{7}$ ;  $b = \frac{11}{7}$ ; г)  $a = \frac{5}{9}$ ;  $b = \frac{22}{9}$ . **34.32.** а)  $f(x) = x^2 + x + 1 - \frac{3}{x}$ ;  $f(10) \approx 111$ ;  $f(0,01) \approx -299$ ; б)  $f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$ ;  $f(100) \approx 199$ ;  $f(0,01) \approx 29\ 899$ . **34.33.** а)  $f(x) = 2x + 9 + \frac{8}{x-1}$ ;  $f(100) \approx 209$ ;  $f(1,001) \approx 8011$ ; б)  $f(x) = 5x - 12 + \frac{29}{x+3}$ ;  $f(-100) \approx -512$ ;  $f(-2,99) \approx -2897$ . **34.34.** а)  $1 + \frac{9}{x-1} + \frac{11}{(x-1)^2}$ . **Указание.** Сделать замену  $t = x - 1$ ; б)  $5x - 29 + \frac{129}{x+3} - \frac{125}{(x+3)^2}$ ;

в)  $11x + 47 + \frac{151}{x-2} + \frac{113}{(x-2)^2}$ ; г)  $1 + \frac{3}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$ . **34.35.** а)  $a = b = 0,5$ ;

б)  $a = \frac{7}{4}$ ;  $b = \frac{1}{4}$ ; в)  $a = \frac{1}{4}$ ;  $b = -\frac{1}{4}$ ; г)  $a = -\frac{21}{4}$ ;  $b = -\frac{47}{4}$ .

**34.36.** а)  $a = \frac{3}{4}$ ;  $b = -\frac{3}{4}$ ; б)  $a = \frac{5}{4}$ ;  $b = \frac{3}{4}$ ; в)  $a = \frac{1}{6}$ ;  $b = -\frac{1}{6}$ ;

г)  $a = -\frac{38}{5}$ ;  $b = -\frac{47}{5}$ . **34.37.** а)  $a = \frac{4}{3}$ ;  $b = \frac{5}{3}$ ; б)  $a = \frac{1}{8}$ ;  $b = -\frac{1}{8}$ ;

в)  $a = \frac{7}{3}$ ;  $b = \frac{2}{3}$ ; г)  $a = \frac{3}{5}$ ;  $b = \frac{1}{5}$ . **34.38.** а)  $a = -b = \frac{3}{16}$ ;  $c = -\frac{3}{4}$ ;

б)  $a = -b = -\frac{5}{16}$ ;  $c = \frac{3}{4}$ ; в)  $a = \frac{4}{9}$ ;  $b = \frac{5}{9}$ ;  $c = -\frac{2}{3}$ ; г)  $a = -\frac{1}{3}$ ;  $b = 0$ ;

$c = \frac{1}{3}$ . **35.1.** а) -1; 0; 4; б) -12; 0; 1, корень 0 имеет кратность 2;

в) 0; г) 0; 1; 4, корень 0 имеет кратность 2. **35.2.** а) 0,25; 1;

б)  $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ ;  $\frac{9 \pm \sqrt{85}}{2}$ ; в) -7; -1;  $4 \pm \sqrt{15}$ ; г)  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . **35.3.** а) -1; 1;

3; б)  $-\sqrt[3]{11}$ ; 2; в)  $\frac{\pm\sqrt{5}}{5}$ ; 3; г)  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; 1, корень 1 имеет кратность 2.

**35.4.** а) При  $a = 6$   $x = 2$ ;  $x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ ; б) при  $a = -11$

$x = -1$ ;  $x = \frac{7 \pm \sqrt{113}}{4}$ ; в) при  $a = 0$   $x = 1$ ;  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$ ; г) при  $a = 1$

$x = -1$ ;  $x = 2 \pm \sqrt{5}$ ; при  $a = -2$   $x = -1$ ;  $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ . **35.5.** а) -5; -1; 7;

б) -2,75; 4; 6,25. **35.9.** а) -0,5,  $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; б) 1, -0,5,  $\frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$ .

**35.10.** а) -1; 2; 3; б) -3; -2; -1; 1; в) -4; -1; 2; г) -3; -2; 1; 3.

**35.11.** а)  $-\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{5}$ ; 1; б) -3;  $-\frac{4}{3}$ ; 1; в)  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ ; 1; г)  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ ; 2. **35.12.** а) 0,5;

б) 0,5; 0. **35.13.** а) 3; 4; б) -1; 3; в)  $\frac{-5 \pm \sqrt{93}}{2}$ ; г)  $\frac{5 \pm \sqrt{93}}{2}$ .

**35.14.** а) -2; 1; б) 1; 3;  $-3 \pm \sqrt{11}$ ; в) -9; 1;  $\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$ ; г) -3; 6.

**35.15.** а) -2; 2; б) -1; 1; в) -1; г) 0;  $\frac{4}{5}$ . **35.18.** а) -2; -0,5; 1;

б)  $-2$ ;  $-0,5$ ;  $1$ ; в)  $-2$ ;  $-0,5$ ;  $1$ ; г)  $-2$ ;  $-0,5$ ;  $1$ . **35.19.** а), б), в)  $1$ ,  $0,5$ ,  $-2 \pm \sqrt{3}$ ; г)  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $1$ . **35.20.** а)  $-\frac{2}{3}$ ;  $1$ ;  $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ ; б)  $-\frac{2}{3}$ ;  $1$ ;  $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ ; в)  $1$ ;  $\frac{2}{3}$ ; г)  $-\frac{2}{3}$ ;  $1$ ;  $\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ . **35.21.** а)  $-1$ ;  $\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ ; б)  $1$ ; в)  $-1$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{3}$ ; г)  $1$ ;  $-\frac{1}{5}$ ;  $\frac{3 \pm \sqrt{14}}{5}$ . **35.22.** При  $a = -5$  один корень; при  $a = 3$  один корень. **35.23.** а) При  $a = 0$  два корня; при  $a = -4$  один корень; при  $a = -1$  один корень; б) при  $a = 2$  один корень; при  $a = 4$  один корень. **35.24.** Если  $a = 0$ ,  $b = -3$ , то  $x = 1$ ;  $-2$ ; если  $a = -2$ ,  $b = -1$ , то  $x = \pm 1$ ;  $2$ . **35.25.** При  $a > 4$  единственный корень  $a$ ; при  $a = 4$  два корня —  $4$  и  $2$ ; при  $a = 3$  два корня —  $1$  и  $3$ ; при  $a = 0$  два корня —  $0$  и  $4$ ; при  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$  три корня —  $a$ ,  $2 - \sqrt{4 - a}$ ,  $2 + \sqrt{4 - a}$ . **36.1.** а)  $0$ ;  $4$ ; б)  $\frac{1}{3}$ ; в)  $-5$ ;  $6$ ; г)  $\frac{14}{5}$ . **36.2.** а)  $-11$ ; б)  $\frac{5}{2}$ ; в)  $4$ ; г)  $3$ . **36.3.** а)  $-5$ ;  $4$ ; б)  $-4,5$ ;  $0$ ; в)  $-2$ ;  $6$ ; г)  $-\frac{2}{5}$ ;  $\frac{2}{5}$ . **36.4.** а)  $3$ ; б)  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; в)  $6$ ;  $-2,2$ ; г)  $-1,5$ . **36.5.** а)  $-3$ ;  $3$ ; б)  $1$ ;  $17$ ; в)  $-1$ ;  $1$ ; г)  $0,5$ . **36.6.** а), г) Нет корней; б)  $\frac{7 \pm 3\sqrt{6}}{10}$ ; в)  $0$ ;  $-6$ . **36.7.** а)  $0$ ;  $2 + \sqrt{5}$ ; б)  $0$ ;  $\frac{\sqrt{125} - 11}{2}$ . **36.8.** а)  $1$ ;  $\sqrt{3}$ ; б)  $2$ ;  $\sqrt{5}$ . **36.9.** а)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $1 - \sqrt{2}$ . **36.10.** а)  $-\frac{2}{3}$ ;  $1$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{8}$ ; в) нет корней; г)  $2$ ;  $4$ . **36.11.** а)  $-\frac{10}{3}$ ; б)  $-1$ . **36.12.** а)  $2$ ;  $73$ ; б)  $-18,5$ ;  $2$ . **36.13.** а)  $5$ ;  $-\frac{5}{2}$ ; б)  $-\frac{1}{4}$ . **36.14.** а)  $8$ ; б) корней нет. **36.15.** а)  $3$ ;  $0$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ;  $2$ ; в)  $2$ ;  $3$ ; г)  $-1 \pm \sqrt{6}$ ;  $1$ ;  $-5$ . **36.16.** а)  $1$ ;  $-2$ ; б)  $0$ ;  $1$ ; в)  $1$ ;  $-4$ ;  $-1$ ;  $-2$ ; г)  $1$ ;  $2$ . **36.17.** а)  $\frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$ ; б)  $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ ;  $1$ ; в)  $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ ; г)  $2$ ;  $\frac{1}{2}$ . **36.18.** а)  $0$ ;  $2$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ;  $2$ . **36.19.** а)  $1 \pm \sqrt{2}$ ;  $-2$ ;  $4$ ; б) нет корней. **36.20.** а)  $0$ ; б)  $-0,125$ ;  $0$ ; в)  $\pm 1,75$ ; г)  $-\frac{4}{3}$ ;  $0$ . **36.21.** а)  $-3$ ; б)  $0$ ; в)  $\pm 9$ ; г)  $\frac{1}{3}$ ,  $-\frac{1}{6}$ . **36.22.** а)  $6$ ;  $-3$ ; б)  $-3$ ;  $-1$ ;  $3 \pm \sqrt{11}$ ; в)  $3 \pm \sqrt{5}$ ;  $3 \pm \sqrt{6}$ ; г)  $-1$ ;  $-\frac{1}{6}$ ;  $-\frac{1}{9}$ . **36.23.** а)  $-\frac{4}{3}$ ;  $-\frac{1}{3}$ ; б)  $-3$ ;  $-1$ ;  $-\frac{1}{3}$ . **36.24.** а)  $-9$ ;  $1$ ;  $\frac{-5 \pm \sqrt{61}}{2}$ ;

- б)  $-10 \pm \sqrt{85}$ . **36.25.** а) 0,5; 3,5; б) -3; 1. **36.26.** а) 0; б)  $-\frac{5}{7}$ .
- 37.8.** а)  $\frac{2}{5}$ ; 4; б) 1; в)  $-\frac{13}{9}$ ; 11; г)  $-\frac{5}{3}$ ;  $-\frac{1}{5}$ . **37.9.** а) Если  $p < 0$ , то корней нет; если  $p = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $p > 0$ , то  $x = \pm p$ ; б) если  $p < -1$ , то корней нет; если  $p = -1$ , то  $x = -3$ ; если  $p > -1$ , то  $x = p - 2$ ;  $x = -4 - p$ ; в) если  $p > 0$ , то корней нет; если  $p = 0$ , то  $x = 2$ ; если  $p < 0$ , то  $x = -p + 2$ ;  $x = p + 2$ ; г) если  $p < 1$ , то корней нет; если  $p = 1$ , то  $x = 1$ ; если  $p > 1$ , то  $x = p$ ;  $x = 2 - p$ . **37.10.** а) 3; б)  $\frac{4}{3}$ ; 6; в) нет корней; г) нет корней. **37.11.** а)  $\pm 1$ ;  $\pm 5$ ; б) -5; -1; в)  $\pm \frac{5}{13}$ ; г) нет корней.
- 37.12.** а) -1; 6; 2; 3; б) 1; 5; в) -1; 4; г) 4; 1. **37.13.** а) 1; 2; 4; б) -2; 2; 4; в) -4; -2; 1; г) -2; -1; 1. **37.14.** а)  $-\frac{1}{5}$ ; 5; б) -26; 4; в)  $-\frac{6}{7}$ ;  $\frac{4}{3}$ ; г) -4; 0. **37.15.** а) -3; б) 1; в) -1;  $\frac{3}{2}$ ; 2; г) 2. **37.16.**  $\frac{1}{18}$ ; 1. **37.17.** а) 0; 1; 9; б) -1; 1; 4; в) 0; 7; г) 2; 4. **37.18.** а)  $-\frac{7}{2}$ ; 5; б) -1;  $\frac{1}{5}$ ; в) -8; 10; г) -1; 1. **37.19.** а) -6; 0; 2; б) 2,5; в) 0; г) -3. **37.20.** а) [-3; 0]; б)  $\{-5\} \cup [-3; 1]$ ; в) [0; 1]; г)  $\left[\frac{3}{7}; +\infty\right)$ . **37.21.** а) Решений нет; б)  $[-3; -2] \cup [2; 3]$ ; в) 0;  $\pm\sqrt{13}$ ; г)  $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ . **37.22.** а) 1; 3,5; 4; б) [1; 4]. **37.23.** а)  $\pm(1 + 2\sqrt{2})$ ;  $\pm 1$ ; б)  $\pm(2 + \sqrt{14})$ ; 0;  $\pm 4$ ; в)  $\pm 5$ ;  $\pm(1 + \sqrt{2})$ ; г)  $\pm(2 + \sqrt{17})$ ;  $\pm 1$ ;  $\pm 3$ . **37.24.** а) (2;  $+\infty$ ); б)  $\{4\} \cup [2,5; 3,5]$ ; в) (4;  $+\infty$ ); г) [3; 4]. **37.25.** а) [-1; 0]; б) [-2; 0]. **37.26.** а) -8;  $-\frac{6}{7}$ ;  $-\frac{29}{13}$ ;  $-\frac{27}{19}$ ; б) -1,8;  $\frac{1}{7}$ ; 12; 1,6. **38.4.** а), г) Да; б), в) нет. **38.5.** а) Нет; б) нет; в) да; г) да. **38.6.** а) 3; б) нет корней; в) 1; г) нет корней. **38.7.** а) 1; б) -1;  $\frac{1}{2}$ ; в) 1; г) -2. **38.8.** а) 4; 16; б) 25; в) 4; 9; г) 36. **38.9.** а) 25; б) 9; в) 9; г) 16. **38.10.** а) 2; б) -1; в)  $\frac{45}{7}$ ; г)  $\frac{5}{12}$ . **38.11.** а) -3; б) -1; в) -2; г)  $\frac{3}{4}$ . **38.12.** а) 2; б) -11; в) 11; г) -3. **38.13.** а) 5; б)  $\frac{23}{25}$ ; в)  $\frac{9}{4}$ ; г) нет корней. **38.14.** а) -1; 0; б), г) нет корней; в) -1. **38.15.** а) 0,5; 1; б) -2; 1; в) -4; 3; г) -3; 7. **38.16.** а) -1; 2;

- б)  $-5,5$ ;  $\pm 3$ ; в)  $0$ ; г) нет корней. **38.17.** а)  $35$ ; б)  $-1$ ; в)  $17$ ; г)  $-1$ ; 3. **38.18.** а)  $2$ ; б)  $7$ ;  $8$ ; в)  $\frac{25}{6}$ ; г)  $3$ . **38.19.** а)  $5$ ; б)  $3$ ; в)  $-1$ ;  $0$ ; г)  $\pm\sqrt{2}$ . **38.20.** а)  $-1$ ;  $2$ ; б)  $3$ ; в)  $1$ ; г) нет корней. **38.21.** а)  $\pm 2\sqrt{2}$ ; б)  $3$ ; в)  $-\sqrt{10}$ ;  $\sqrt{10}$ ; г)  $101$ . **38.22.** а)  $-\frac{11}{10}$ ;  $\frac{14}{5}$ ; б)  $\frac{9}{5}$ ; в)  $-\frac{10}{7}$ ;  $\frac{10}{7}$ ; г)  $\frac{1}{2}$ . **38.23.** а)  $3$ ; б)  $2$ ; в)  $4$ ;  $6 + 2\sqrt{2}$ ; г)  $2$ ;  $\frac{11 - \sqrt{29}}{2}$ . **38.24.** а)  $1$ ; б)  $3$ ; в)  $1$ ; г)  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ . **38.25.** Если  $b < -4$ , то решений нет; если  $-4 \leq b < -1$ , то  $x = 2$ ; если  $b \geq -1$ , то  $x = 1$  или  $x = 2$ . **38.26.** При  $a = 0$ ;  $\frac{7}{3} \leq a \leq 7$ . **39.3.** а)  $-\frac{7}{6}$ ; б)  $-17$ ; в)  $0,5$ ; г) ни при каких  $b$ . **39.4.** **39.5.** а) Если  $b < 0$ , то корней нет; если  $b = 0$ , то  $x = 0$ ; если  $b > 0$ , то  $x = \pm\sqrt{3b}$ ; б) если  $b = 1$ , то  $x$  — любое число; если  $b = -6$ , то решений нет; если  $b \neq 1$ ;  $-6$ , то  $x = \frac{1}{b+6}$ ; в) если  $b = 1$ , то решений нет; если  $b \neq 1$ , то  $x = \frac{7}{b-1}$ ; г) если  $b = 0$ , то  $x$  — любое число; если  $b > 0$ , то решений нет; если  $b < 0$ , то  $x = 0$ . **39.6.** а) При любом  $b$   $x = \frac{b-3}{b^2+9}$ ; б) если  $b = 9$ , то решений нет; если  $b \neq 9$ , то  $x = \frac{b+3}{b-9}$ ; в) если  $b = -3$ , то  $x$  — любое число; если  $b \neq -3$ , то  $x = 1$ ; г) если  $b = 3$ , то решений нет; если  $b = -3$ , то  $x$  — любое число; если  $b \neq -3, 3$ , то  $x = \frac{1}{b-3}$ . **39.7.**  $(-4; 2)$  и  $(-4; -2)$ . **39.8.** а) При  $a = 3$ ; б) при  $p = -\frac{1}{6}$ . **39.9.** а)  $a = \frac{7}{9}$ ;  $b = -\frac{16}{9}$ ; б)  $a = -4$ ;  $b = 1,5$ . **39.10.** а)  $a = 14$ ;  $b = 5$ ; б)  $a = 7,5$ ;  $b = 4,5$ . **39.11.** а)  $a = 19$ ;  $b = 1$ ; б)  $a = b = 1$ . **39.12.** а)  $a = \frac{4}{3}$ ;  $b = \frac{11}{3}$ ; б)  $a = -\frac{4}{3}$ ;  $b = \frac{11}{3}$ . **39.13.** а) При всех значениях  $k$ , кроме  $k = 7$ ; б) при всех значениях  $k$ , кроме  $k = -3$ . **39.14.** а)  $0,25 \leq k \leq 1$ ; б)  $1 \leq k \leq 2$ . **39.15.** а)  $0,25 \leq k \leq 4$ ; б)  $0,4 \leq k \leq 8$ . **39.16.** а) При  $b < 0$ ; б) при  $b > 0$ . **39.17.** а)  $-14 \leq b \leq -2$ ; б)  $-4 \leq b \leq 0$ . **39.18.** а)  $-7 \leq b \leq 2$ ; б)  $-8 \leq b \leq 6$ . **39.19.** а)  $k > 1$ ; б)  $k < 1$ . **39.20.** а)  $2 \leq b \leq 8$ ; б)  $0 \leq b \leq 7$ . **39.21.** а) При  $a = 2$  ( $6$ ;  $6$ ); б) при  $m = -1$  ( $-2$ ;  $2$ ). **39.22.** При  $a = -\frac{4}{3}$ . **39.23.** При  $b = 3$ . **39.24.** а)  $-2$ ;  $-1$ ;  $1$ ;  $2$ ; б) не существует; в)  $1$ ;  $0$ ; г)  $-6$ ;  $1$ .

**39.25.** а)  $-5$ ; б)  $-2$ ; 0; в)  $-1$ ; 0; г) 0; 2. **39.26.** а) Если  $b = 3$ , то решений нет; если  $b \neq 3$ , то  $x = 3$ ; б) если  $b = 2$  и  $b = -1,5$ , то решений нет; если  $b \neq 2$ ,  $b \neq -1,5$ , то  $x = \frac{7}{b-2}$ ; в) если  $b = -2$ , то решений нет; если  $b \neq -2$ , то  $x = b$ ; г) если  $b = 2$ , то  $x$  — любое число, кроме  $-2$ ; если  $b \neq 2$ , то  $x = 0$ . **39.27.** а) Если  $a = -1$ , то  $x = -1$ ; если  $a \neq -1$ , то  $x = a$  и  $x = 2a + 1$ ; б) если  $a = 0$ , то  $x = 0,4$ ; если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{a + 5 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 25}}{2a}$ . **39.28.** а) Если  $m = -2$ , то  $x = -3$ ; если  $m = -3$ , то  $x = -2$ ; если  $m \neq -2$ ;  $m \neq -3$ , то  $x = -2$  и  $x = -3$ ; б) если  $m = 4$ , то  $x = -1$ ; если  $m = -1$ , то  $x = 4$ ; если  $m \neq 4$ ,  $m \neq -1$ , то  $x = -1$  и  $x = 4$ . **39.29.** а) Если  $m = 1$ , то корней нет; если  $m \neq 1$ , то  $x = 2m$  и  $x = m + 1$ ; б) если  $m = -4$ , то  $x = -5$ ; если  $m = -3$ , то  $x = -3$ ; если  $m \neq -4$ ;  $m \neq -3$ , то  $x = m - 1$  и  $x = m$ . **39.30.** а) При  $p = 2$  и  $p = -\frac{2}{9}$ ; б) при  $p = 3$  и  $p = -\frac{3}{4}$ . **39.31.** а) При  $p = 4$  и  $p = -\frac{14}{9}$ ; б) при  $p = -3$  и  $p = \frac{3}{4}$ . **39.32.**  $-4$  или  $20$ . **39.33.** а)  $2$ ; б) при  $a = 5$  и  $a = -14,5$ . **39.34.** а)  $a = -3$ ; б) при  $a = 12$ . **39.35.**  $-3 \leq m \leq 4$ . **39.36.**  $a = 0$ . **39.37.** Если  $a = -33$ , то  $x = -1$ ; если  $a = 12$ , то  $x = 4$ . **39.38.**  $k = -4$ . **39.39.** Если  $a = -2$ , то  $x = -0,2$ ;  $-1,5$ ;  $1$ ; если  $a = 4$ , то  $x = 1$  — единственный корень. **39.40.** а)  $a = \frac{11}{6}$ ;  $b = -\frac{5}{6}$ ; б)  $a = \frac{11}{6}$  и  $b = \frac{5}{6}$ . **39.41.** а) Если  $c = -6$ , то  $x = -2$ ; если  $c \neq -6$ , то  $x = \frac{c+2}{2}$  и  $x = \frac{c-2}{4}$ . б) Если  $c = -8$ , то  $x = 4$ ; если  $c \neq -8$ , то  $x = \frac{4-c}{3}$  и  $x = -c - 4$ . **39.42.**  $a = 3$ . **39.43.**  $a = 30$ . **39.44.** При  $a < 7$  нет корней; при  $a = 7$  один корень; при  $a > 7$  два корня. **39.45.** При  $a \in (13,5; 14)$  четыре корня. **39.46.** а) При  $a < -\frac{9}{8}$  один корень; при  $a = 0$ ;  $-\frac{9}{8}$ ;  $9$  два корня; при  $a > -\frac{9}{8}$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \neq 9$  три корня; б) при  $a < -\frac{1}{3}$  один корень; при  $a = 0$ ;  $16$ ;  $-\frac{1}{3}$  два корня; при остальных  $a$  три корня. **39.47.** а) При всех  $a$ , кроме  $a = 0$ ;  $a = -1$ ;  $a = 0,25$ ; б) при  $a \neq 0$ ,  $-2$ ,  $-\frac{1}{2}$ . **39.48.** а)  $a = 0$ ;  $a = 1$ ; б) при  $a = 1$  ( $1$ ;  $2$ );  $(-1$ ;  $0)$ . **39.49.** а)  $y = x - 1$ ; б)  $y = 3 - x$ ; в)  $k = \frac{2}{3}$ ,  $k > 2$ ,  $k < -2$ ; г)  $k \geq 2$ ,  $k < -2$ . **39.50.** а)  $-2 < k < 2$ ; б) при



$a = -4$ . **39.51.** а) Если  $a < -6$ ,  $a > 6$ , то решений нет; если  $a = -6$ , то  $x \leq -2$ ; если  $-2 < a < 6$ , то  $x = 0,5a + 1$ ; если  $a = 6$ , то  $x \geq 4$ ; б) если  $a < -2$ , то решений нет; если  $a = -2$ , то  $x \geq 4$ ; если  $-2 < a < 10$ , то  $x = 3 - 0,5a$ ; если  $a \geq 10$ , то  $x = 0,5 - 0,25a$ . **39.52.** При  $a = -8$  и  $a = -4$ . **39.53.** При  $a = -7$ ; сумма и произведение корней равны 0. **39.54.** При  $a = 2$  или  $a = -6$ ; сумма и произведение корней равны 0. **39.55.**  $a = 0$ . **39.56.**  $a = 1$ ;  $b = 0$ .

**Глава 7.** **40.21.** а) 1; 7; б) 2; 6; в) 1; 3; 9; 27; г) 36. **40.22.** а) 2; 3; 4; 6; 12; б) 1; 2; 3; 6; в) 1; 3; 5; 9; 15; 45; г) 1; 2; 5; 10. **40.23.** а)  $(-6; -13)$ ;  $(-5; -4)$ ;  $(-4; -1)$ ;  $(-1; 2)$ ;  $(2; 3)$ ;  $(11; 4)$ ;  $(-8; 23)$ ;  $(-9; 14)$ ;  $(-10; 11)$ ;  $(-13; 8)$ ;  $(-16; 7)$ ;  $(-25; 6)$ ; б)  $a = 114$ ;  $A(1; 1)$ . **40.24.** а)  $\pm 1$ ;  $\pm 3$ ; б) 1; 2; 4. **41.3.** а) 75; 74; б) 51; 50. **41.6.**  $237 : 3$  и  $732 : 3$ . **41.15.** а) 3; б) 5. **41.16.** а) 3; б) да, например, 5, 11. **41.18.** а)  $p = 11$ ;  $q = 5$ ; б)  $p = 5$ ;  $q = 17$  или  $p = 11$ ;  $q = 3$ . **42.8.** а) 3; 2; 0; 4; б) 1; 2; 1; 0. **42.9.** а) 0; 1; б) 4; 6; 7; 4. **42.11.** а) 2; 5; 8; б) 2. **42.12.** а) 0; 2; 4; 6; 8; б) 6. **42.13.** а) 0; 6; б) 6. **42.14.** а) 1; 4; 7; б) 1; 5; 9. **42.15.** а) 1; б) 3; 8; в) 7; г) 7. **42.17.** 0; 0; 1; 8; 0; 3. **42.18.** а) 8; б) 9; в) 1; г) 9. **42.19.** а) 1; б) 9; в) 5; г) 6. **42.20.** а) 1; б) 0. **42.27.** а) 7; б) 7 или 31; в) 7; г) 7; 31; 55. **42.28.** а) 17; б) 17; 67; в) 7; г) 17; 42; 67; 92. **42.34.** а) 3; б) 0. **42.35.** а) 37; б) 64. **42.37.** а) 11; б) 7. **43.6.** а) 14 и 21; б) 90 и 24. **43.12.** а) НОД = 1; НОК =  $n(n + 1)$ ; б) если  $n$  делится на

5, то НОД = 5; НОК =  $\frac{n(n + 5)}{5}$ ; если  $n$  не делится на 5, то НОД = 1;

НОК =  $n(n + 5)$ ; в) НОД = 1; НОК =  $(n + 170)(n + 171)$ ; г) НОД = 1,

2, 3 или 6; НОК =  $n(n + 6)$ ;  $\frac{n(n + 6)}{2}$ ;  $\frac{n(n + 6)}{3}$ ;  $\frac{n(n + 6)}{6}$ .

**43.13.** а) НОД =  $n + 1$ ; НОК =  $n(n + 1)$ ; б) НОД =  $n + 1$ ; НОК =  $n^3 + 1$ ; в) НОД = 1; НОК =  $n^4 + n$ ; г) НОД = 1 при  $n = 2k$ ; НОД = 2 при  $n = 2k + 1$ ; НОК =  $(n^2 + 1)2n$  или НОК =  $n(n^2 + 1)$ . **43.14.** а) 2; б) 5; в) 3; г) 7. **44.8.** а) 8; б) 18; в) 38; г) 97. **44.9.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **44.10.** а) 2; б) 4; в) 9; г) 24. **44.11.** а) НОД =  $2^{14}$ ; НОК =  $25!$ ; б) НОД =  $2^{97}$ ; НОК =  $8 \cdot 100!$ ; в) НОД =  $3^{71}$ ; НОК =  $1891!$ ; г) НОД =  $5^{168}$ ; НОК =  $5^{39} \cdot 676!$ . **44.12.** а) НОД =  $6^{14}$ ; НОК =  $75!$ ; б) НОД =  $21^{100}$ ; НОК =  $1000!$ . **44.13.** а) НОД = 1; НОК =  $133 \cdot (134! - 1)$ ; б) НОД = 9; НОК =  $1001 \cdot (255! - 9)$ .

**Глава 8.** **10.** а)  $a = -1$ ; б)  $a = 3$ . **11.** а)  $b = -8$ ;  $c = 0$ ; б)  $b = -24$ ;  $c = -45$ . **17.** а)  $y_{\text{наим}} = -8$  при  $x = -1$ ;  $y_{\text{наиб}} = 0$  при  $x = -3$ ; б)  $y_{\text{наим}} = -3$  при  $x = -7$ ;  $y_{\text{наиб}} = 0$  при  $x = -4$ ; в)  $y_{\text{наим}} = -6$  при  $x = 0$ ;  $y_{\text{наиб}}$  не существует; г)  $y_{\text{наим}}$  не существует;  $y_{\text{наиб}} = 8$  при  $x = 2$ . **19.** а)  $x < -7$ ;  $x > 1$ ; б)  $-1 \leq x \leq 3$ ; в)  $-3 \leq x \leq 5$ ; г)  $x < -4$ ;  $x > 1$ . **20.** а)  $x < -2$ ;  $x > -2$ ; б)  $-\infty < x < +\infty$ ; в)  $x = 3$ ; г) нет решений. **21.** а) Один корень при  $t = -3$ ; два корня при  $t > -3$ ; не имеет корней при  $t < -3$ ; б) один корень при  $k = 5$ ; два корня при  $k < 5$ ; не имеет

корней при  $k > 5$ . **27.** а)  $y = \frac{-3}{x}$ ; б)  $y = \frac{4}{x}$ ; в)  $y = -\frac{1}{2x}$ ; г)  $y = \frac{3}{x}$ .

**28.** а), б) Да; в), г) нет. **29.** а)  $y_{\text{наим}} = -6$  при  $x = 1$ ;  $y_{\text{наиб}}$  не существует; б)  $y_{\text{наим}} = 1$  при  $x = 3$ ;  $y_{\text{наиб}} = 4$  при  $x = 0$ ; в)  $y_{\text{наим}} = -10$  при  $x = -1$ ;  $y_{\text{наиб}} = -4$  при  $x = -4$ ; г)  $y_{\text{наим}}$  не существует;  $y_{\text{наиб}} = 0$  при  $x = 7$ .

**39.** а)  $y_{\text{наим}} = 2$  при  $x = 4$ ;  $y_{\text{наиб}}$  не существует; б)  $y_{\text{наим}} = -\sqrt{5}$  при  $x = 3$ ;  $y_{\text{наиб}} = -\sqrt{2}$  при  $x = 0$ ; в)  $y_{\text{наим}} = 2$  при  $x = 4$ ;  $y_{\text{наиб}}$  не существует;

г)  $y_{\text{наим}} = \sqrt{3} + 1$  при  $x = 6$ ;  $y_{\text{наиб}} = \sqrt{6} + 1$  при  $x = 9$ . **54.** а)  $f(0) = 5$ ;  $f(-3) = 38$ ;  $f(2t) = 12t^2 - 4t + 5$ ;  $f(x + 2) = 3x^2 + 10x + 13$ ; б)  $f(1) = -2$ ;  $f(-2) = -23$ ;  $f(3x) = -36x^2 + 9x - 1$ ;  $f(x - 1) = -4x^2 + 11x - 8$ .

**55.** а)  $f(1) = 0$ ;  $f(8) = \sqrt{7}$ ;  $f(0,5x) = \sqrt{0,5x - 1}$ ;  $f(x^2 + 1) = |x|$ ; б)  $f(0) = 2$ ;

$f(-2) = \sqrt{2}$ ;  $f(4x) = 2\sqrt{x + 1}$ ;  $f(x^2 + 4x) = |x + 2|$ . **56.** а) 1; б) 3,5. **57.** а) 4;

б) 1; 5. **58.** а) 0,5; б) 2. **59.** а)  $x < 4,5$ ; б)  $x \leq 4$ . **60.** а)  $x < -10$  или  $x > -3$ ;

б)  $2 \leq x \leq 4$ . **61.** а)  $y(a) < y(b)$ ; б)  $y(a) = y(b)$ ; в)  $y(a) < y(b)$ ; г)  $y(a) < y(b)$ .

**63.** а)  $f(-2) = 0$ ;  $f(0) = -4$ ;  $f(3) = -10$ ; б)  $A$  — принадлежит;  $B$  —

не принадлежит;  $C$  — принадлежит. **65.** а)  $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0; \\ \sqrt{x}, & x > 0; \end{cases}$

б)  $f(x) = \begin{cases} -(x + 1)^2 + 1, & -3 \leq x \leq 0; \\ \frac{4}{x}, & 0 < x \leq 4. \end{cases}$  **73.** а) -4; 2; б) -4. **78.** а) -6; 0;

б) -6; 0; в) -12; 0; г) 0. **79.** а) -3; 3; б)  $-\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{3}$ ; в) -2; 2; г)  $-\sqrt{6}$ ;  $\sqrt{6}$ .

**80.** а) 0; б), г) нет корней; в)  $-\frac{4}{3}$ . **81.** а)  $-\frac{5}{6}$ ; 3; б) -7; 1,6; в)  $-\frac{4}{9}$ ;

-4; г) -3;  $\frac{25}{3}$ . **82.** а)  $2 - \sqrt{3}$ ;  $2 + \sqrt{3}$ ; б)  $\frac{5 - \sqrt{5}}{4}$ ;  $\frac{5 + \sqrt{5}}{4}$ ; в)  $-3 - \sqrt{7}$ ;

$-3 + \sqrt{7}$ ; г)  $\frac{-3 - \sqrt{14}}{5}$ ;  $\frac{-3 + \sqrt{14}}{5}$ . **83.** а) -3,5; б), г) нет корней;

в) 1,6. **84.** а)  $-\frac{1}{2}$ ; 3; б) -4;  $\frac{4}{3}$ ; в) -2; 11; г) -1;  $\frac{20}{3}$ . **85.** а)  $-\frac{3}{4}$ ;  $\frac{5}{8}$ ;

б) -1;  $-\frac{1}{8}$ ; в) -0,4; 0,7; г)  $-\frac{5}{8}$ ;  $\frac{1}{3}$ . **86.** 8 и 12. **87.** 81 см<sup>2</sup>. **88.** 5 м и 35 м.

**89.** 60 см<sup>2</sup>. **90.** 26 см; 24 см и 10 см. **91.** 15 см и 20 см. **92.** 12 см и 16 см. **93.** 480 см<sup>2</sup>. **94.**  $c = 13$  и  $c = 37$ . **95.**  $a = -1$ . **96.** а)  $y = 2x^2 - 8x + 4$ ;

б)  $y = x^2 - x - 5$ . **97.** а) -2; 2; б)  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\pm 3$ ; в)  $\pm \sqrt{2}$ ;  $\pm 3$ ; г)  $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  $\pm 2$ .

98. а)  $-1$ ; 0; 1; б)  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{3}$ ;  $-\frac{1}{6}$ ; в)  $-3$ ; 3; г) 2. 99. а)  $x^2 + 5x - 36 = 0$ ;
- б)  $18x^2 + 9x - 2 = 0$ ; в)  $x^2 + 10x + 21 = 0$ ; г)  $90x^2 - 87x + 10 = 0$ .
100. а)  $x^2 - 4x + 1 = 0$ ; б)  $2x^2 - 6x + 1 = 0$ ; в)  $x^2 + 6x + 4 = 0$ ;
- г)  $18x^2 + 6x - 5 = 0$ . 101. а)  $-1$ ; б)  $-16$ . 102. а)  $b = -5$  или  $b = 5$ ;
- б)  $c = -2$ . 103. а)  $q = -28$ ; б)  $c = 15$ . 104. а) 12; б)  $-6$ . 109. а)  $(x - 1)(x + 23)$ ;
- б)  $-(x + 3)(3x - 1)$ ; в)  $-(x - 7)(x - 11)$ ; г)  $(x + 1)(7x + 2)$ . 110. а)  $-\frac{x + 9}{x + 7}$ ;
- б)  $\frac{x}{x - 3}$ ; в)  $-\frac{x}{x + 5}$ ; г)  $\frac{x - 2}{5x + 2}$ . 111. а)  $\frac{16}{a(4 + a)}$ ; б)  $\frac{8c}{c^2 - 4}$ ; в)  $\frac{1}{x(1 + x)}$ ;
- г)  $\frac{9 + y^2}{9 - y^2}$ . 112. а)  $\frac{a + 1}{a - 1}$ ; б)  $\frac{1}{b}$ ; в)  $\frac{x + 3}{x - 3}$ ; г)  $-\frac{2}{3m}$ . 113. а)  $\frac{(x - 3)(x - 2)}{5x}$ ;
- б)  $\frac{4y}{y - 2}$ ; в)  $\frac{2x}{(x - 5)(x + 1)}$ ; г)  $\frac{a + 6}{6a}$ . 114. а)  $\frac{5b(5a - b)}{5a + b}$ ; б)  $\frac{2a + x}{3ax}$ ;
- в)  $\frac{8b(b - 4)}{b + 4}$ ; г)  $-\frac{3y^2}{y + 3x}$ . 115. а)  $\frac{b - 3}{b}$ ; б)  $\frac{y}{y - 5}$ . 116. а)  $\frac{3x - 1}{x^2}$ ;
- б)  $\frac{y^2}{2y + 1}$ . 117. а)  $\frac{1}{2m + 1}$ ; б)  $-\frac{1}{p}$ . 119. а)  $5x - 4y$ ; б)  $x^2 + xy + 2y^2$ ;
- в)  $x^2 + xy + y^2$ ; г)  $y^2 - xy + 3x$ . 120. 142. 121. а)  $p^2 - 2q$ ; б)  $p^4 - 4p^2q + 2q^2$ ;
- в)  $p^5 - 5p^3q + 5pq^2$ . 122. а) 1 при  $x = -2y$ ; б)  $-2$  при  $x = 4$ ;  $y = -2$ ;
- в) 1 при  $x = -2y - 1$ ; г) 7 при  $z = 2$ ,  $x = -y - 1$ . 125. а)  $-1$ ; б) 2.
126. 9 при  $x = 0,5$ ,  $y = -1,5$ . 127.  $-2$  при  $x = y = 0,5$ . 128.  $\frac{90}{13}$  при
- $x = \frac{12}{13}$ ;  $y = \frac{14}{2}$ . 129. 3. 130. а) 1; б) 2,5; в) 0; г)  $-\frac{5}{3}$ . 131. а)  $\frac{10}{7}$ ; б)  $\frac{5}{3}$ .
132. а) 0,5; 2; б)  $-\frac{2}{3}$ ; 1; в)  $-3$ ;  $-\frac{1}{3}$ ; г)  $-2$ ;  $\frac{3}{4}$ . 133. а)  $-1$ ; 1; 3; б)  $-\frac{4}{3}$ ;  $-1$ ;
- $\frac{3}{2}$ ; 2; в)  $-1$ ; 1; 3; 5; г)  $-8$ ;  $-3$ . 134. 6 км/ч. 135. 18 км/ч или 4 км/ч.
136. 12 км/ч. 137. 180 км/ч. 138. 0,8 м/с и 1 м/с. 139. 50 км/ч и 90 км/ч. 140. 40 км/ч и 60 км/ч. 153. а) 256; б) 27; в) 0,01; г) 1.
154. а) 4; б)  $-\frac{1}{27}$ . 155. а) 5; б)  $-\frac{11}{8}$ ; в) 3; г)  $\frac{16}{3}$ . 156. а)  $-4$ ; 9;
- б) 1; 4; в)  $-8$ ; 2; г)  $-7$ ; 2. 157. а) 1; б) 3; в) 2; г) 3. 158. а) 5; б) 1; в) 3;
- г) 3. 159. а)  $-1$ ; б) 1; в) 2; г)  $-2$ . 160. а)  $-1 - \sqrt{10}$ ;  $-1 + \sqrt{10}$ ;
- б)  $-3 \pm 3\sqrt{5}$ ; 8; 2. 161. а) 1; б) 3. 162. а)  $-1$ ; 2; б) 2; 7. 164. а)  $-\frac{1}{8}$ ; б)  $-\frac{1}{3}$ .
165. а)  $1 - \sqrt{x}$ ; б)  $4 - b$ ; в)  $\sqrt{y} - 1$ ; г)  $1 - a$ . 168. а)  $2\sqrt{5}$ ; б) 1; в)  $-2\sqrt{15}$ ;

- г) 1. **169.** а) 6; б) 1;  $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$ ; в) 3; г) -2; 3. **170.** а)  $x < -3,5$ ; б)  $x \leq -\frac{1}{3}$ ; в)  $x > -1$ ; г)  $x \geq -1$ . **171.** а)  $x \leq \frac{10}{7}$ ; б)  $x \geq -1,5$ ; в)  $x < \frac{8}{3}$ ; г)  $x > 0,44$ . **172.** а)  $x < -1$ ; б)  $x \leq -3$ ; в)  $x \geq -\frac{1}{5}$ ; г)  $x < 1$ . **173.** а) 7; б) 12. **174.** а)  $a > -3, a \neq 0$ ; б)  $a > \frac{5}{12}$ . **175.** а) 4; б) 16. **176.** а)  $-2 < x < -1$ ; б)  $x \leq -4$ ;  $x \geq 3$ ; в)  $x < 3$ ;  $x > 4$ ; г)  $-1 \leq x \leq 4$ . **177.** а)  $x \leq \frac{1}{2}$  и  $x \geq 4$ ; б)  $-1 < x < \frac{1}{9}$ ; в)  $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ ; г)  $x < -\frac{1}{2}$  и  $x > 1$ . **178.** а)  $-9 \leq x \leq 9$ ; б)  $-4 < x < 0$ ; в)  $x \leq -11$ ;  $x \geq 11$ ; г)  $0 < x < 2$ . **179.** а)  $x < \frac{3}{2}$ ;  $x > \frac{3}{2}$ ; б)  $-\infty < x < +\infty$ ; в)  $x = \frac{1}{3}$ ; г) нет решений. **180.** а)  $x \geq \frac{9}{4}$ ; б)  $x < \frac{5}{7}$ ; в)  $x \leq \frac{1}{3}$ ; г)  $x > -\frac{3}{5}$ . **181.** а)  $x \leq 0$ ;  $x \geq 3$ ; б)  $-2 < x < 2$ ; в)  $-6 \leq x \leq 6$ ; г)  $x < 0$ ;  $x > 2$ . **182.** а)  $x \leq 3$ ;  $x \geq 5$ ; б)  $4 < x < 5$ ; в)  $x < -4$ ;  $x > -3$ ; г)  $-7 \leq x \leq -4$ . **183.** а)  $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$ ; б) ни при каких  $x$ ; в)  $(-\infty; +\infty)$ ; г) 1. **184.** а)  $-3 \leq x < 0$ ;  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ ; б)  $x < -\frac{5}{2}$ ;  $-\frac{5}{2} < x \leq -2$ ;  $x \geq 2\frac{1}{3}$ ; в)  $-2 \leq x < 0$ ;  $0 < x \leq \frac{1}{3}$ ; г)  $x \leq -\frac{5}{3}$ ;  $3 \leq x < 3\frac{1}{2}$ ;  $x > 3\frac{1}{2}$ . **185.** а)  $x \geq -4$ ; б)  $x < -\frac{1}{5}$ ;  $x > \frac{1}{2}$ ; в)  $x > 6$ ; г)  $-2 \leq x \leq 5$ . **186.** а)  $k < -10$ ;  $k > 10$ ; б)  $k \leq -6$ ;  $k \geq 3$ ; в)  $-6 < k < 6$ ; г)  $-4 \leq k \leq 12$ . **187.** а) Больше 7; б) больше 10.

**Приложение. П.1** а) 3; б) 7; в) 5; г) 2. **П.2.** а) 2; б) 0; в) 0,7; г) 0,3.

**П.3.**

$t$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
Дробь	2	2,5	4	—	-2	-0,5	0	0,25	0,4	—

- а) 0,2; б) 0,4; в) 0,7. **П.4.** а) У двух; б) -1,5; -1; -0,25; 1,25; 1,4; 2; 3; 3,5; в) мода 8, размах 5; г) 8 секторов по  $45^\circ$ . **П.5.** а) 13, 19, 97, 103; б) 8; в) 3,25, 4,25, 9,7, 10,3; г) -3,25. **П.6.** а)  $\frac{1}{3}$ ; б) 0,5. **П.7.** а) 0,5;

б) 0,25; в) 0,125. **П.9.** б) 16; в) 4; г) 9. **П.10.** б) 6; в) 0; г) 0,75. **П.11.** а) 3; в) 12; г) 4. **П.12.** а) 4; в) 12; г) 8. **П.13.** б) 6; в) 12; г) 6. **П.14.** а) 8; б) 0,25; в) 0,25; г) 0,875.

**П.15.**

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{1 + (t - 2)(6 - t)}$	—	—	1	2	$\sqrt{5}$	2	1	—	—	—

а) 0,5; б) 0,4; в) 0,1. **П.16.** а) 100; б) 10; в) 90; г) 51. **П.17.** а) 0; б) 0,99; в) 0,5; г) 0,33. **П.18.** а) 20; б) 10; в) 6; г) 8. **П.19.** а) 40; б) 16; в) 4; г) 14. **П.20.** а)  $AHGF E$ ; б)  $AHGF E, AHOFE, AHODE$ ; в) 3; г) 6. **П.21.** а) 3; б) 12; в) 10; г) 8. **П.22.** а) 1; б) 2; в) 4; г) 6. **П.23.** а) 5; б) 8; в) 3; г) 4. **П.24.** а) 8; б) 4; в) 2. **П.25.** б) 9; в) 6; г) 18. **П.26.** а) 0; б) 0,8; в) 0,8; г) 0,6. **П.27.** а) 0; б) 1; в) 0,2; г) 0,4. **П.28.** а) 1; б) 0,1; в) 1; г) 0,6. **П.29.** а) 1; б) 0,4; в) 0,3; г) 0,15. **П.30.** а) 1; б) 6; в) 4; г) 10. **П.31.** б) 6; в) 2; г) 3. **П.32.** б) 9; в) 2; г) 4. **П.33.** а) 4; б) 9; в) 6; г) 3.

**П.34.**

Уравнение	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10
$D$	1	-7	0	12	-7	4	-15	73	0	9

а) 30 %; б) 20 %; в) 70 %.

**П.35.** а)

Кол-во уравнений, имеющих 2 корня	Кол-во уравнений, имеющих 1 корень	Кол-во уравнений, не имеющих корней
$+++ \quad +++ \quad // \quad 10$	$/ \quad 1$	$/ \quad 1$

б) 16; в) 87,5%. **П.36.** б) 50; в) 10; г) 5. **П.37.** а) 1; б) 0,6; в) 0,2; г) 0,4.

**П.38.** а) 27; б) 3; в) 3; г) 12. **П.39.** б) 21; в) 99; г)  $\frac{35}{99}$ . **П.40.** а) 50; б) 300.

**П.41.** а) 25; б) 10; в) 10; г) 3. **П.42.** б) 12; в) 3; г) 6. **П.43.** б) 18; в)  $\frac{2}{9}$ ;

г)  $\frac{5}{18}$ . **П.44.** б) 20; в) 0,6; г) 0,4. **П.45.** а) 0,5; б) 0,35; в) 0,2; г) 0,6.

**П.46.** а) 0,2; б) 0,8; в) 0,6; г) 0,6. **П.47.** а) 0,3; б) 0,3; в) 0,7; г) 0,6.

**П.48.** а) 0,95; б) 0,55; в) 0,7; г) 0,1.

**П.49.** а) 81; б)

Первая цифра квадрата числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Сколько раз она встретилась	16	12	10	8	9	7	8	5	6

в)  $\frac{1}{9}$ ; г)  $\frac{16}{81}$ . **П.50.** а) 4; б) 2; в) 8; г) 20. **П.51.** а) См. ответ к 34.07;

б) 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 12, 13, 15, 15, 18, 27;  
в) объём 25, размах 25; г) мода 3, частота 16 %.

**П.52. а)**

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Степень	9	16	21	24	25	24	21	16	18	20

б) 1; в) 0,4; г) 0,4.

**П.53. а)**

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Степень	9	16	21	24	0	36	49	64	81	100

б) 0,9; в) 0,5; г) 0,6. **П.54.** а) 4; б) 2; в) 6; г) 10. **П.55.** а) 7; б) 3; в) 5; г) 3.  
**П.56.** а) 5; б) 4; в) 9; г) 14. **П.57.** а) 0; б) 0; в) 0,1; г) 0,5. **П.58.** а) 480; б) 320;  
в) 192; г) 384. **П.59.** а) 248; б) 366; в) 1712; г) 2124. **П.61.** а) 6; б) 3; в) 1;  
г) 8. **П.62.** а) 6; б) 4; в) 5; г) 3. **П.63.** а) Три четверти; б) половину; в) одну  
четверть. **П.64.** б) 9; в) 6; г)  $1/3$ . **П.66.** а) Да; б) нет (16 при делении на 3  
даёт в остатке 1); в) да; г) нет (9 при делении на 4 даёт в остатке 1).  
**П.67.** а) 1; б) 2; в) 8; г) 9.

**П.68. а)**

Число	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Остаток от деления на 13	5	10	2	7	12	4	9	1	6	11	3	8	0	5

б) 5; г) 7,5 %. **П.69.** а) 0,0625; б) 0,25; в) 0,25; г) 0,375. **П.70.** а) 240; б) 348;  
в) 1632; г) 1980.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>Предисловие</i> .....	3
--------------------------	---

## Глава 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. Основные понятия .....	5
§ 2. Сложение и вычитание алгебраических дробей .....	15
§ 3. Умножение и деление алгебраических дробей. Возведение алгебраической дроби в степень .....	24
§ 4. Преобразование рациональных выражений .....	29
§ 5. Первые представления о рациональных уравнениях ...	34
§ 6. Степень с отрицательным целым показателем .....	40

## Глава 2. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$ . СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

§ 7. Рациональные числа .....	46
§ 8. Понятие квадратного корня из неотрицательного числа .....	49
§ 9. Иррациональные числа .....	55
§ 10. Множество действительных чисел .....	59
§ 11. Свойства числовых неравенств .....	62
§ 12. Функция $y = \sqrt{x}$ , её свойства и график .....	68
§ 13. Свойства квадратных корней .....	74
§ 14. Преобразование выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня .....	81
§ 15. Алгоритм извлечения квадратного корня .....	93
§ 16. Модуль действительного числа .....	94

## Глава 3. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

§ 17. Функция $y = kx^2$ , её свойства и график .....	104
§ 18. Функция $y = \frac{k}{x}$ , её свойства и график .....	116
§ 19. Как построить график функции $y = f(x + l) + m$ , если известен график функции $y = f(x)$ .....	124
§ 20. Функция $y = ax^2 + bx + c$ , её свойства и график .....	141
§ 21. Графическое решение квадратных уравнений .....	151
§ 22. Дробно-линейная функция .....	153
§ 23. Как построить графики функций $y =  f(x) $ и $y = f( x )$ , если известен график функции $y = f(x)$ .....	159

## **Глава 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

§ 24. Основные понятия .....	166
§ 25. Формула корней квадратного уравнения .....	171
§ 26. Теорема Виета .....	177
§ 27. Разложение квадратного трёхчлена на линейные множители .....	183
§ 28. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций .....	186

## **Глава 5. НЕРАВЕНСТВА**

§ 29. Линейные неравенства .....	196
§ 30. Квадратные неравенства .....	205
§ 31. Доказательство неравенств .....	212
§ 32. Приближённые вычисления .....	216
§ 33. Стандартный вид положительного числа .....	220

## **Глава 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ**

§ 34. Многочлены от одной переменной .....	223
§ 35. Уравнения высших степеней .....	229
§ 36. Рациональные уравнения .....	232
§ 37. Уравнения с модулем .....	236
§ 38. Иррациональные уравнения .....	239
§ 39. Задачи с параметрами .....	243

## **Глава 7. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ**

§ 40. Делимость чисел .....	251
§ 41. Простые и составные числа .....	255
§ 42. Деление с остатком .....	257
§ 43. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное .....	262
§ 44. Основная теорема арифметики .....	263

## **Глава 8. ИТОГОВОЕ ПОВТОРЕНИЕ** .....

Приложение.....	293
Ответы .....	313



Учебное издание

**Мордкович Александр Григорьевич, Звавич Леонид Исаакович,  
Рязановский Андрей Рафаилович,  
Александрова Лидия Александровна**

## **АЛГЕБРА**

**8 класс**

**В двух частях**

**Часть 2**

## **ЗАДАЧНИК**

**для учащихся общеобразовательных учреждений**

**Генеральный директор издательства *М. И. Безвизонная***

**Главный редактор *К. И. Куровский***

**Редактор *С. В. Бахтина***

**Художественное редактирование: *Т. С. Богданова***

**Технический редактор *О. Б. Нестерова***

**Корректоры *Л. В. Дьячкова, С. О. Никулаев***

**Компьютерная вёрстка: *А. А. Борисенко***

Формат 60×90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная № 1. Гарнитура «Школьная».  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,5. Тираж 20 000 экз. Заказ № 4527

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.  
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.

E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина» (розничная и мелкооптовая продажа книг,  
«КНИГА — ПОЧТОЙ», ИНТЕРНЕТ-магазин).

105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.

Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.

E-mail: magazin@mnemozina.ru www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).

Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный).

E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,  
филиал «Ульяновский Дом Печати».

432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.