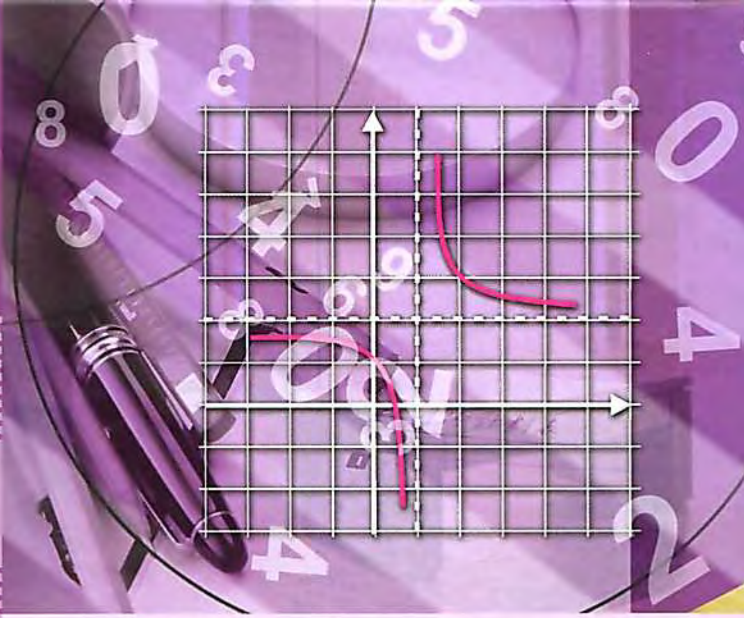
ФГОС

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев



АЛГЕБРА

Учебник

8 класс

Издательство
МНЕМОЗИНА

А. Г. Мордкович
Н. П. Николаев

АЛГЕБРА

8 класс

В двух частях
Часть 1

Учебник
для учащихся общеобразовательных учреждений

Рекомендовано Министерством образования и науки Российской Федерации

10-е издание, дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МНЕМОЗИНА

Москва 2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6
М79

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/618 от 14.10.2011 г.) и Российской академии образования (№ 01-5/7д-717 от 24.10.2011 г.)

Мордкович А. Г.
М79 Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. — 10-е изд., доп. — М. : Мнемозина, 2013. — 256 с. : ил.
ISBN 978-5-346-02483-5

Это — учебник для классов с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах. Он написан в русле той концепции, которая использована в соответствующем учебнике А. Г. Мордковича для 8-го класса общеобразовательных учреждений, с соблюдением практически того же порядка следования глав и параграфов, но с естественным для математических классов углублением и качественным расширением материала.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721+22.14я721.6

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Николаев Николай Петрович

АЛГЕБРА

8 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 16,0.
Тираж 20 000 экз. Заказ № 4526.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел.: 8(499)3675418, 3675627, 3676781; факс: 8(499)1659218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ», ИНТЕРНЕТ-магазин).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29б.
Тел./факс: 8(495)7838284; тел.: 8(495)7838285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru www.shop.mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8(495)6656031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Ульяновский Дом Печати».
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 978-5-346-02483-5 (ч. 1)
ISBN 978-5-346-02482-8 (общ.)

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Учебно-методический комплект* для изучения курса алгебры в восьмом классе с повышенным уровнем математической подготовки, выпускаемый издательством «Мнемозина», соответствует требованиям ФГОС ООО (2010 г.). Комплект состоит из следующих книг:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович, Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А. Г. Мордкович. Преподавание алгебры в 8—9 классах по учебникам А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева. Методическое пособие для учителя;

А. Г. Мордкович. Алгебра. 7—9 классы. Контрольные работы;

Л. А. Александрова. Алгебра. 8 класс. Самостоятельные работы : к учебнику А. Г. Мордковича, Н. П. Николаева / под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках учебник. Он адресован не специализированным математическим школам или классам с их авторскими программами, а классам с повышенным уровнем математической подготовки в общеобразовательных школах.

Этот учебник в значительной степени соответствует нашему учебнику для общеобразовательных учреждений (речь идёт о книге: *А. Г. Мордкович.* Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник. — М. : Мнемозина). Дело в том, что 8-й класс в определённом смысле является ориентационным: часто учащийся выбирает класс с углублённым изучением математики, но не справляется с предложенными нагрузками и на будущий год возвращается в общеобразовательный 9-й класс. Бывает и наоборот: в 8-м классе школьник учился в общеобразовательном классе, но почувствовал интерес к математике, определился и решил перейти в 9-й класс с углублённым изучением математики.

---

* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах www.mnemozina.ru и www.ziimag.narod.ru

Для обеих групп учащихся такой переход следует сделать как можно менее болезненным. Этого можно добиться при соответствии программ и концепции курса алгебры в общеобразовательном классе и классе с углублённым изучением математики. Естественно, что тогда более комфортно чувствует себя и учитель, работающий одновременно в классах обоих уровней.

Учебник состоит из семи глав. Первые пять глав (алгебраические дроби, квадратные корни, квадратичная функция, квадратные уравнения, неравенства) во многом дублируют наш учебник для общеобразовательных учреждений. Отличие, во-первых, в том, что из одноимённых параграфов изъяты многие слишком простые примеры и рассуждения, добавлены более сложные и интересные примеры; во-вторых, в эти главы добавлены четыре новых параграфа: алгоритм извлечения квадратного корня, дробно-линейная функция, построение графиков функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$, доказательство неравенств. Шестая и седьмая главы (алгебраические уравнения и элементы теории делимости) содержат новый материал.

Кстати, обращаем ваше внимание на то, что по сравнению с изданиями учебника до 2012 г. произошло одно изменение: ранее глава «Неравенства» была седьмой, а стала пятой.

В некоторых параграфах встречается материал, набранный петитом. Это материал, несколько выходящий за рамки программы. Изучать его или нет — определяет учитель.

В учебнике приведено много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо значок ■. Учитывая требование ФГОС о необходимости формирования у учащихся универсальных учебных действий, в конце каждого параграфа (кроме § 4, 15, 27) приведены **вопросы для самопроверки**, а в конце каждой главы — **темы исследовательских работ**.

Издательством «Мнемозина» выпущен аналогичный комплект тех же авторов для 9-го класса с углублённым изучением математики.

Авторы

ГЛАВА 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1. Определение алгебраической дроби

Выражение $\frac{P}{Q}$, где P и Q — многочлены, называют **алгебраической дробью; P — числитель дроби, Q — знаменатель дроби.**

Примеры алгебраических дробей:

$$\frac{x+y}{x-y},\quad \frac{x^3+1}{x^2-x+2},\quad \frac{a^4-4}{a^2+2},\quad \frac{a}{2},\quad \frac{3a+7}{5}.$$

Обыкновенные дроби ($\frac{3}{8}$, $\frac{11}{3}$ и т. д.) также можно считать частными случаями алгебраических дробей.

Иногда алгебраическое выражение лишь по форме записи является алгебраической дробью. Так обстоит дело в последних двух из пяти приведённых выше примеров. Действительно, дробь $\frac{a}{2}$ можно записать в виде $\frac{1}{2}a$ — это одночлен; дробь $\frac{3a+7}{5}$ можно записать в виде $\frac{3}{5}a+\frac{7}{5}$, это уже не алгебраическая дробь, а многочлен (двучлен). Да и в третьем из приведённых примеров после сокращения получается не дробь, а двучлен a^2-2. Но, в сущности, это не столь важно, так было и с обыкновенными дробями. Скажем, натуральное число 2 можно записать в виде обыкновенной дроби $\frac{10}{5}$.

Пример 1. Найти значение алгебраической дроби

$$\frac{a^2 + 3ab + b^2}{(a + b)(a - b)},$$

если: а) $a = 2$, $b = 1$; б) $a = 5$, $b = 0$; в) $a = 4$, $b = 4$.

Решение. а) При $a = 2$, $b = 1$ получаем:

$$\frac{a^2 + 3ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{2^2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1^2}{(2 + 1)(2 - 1)} = \frac{11}{3}.$$

б) При $a = 5$, $b = 0$ получаем:

$$\frac{a^2 + 3ab + b^2}{(a + b)(a - b)} = \frac{5^2 + 3 \cdot 5 \cdot 0 + 0^2}{(5 + 0)(5 - 0)} = 1.$$

в) При $a = 4$, $b = 4$ выражение $a - b$ обращается в нуль, а вместе с ним и знаменатель дроби обращается в нуль. Но на нуль делить нельзя. Значит, пара значений $a = 4$, $b = 4$ является для заданной дроби *недопустимой* — в этом случае алгебраическая дробь не имеет смысла. ■

Выполняя в дальнейшем различные преобразования алгебраических дробей, всегда будем предполагать, что переменные, входящие в состав алгебраической дроби, принимают лишь *допустимые значения*, т. е. такие значения, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль. Множество допустимых значений переменных называют *областью определения* (или *областью существования*) алгебраической дроби. Употребляют также термин *область допустимых значений* (ОДЗ).

2. Основное свойство алгебраической дроби

Вам известно, что значение обыкновенной дроби не изменится, если её числитель и знаменатель одновременно умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля. Например, $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ — здесь и числитель, и знаменатель дроби одновременно умножили на одно и то же число 4; $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$ — здесь и числитель, и знаменатель дроби одновременно разделили на одно и то же число 11.

Алгебраическая дробь — это в определённом смысле обобщение обыкновенной дроби; над алгебраическими дробями можно осуществлять преобразования, аналогичные тем, которые мы только что указали для обыкновенных дробей. Эти преобразования можно описать так:

1. И числитель, и знаменатель алгебраической дроби можно умножить на один и тот же многочлен (в частности, на один и тот же одночлен); это — тождественное преобразование заданной алгебраической дроби (в области определения полученной дроби).

2. И числитель, и знаменатель алгебраической дроби можно разделить на один и тот же многочлен (в частности, на один и тот же одночлен); это — тождественное преобразование заданной алгебраической дроби (в области определения заданной дроби), его называют **сокращением** алгебраической дроби.

Сформулированные правила представляют собой **основное свойство алгебраической дроби.**

Пользуясь основным свойством алгебраической дроби, можно дробь $\frac{x}{x-1}$ заменить (если, конечно, в этом есть необходимость) дробью $\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}$ (числитель и знаменатель одновременно умножили на $x-2$) или дробью $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ (числитель и знаменатель одновременно умножили на $2x$). Пользуясь основным свойством алгебраической дроби, можно, напротив, заменить дробь $\frac{2x^2}{2x(x-1)}$ более простой дробью $\frac{x}{x-1}$ (числитель и знаменатель одновременно разделили на $2x$, т. е. сократили дробь).

В случае необходимости следует указывать область определения. Так, замена дроби $\frac{x}{x-1}$ дробью $\frac{x(x-2)}{(x-1)(x-2)}$ есть тождественное преобразование при $x \neq 1$, $x \neq 2$; $\frac{2x^2}{2x(x-1)} = \frac{x}{x-1}$ — тождество при $x \neq 1$, $x \neq 0$.

Основное свойство дроби имеет разнообразные применения. Так, если среди коэффициентов числителя и знаменателя есть обыкновенные дроби, то для упрощения записи целесообразно умножить числитель и знаменатель дроби на наименьшее общее кратное знаменателей всех этих коэффициентов. Это умножение является законным в силу основного свойства дроби.

Пример 2. Упростить дробь

$$\frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1}{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{2}}.$$

Решение. Наименьшим общим кратным знаменателей всех коэффициентов в данном случае является число 12. Умножив и числитель, и знаменатель дроби на 12, получим:

$$\frac{\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}}=\frac{12\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)}{12\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{1}{2}\right)}=\frac{4x^2-6x+12}{3x^2+2x+6}.$$

Получили дробь, в числителе и знаменателе которой — многочлены с целочисленными коэффициентами. С такими многочленами работать удобнее, поэтому полученную дробь считают более простой, чем заданная. ■

Основное свойство дроби используется для перемены знаков у её членов. Если числитель и знаменатель дроби $\frac{a}{b}$ умножить на -1, то получим $\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}$. Таким образом, *значение дроби не изменится, если одновременно изменить знаки у числителя и знаменателя*. Если же изменить знак только у числителя или только у знаменателя, то и дробь изменит свой знак:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b};\quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Если в последних тождествах изменить знаки левой и правой частей, то получим:

$$\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b};\quad \frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Таким образом, если мы хотим изменить знак только числителя или только знаменателя дроби, то надо изменить знак и перед самой дробью. Например,

$$\frac{3x-2}{3x+4}=-\frac{-(3x-2)}{3x+4}=-\frac{2-3x}{3x+4}.$$

3. Сокращение алгебраических дробей

Напомним, что *сократить дробь* — это значит разделить числитель и знаменатель дроби на их общий множитель. Возможность такого сокращения обусловлена основным свойством дроби.

Для того чтобы сократить алгебраическую дробь, нужно числитель и знаменатель разложить на множители. Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то их можно сократить. Если общих множителей нет, то упрощение дроби посредством сокращения невозможно.

Пример 3. Сократить дробь $\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{9y^2 - x^2}$.

Решение. Для разложения числителя на множители применим способ группировки, представив предварительно одночлен $-5xy$ в виде суммы $-2xy - 3xy$:

$$x^2 - 5xy + 6y^2 = (x^2 - 2xy) - (3xy - 6y^2) =$$
$$= x(x - 2y) - 3y(x - 2y) = (x - 2y)(x - 3y).$$

Для разложения знаменателя на множители используем формулу разности квадратов

$$9y^2 - x^2 = (3y + x)(3y - x).$$

Таким образом,

$$\frac{x^2 - 5xy + 6y^2}{9y^2 - x^2} = \frac{(x - 2y)(x - 3y)}{(3y + x)(3y - x)}.$$

Далее, изменив знак в знаменателе дроби, получим:

$$\frac{(x - 2y)(x - 3y)}{(3y + x)(3y - x)} = -\frac{(x - 2y)(x - 3y)}{(3y + x)(x - 3y)} = -\frac{x - 2y}{3y + x} = \frac{2y - x}{3y + x}. \quad \blacksquare$$

Замечание. Выполненное сокращение дроби является тождественным преобразованием при условии $9y^2 - x^2 \neq 0$, т. е. $x \neq \pm 3y$. Подчеркнём ещё раз: в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что тождественные преобразования алгебраических дробей выполняются лишь в области их определения, даже если это явно не отмечено в процессе решения того или иного примера.

4. Приведение алгебраических дробей к общему знаменателю

Общим знаменателем нескольких алгебраических дробей называют многочлен, который делится на знаменатель каждой дроби.

Пример 4. Преобразовать заданные дроби так, чтобы получились дроби с одинаковыми знаменателями:

а) $\frac{2a}{3}$ и $\frac{3b}{5}$; б) $\frac{a}{4b^2}$ и $\frac{a^2}{6b^3}$; в) $\frac{x}{x + y}$ и $\frac{x}{x - y}$.

Решение.

а) $\frac{2a}{3} = \frac{2a \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10a}{15}$; $\frac{3b}{5} = \frac{3b \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{9b}{15}$.

Дроби приведены к одинаковому знаменателю (обычно говорят: *к общему знаменателю*). Для этого пришлось числитель и знаменатель первой дроби умножить на дополнительный множитель 5, а числитель и знаменатель второй дроби — на дополнительный множитель 3; сделать это позволяет основное свойство дроби.

б) $\frac{a}{4b^2} = \frac{a \cdot 3b}{4b^2 \cdot 3b} = \frac{3ab}{12b^3}$;

$$\frac{a^2}{6b^3} = \frac{a^2 \cdot 2}{6b^3 \cdot 2} = \frac{2a^2}{12b^3}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю $12b^3$ с помощью дополнительных множителей $3b$ и 2 соответственно.

в) $\frac{x}{x + y} = \frac{x(x - y)}{(x + y)(x - y)} = \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2}$;

$$\frac{x}{x - y} = \frac{x(x + y)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}.$$

Дроби приведены к общему знаменателю $x^2 - y^2$ с помощью дополнительных множителей $x - y$ и $x + y$ соответственно. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что такое алгебраическая дробь?
2. Приведите пример алгебраической дроби с одной переменной; с двумя переменными.
3. Укажите выражение, которое по форме является алгебраической дробью, а по содержанию — нет.
4. Какие значения переменных называют допустимыми для алгебраической дроби?
5. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\frac{2x^2 - 2}{7}$; б) $\frac{3}{(a - 2)(b + 3)}$; в) $\left(\frac{a - 3}{a^2 - 16}\right)^0$.

6. Составьте алгебраическую дробь с переменными x, y, для которой пара чисел $(15; -7)$ является допустимой.
7. Составьте алгебраическую дробь с переменными a, b, для которой пара чисел $(-4; 10)$ является недопустимой.
8. Сформулируйте основное свойство алгебраической дроби. Запишите основное свойство дроби на математическом языке.
9. Используя переменные p и q, составьте алгебраическую дробь, которая при сокращении даёт результат -1.
10. Что нужно сделать, чтобы поменять знаки в числителе или знаменателе дроби?

§ 2. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ

Алгебраические дроби с *одинаковыми знаменателями* складывают и вычитают по тому же правилу, что и обыкновенные дроби:

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} - \frac{c}{d} = \frac{a+b-c}{d},$$

т. е. составляют соответствующую алгебраическую сумму числителей, а знаменатель оставляют без изменения.

Пример 1. Выполнить действия:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab} + \frac{2ab+b}{a^2-ab} - \frac{b+5}{a^2-ab}.$$

Решение. Применив правило сложения и вычитания алгебраических дробей, получим:

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab} + \frac{2ab+b}{a^2-ab} - \frac{b+5}{a^2-ab} = \frac{(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)}{a^2-ab}.$$

Теперь можно упростить числитель, выполнив обычным образом соответствующие операции над многочленами:

$$(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5) =$$
$$= 2a^2+5+2ab+b-b-5 = 2a^2+2ab.$$

Таким образом, заданную алгебраическую сумму трёх дробей нам удалось преобразовать в дробь $\frac{2a^2+2ab}{a^2-ab}$. Далее имеем:

$$\frac{2a^2+2ab}{a^2-ab} = \frac{2a(a+b)}{a(a-b)} = \frac{2(a+b)}{a-b} = \frac{2a+2b}{a-b}.$$

Приведём теперь решение рассмотренного примера без комментариев (как это вы будете делать у себя в тетрадях):

$$\frac{2a^2+5}{a^2-ab} + \frac{2ab+b}{a^2-ab} - \frac{b+5}{a^2-ab} = \frac{(2a^2+5)+(2ab+b)-(b+5)}{a^2-ab} =$$

$$= \frac{2a^2+5+2ab+b-b-5}{a^2-ab} = \frac{2a^2+2ab}{a^2-ab} =$$

$$= \frac{2a(a+b)}{a(a-b)} = \frac{2(a+b)}{a-b} = \frac{2a+2b}{a-b}. \quad \blacksquare$$

Как видите, в результате преобразований получилось более простое алгебраическое выражение, чем было задано в условии примера. Именно в упрощении и состоит цель преобразований, поэтому часто вместо словосочетания *выполнить действия* используют словосочетание *упростить выражение*.

Сложение и вычитание алгебраических дробей *с разными знаменателями* выполняют по тому же алгоритму, что используется для сложения и вычитания обыкновенных дробей с разными знаменателями: сначала приводят дроби к общему знаменателю с помощью соответствующих дополнительных множителей, а затем складывают или вычитают полученные дроби с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Выполнить действия:

а) $\frac{2a}{3} + \frac{3b}{5}$;   б) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$;   в) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y}$.

Решение. Для каждой пары заданных здесь алгебраических дробей общий знаменатель был найден ранее (см. пример 4 из § 1). Воспользуемся этим.

а) $\frac{2a}{3} + \frac{3b}{5} = \frac{10a}{15} + \frac{9b}{15} = \frac{10a + 9b}{15}$;

б) $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3} = \frac{3ab}{12b^3} + \frac{2a^2}{12b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}$;

в) $\frac{x}{x+y} - \frac{x}{x-y} = \frac{x^2 - xy}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{(x^2 - xy) - (x^2 + xy)}{x^2 - y^2} =$

$$= \frac{x^2 - xy - x^2 - xy}{x^2 - y^2} = \frac{-2xy}{x^2 - y^2}. \quad ■$$

Самое трудное в упомянутом выше алгоритме — это, конечно, первый шаг: отыскание общего знаменателя и приведение дробей к общему знаменателю. В примере 2 вы этой трудности, может быть, не ощутили, поскольку мы воспользовались готовыми результатами из § 1.

Чтобы выработать правило отыскания общего знаменателя, проанализируем пример 2.

Для дробей $\frac{2a}{3}$ и $\frac{3b}{5}$ общим знаменателем служит число 15 — оно делится и на 3, и на 5, является их общим кратным (даже наименьшим общим кратным).

Для дробей $\frac{a}{4b^2}$ и $\frac{a^2}{6b^3}$ общим знаменателем является одночлен $12b^3$. Он делится и на $4b^2$, и на $6b^3$, т. е. на оба одночлена, служащие знаменателями дробей. Обратите внимание: число 12 — наименьшее общее кратное чисел 4 и 6; переменная b входит в знаменатель первой дроби с показателем 2, в знаменатель второй дроби — с показателем 3, причём это наибольшее значение показателя 3 фигурирует в общем знаменателе.

Для дробей $\frac{x}{x+y}$ и $\frac{x}{x-y}$ общим знаменателем служит произведение $(x+y)(x-y)$ — оно делится и на знаменатель $x+y$, и на знаменатель $x-y$.

Замечание. На самом деле, общих знаменателей для нескольких алгебраических дробей можно найти сколько угодно. Например, для дробей $\frac{2a}{3}$ и $\frac{3b}{5}$ общим знаменателем может быть и число 30, и число 60, и даже одночлен $15a^2b$. Дело в том, что и 30, и 60, и $15a^2b$ можно разделить как на 3, так и на 5. Для дробей $\frac{a}{4b^2}$ и $\frac{a^2}{6b^3}$ общим знаменателем, кроме найденного выше одночлена $12b^3$, может быть и $24b^3$, и $48a^2b^4$ и т. д. Опять-таки дело в том, что $24b^3$ делится и на $4b^2$, и на $6b^3$; $48a^2b^4$ делится и на $4b^2$, и на $6b^3$. Чем же одночлен $12b^3$ лучше, чем $24b^3$, чем $48a^2b^4$? Только тем, что по записи выглядит проще; в подобных случаях говорят даже не *общий знаменатель*, а *наименьший общий знаменатель*.

Снова вернёмся к примеру 2 а). Чтобы сложить алгебраические дроби $\frac{2a}{3}$ и $\frac{3b}{5}$, надо было не только найти общий знаменатель (число 15), но и отыскать для каждой из дробей дополнительные множители, которые позволили бы привести дроби к общему знаменателю. Для дроби $\frac{2a}{3}$ таким дополнительным множителем служит число 5 (числитель и знаменатель этой дроби умножили дополнительно на 5), для дроби $\frac{3b}{5}$ — число 3 (числитель и знаменатель этой дроби умножили дополнительно на 3). Дополнительный множитель есть частное от деления общего знаменателя на знаменатель данной дроби.

Обычно используют следующую запись:

$$\frac{2a}{3}+\frac{3b}{5}=\frac{2a^{\backslash 5}}{3}+\frac{3b^{\backslash 3}}{5}=\frac{10a+9b}{15}.$$

На первых порах удобно использовать следующее правило.

Правило приведения алгебраических дробей к общему знаменателю

1. Разложить все знаменатели на множители.

2. Из первого знаменателя выписать произведение всех его множителей, из остальных знаменателей приписать к этому произведению недостающие множители. Полученное произведение и будет общим (новым) знаменателем.

3. Найти дополнительные множители для каждой из дробей: это будет произведение тех множителей, которые имеются в новом знаменателе, но которых нет в старом знаменателе.

4. Найти для каждой дроби новый числитель: это будет произведение старого числителя и дополнительного множителя.

5. Записать каждую дробь с новым числителем и новым (общим) знаменателем.

Снова вернёмся к примеру 2 б). Общим знаменателем для дробей $\frac{a}{4b^2} + \frac{a^2}{6b^3}$ является одночлен $12b^3$. Дополнительный множитель для первой дроби равен $3b$ (поскольку $12b^3 : 4b^2 = 3b$), для второй дроби он равен 2 (поскольку $12b^3 : 6b^3 = 2$). Значит, решение примера 2 б) можно оформить так:

$$\frac{a^{\backslash 3b}}{4b^2} + \frac{a^{2\backslash 2}}{6b^3} = \frac{3ab + 2a^2}{12b^3}.$$

Пример 3. Упростить выражение $\frac{3a}{4a^2 - 1} - \frac{a + 1}{2a^2 + a}$.

Решение.

<u>Первый этап.</u> Найдём общий знаменатель и дополнительные множители.

Имеем:

$$4a^2 - 1 = (2a - 1)(2a + 1),$$
$$2a^2 + a = a(2a + 1).$$

Первый знаменатель берём целиком, а из второго — добавляем множитель a, которого нет в первом знаменателе. Получим общий знаменатель: $a(2a - 1)(2a + 1)$.

Удобно представить записи в виде таблицы:

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$(2a-1)(2a+1)$ $a(2a+1)$	$a(2a-1)(2a+1)$	a $2a-1$

Второй этап. Выполним преобразования:

$$\frac{3a}{4a^2-1}-\frac{a+1}{2a^2+a}=\frac{3a^{\underline{|a}}}{(2a-1)(2a+1)}-\frac{a+1^{\underline{|2a-1}}}{a(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-(a+1)(2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{3a^2-(2a^2-a+2a-1)}{a(2a-1)(2a+1)}=$$

$$=\frac{3a^2-2a^2+a-2a+1}{a(2a-1)(2a+1)}=\frac{a^2-a+1}{a(2a-1)(2a+1)}. \quad \blacksquare$$

Пример 4. Упростить выражение

$$\frac{b}{2a^4+4a^3b+2a^2b^2}-\frac{1}{3ab^2-3a^3}+\frac{b}{6a^4-6a^3b}.$$

Решение.

Первый этап. Разложим все знаменатели на множители:

1) $2a^4+4a^3b+2a^2b^2=2a^2(a^2+2ab+b^2)=2a^2(a+b)^2$;

2) $3ab^2-3a^3=3a(b^2-a^2)=3a(b-a)(b+a)$;

3) $6a^4-6a^3b=6a^3(a-b)$.

Первый знаменатель берём целиком, из второго возьмём недостающие множители 3 и $b-a$ (или $a-b$), из третьего — недостающий множитель a (поскольку третий знаменатель содержит множитель a^3).

Знаменатели	Общий знаменатель	Дополнительные множители
$2a^2(a+b)^2$ $3a(b-a)(b+a)$ $6a^3(a-b)$	$6a^3(a-b)(a+b)^2$	$3a(a-b)$ $-2a^2(a+b)$ $(a+b)^2$

Заметим, что если у дополнительного множителя появляется знак «−», то его обычно ставят перед всей дробью. В данном случае изменим знак перед второй дробью.

Второй этап. Выполним преобразования:

$$\frac{b}{2a^4 + 4a^3b + 2a^2b^2} - \frac{1}{3ab^2 - 3a^3} + \frac{b}{6a^4 - 6a^3b} =$$

$$= \frac{b^{\backslash 3a(a-b)}}{2a^2(a+b)^2} + \frac{1^{\backslash 2a^2(a+b)}}{3a(a-b)(a+b)} + \frac{b^{\backslash (a+b)^2}}{6a^3(a-b)} =$$

$$= \frac{3ab(a-b) + 2a^2(a+b) + b(a^2 + 2ab + b^2)}{6a^3(a-b)(a+b)^2} =$$

$$= \frac{3a^2b - 3ab^2 + 2a^3 + 2a^2b + a^2b + 2ab^2 + b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2} = \frac{2a^3 + 6a^2b - ab^2 + b^3}{6a^3(a-b)(a+b)^2}. \blacksquare$$

Отметим, что замена выражения, данного в примере 4, той алгебраической дробью, которая получилась в результате, есть тождественное преобразование *при допустимых значениях переменных*. В данном случае допустимыми являются любые значения переменных a и b, кроме $a = 0$, $a = b$, $a = -b$ (в этих случаях знаменатели обращаются в нуль).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте и запишите на математическом языке правило сложения и вычитания алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями.

2. Сформулируйте алгоритм сложения (вычитания) алгебраических дробей с разными знаменателями.

3. Сформулируйте алгоритм отыскания общего знаменателя для нескольких алгебраических дробей.

4. Сформулируйте алгоритм приведения алгебраических дробей к общему знаменателю.

5. Какой этап, на ваш взгляд, самый сложный при приведении алгебраических дробей к общему знаменателю?

6. Даны две алгебраические дроби: $\frac{x}{4a^2(x-1)}$ и $\frac{5x+3}{6a^3(x-1)^2}$.

Расскажите, как вы составите наименьший общий знаменатель для этих дробей. Приведите эти дроби к общему знаменателю и найдите их сумму.

7. Выполните действия: $8x - 4 + \frac{2+x}{x-1}$.

§ 3. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДРОБЕЙ. ВОЗВЕДЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ДРОБИ В СТЕПЕНЬ

Умножение алгебраических дробей осуществляется по тому же правилу, что и умножение обыкновенных дробей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Аналогично обстоит дело с делением алгебраических дробей, с возведением алгебраической дроби в натуральную степень. Правило деления выглядит так:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

а правило возведения в степень — так:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Прежде чем выполнять умножение и деление алгебраических дробей, полезно их числители и знаменатели разложить на множители — это облегчит сокращение той алгебраической дроби, которая получится в результате умножения или деления.

Пример 1. Выполнить действия:

а) $\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x}$; б) $\frac{7a^3b^5}{3a - 3b} \cdot \frac{6b^2 - 12ab + 6a^2}{49a^4b^5}$.

Решение.

а) $$\frac{5x + 5y}{x - y} \cdot \frac{x^2 - y^2}{10x} = \frac{5(x + y)}{x - y} \cdot \frac{(x - y)(x + y)}{10x} =$$
$$= \frac{5(x + y)(x - y)(x + y)}{(x - y) \cdot 10x} = \frac{(x + y)^2}{2x}.$$

Преобразования выполнены при следующих условиях: $x \neq y$, $x \neq 0$.

б) $$\frac{7a^3b^5}{3a - 3b} \cdot \frac{6b^2 - 12ab + 6a^2}{49a^4b^5} = \frac{7a^3b^5}{3(a - b)} \cdot \frac{6(b^2 - 2ab + a^2)}{49a^4b^5} =$$
$$= \frac{7a^3b^5 \cdot 6(b - a)^2}{3(a - b) \cdot 49a^4b^5} = \frac{2(b - a)^2}{(a - b) \cdot 7a}.$$

Воспользуемся тем, что $(b - a)^2 = (a - b)^2$. Получим:

$$\frac{2(b - a)^2}{(a - b) \cdot 7a} = \frac{2(a - b)^2}{(a - b) \cdot 7a} = \frac{2(a - b)}{7a}. \quad ■$$

Пример 2. Выполнить действия:

а) $\dfrac{x^3-1}{8y} : \dfrac{x^2+x+1}{16y^2}$; б) $\dfrac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6} : \dfrac{b-a}{a+2}$.

Решение.

а) $$\frac{x^3-1}{8y} : \frac{x^2+x+1}{16y^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{8y} : \frac{x^2+x+1}{16y^2} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x+1)\cdot 16y^2}{8y\cdot(x^2+x+1)} = (x-1)2y = 2xy - 2y;$$

б) $$\frac{a^4-b^4}{ab+2b-3a-6} : \frac{b-a}{a+2} = \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}{(ab+2b)-(3a+6)} : \frac{b-a}{a+2} =$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{b(a+2)-3(a+2)} : \frac{b-a}{a+2} = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)}{(a+2)(b-3)} : \frac{b-a}{a+2} =$$

$$= \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a+2)}{(a+2)(b-3)(b-a)} = \frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{b-3}.$$

Мы учли, что в результате деления $a-b$ на $b-a$ получится -1. Впрочем, знак «$-$» в данном случае удобнее переместить в знаменатель:

$$\frac{-(a+b)(a^2+b^2)}{b-3} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{-(b-3)} = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{3-b}. \quad \blacksquare$$

Пример 3. Выполнить действия:

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2.$$

Решение.

$$\left(\frac{x+2}{3x^2-6x}\right)^3 : \left(\frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+4}\right)^2 = \left(\frac{x+2}{3x(x-2)}\right)^3 : \left(\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(x+2)^3}{27x^3(x-2)^3} : \frac{(x+2)^4}{(x-2)^4} = \frac{(x+2)^3(x-2)^4}{27x^3(x-2)^3(x+2)^4} = \frac{x-2}{27x^3(x+2)}. \quad \blacksquare$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило умножения алгебраических дробей. Запишите его на математическом языке.
2. Сформулируйте правило деления алгебраических дробей. Запишите его на математическом языке.
3. Сформулируйте правило возведения алгебраической дроби в степень. Запишите его на математическом языке.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Любое числовое выражение после выполнения всех входящих в его состав арифметических действий принимает конкретное числовое значение — рациональное число (разумеется, оно может оказаться и натуральным числом, и целым числом, и дробью — это неважно). Точно так же любое алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных с помощью арифметических операций и возведения в натуральную степень — для таких выражений в алгебре используют термин **рациональное выражение,** — после выполнения преобразований принимает вид алгебраической дроби (и опять-таки, в частности, может получиться не дробь, а многочлен или даже одночлен).

Пример. Доказать тождество

$$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}=2a.$$

Решение.

Доказать тождество — это значит установить, что при всех допустимых значениях переменных его левая и правая части равны. В алгебре тождества доказывают разными способами:

1) выполняют преобразования левой части и в итоге получают правую часть;

2) выполняют преобразования правой части и в итоге получают левую часть;

3) по отдельности преобразуют правую и левую части и получают и в первом и во втором случаях одно и то же выражение;

4) составляют разность левой и правой частей и в результате её преобразований получают нуль.

Какой способ выбрать — зависит от конкретного вида тождества, которое вам предлагается доказать. В данном примере целесообразно выбрать первый способ.

Для преобразования рациональных выражений принят тот же порядок действий, что и для преобразования числовых выражений. Это значит, что сначала выполняют действия в скобках, затем действия второй ступени (умножение, деление, возведение в степень), затем действия первой ступени (сложение, вычитание). Выполним преобразования по действиям:

1) $\frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} = \frac{2a^{\backslash 2a+b}}{2a+b} - \frac{4a^2}{(2a+b)^2} =$

$$= \frac{2a(2a+b) - 4a^2}{(2a+b)^2} = \frac{4a^2 + 2ab - 4a^2}{(2a+b)^2} = \frac{2ab}{(2a+b)^2};$$

2) $\frac{2a}{4a^2 - b^2} + \frac{1}{b - 2a} = \frac{2a}{(2a-b)(2a+b)} - \frac{1^{\backslash 2a+b}}{2a-b} =$

$$= \frac{2a - (2a+b)}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{2a - 2a - b}{(2a-b)(2a+b)} = \frac{-b}{(2a-b)(2a+b)};$$

3) $\frac{2ab}{(2a+b)^2} : \frac{-b}{(2a-b)(2a+b)} = -\frac{2ab(2a-b)(2a+b)}{(2a+b)^2 \cdot b} =$

$$= -\frac{2a(2a-b)}{2a+b} = \frac{-(4a^2 - 2ab)}{2a+b} = \frac{2ab - 4a^2}{2a+b};$$

4) $\frac{2ab - 4a^2}{2a+b} + \frac{8a^2}{2a+b} = \frac{2ab - 4a^2 + 8a^2}{2a+b} = \frac{2ab + 4a^2}{2a+b} =$

$$= \frac{2a(b+2a)}{2a+b} = 2a.$$

Как видите, нам удалось преобразовать левую часть проверяемого тождества к виду правой части. Это значит, что тождество доказано. Однако напомним, что тождество справедливо лишь для допустимых значений переменных. Таковыми в данном примере являются любые значения a и b, кроме тех, которые обращают знаменатели дробей в нуль. Значит, допустимыми являются любые пары чисел $(a;\ b)$, кроме тех, при которых выполняется хотя бы одно из равенств:

$$2a - b = 0,\quad 2a + b = 0,\quad b = 0. \quad \blacksquare$$

§ 5. ПЕРВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О РЕШЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Если $p(x)$ — рациональное выражение, то уравнение $p(x) = 0$ называют *рациональным уравнением*. Подробнее поговорим о них позднее, в главе 6, но уже теперь мы располагаем некоторыми фактами теории, позволяющими решать несложные рациональные уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\frac{2}{x+3} + 1 = \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9}$.

Решение. Равенства $A = B$ и $A - B = 0$ выражают одну и ту же зависимость между A и B. Учитывая это, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{2}{x+3} + 1 - \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9} = 0.$$

Выполним преобразования левой части уравнения:

$$\frac{2}{x+3} + 1 - \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9} = \frac{2^{\backslash x-3}}{x+3} + 1^{\backslash (x-3)(x+3)} - \frac{x^2 - 10}{(x-3)(x+3)} =$$

$$= \frac{2(x-3) + (x-3)(x+3) - (x^2 - 10)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x - 5}{(x-3)(x+3)}.$$

Итак, получили уравнение

$$\frac{2x - 5}{(x-3)(x+3)} = 0.$$

Дробь обращается в нуль тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Из уравнения $2x - 5 = 0$ находим $x = 2{,}5$. При этом значении знаменатель дроби не обращается в нуль.

Ответ: 2,5.

К обоим условиям равенства дроби $\frac{a}{b}$ нулю надо относиться одинаково уважительно, т. е. сначала воспользоваться условием $a = 0$, а затем не забыть проверить условие $b \neq 0$. Решим, например, уравнение $\frac{x+2}{2x^2 + x - 6} = 0$. Приравняв числитель нулю, получим $x + 2 = 0$, т. е. $x = -2$. Подставив значение -2 вместо x в знаменатель, получим нуль, а на нуль делить нельзя. Это значит, что $x = -2$ не является корнем уравнения, т. е. заданное уравнение вообще не имеет корней.

Вернёмся ещё раз к примеру 1. Дело в том, что математики, являясь людьми практичными, не любят делать лишние записи. Они предпочитают, найдя общий знаменатель, не приводить дроби к этому знаменателю, а *освобождаться* от него путём умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель. При этом два условия равенства дроби нулю они, естественно, держат в голове и не забывают сделать соответствующую проверку. Приведём (в несколько сокращённом виде) запись решения уравнения из примера 1 с использованием *способа освобождения от знаменателей*.

Умножим обе части уравнения $\frac{2}{x+3} + 1 = \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9}$ на общий знаменатель $x^2 - 9$; получим:

$$(x^2 - 9)\left(\frac{2}{x+3} + 1\right) = (x^2 - 9) \cdot \frac{x^2 - 10}{x^2 - 9};$$

$$2(x - 3) + x^2 - 9 = x^2 - 10;$$
$$x = 2{,}5.$$

Значение $x = 2{,}5$ удовлетворяет условию $x^2 - 9 \neq 0$, а поэтому $x = 2{,}5$ — корень заданного уравнения.

Пример 2. Лодка прошла 10 км по течению реки и 6 км против течения, затратив на весь путь 2 ч. Чему равна собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — собственная скорость лодки, тогда по течению реки она плывёт со скоростью $(x + 2)$ км/ч, а против течения — со скоростью $(x - 2)$ км/ч.

По течению реки, т. е. со скоростью $(x + 2)$ км/ч, лодка прошла путь 10 км. Значит, время, затраченное на этот путь, выражается формулой $\frac{10}{x+2}$ ч.

Против течения реки, т. е. со скоростью $(x - 2)$ км/ч, лодка прошла путь 6 км. Следовательно, время, затраченное на этот путь, выражается формулой $\frac{6}{x-2}$ ч.

По условию на весь путь (т. е. на 10 км по течению и 6 км против течения) суммарно затрачено 2 ч. Значит,

$$\frac{10}{x+2} + \frac{6}{x-2} = 2.$$

Это уравнение — математическая модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся указанным выше приёмом освобождения от знаменателей. Здесь наименьшим общим знаменателем служит

$(x + 2)(x - 2)$. Умножив на это выражение обе части уравнения, получим:

$$(x + 2)(x - 2)\left(\frac{10}{x + 2} + \frac{6}{x - 2}\right) = 2(x + 2)(x - 2);$$
$$10(x - 2) + 6(x + 2) = 2(x^2 - 4);$$
$$16x - 2x^2 = 0;$$
$$2x(8 - x) = 0;$$
$$x_1 = 0,\ x_2 = 8.$$

Осталось поочерёдно подставить найденные значения в общий знаменатель. Поскольку ни при $x = 0$, ни при $x = 8$ выражение $(x + 2)(x - 2)$ не обращается в нуль, оба значения являются корнями уравнения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нужно выяснить, чему равна собственная скорость лодки. Эту скорость обозначили буквой x. Получили, что либо $x = 0$, либо $x = 8$. Первое значение нас явно не устраивает: собственная скорость лодки не может быть равна 0. Второе значение подходит.

Ответ: собственная скорость лодки равна 8 км/ч.

Замечание. За x мы приняли собственную скорость лодки. Ясно, что должно выполняться неравенство $x > 2$, т. е. собственная скорость лодки должна быть больше скорости течения реки (иначе против течения лодка плыть не сможет). Можно было бы добавить это условие к составленному на первом этапе уравнению, т. е. математическая модель задачи состояла бы из уравнения и неравенства. Если бы это было сделано, то найденное значение $x = 0$ мы бы сразу отбросили, да и значение $x = 8$ в знаменатели подставлять не стали (при $x > 2$ знаменатели отличны от нуля).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение рационального выражения.
2. Сформулируйте определение рационального уравнения.
3. Закончите предложение: «Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель ...».
4. Что нужно обязательно сделать после нахождения корней при решении рационального уравнения?
5. Решите уравнение:

а) $\frac{x - 5}{x + 1} = 0$; б) $\frac{3 + 2x}{x - 1} = 2$; в) $\frac{(3x - 1)(x + 2)}{2x^2 + 5x + 2} = 0$.

§ 6. СТЕПЕНЬ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЦЕЛЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы умеете вычислять значение степени с любым натуральным показателем. Например,

$0{,}2^1 = 0{,}2$; $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$; $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$;
$(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;
$0^6 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$ и т. д.

Но математики на этом не остановились.

Так, ещё в курсе алгебры 7-го класса мы познакомились с понятием степени с нулевым показателем: если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Например, $5{,}7^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$ и т. д.

Постепенно продвигаясь в изучении математического языка, мы с вами поймём, что означают в математике символы 2^{-3}, $3^{\frac{1}{2}}$ и т. д. Частично это мы сделаем уже в настоящем параграфе, а частично — в курсе алгебры 11-го класса.

Зададим вопрос: если уж вводить символ 2^{-3}, то каким математическим содержанием его наполнить? Хорошо бы, рассуждали математики, чтобы сохранялись привычные свойства степеней, например, чтобы при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывались; в частности, чтобы выполнялось следующее равенство:

$$2^{-3} \cdot 2^3 = 2^0 \text{ (подробнее: } 2^{-3} \cdot 2^3 = 2^{-3+3} = 2^0).$$

Но $2^0 = 1$, а тогда из равенства $2^{-3} \cdot 2^3 = 1$ получаем, что $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$. Значит, появились основания определить 2^{-3} как $\frac{1}{2^3}$. Подобные рассуждения и позволили ввести следующее определение.

Определение. Если n — натуральное число и $a \neq 0$, то под a^{-n} понимают $\frac{1}{a^n}$:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0.}$$

Например, $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$ и т. д.

Естественно, что записанную выше формулу при необходимости используют справа налево, например:

$$\frac{1}{5} = 5^{-1}, \qquad \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}.$$

Отметим одно важное тождество, которое часто используется на практике:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{-n} = a^n,\ a \neq 0.$$

Пример. Вычислить $2^{-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} - 16^{-1}$.

Решение.

1) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$;

2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{27}{8}$;

3) $16^{-1} = \frac{1}{16}$;

4) $\frac{1}{4} + \frac{27}{8} - \frac{1}{16} = \frac{57}{16}$.

Ответ: $3\frac{9}{16}$.

Те свойства степеней, к которым вы привыкли, имея дело с натуральными показателями, сохраняются и для отрицательных целых показателей (мы считаем, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, s и t — произвольные целые числа):

1. $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$.
2. $a^s : a^t = a^{s-t}$.
3. $(a^s)^t = a^{st}$.
4. $(ab)^s = a^s \cdot b^s$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}$.

Заметим, что теперь мы имеем право не делать в свойстве 2 ограничения $s > t$ (как это было, когда мы оперировали только натуральными показателями степени). Например, верно как равенство $a^7 : a^2 = a^{7-2}$, так и равенство $a^2 : a^7 = a^{2-7}$.

Докажем свойства 1 и 4, а остальные свойства попробуйте доказать самостоятельно.

Доказательство свойства 1. Показатели s и t могут быть оба натуральными числами, оба целыми отрицательными числами, один — натуральным, а другой — целым отрицательным, и, наконец, хотя бы один из них может быть нулём. Рассмотрим каждый из этих случаев.

Если s и t — натуральные числа, то

$$a^s \cdot a^t = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{s \text{ множителей}}\underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{t \text{ множителей}} =$$

$$= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s+t \text{ множителей}} = a^{s+t}.$$

Если s и t — отрицательные целые числа, то $-s$, $-t$ — натуральные числа, для которых уже доказано, что $a^{-s} \cdot a^{-t} = a^{-s-t}$. Тогда рассуждаем так:

$$a^s \cdot a^t = \frac{1}{a^{-s}} \cdot \frac{1}{a^{-t}} = \frac{1}{a^{-s} \cdot a^{-t}} = \frac{1}{a^{-s-t}} = \frac{1}{a^{-(s+t)}} = a^{s+t}.$$

Пусть теперь s — натуральное число, а t — целое отрицательное число, т. е. $-t$ — натуральное число. Пусть, для определённости, $s < -t$, т. е. $-t - s$ — натуральное число. Тогда степень с натуральным показателем a^{-t} можно представить в виде произведения степеней с натуральными показателями: $a^{-t} = a^s \cdot a^{-t-s}$. Далее рассуждаем так:

$$a^s \cdot a^t = a^s \cdot \frac{1}{a^{-t}} = \frac{a^s}{a^s \cdot a^{-t-s}} = \frac{1}{a^{-s-t}} = \frac{1}{a^{-(s+t)}} = a^{s+t}.$$

Если, наконец, один из показателей, например t, равен нулю, то

$$a^s \cdot a^t = a^s \cdot a^0 = a^s \cdot 1 = a^s = a^{s+0} = a^{s+t}.$$

Доказательство свойства 4. Если s — натуральное число, то

$$(ab)^s = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab)}_{s \text{ множителей}} =$$

$$= \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{s \text{ множителей}}\underbrace{(b \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{s \text{ множителей}} = a^s b^s.$$

Если s — отрицательное целое число, то $-s$ — натуральное число, для которого уже доказано, что $(ab)^{-s} = a^{-s}b^{-s}$. Тогда рассуждаем так:

$$(ab)^s = \frac{1}{(ab)^{-s}} = \frac{1}{a^{-s}b^{-s}} = \frac{1}{a^{-s}} \cdot \frac{1}{b^{-s}} = a^s b^s.$$

Если, наконец, $s = 0$, то $(ab)^s = (ab)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 b^0 = a^s b^s$.

Вопросы для самопроверки

1. Вспомните из курса алгебры 7-го класса определение степени с натуральным показателем.

2. Вспомните из курса алгебры 7-го класса свойства степени с натуральным показателем. Проговорите их и запишите на математическом языке.

3. Вспомните из курса алгебры 7-го класса определение степени с нулевым показателем.

4. Сформулируйте определение степени с отрицательным целым показателем.

5. Сформулируйте свойства степени с отрицательным целым показателем. Запишите их на математическом языке.

6. Верно ли утверждение: свойства степени с натуральным показателем аналогичны свойствам степени с отрицательным целым показателем?

7. Известно, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, n, m — целые числа. Какие из приведённых ниже соотношений представляют собой верные равенства, а какие — нет:

а) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$;

б) $a^n \cdot a^m = a^{nm}$;

в) $a^n : a^m = a^{\frac{n}{m}}$;

г) $a^n : a^m = a^{n-m}$;

д) $a^n \cdot b^m = (ab)^{n+m}$;

е) $a^n \cdot b^m = (ab)^{nm}$;

ж) $a^n + a^m = a^{n+m}$;

з) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$;

и) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

к) $\frac{a^n}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$?

ТЕМА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Свойства степеней с целочисленными показателями.

ГЛАВА

2 ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

§ 7. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Некоторые символы математического языка

Вам хорошо известны натуральные числа:

$$1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Множество всех натуральных чисел обычно обозначают буквой N.

Если к натуральным числам присоединить число 0 и все целые отрицательные числа: $-1, -2, -3, -4, \ldots,$ — то получится **множество целых чисел**. Это множество обычно обозначают буквой Z.

Если к множеству целых чисел присоединить все обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}$, $\frac{15}{8}$, $-\frac{33}{58}$ и т. д., — то получится **множество рациональных чисел**. Это множество обычно обозначают буквой Q.

Любое целое число m можно записать в виде дроби $\frac{m}{1}$, поэтому справедливо утверждение о том, что *множество Q рациональных чисел — это множество, состоящее из чисел вида $\frac{m}{n}$, $-\frac{m}{n}$ (где m, n — натуральные числа) и числа 0.*

Используя введённые обозначения N, Z, Q, условимся о следующем.

1. Вместо фразы «n — натуральное число» можно писать $n \in N$ (читается: «элемент n принадлежит множеству N»). Математический символ $\in$ называют *знаком принадлежности*.

2. Вместо фразы «m — целое число» можно писать $m \in Z$.

3. Вместо фразы «r — рациональное число» можно писать $r \in Q$.

Понятно, что N — часть множества Z, а Z — часть множества Q. Для описания этой ситуации в математике также имеется специальное обозначение:

$$N \subset Z, \; Z \subset Q.$$

Математический символ $\subset$ называют *знаком включения* (одного множества в другое).

Вообще в математике запись $x \in X$ означает, что x — один из элементов множества X. Запись $A \subset B$ означает, что множество A представляет собой часть множества B. Математики чаще говорят так: A — *подмножество множества* B.

Обратите внимание: множества в математике обычно обозначают прописными буквами, а элементы множества — строчными буквами.

И ещё на один момент обратите внимание: знаки принадлежности (элемент принадлежит множеству) и включения (одно множество содержится в другом) — различные, соответственно $\in$ и $\subset$.

А как записать, что элемент x не принадлежит множеству X или что множество A не является частью (подмножеством) множества B? Используют те же символы, но перечёркнутые косой чертой: $x \notin X$, $A \not\subset B$.

2. Рациональные числа как бесконечные десятичные периодические дроби

Для всех рациональных чисел можно использовать один и тот же способ записи, который мы сейчас обсудим.

Рассмотрим, например, целое число 5, обыкновенную дробь $\frac{7}{22}$ и десятичную дробь 8,377. Целое число 5 можно записать в виде бесконечной десятичной дроби: 5,0000... . Десятичную дробь 8,377 также можно записать в виде бесконечной десятичной дроби 8,377000... . Для числа $\frac{7}{22}$ воспользуемся методом деления уголком:

$$\begin{array}{l|l}
-7{,}000000\ldots & 22 \\ \cline{2-2}
\ \ \underline{66} & 0{,}31818 \\
\ \ -40 & \\
\ \ \ \ \underline{22} & \\
\ \ -180 & \\
\ \ \ \ \underline{176} & \\
\ \ \ \ \ \ -40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{22} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 180 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ldots &
\end{array}$$

Как видите, начиная со второй цифры после запятой происходит повторение одной и той же группы цифр: 18, 18, 18, ... Таким образом, $\frac{7}{22}$ = 0,3181818.... Короче это записывают так: 0,3(18). Повторяющуюся группу цифр после запятой называют **периодом**, а саму десятичную дробь — **бесконечной десятичной периодической дробью**.

Между прочим, и число 5 можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби. Для этого надо в периоде записать число 0:

$$5 = 5{,}00000\ldots = 5{,}(0).$$

Так же обстоит дело и с числом 8,377:

$$8{,}377 = 8{,}377000\ldots = 8{,}377(0).$$

Чтобы всё было аккуратно, говорят так: 8,377 — конечная десятичная дробь, а 8,377000... — бесконечная десятичная дробь.

Вообще *любое рациональное число можно записать в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной десятичной периодической дроби.*

Докажем это утверждение. Но сначала поясним идею доказательства на конкретном примере. Рассмотрим дробь $\frac{5}{28}$. Начнём делить 5 на 28 уголком:

$$\begin{array}{l|l}
-5{,}000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\ \ \underline{28} & 0{,}1 \\
\ \ 22 &
\end{array}$$

22 — это первый остаток. Продолжим деление:

$$
\begin{array}{r|l}
-5{,}000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\underline{28} & 0{,}17 \\
-220 & \\
\underline{196} & \\
24 &
\end{array}
$$

24 — это второй остаток. Точно так же будут получаться третий, четвёртый и т. д. остатки:

$$
\begin{array}{l|l}
-5{,}0000000000\ldots & 28 \\ \cline{2-2}
\ \underline{28} & 0{,}178571428 \\
-220 & \\
\ \underline{196} & \\
\quad -240 & \\
\quad\ \ \underline{224} & \\
\qquad -160 & \\
\qquad\ \ \underline{140} & \\
\qquad\quad -200 & \\
\qquad\quad\ \ \underline{196} & \\
\qquad\qquad -40 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{28} & \\
\qquad\qquad -120 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{112} & \\
\qquad\qquad\quad -80 & \\
\qquad\qquad\quad\ \ \underline{56} & \\
\qquad\qquad\quad\ \ 240 &
\end{array}
$$

Выпишем последовательно получавшиеся остатки:

$$22,\ 24,\ 16,\ 20,\ 4,\ 12,\ 8,\ 24,\ \ldots\ .$$

Все они меньше делителя 28, значит, рано или поздно (уж во всяком случае не далее чем на 28-м шаге) какой-то остаток повторится и начиная с этого места в частном будет повторяться одна и та же группа цифр. В нашем примере этим остатком является число 24, а повторяющаяся группа состоит из шести цифр: $\frac{5}{28} = 0{,}17(857142)$.

Теперь нетрудно провести доказательство в общем виде. Пусть дана дробь $\frac{m}{n}$. Деля m на n, будем последовательно получать остатки, каждый из которых меньше числа n. Значит, с какого-то места встретится остаток, который уже был ранее. После этого остатки будут повторяться, соответственно в частном будет повторяться одна и та же группа цифр.

Выше мы показали, как обыкновенную дробь представляют в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Верно и обратное: *любую бесконечную десятичную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.*

Пример. Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:

а) 1,(23); б) 1,5(23).

Решение. а) Положим $x = 1,(23)$, т. е. $x = 1,232323...$. Умножим x на такое число, чтобы запятая передвинулась вправо ровно на один период. Поскольку в периоде содержатся две цифры, надо, чтобы запятая передвинулась вправо на две цифры, а для этого число x нужно умножить на 100. Получим:

$$100x = 123,232323....$$

Следовательно,

$$\begin{array}{r} 100x = 123,232323... \\ - \\ x = \quad 1,232323... \\ \hline 100x - x = 123,232323... - 1,232323..., \end{array}$$

т. е. $99x = 122$, $x = \frac{122}{99}$. Итак, $1,(23) = \frac{122}{99} = 1\frac{23}{99}$.

Советуем сделать проверку: разделите 122 на 99 уголком и у вас получится 1,(23).

б) Положим $x = 1,5(23) = 1,5232323...$. Сначала умножим x на 10, чтобы в полученном произведении период начинался сразу после запятой: $10x = 15,232323...$. Теперь число $10x$ умножим на 100 — тогда запятая сместится ровно на один период вправо: $1000x = 1523,23232323...$. Имеем:

$$\begin{array}{r} 1000x = 1523,232323... \\ - \\ 10x = \quad 15,232323... \\ \hline 990x = 1508; \end{array}$$

$$x = \frac{1508}{990} = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}.$$

Итак, $1,5(23) = \frac{754}{495} = 1\frac{259}{495}$.

Ответ: а) $1,(23) = 1\frac{23}{99}$; б) $1,5(23) = 1\frac{259}{495}$.

Теперь мы сформулируем основной результат этого параграфа: *множество **Q** рациональных чисел можно рассматривать как множество чисел вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, или как множество бесконечных десятичных периодических дробей.*

Завершим параграф дополнительными сведениями о периодических дробях.

1. Если период дроби начинается сразу после запятой, то дробь называют *чисто периодической*, если не сразу после запятой, — *смешанно периодической*. Например, 1,(23) — чисто периодическая дробь, а 1,5(23) — смешанно периодическая дробь.

2. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ такова, что в разложении её знаменателя на простые множители содержатся лишь числа 2 и 5, то запись числа $\frac{m}{n}$ в виде десятичной дроби представляет собой конечную десятичную дробь; если в указанном разложении есть другие простые множители, то получится бесконечная десятичная дробь.

3. Если несократимая дробь $\frac{m}{n}$ такова, что в разложении её знаменателя на простые множители не содержатся числа 2 и 5, то запись числа $\frac{m}{n}$ в виде десятичной дроби представляет собой чисто периодическую десятичную дробь; если в указанном разложении наряду с другими простыми множителями есть 2 или 5, то получится смешанно периодическая десятичная дробь.

4. У периодической десятичной дроби период может быть любой длины, т. е. может содержать любое количество цифр. Например, $\frac{7}{9} = 0,(7)$ — в периоде одна цифра; $\frac{53}{99} = 0,(53)$ — в периоде две цифры; $\frac{14\,772}{99\,999} = 0,(14772)$ — в периоде 5 цифр. Вообще справедливо утверждение: правильная дробь вида $\frac{m}{999...9}$, где в знаменателе содержится n девяток, представляется в виде чисто периодической дроби

$$0,(\underbrace{00...0m}_{n \text{ цифр}}).$$

Например, $\frac{1}{999} = 0{,}(001)$, $\frac{17}{999} = 0{,}(017)$, $\frac{254}{999} = 0{,}(254)$.

Обратно, $0{,}(25) = \frac{25}{99}$, $2{,}(013) = 2\frac{13}{999}$.

5. Если смешанно периодическая дробь имеет вид

$$0{,}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}(\underbrace{00\ldots0m}_{\substack{n\text{ цифр}\\ \text{в периоде}}}),$$

то её представление в виде обыкновенной дроби таково:

$$\frac{m}{\underbrace{99\ldots900\ldots0}_{n\text{ девяток, }k\text{ нулей}}}.$$

Например, $0{,}0(23) = \frac{23}{990}$, $2{,}00(0013) = 2\frac{13}{999\,900}$.

6. Периодическую дробь с девяткой в периоде можно заменить конечной десятичной дробью (иными словами, бесконечной дробью с нулём в периоде). Например,

$$0{,}(9) = \frac{9}{9} = 1;\ 0{,}00(9) = \frac{9}{900} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

$$0{,}72(9) = 0{,}72 + 0{,}00(9) = 0{,}72 + 0{,}01 = 0{,}73;\ 1{,}274(9) = 1{,}275.$$

К дробям с девяткой в периоде мы вернёмся ещё раз в § 10.

7. Используя указанные факты, можно предложить другой способ обращения бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь. Рассмотрим его на примере, который был ранее решён:

$$1{,}5(23) = 1{,}5 + 0{,}0(23) = 1\frac{1}{2} + \frac{23}{990} = 1\frac{259}{495}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение множества рациональных чисел.

2. Какие новые математические символы вы изучили в этом параграфе? Проговорите их названия и запишите соответствующие обозначения на математическом языке.

3. Как называют в математике знак $\subset$? знак $\in$?

4. Верна ли запись $N \in Z$? запись $N \subset Z$?

5. Верна ли запись $1 \in N$? $1 \subset N$?

6. Какие из представленных ниже соотношений являются истинными высказываниями, а какие — ложными:

а) $3{,}5 \in \boldsymbol{Q}$; е) $0 \in \boldsymbol{Z}$; л) $(2;\ 5] \not\subset [2;\ 5)$;
б) $3{,}5 \in \boldsymbol{Z}$; ж) $0 \in \boldsymbol{Q}$; м) $(2;\ 5] \subset [2;\ 5]$;
в) $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{Z}$; з) $(-2;\ 0) \in [-2;\ 0]$; н) $(2;\ 5] \not\subset [2;\ 5]$?
г) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; и) $(-2;\ 0) \subset [-2;\ 0]$;
д) $0 \in \boldsymbol{N}$; к) $(2;\ 5] \subset [2;\ 5)$;

7. Что такое бесконечная десятичная периодическая дробь?

8. Что называют периодом дроби?

9. Приведите пример чисто периодической бесконечной десятичной дроби с двумя цифрами в периоде.

10. Приведите пример смешанно периодической бесконечной десятичной дроби с тремя цифрами в периоде.

11. Какое максимальное количество цифр может быть в периоде дроби со знаменателем 3? со знаменателем 7?

12. Верно ли утверждение: «Любую бесконечную периодическую дробь можно представить в виде обыкновенной дроби»?

13. Запишите в виде обыкновенной дроби: а) 0,(15); б) 0,1(5); в) 0,24(9).

§ 8. ПОНЯТИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ИЗ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Рассмотрим уравнение $x^2 = 4$. Решим его графически. Для этого в одной системе координат построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = 4$ (рис. 1). Они пересекаются в двух точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$. Абсциссы точек A и B являются корнями уравнения $x^2 = 4$. Итак, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Рассуждая точно так же, находим корни уравнения $x^2 = 9$ (см. рис. 1): $x_1 = -3$, $x_2 = 3$.

А теперь попробуем решить уравнение $x^2 = 5$; геометрическая иллюстрация представлена на рисунке 2. Ясно, что это уравнение имеет два корня x_1 и x_2, причём эти числа, как и в двух предыдущих случаях, — противоположные. Но в отличие от предыдущих случаев, где корни уравнения были найдены без труда (причём их можно было найти и не пользуясь

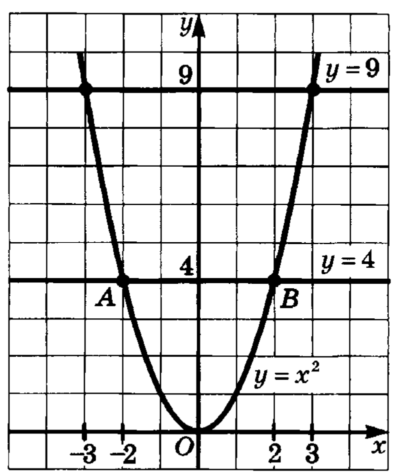


Рис. 1

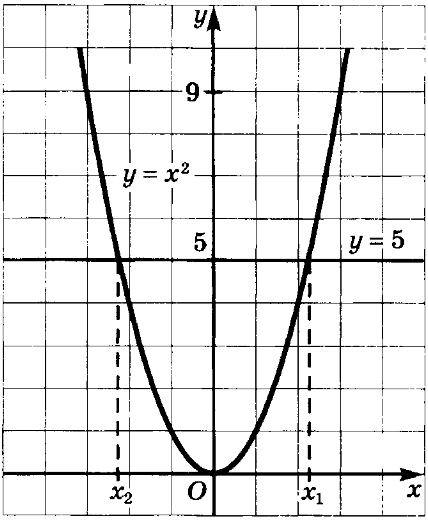


Рис. 2

графиками), с уравнением $x^2 = 5$ дело обстоит не так: по чертежу мы не можем указать значения корней, можем только установить, что один корень располагается чуть левее точки -2, а второй — чуть правее точки 2.

Что же это за число (точка), которое располагается чуть правее точки 2 и которое в квадрате даёт 5? Ясно, что это не 3, так как $3^2 = 9$, т. е. получается больше, чем нужно ($9 > 5$). Значит, интересующее нас число расположено между числами 2 и 3. Но между числами 2 и 3 находится бесконечное множество рациональных чисел, например $\frac{17}{8}$, $\frac{25}{11}$, $\frac{2973}{1000}$ и т. д. Может быть, среди них найдётся такая дробь $\frac{m}{n}$, что $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$? Тогда никаких проблем с уравнением $x^2 = 5$ у нас не будет, мы сможем написать, что $x_1 = \frac{m}{n}$, $x_2 = -\frac{m}{n}$.

Но тут нас ждёт неприятный сюрприз. Оказывается, *нет такой дроби* $\frac{m}{n}$, *для которой выполняется равенство* $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$.

Докажем это.

Предположим, что имеется такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Тогда $\frac{m^2}{n^2} = 5$, т. е. $m^2 = 5n^2$. Последнее равенство означает, что натуральное число m^2 делится без остатка на 5 (в частном получится n^2). Следовательно, число m^2 оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0. Но тогда и натуральное число m оканчивается либо цифрой 5, либо цифрой 0, т. е. число m делится на 5 без остатка. Иными словами, если число m разделить на 5, то в частном получится какое-то натуральное число k. Это значит, что $m = 5k$.

А теперь смотрите:

$$m^2 = 5n^2; \quad m = 5k.$$

Подставим $5k$ вместо m в первое равенство:

$$(5k)^2 = 5n^2, \text{ т. е. } 25k^2 = 5n^2, \text{ или } n^2 = 5k^2.$$

Последнее равенство означает, что число n^2 делится на 5 без остатка. Рассуждая как и выше, приходим к выводу о том, что и число n делится на 5 без остатка.

Итак, m делится на 5, n делится на 5, значит, дробь $\frac{m}{n}$ можно сократить (на 5). Но ведь мы предполагали, что дробь $\frac{m}{n}$ — несократимая. В чём же дело? Почему, правильно рассуждая, мы пришли к абсурду, или, как чаще говорят математики, *получили противоречие*? Да потому, что неверной была исходная посылка, будто бы существует такая несократимая дробь $\frac{m}{n}$, для которой выполняется равенство $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$. Отсюда делаем вывод: такой дроби нет.

Метод доказательства, который мы применили только что, называют в математике **методом доказательства от противного.** Суть метода состоит в следующем. Нам нужно доказать некоторое утверждение, а мы предполагаем, что оно не выполняется (математики говорят: «предположим противное» — не в смысле «неприятное», а в смысле «противоположное тому, что требуется доказать»). Если в результате правильных рассуждений приходим к противоречию с условием, то делаем вывод: наше предположение неверно, значит, верно то, что требовалось доказать.

Итак, располагая только рациональными числами (а других чисел мы с вами пока не знаем), уравнение $x^2 = 5$ мы решить не сможем.

Встретившись впервые с подобной ситуацией, математики поняли, что надо придумать способ её описания на математическом языке. Они ввели в рассмотрение новый символ $\sqrt{}$ и с его помощью корни уравнения $x^2 = 5$ записали так: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$ (читают: «корень квадратный из пяти»). Теперь для любого уравнения вида $x^2 = a$, где $a > 0$, можно записать корни: $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$ (рис. 3).

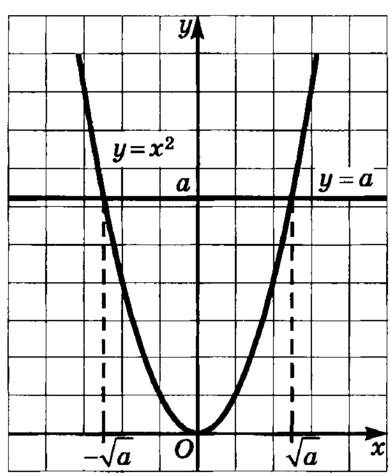


Рис. 3

Ещё раз подчеркнём, что число $\sqrt{5}$ не целое и не дробь, т. е. $\sqrt{5}$ — не рациональное число, это *число новой природы*, о таких числах мы поговорим позднее, в § 9.

Пока лишь отметим, что новое число $\sqrt{5}$ находится между числами 2 и 3, поскольку $2^2 = 4$, а это меньше, чем 5; $3^2 = 9$, а это больше, чем 5. Можно уточнить:

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3.$$

В самом деле, $2{,}2^2 = 4{,}84 < 5$, а $2{,}3^2 = 5{,}29 > 5$. Можно ещё уточнить:

$$2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24;$$

действительно, $2{,}23^2 = 4{,}9729 < 5$, а $2{,}24^2 = 5{,}0176 > 5$.

На практике обычно полагают, что число $\sqrt{5}$ равно 2,23 или оно равно 2,24, только это не обычное равенство, а *приближённое равенство*, для обозначения которого используют символ $\approx$.

Итак,

$$\sqrt{5} \approx 2{,}23 \text{ или } \sqrt{5} \approx 2{,}24.$$

Обсуждая решение уравнения $x^2 = a$, мы столкнулись с довольно типичным для математики положением дел. Попадая в нестандартную, нештатную (как любят выражаться космонавты) ситуацию и не находя выхода из неё с помощью известных средств, математики придумывают для впервые встретившейся им математической модели *новый термин* и *новое обозначение* (новый символ); иными словами, они вводят новое понятие, а затем изучают *свойства* этого понятия. Тем самым новое понятие и его обозначение становятся достоянием математического языка. Мы действовали так же: ввели термин «корень квадратный из числа a», ввели символ $\sqrt{a}$ для его обозначения, а чуть позднее (в § 12) изучим свойства нового понятия. Пока мы знаем лишь одно: если $a > 0$, то $\sqrt{a}$ — положительное число, удовлетворяющее уравнению $x^2 = a$. Иными словами, $\sqrt{a}$ — это такое положительное число, при возведении которого в квадрат получается число a.

Поскольку уравнение $x^2 = 0$ имеет корень $x = 0$, условились считать, что $\sqrt{0} = 0$.

Теперь мы готовы дать строгое определение.

2. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

***Определение*. Квадратным корнем из неотрицательного числа a** называют такое неотрицательное число, квадрат которого равен a. Это число обозначают $\sqrt{a}$, число a при этом называют **подкоренным числом.**

Итак, если a — неотрицательное число, то:

$$1)\ \sqrt{a} \geqslant 0; \qquad 2)\ \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней, говорить в этом случае о квадратном корне из числа a не имеет смысла. Таким образом, ***выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$.***

Говорят, что $\sqrt{a} = b$ и $b^2 = a$ — *одна и та же математическая модель* (одна и та же зависимость между неотрицательными числами a и b), но только вторая записана на более простом языке, чем первая (использованы более простые символы).

Операцию нахождения квадратного корня из неотрицательного числа называют **извлечением квадратного корня.** Эта операция является обратной по отношению к возведению в квадрат. Сравните:

Возведение в квадрат	Извлечение квадратного корня
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$
$0{,}3^2 = 0{,}09$	$\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$

Ещё раз обратите внимание: в таблице фигурируют только положительные числа, поскольку это оговорено в определении квадратного корня. И хотя, например, $(-5)^2 = 25$ — верное равенство, перейти от него к записи с использованием квадратного корня (т. е. написать, что $\sqrt{25} = -5$) нельзя. По определению $\sqrt{25}$ — положительное число, значит, $\sqrt{25} = 5$ (а не -5).

Иногда говорят не «квадратный корень», а «арифметический квадратный корень». Термин «арифметический» мы опускаем для краткости.

Пример 1. Вычислить:

а) $\sqrt{49}$; в) $\sqrt{0}$; д) $\sqrt{-4}$; ж) $\sqrt{5625}$.

б) $\sqrt{0{,}25}$; г) $\sqrt{17}$; е) $\sqrt{961}$;

Решение.

а) $\sqrt{49} = 7$, поскольку $7 > 0$ и $7^2 = 49$.

б) $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$, так как $0{,}5 > 0$ и $0{,}5^2 = 0{,}25$.

в) $\sqrt{0} = 0$.

г) В отличие от предыдущих примеров мы не можем указать точное значение числа $\sqrt{17}$. Ясно лишь, что оно больше, чем 4, но меньше, чем 5, поскольку $4^2 = 16$ (это меньше, чем 17), а $5^2 = 25$ (это больше, чем 17).

Впрочем, приближённое значение числа $\sqrt{17}$ можно найти с помощью микрокалькулятора, который содержит операцию извлечения квадратного корня; это значение равно 4,123.

Число $\sqrt{17}$, как и рассмотренное выше число $\sqrt{5}$, не является рациональным.

д) Вычислить $\sqrt{-4}$ нельзя, поскольку квадратный корень из отрицательного числа не существует; запись $\sqrt{-4}$ лишена смысла. Предложенное задание *некорректно*.

е) $\sqrt{961} = 31$, так как $31 > 0$ и $31^2 = 961$. В подобных случаях приходится использовать таблицу квадратов натуральных чисел или микрокалькулятор.

ж) $\sqrt{5625} = 75$, поскольку $75 > 0$ и $75^2 = 5625$. ■

В простейших случаях значение квадратного корня вычисляется сразу: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$ и т. д. В более сложных случаях приходится использовать таблицу квадратов чисел или проводить вычисления с помощью микрокалькулятора. А как быть, если под рукой нет ни таблицы, ни калькулятора? Ответим на этот вопрос, решив следующий пример.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{2809}$.

Решение.

Первый этап. Нетрудно догадаться, что в ответе получится 50 с «хвостиком». В самом деле, $50^2 = 2500$, а $60^2 = 3600$, число же 2809 находится между числами 2500 и 3600.

Второй этап. Найдём «хвостик», т. е. последнюю цифру искомого числа. Пока мы знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 или 59. Проверить надо только два числа, 53 и 57, поскольку только они при возведении в квадрат дадут в результате четырёхзначное число, оканчивающееся цифрой 9, т. е. той же цифрой, которой оканчивается число 2809.

Имеем $53^2 = 2809$ — это то, что нам нужно (нам повезло, мы сразу попали в яблочко). Значит, $\sqrt{2809} = 53$.

Ответ: $\sqrt{2809} = 53$.

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника равны 1 см и 2 см. Чему равна гипотенуза треугольника (рис. 4)?

Решение. Совсем скоро на уроках геометрии вы узнаете о знаменитой теореме Пифагора, которая заключается в том, что сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины его гипотенузы, т. е. $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Значит,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ т. е. } c = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$ см.

Этот пример показывает, что введение квадратных корней — не прихоть математиков, а объективная необходимость: в реальной жизни встречаются ситуации, математические модели которых содержат операцию извлечения квадратного корня. Пожалуй, самая важная из таких ситуаций связана с решением квадратных уравнений. До сих пор, встречаясь с квадратным уравнением $ax^2 + bx + c = 0$, мы либо раскладывали левую часть на множители (что получалось далеко не всегда), либо использовали графические методы (что тоже не очень надёжно, хотя и красиво). На самом деле для отыскания корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ в математике используются формулы

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (их мы выведем позднее),}$$

содержащие, как видно, знак квадратного корня. Эти формулы применяются на практике следующим образом. Пусть, например, надо решить уравнение $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Здесь $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$. Следовательно, $b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 81$; $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{81} = 9$. Значит,

$$x_1 = \frac{-5 + 9}{2 \cdot 2} = 1; \quad x_2 = \frac{-5 - 9}{2 \cdot 2} = -3{,}5.$$

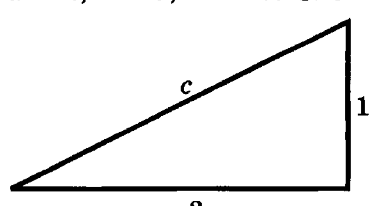


Рис. 4

Подобно тому, как выше мы определили понятие квадратного корня, можно определить и понятие кубического корня: **кубическим корнем из неотрицательного числа a** называют такое неотрицательное число, куб которого равен a. Иными словами, равенство $\sqrt[3]{a} = b$ означает, что $b^3 = a$.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, так как $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{64} = 4$, так как $4^3 = 64$; $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$, так как $0{,}1^3 = 0{,}001$.

Более того, в математике введено понятие *корня n-й степени* ($n = 2, 3, 4, \ldots$) *из неотрицательного числа*: если $a \geqslant 0$, то запись $\sqrt[n]{a} = b$ означает, что $b \geqslant 0$ и $b^n = a$. Например, $\sqrt[4]{81} = 3$, так как $3 > 0$ и $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2 > 0$ и $2^5 = 32$. Всё это мы будем изучать в курсе алгебры 11-го класса.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют квадратным корнем из неотрицательного числа?
2. При каких значениях a выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл?
3. Известно, что $7^2 = 49$. Означает ли это, что $\sqrt{49} = 7$?
4. Известно, что $(-11)^2 = 121$. Означает ли это, что $\sqrt{121} = -11$?
5. Объясните, почему верно равенство $\sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$.
6. Как вы понимаете, в чём заключается суть метода доказательства от противного?
7. Сформулируйте определение кубического корня из неотрицательного числа.

§ 9. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Мы уже неоднократно отмечали, что не все числа, с которыми приходится встречаться в реальной жизни, являются рациональными. Так, не является рациональным числом длина гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 1 см и 2 см. Как мы видели в § 8 (см. пример 3), она равна $\sqrt{5}$ см, а $\sqrt{5}$ — не рациональное число. Корни уравнения $x^2 = 7$ также не являются рациональными числами — это числа $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$. Что же это за числа, которые не являются рациональными?

Прежде всего заметим, что в математике не принято говорить «нерациональное число», обычно используют термин *иррациональное число*. Термины «рациональное число», «иррациональное число» происходят от латинского слова *ratio* — «разум» (буквальный перевод: «рациональное число — разумное число», «иррациональное число — неразумное число»; впрочем, так говорят и в реальной жизни: «он поступил рационально» — это значит, что он поступил разумно; «так действовать нерационально» — это значит, что так действовать неразумно).

Рассмотрим уже известное нам иррациональное число $\sqrt{5}$. В § 8 мы отмечали, что оно заключено между числами 2 и 3; если точнее, то между числами 2,2 и 2,3; если ещё точнее, то между числами 2,23 и 2,24. Можно продолжить уточнения оценок числа $\sqrt{5}$ и определить границы для третьего десятичного знака после запятой. Имеем $2{,}236^2 = 4{,}999696$, что меньше 5; $2{,}237^2 = 5{,}004167$, что больше 5. Итак, $2{,}236 < \sqrt{5} < 2{,}237$.

Точно так же можно определить границы для четвёртого знака после запятой, для пятого знака и т. д. Ясно, что выполняется приближённое равенство $\sqrt{5} \approx 2{,}236$. Если же считать, что для числа $\sqrt{5}$ выписаны все последующие десятичные знаки, то можно воспользоваться записью $\sqrt{5} = 2{,}236...$. Это — бесконечная десятичная дробь. В предыдущем параграфе мы уже встречались с бесконечными десятичными дробями, но все они были периодическими и выражали рациональные числа. Иррациональное число $\sqrt{5}$ выражается *бесконечной десятичной непериодической дробью*.

Вообще **иррациональным числом** называют бесконечную десятичную непериодическую дробь. Например, можно доказать, что если натуральное число n не является точным квадратом, т. е. $n \neq k^2$, где $k \in N$, то $\sqrt{n}$ — иррациональное число.

Иррациональные числа встречаются не только при извлечении квадратного корня, но и во многих других случаях, в чём вы не раз убедитесь в старших классах.

Пока приведём только один пример. Если длину любой окружности разделить на её диаметр, то в частном получится иррациональное число 3,141592... . Для этого числа в математике введено специальное обозначение π (буква греческого алфавита «пи»; версия происхождения этого обозначения такова: с буквы π начинается греческое слово *периферия* — окружность). Иррациональность числа π была доказана в 1766 г. немецким математиком И. Ламбертом.

Любая арифметическая операция над рациональными числами приводит в результате к рациональному числу. Это и понятно, ведь сумма (разность, произведение, частное) обыкновенных дробей есть обыкновенная дробь (всё логично, ведь рациональные числа — «разумные» числа). А как обстоит дело с иррациональными числами? Оказывается, ничего определённого сказать нельзя (что тоже логично, ведь иррациональные числа — «неразумные» числа). Смотрите: $\sqrt{5}$ — иррациональное число, а $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ — рациональное число, т. е. произведение двух иррациональных чисел оказалось рациональным числом; $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$ — иррациональные числа, и их произведение, т. е. $\sqrt{15}$ (в § 13 мы докажем, что $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$), — тоже иррациональное число. То же относится к сложению, вычитанию, делению иррациональных чисел: в ответе может получиться как рациональное, так и иррациональное число.

А что получится, если в операции участвуют одно рациональное число и одно иррациональное число, какое «пересилит»? Оказывается, «пересилит» иррациональное число. Рассмотрим такой пример: дано рациональное число 3 и иррациональное число $\sqrt{2}$; составим их сумму $3 + \sqrt{2}$. Предположим, что это — рациональное число r, т. е. $3 + \sqrt{2} = r$. Тогда $\sqrt{2} = r - 3$, а $r - 3$ — рациональное число (как разность двух рациональных чисел). Получается, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, а это неверно, ведь мы знаем, что это число — иррациональное. Получили противоречие, значит, сделанное нами предположение неверно, т. е. $3 + \sqrt{2}$ — иррациональное число. Аналогично можно доказать, что $3 - \sqrt{2}$ — иррациональное число. А вот сумма иррациональных чисел $3 + \sqrt{2}$ и $3 - \sqrt{2}$ равна 6, т. е. является рациональным числом.

Итак, можно сделать следующие *выводы*.

- Любая арифметическая операция над рациональными числами (кроме деления на 0) приводит в результате к рациональному числу.
- Арифметическая операция над иррациональными числами может привести в результате как к рациональному, так и к иррациональному числу.

- Если в арифметической операции участвуют рациональное и иррациональное числа, то в результате получится иррациональное число (кроме умножения на 0).

Поскольку операция извлечения квадратного корня из положительного числа часто приводит к иррациональным числам, условились алгебраическое выражение, в котором присутствует операция извлечения квадратного корня из переменной, называть *иррациональным выражением*.

Вопросы для самопроверки

1. Какие числа называют рациональными?
2. Какие числа называют иррациональными?
3. Приведите три примера рациональных чисел и три примера иррациональных чисел.
4. Сколько рациональных чисел можно расположить между числами 1,2 и 1,3?
5. Приведите пример иррационального числа, расположенного между числами 1,2 и 1,3.
6. Пусть число $a \neq 0$ — рациональное, а число β — иррациональное. Какое число — рациональное или иррациональное — получится, если над данными числами выполнить арифметическую операцию (сложение, вычитание, умножение, деление)?
7. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли их сумма быть рациональным числом? Если да, то приведите пример.
8. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли их разность быть рациональным числом? Если да, то приведите пример.
9. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли их произведение быть рациональным числом? Если да, то приведите пример.
10. Пусть α и β — иррациональные числа. Может ли их частное быть рациональным числом? Если да, то приведите пример.

§ 10. МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Если множество рациональных чисел дополнить множеством иррациональных чисел, то вместе они составят **множество действительных чисел**. Множество действительных чисел обычно обозначают буквой R; используют также символическую запись $(-\infty; +\infty)$ или $(-\infty; \infty)$.

Множество действительных чисел можно описать так: это *множество конечных и бесконечных десятичных дробей*; конечные десятичные дроби и бесконечные десятичные периодические дроби — рациональные числа, а бесконечные десятичные непериодические дроби — иррациональные числа.

Каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой. Верно и обратное: каждая точка координатной прямой имеет действительную координату. Покажем (схематически), как определяют координату точки.

Пусть на отрезке $[0; 1]$ координатной прямой находится интересующая нас точка $M(x)$. Разделим отрезок на 10 равных частей, назовём их *сегментами первого ранга* (рис. 5). Пересчёт этих сегментов слева направо начинаем с нуля: $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_9$ (Δ — прописная буква греческого алфавита *дельта*). Предположим, что $M \in \Delta_4$. Это значит, что $x = 0{,}4\ldots$. Разделим отрезок Δ_4 на 10 равных частей — это *сегменты второго ранга*, обозначим их $\Delta_{40}, \Delta_{41}, \ldots, \Delta_{49}$. Предположим, что $M \in \Delta_{40}$. Это значит, что $x = 0{,}40\ldots$. Так постепенно находятся последовательные знаки бесконечной десятичной дроби, служащей координатой точки M.

А как будет обстоять дело с координатой точки, служащей концом какого-либо сегмента? Пусть $x = 0{,}73$. Это — координата общего конца сегментов второго ранга Δ_{72} и Δ_{73} (см. рис. 5), сегментов третьего ранга Δ_{729} и Δ_{730}, сегментов четвёртого ранга Δ_{7299} и Δ_{7300} и т. д. Следовательно, $0{,}72(9) = 0{,}73(0)$, что мы уже установили другим способом в конце § 7.

Математики обычно говорят так: между множеством $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и множеством точек координатной прямой установлено *взаимно однозначное соответствие*. Координатная прямая есть геометрическая модель множества действительных чисел; по этой причине для координатной прямой часто используют термин **числовая прямая**.

Вдумайтесь в этот термин: не кажется ли он вам противоестественным? Ведь *число* — объект алгебры, а *прямая* — объект геометрии. Нет ли тут «смешения жанров»? Нет, всё логично, всё продумано. Этот термин в очередной раз подчёркивает единство различных областей математики, даёт возможность отождествле-

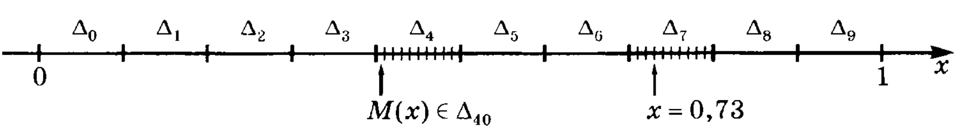


Рис. 5

ния понятий «действительное число» и «точка на координатной (числовой) прямой».

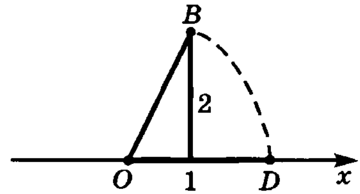


Рис. 6

Обратите внимание: координатной прямой вы пользовались начиная с 5-го класса. Но, оказывается, в ваших знаниях был вполне оправданный пробел: не для любой точки координатной прямой вы сумели бы найти координату — просто учитель оберегал вас от такой неприятности.

Рассмотрим пример. Дана координатная прямая, на её единичном отрезке, как на катете, построен прямоугольный треугольник, второй катет которого равен 2 (рис. 6). Гипотенуза OB треугольника отложена на координатной прямой от точки O вправо, получилась точка D. Чему равна координата точки D? Она равна длине гипотенузы треугольника, т. е. $\sqrt{5}$. Это число, как мы теперь знаем, не целое и не дробь. Значит, ни в 5-м, ни в 6-м, ни в 7-м классе координату точки D вы бы найти не смогли. Потому мы до сих пор и говорили «координатная прямая», а не «числовая прямая».

Заметим, что был ещё один оправданный пробел в ваших знаниях по алгебре. Рассматривая выражения с переменными, мы всегда подразумевали, что переменные могут принимать любые допустимые значения, но только рациональные, ведь других-то не было. На самом деле переменные могут принимать любые допустимые *действительные* значения. Например, в тождестве

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

в роли a и b могут выступать любые числа, не обязательно рациональные.

Для действительных чисел a, b, c выполняются привычные законы:

$$a + b = b + a;$$
$$ab = ba;$$
$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$
$$a(bc) = (ab)c;$$
$$(a + b)c = ac + bc \text{ и т. д.}$$

Выполняются и привычные правила:

произведение (частное) двух положительных чисел — положительное число;

произведение (частное) двух отрицательных чисел — положительное число;

произведение (частное) положительного и отрицательного числа — отрицательное число.

Действительные числа можно сравнивать друг с другом, используя следующее определение.

Определение. Говорят, что действительное число a **больше** (**меньше**) действительного числа b, если их разность $a - b$ — положительное (отрицательное) число. Пишут $a > b$ ($a < b$).

Из этого определения следует, что *всякое положительное число a больше нуля* (поскольку разность $a - 0 = a$ — положительное число), а *всякое отрицательное число b меньше нуля* (поскольку разность $b - 0 = b$ — отрицательное число).

Итак, $a > 0$ означает, что a — положительное число;

$a < 0$ означает, что a — отрицательное число;

$a > b$ означает, что $a - b$ — положительное число, т. е. $a - b > 0$;

$a < b$ означает, что $a - b$ — отрицательное число, т. е. $a - b < 0$.

Наряду со знаками *строгих неравенств* ($<$, $>$) используют знаки *нестрогих неравенств*:

$a \geqslant 0$ означает, что *a больше или равно* 0, т. е. a — *неотрицательное число* (положительное или 0), или что *a не меньше* 0;

$a \leqslant 0$ означает, что *a меньше или равно* 0, т. е. a — *неположительное число* (отрицательное или 0), или что *a не больше* 0;

$a \geqslant b$ означает, что a больше или равно b, т. е. $a - b$ — неотрицательное число, или что a не меньше b; $a - b \geqslant 0$;

$a \leqslant b$ означает, что a меньше или равно b, т. е. $a - b$ — неположительное число, или что a не больше b; $a - b \leqslant 0$.

Например, для любого числа a верно неравенство $a^2 \geqslant 0$; для любых чисел a и b верно неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$.

Впрочем, для сравнения действительных чисел необязательно каждый раз составлять их разность и выяснять, положительна она или отрицательна. Можно сделать соответствующий вывод, сравнивая записи чисел в виде десятичных дробей.

Геометрическая модель множества действительных чисел делает особенно наглядной операцию сравнения чисел: из двух чисел a, b больше то, которое располагается на числовой прямой правее.

Таким образом, к сравнению действительных чисел можно подходить достаточно гибко, что мы и используем в следующем примере.

Пример 1. Сравнить числа:

а) $\frac{22}{5}$ и 4; в) $-3{,}7$ и $\sqrt{2}$;

б) $2 + \sqrt{5}$ и 5; г) $-\sqrt{5}$ и $-\sqrt{7}$.

Решение. а) Имеем $\frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5} > 0$; значит, $\frac{22}{5} > 4$.

б) Имеем $2 + \sqrt{5} = 2 + 2{,}236... = 4{,}236... < 5$; таким образом, $2 + \sqrt{5} < 5$.

в) $-3{,}7$ — отрицательное число, $\sqrt{2}$ — положительное число. Любое отрицательное число меньше любого положительного числа, следовательно, $-3{,}7 < \sqrt{2}$.

г) $-\sqrt{5} = -2{,}23...$; $-\sqrt{7} = -2{,}64...$. Точка $-2{,}64...$ располагается на координатной прямой левее точки $-2{,}23...$, значит, $-\sqrt{5} > -\sqrt{7}$. ■

Пример 2. Расположить в порядке возрастания числа:

$$\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ -2,\ \frac{\pi}{2},\ \sqrt{17},\ \pi.$$

Решение. Воспользуемся тем, что $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, $\pi \approx 3{,}14$, $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, а $\sqrt{17} \approx 4{,}12$. Теперь ясно, что заданные числа расположатся в порядке возрастания следующим образом: -2, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2}$, π, $\sqrt{17}$. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что такое множество действительных чисел? Как оно обозначается?
2. Что является геометрической моделью множества действительных чисел?
3. Что такое числовая прямая?
4. В каком случае говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие?

5. Какие законы выполняются для действительных чисел a, b и c? Сформулируйте эти законы и запишите их на математическом языке.

6. Какое из двух чисел 1,4 и $\sqrt{2}$ расположено левее на числовой прямой?

§ 11. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ НЕРАВЕНСТВ

В предыдущем параграфе мы отмечали, что над действительными числами производятся разные арифметические операции, при этом используются свойства операций. Знание этих свойств помогало нам выполнять преобразования алгебраических выражений, решать уравнения. Числовые неравенства также обладают рядом свойств. Знание этих свойств поможет нам в дальнейшем решать неравенства, будет полезно и для исследования функций. Например, с неравенствами были связаны такие известные вам свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке, ограниченность функции снизу или сверху, возрастание или убывание. Так что, как видите, без знания свойств числовых неравенств нам не обойтись. Да вы и сами уже могли убедиться в необходимости умения работать с неравенствами. Так, в § 9 мы пользовались оценками для числа $\sqrt{5}$ ($2 < \sqrt{5} < 3$; $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и т. д.), где фактически опирались (хотя и интуитивно) на свойства числовых неравенств.

Изучением свойств числовых неравенств мы займёмся в данном параграфе.

Свойство 1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Доказательство. По условию $a > b$, т. е. $a - b$ — положительное число. Аналогично, так как $b > c$, делаем вывод, что $b - c$ — положительное число.

Сложив положительные числа $a - b$ и $b - c$, получим положительное число. Имеем $(a - b) + (b - c) = a - c$. Следовательно, $a - c$ — положительное число, т. е. $a > c$, что и требовалось доказать.

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел — числовую прямую. Неравенство $a > b$ означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b, а неравенство $b > c$ означает, что точка b расположена правее точки c (рис. 7).

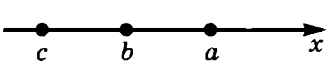


Рис. 7

Но тогда точка a расположена на прямой правее точки c, т. е. $a > c$.

Свойство 1 обычно называют *свойством транзитивности* (образно говоря, от пункта a мы добираемся до пункта c как бы транзитом, с промежуточной остановкой в пункте b).

Свойство 2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.

Свойство 3. Если $a > b$ и $m > 0$, то $am > mb$;
если $a > b$ и $m < 0$, то $am < bm$.

Смысл свойства 3 заключается в следующем:

если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить;

если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить (< на >, > на <).

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число m, так как деление на m можно заменить умножением на $\frac{1}{m}$.

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства $a > b$ на -1, получим $-a < -b$. Это значит, что ***если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства.***

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

Доказательство. Так как $a > b$, то согласно свойству 2 $a + c > b + c$. Аналогично, так как $c > d$, то $c + b > d + b$.

Итак, $a + c > b + c$, $b + c > b + d$. Тогда в силу свойства транзитивности получаем, что $a + c > b + d$.

Свойство 5. Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b$, $c > d$, то $ac > bd$.

Доказательство. Так как $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$. Аналогично, так как $c > d$ и $b > 0$, то $cb > db$.

Итак, $ac > bc$, $bc > bd$. Тогда согласно свойству транзитивности получаем, что $ac > bd$.

Обычно неравенства вида $a > b$, $c > d$ (или $a < b$, $c < d$) называют **неравенствами одинакового смысла**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ — **неравенствами противоположного смысла.** Свойство 5 означает, что ***при умножении неравенств одинакового смысла,***

у которых левые и правые части — положительные числа, получится неравенство того же смысла.

Свойство 6. Если a и b — неотрицательные числа и $a > b$, то $a^n > b^n$, где n — любое натуральное число.

Смысл свойства 6 заключается в следующем: ***если обе части неравенства — неотрицательные числа, то их можно возвести в одну и ту же натуральную степень, сохранив знак неравенства.***

Дополнение к свойству 6. Если n — нечётное число, то для любых чисел a и b из неравенства $a > b$ следует неравенство того же смысла $a^n > b^n$.

Вы обратили внимание на то, что в приведённых доказательствах мы, по сути дела, пользовались всего двумя идеями? Первая идея — составить разность левой и правой частей неравенства и выяснить, какое число получится — положительное или отрицательное. Вторая идея — для доказательства нового свойства использовать уже известные свойства. Так поступают и в других случаях доказательств числовых неравенств; например, так можно доказать те из перечисленных выше свойств, которые мы здесь привели без доказательства (советуем вам в качестве упражнения попробовать восполнить этот пробел).

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть a и b — положительные числа и $a > b$. Доказать, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Решение. Рассмотрим разность $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Имеем

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}.$$

По условию a, b, $a - b$ — положительные числа. Следовательно, $\frac{b-a}{ab}$ — отрицательное число, т. е. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$, откуда следует, что $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ■

Свойства числовых неравенств позволяют сравнивать действительные числа по величине, оценивать результат.

Пример 2. Сравнить числа:

а) $\pi + \sqrt{10}$ и $4 + \sqrt{11}$; б) $\sqrt{3} + \sqrt{6}$ и $2 + \sqrt{5}$.

Решение. а) Применим к двум неравенствам одинакового смысла $\pi < 4$ и $\sqrt{10} < \sqrt{11}$ свойство 4 о почленном сложении; получим

$$\pi + \sqrt{10} < 4 + \sqrt{11}.$$

б) Здесь $\sqrt{3} < 2$, а $\sqrt{6} > \sqrt{5}$, так что воспользоваться свойством 4 не удастся. Поступим так: введём обозначения $a = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $b = 2 + \sqrt{5}$ и предположим (наугад), что $a > b$, т. е. что $\sqrt{3} + \sqrt{6} > 2 + \sqrt{5}$. Числа a и b положительны, поэтому по свойству 6 из $a > b$ следует $a^2 > b^2$, т. е.

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 > \left(2 + \sqrt{5}\right)^2;$$
$$3 + 2\sqrt{18} + 6 > 4 + 4\sqrt{5} + 5;$$
$$9 + 2\sqrt{18} > 9 + 4\sqrt{5}.$$

По свойству 2 к обеим частям последнего неравенства можно прибавить число -9, затем по свойству 3 разделить обе части неравенства на одно и то же положительное число 2 и, наконец, снова возвести в квадрат обе части неравенства:

$$2\sqrt{18} > 4\sqrt{5};$$
$$\sqrt{18} > 2\sqrt{5};$$
$$18 > 20.$$

Но на самом деле $18 < 20$. Выполняя сделанные преобразования в обратном порядке, получаем:

$$18 < 20;$$
$$\sqrt{18} < 2\sqrt{5};$$
$$9 + 2\sqrt{18} < 9 + 4\sqrt{5};$$
$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 < \left(2 + \sqrt{5}\right)^2;$$
$$\sqrt{3} + \sqrt{6} < 2 + \sqrt{5}. \quad \blacksquare$$

Пример 3. Известно, что $2{,}1 < a < 2{,}2$; $3{,}7 < b < 3{,}8$. Оцените значение выражения:

а) $2a$; в) $a + b$; д) a^2;

б) $-3b$; г) $a - b$; е) $\frac{1}{a}$.

Решение. а) Умножив все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ на одно и то же положительное число 2, получим:

$$2 \cdot 2{,}1 < 2a < 2 \cdot 2{,}2, \text{ т. е. } 4{,}2 < 2a < 4{,}4.$$

б) Умножив все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -3, получим неравенство противоположного смысла:

$$-3\cdot 3{,}7 > -3b > -3\cdot 3{,}8, \text{ т. е. } -11{,}4 < -3b < -11{,}1$$

(вместо записи вида $a > b > c$ мы перешли к более употребительной записи $c < b < a$).

в) Сложив почленно заданные двойные неравенства одинакового смысла, получим:

$$\begin{array}{r} 2{,}1 < a < 2{,}2 \\ +\; 3{,}7 < b < 3{,}8 \\ \hline 5{,}8 < a + b < 6{,}0. \end{array}$$

г) Сначала умножим все части двойного неравенства $3{,}7 < b < 3{,}8$ на одно и то же отрицательное число -1; получим неравенство противоположного смысла:

$$-3{,}7 > -b > -3{,}8, \text{ т. е. } -3{,}8 < -b < -3{,}7.$$

Далее имеем:

$$\begin{array}{r} 2{,}1 < a < 2{,}2 \\ +\; -3{,}8 < -b < -3{,}7 \\ \hline -1{,}7 < a - b < -1{,}5. \end{array}$$

д) Поскольку все части двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ положительны, возведя их в квадрат, получим:

$$2{,}1^2 < a^2 < 2{,}2^2,$$
$$4{,}41 < a^2 < 4{,}84.$$

е) В примере 1 мы установили, что если a и b — положительные числа, то из неравенства $a < b$ следует неравенство противоположного смысла $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Поэтому из двойного неравенства $2{,}1 < a < 2{,}2$ следует, что

$$\frac{1}{2{,}1} > \frac{1}{a} > \frac{1}{2{,}2}, \text{ т. е. } \frac{5}{11} < \frac{1}{a} < \frac{10}{21}. \quad ■$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте свойства числовых неравенств и запишите их на математическом языке.

2. Если $a > b$ и $b > c$, то какое из утверждений верно:
а) $a < c$; б) $a > c$; в) $a = c$?

3. Если $a > b$, то какое из утверждений верно:
а) $a + c < b + c$; б) $a + c > b + c$; в) $a + c = b + c$?
4. Если $a > b$ и $m > 0$, то какое из утверждений верно:
а) $am < bm$; б) $am > bm$; в) $am = bm$?
5. Если $a > b$ и $m < 0$, то какое из утверждений верно:
а) $am < bm$; б) $am > bm$; в) $am = bm$?
6. Если $a > b$ и $c > d$, то какое из утверждений верно:
а) $a + c < b + d$; б) $a + c > b + d$; в) $a + c = b + d$?
7. Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b$ и $c > d$, то какое из утверждений верно:
а) $ac < bd$; б) $ac > bd$; в) $ac = bd$?
8. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $n \in N$, $a > b$, то какое из утверждений верно:
а) $a^n < b^n$; б) $a^n > b^n$; в) $a^n = b^n$?
9. Если n — нечётное число, то верно ли, что для любых чисел a, b из неравенства $a > b$ следует неравенство $a^n > b^n$?

§ 12. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt{x}$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

В 7-м классе мы изучали функции $y = C$, $y = kx$, $y = kx + m$, $y = x^2$, $y = -x^2$ и пришли в итоге к выводу о том, что уравнение с двумя переменными вида $y = f(x)$ есть правило, удобное для того, чтобы, задав конкретное значение независимой переменной x (аргумента), вычислить соответствующее значение зависимой переменной y. Например, если дана функция $y = x^2$, т. е. $f(x) = x^2$, то при $x = 1$ получаем $y = 1^2 = 1$; короче это записывают так: $f(1) = 1$. При $x = 2$ получаем: $f(2) = 2^2 = 4$, т. е. $y = 4$; при $x = -3$ получаем $f(-3) = (-3)^2 = 9$, т. е. $y = 9$, и т. д.

Уже в 7-м классе мы с вами начали понимать, что в записи $y = f(x)$ правая часть не исчерпывается перечисленными выше пятью случаями (C, kx, $kx + m$, x^2, $-x^2$). Так, например, нам уже встречались *кусочные функции*, т. е. функции, заданные разными формулами на разных промежутках. Вот одна из таких функций: $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

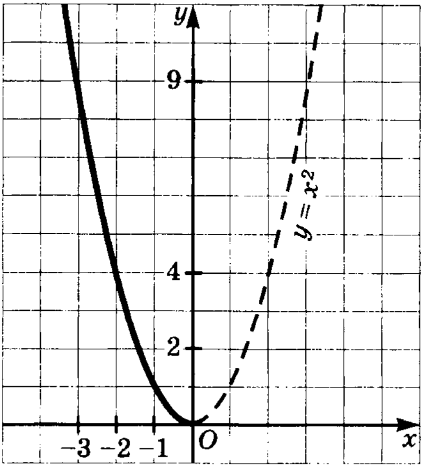


Рис. 8

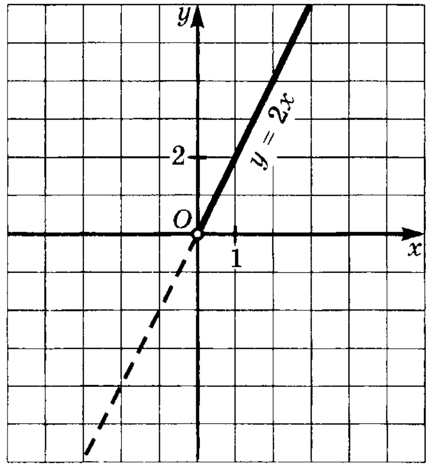


Рис. 9

Как строить графики таких функций? Сначала надо построить параболу $y = x^2$ и взять её часть при $x \leqslant 0$ (левая ветвь параболы, рис. 8), затем надо построить прямую $y = 2x$ и взять её часть при $x > 0$ (рис. 9). И наконец, надо обе выделенные части объединить на одном рисунке, т. е. построить на одной координатной плоскости (рис. 10).

Теперь наша задача состоит в следующем: пополнить запас изученных функций. В реальной жизни встречаются процессы, описываемые различными математическими моделями вида $y = f(x)$, не только теми, что мы перечислили выше. В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = \sqrt{x}$.

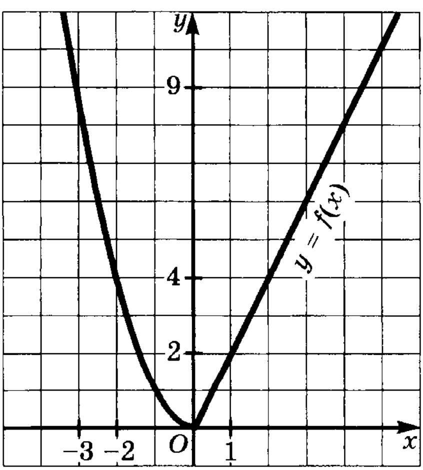


Рис. 10

Для построения графика функции $y = \sqrt{x}$ дадим, как обычно, независимой переменной x несколько конкретных значений (неотрицательных, поскольку при $x < 0$ выражение $\sqrt{x}$ не имеет смысла) и вычислим соответствующие значения зависимой переменной y. Разумеется, мы будем давать x такие значения, для которых известно точное значение квадратного корня:

если $x = 0$, то $y = \sqrt{0} = 0$;

если $x = 1$, то $y = \sqrt{1} = 1$;

если $x = 4$, то $y = \sqrt{4} = 2$;

если $x = 6{,}25$, то $y = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$;

если $x = 9$, то $y = \sqrt{9} = 3$.

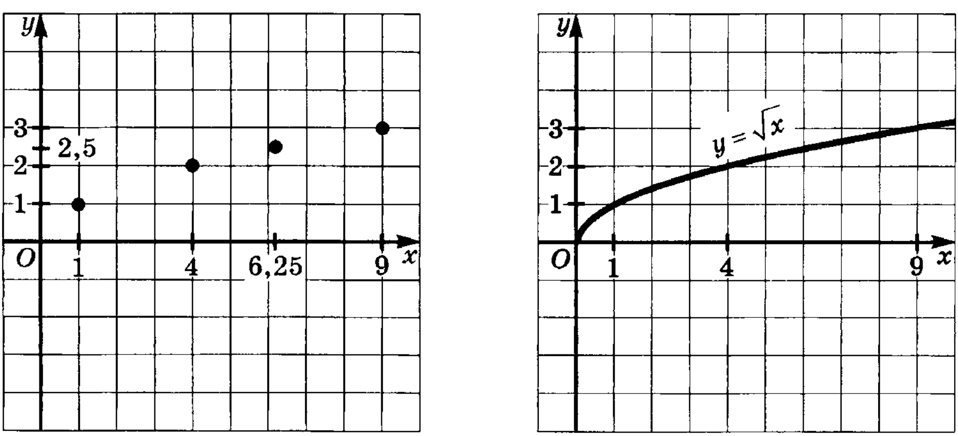
Итак, мы составили таблицу значений функции:

x	0	1	4	6,25	9
y	0	1	2	2,5	3

Построим найденные точки (0; 0), (1; 1), (4; 2), (6,25; 2,5), (9; 3) на координатной плоскости (рис. 11, *а*). Они располагаются на некоторой линии, начертим её (рис. 11, *б*). Получили график функции $y = \sqrt{x}$. Обратите внимание: график *касается оси* y в точке (0; 0). Заметим, что, имея шаблон параболы $y = x^2$, можно без труда с его помощью построить график функции $y = \sqrt{x}$, ведь это — ветвь той же параболы, только ориентированная не вверх, а вправо ($x = y^2$).

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1. *Область определения функции — луч* [0; +∞). Обычно область определения функции $y = f(x)$ обозначают $D(f)$ (вероятно, это обозначение происходит от латинского *definitia* — определение).



а *б*

Рис. 11

Если область определения функции $y = f(x)$, где $f(x)$ — алгебраическое выражение, в условии не указана, то подразумевают *естественную область определения*, т. е. множество всех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. Именно так и обстоит дело в рассматриваемом случае: $D(f) = [0; +\infty)$.

2. $y = 0$ *при* $x = 0$; $y > 0$ *при* $x > 0$.

3. *Функция возрастает на луче* $[0; +\infty)$. Напомним, что в курсе алгебры 7-го класса мы договорились называть функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идёт слева направо как бы «в горку», *возрастающей*, а функцию, график которой на рассматриваемом промежутке идёт слева направо как бы «под горку», *убывающей*. Более точно можно сказать так: функцию $y = f(x)$ называют *возрастающей на промежутке* X, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции; функцию $y = f(x)$ называют *убывающей на промежутке* X, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

То, что сказано выше, это, условно говоря, наглядно-интуитивное и рабочее представление о возрастании или убывании функции. Дадим точное определение.

Определение. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей (убывающей) на промежутке** $X \subset D(f)$, если из неравенства $x_1 < x_2$, где x_1, x_2 — любые точки из промежутка X, следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Возрастающие и убывающие функции объединяют общим термином **монотонные функции.**

Докажем, что функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на луче $[0; +\infty)$.

Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Докажем, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Предположим противное, что $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$. Тогда $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а верно неравенство $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Итак, из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует, что $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Это значит, что $y = \sqrt{x}$ — возрастающая функция.

4. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наиб}}$ не существует. Напомним, что $y_{\text{наим}}$ — это наименьшее значение функции, а $y_{\text{наиб}}$ — наибольшее значение функции на заданном промежутке; если промежуток не указан, то $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции в области определения.

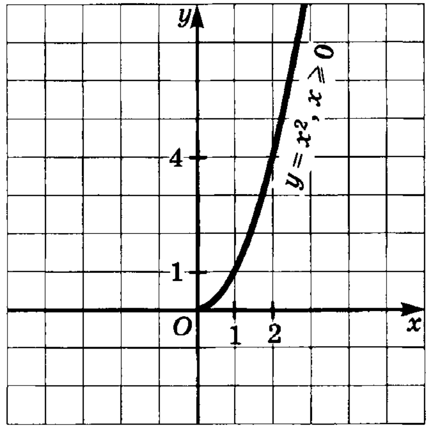


Рис. 12

Почему $y_{\text{наиб}}$ не существует? Предположим, что есть $y_{\text{наиб}}$, т. е. все значения функции не превосходят её значения в некоторой точке x_1. Но это неверно, поскольку достаточно взять $x_2 > x_1$ и в силу возрастания функции заметить, что $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$.

5. $y = \sqrt{x}$ — *непрерывная функция*. Напомним, что этот термин мы рассматриваем пока как синоним предложения «график функции есть сплошная линия, которую можно начертить, не отрывая карандаша от бумаги». В старших классах будет дано точное математическое истолкование понятия непрерывности функции, не опирающееся на геометрическую иллюстрацию.

А теперь обратим внимание на одно любопытное обстоятельство. Рассмотрим две функции: $y = \sqrt{x}$ (её график изображён на рис. 11, *б*) и $y = x^2$, где $x \geqslant 0$ (её график изображён на рис. 12). Мы только что перечислили пять свойств для первой функции, но абсолютно теми же свойствами обладает и вторая функция. Словесные «портреты» двух различных функций одинаковы. Математики не смогли вынести такой несправедливости, когда разные функции, имеющие разные графики, словесно описываются одинаково. Они обнаружили принципиальные различия в характере графиков, заметив, что график функции $y = \sqrt{x}$ обращён *выпуклостью вверх*, тогда как график функции $y = x^2$, где $x \geqslant 0$, обращён *выпуклостью вниз*.

Обычно говорят, что *функция выпукла вниз*, если, соединив любые две точки её графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *ниже* проведённого отрезка (рис. 13, *а*); *функция выпукла вверх*, если, соединив любые две точки её графика отрезком прямой, обнаруживают, что соответствующая часть графика лежит *выше* проведённого отрезка (рис. 13, *б*).

Функция $y = f(x)$, где $f(x) = \sqrt{x}$, принимает любые неотрицательные значения. В самом деле, какое бы конкретное значение $y \geqslant 0$ ни задать, всегда найдётся такое x, что выполняется

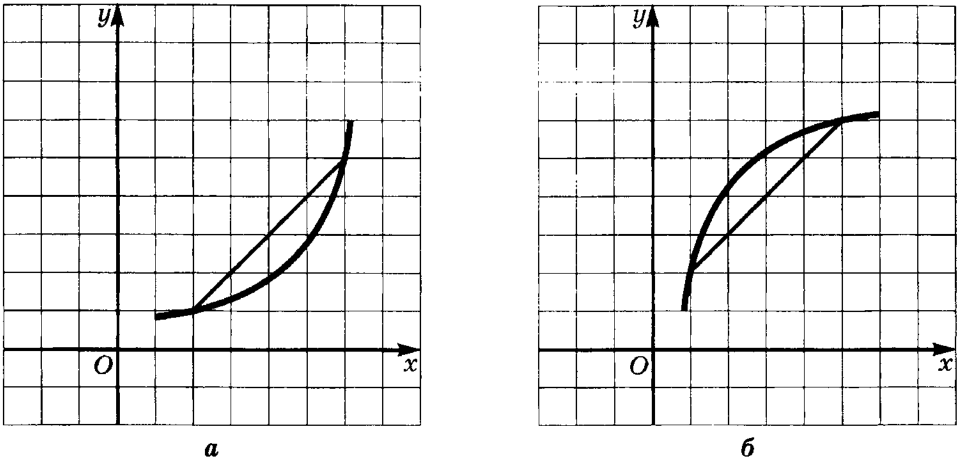


Рис. 13

равенство $f(x) = y$, т. е. $\sqrt{x} = y$; для этого достаточно положить $x = y^2$. Множество всех значений функции $y = f(x)$ называют обычно *областью значений функции и обозначают* $E(f)$. Для функции $y = \sqrt{x}$ областью значений является луч $[0; +\infty)$. Это хорошо читается по графику функции (рис. 11, *б*). Если спроецировать график на ось y, как раз и получится луч $[0; +\infty)$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке: а) $[0; 4]$; б) $[1; 5]$.

Решение. а) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке $[0; 4]$ (рис. 14). Замечаем, что $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{наиб} = 2$ (достигается при $x = 4$).

Заметим, что можно было и не опираться на графическую иллюстрацию: функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на $[0; 4]$, значит, $y_{наим} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наиб} = 2$ (достигается при $x = 4$).

б) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке $[1; 5]$ (рис. 15). Замечаем, что $y_{наим} = 1$ (достигается при $x = 1$), а $y_{наиб} = \sqrt{5}$ (достигается при $x = 5$).

Ответ: а) $y_{наим} = 0$; $y_{наиб} = 2$; б) $y_{наим} = 1$; $y_{наиб} = \sqrt{5}$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x} = 6 - x$.

Решение. В учебнике «Алгебра–7» мы выработали алгоритм графического решения уравнений, напомним его.

Чтобы графически решить уравнение $f(x) = g(x)$, нужно:

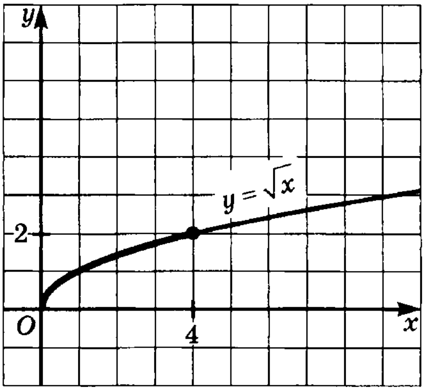


Рис. 14

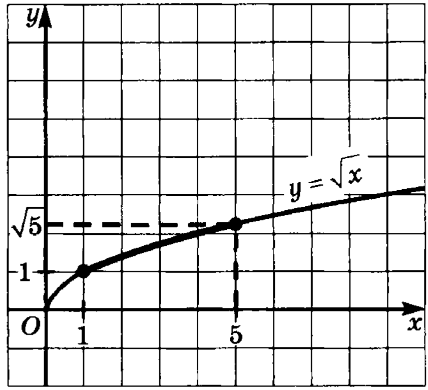


Рис. 15

1) рассмотреть две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$;

2) построить график функции $y = f(x)$;

3) построить график функции $y = g(x)$;

4) найти точки пересечения построенных графиков; абсциссы этих точек — корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Применим этот алгоритм к заданному уравнению.

1) Рассмотрим две функции $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$.

2) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 16).

3) Построим график линейной функции $y = 6 - x$. Это — прямая, которую можно построить по двум точкам (0; 6) и (6; 0). Прямая изображена на том же чертеже (рис. 16).

4) По чертежу устанавливаем, что графики пересекаются в одной точке $A(4; 2)$. Так ли это на самом деле? Проверим: пара (4; 2) удовлетворяет и уравнению $y = \sqrt{x}$, и уравнению $y = 6 - x$. Это значит, что точка (4; 2) на самом деле служит точкой пересечения построенных графиков. Заданное уравнение имеет один корень 4 — это абсцисса точки A.

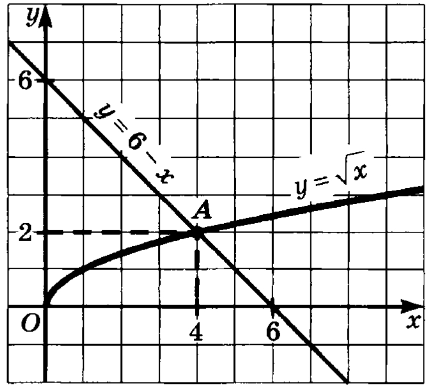


Рис. 16

Ответ: 4.

Замечание. Обратим внимание на один тонкий момент, связанный с графическим методом решения уравнений. Мы обнаружили, что графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ пересекаются в точке (4; 2), и, доверясь чертежу, объявили, что это — единственная общая точка графиков, а потому уравнение имеет единственный корень $x = 4$. Но, как говорится, доверяй, но проверяй. На самом деле надо было строго доказать без помощи чертежа, что других точек пересечения у графиков нет. Например, так. Функция $y = \sqrt{x}$ возрастает, значит, если $x > 4$, то значения функции больше 2, а если $x < 4$, то значения функции меньше 2. Функция же $y = 6 - x$ убывает, значит, если $x > 4$, то значения функции меньше 2, а если $x < 4$, то значения функции больше 2. Таким образом, в точке, отличной от точки (4; 2), графики пересечься не могут.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = -\sqrt{x}$.

Решение. В курсе алгебры 7-го класса мы говорили о том, что график функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью преобразования симметрии относительно оси x. Воспользовавшись этим, построим график функции $y = \sqrt{x}$ и отобразим его симметрично относительно оси x (рис. 17). Это и будет график функции $y = -\sqrt{x}$.

Перечислим свойства функции $y = -\sqrt{x}$ (по графику):

1. Область определения функции — луч $[0; +\infty)$.
2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x > 0$.
3. Функция убывает на луче $[0; +\infty)$.
4. $y_{наиб} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{наим}$ не существует.
5. Функция непрерывна на луче $[0; +\infty)$.
6. Область значений функции — луч $(-\infty; 0]$.
7. Функция выпукла вниз. ■

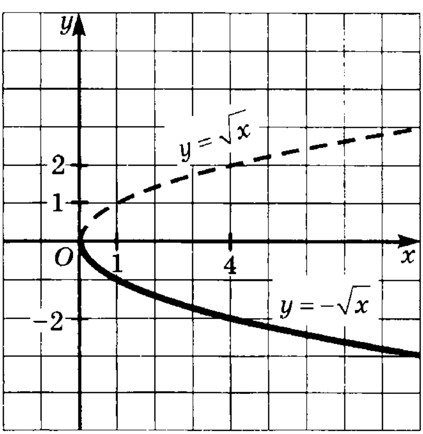


Рис. 17

Пример 4. Построить график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ 6 - x, \text{ если } 4 < x \leqslant 8. \end{cases}$$

Решение. Речь идёт о построении графика кусочной функ-

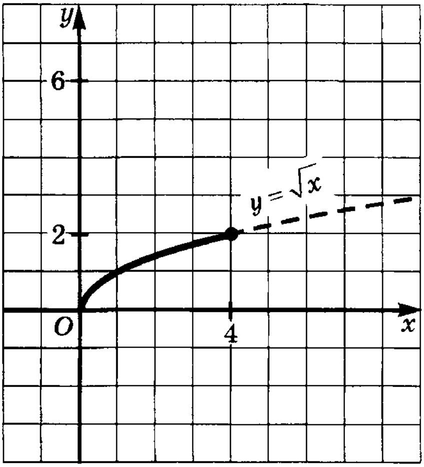


Рис. 18

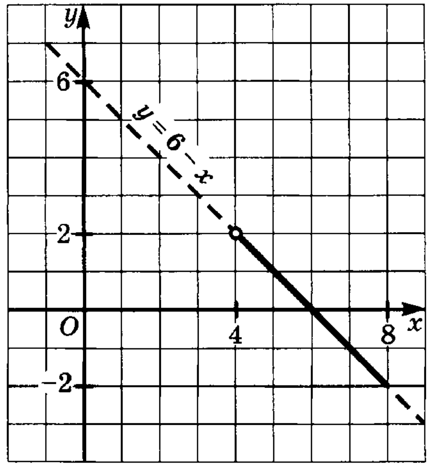


Рис. 19

ции, т. е. функции, заданной разными формулами на разных промежутках области определения. В начале параграфа мы напомнили, как строить графики подобных функций. Сначала надо построить график функции $y = \sqrt{x}$ (ветвь параболы) и выделить его часть на отрезке [0; 4] (рис. 18). Затем построить прямую $y = 6 - x$ и выделить её часть на полуинтервале (4; 8] (рис. 19). И наконец, надо обе выделенные части изобразить в одной системе координат — это и будет требуемый график кусочной функции (рис. 20). ■

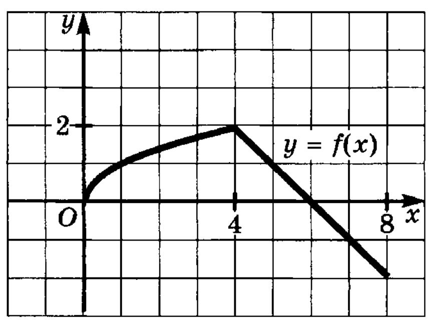


Рис. 20

Вопросы для самопроверки

1. Какова область определения функции $y = \sqrt{x}$?
2. Какова область значений функции $y = \sqrt{x}$?
3. Сформулируйте определение возрастающей функции.
4. Сформулируйте определение убывающей функции.
5. Является ли функция $y = \sqrt{x}$ возрастающей; убывающей; монотонной; немонотонной?
6. Как по графику функции установить, является ли она выпуклой вверх? выпуклой вниз?

7. Как расположены друг относительно друга графики функций $y = x^2$, $x \geqslant 0$, и $y = \sqrt{x}$?

8. Как расположены друг относительно друга графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$?

9. Придумайте кусочную непрерывную функцию, график которой состоит из части графика функции $y = \sqrt{x}$ и луча графика линейной функции. Задайте её графически и аналитически (с помощью формул).

§ 13. СВОЙСТВА КВАДРАТНОГО КОРНЯ

В этой главе введена новая операция — извлечение квадратного корня из неотрицательного числа. Чтобы успешно её использовать, нужно познакомиться со свойствами этой операции, что мы и сделаем в настоящем параграфе.

Теорема 1. ***Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению квадратных корней из этих чисел:***

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Доказательство. По определению квадратного корня $\sqrt{ab}$ — это такое неотрицательное число, которое при возведении в квадрат даёт подкоренное выражение, т. е. ab. Рассмотрим число $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Замечаем, во-первых, что оно неотрицательно. Обращаем внимание, во-вторых, на то, что при возведении его в квадрат получится ab. В самом деле,

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab.$$

Итак, число $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ удовлетворяет обоим условиям определения квадратного корня из числа ab. Следовательно,

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Замечание 1. Теорема остаётся справедливой и для случая, когда подкоренное выражение представляет собой произведение более чем двух неотрицательных множителей.

Замечание 2. Теорему 1 можно сформулировать, используя конструкцию «если... то» (как это принято для теорем в математике). Приведём соответствующую формулировку: *если a и b —*

неотрицательные числа, то справедливо равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Следующую теорему мы именно так и оформим.

Теорема 2. ***Если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то справедливо равенство***

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

(краткая формулировка, которую удобнее использовать на практике: *корень из дроби равен дроби от корней* или *корень из частного равен частному от корней*).

Доказательство, аналогичное доказательству теоремы 1, попробуйте выполнить самостоятельно.

Замечание 3. Обратите внимание, что в теоремах 1 и 2 говорится только об умножении и делении корней. Аналогичного свойства, относящегося к сложению и вычитанию квадратных корней, нет. Если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Например, $\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$. В самом деле, $\sqrt{16+9} = 5$, тогда как $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$. В § 31 мы докажем, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9}$.

Решение. Воспользовавшись первым свойством квадратных корней (теорема 1), получим:

$$\sqrt{36 \cdot 64 \cdot 9} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} \cdot \sqrt{9} = 6 \cdot 8 \cdot 3 = 144. \quad \blacksquare$$

Замечание 4. Конечно, этот пример можно решить по-другому, особенно если у вас под рукой микрокалькулятор: перемножить числа 36, 64, 9, а затем извлечь квадратный корень из полученного произведения. Однако, согласитесь, предложенное выше решение выглядит более изящно.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{10\frac{9}{16}}$.

Решение. Обратим смешанное число $10\frac{9}{16}$ в неправильную дробь: $10\frac{9}{16} = 10 + \frac{9}{16} = \frac{169}{16}$. Воспользовавшись вторым свойством квадратных корней (теорема 2), получим:

$$\sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Пример 3. Вычислить $\sqrt{37^2 - 12^2}$.

Решение.
Первый способ. Последовательно находим:

$$37^2 = 1369,$$
$$12^2 = 144,$$
$$37^2 - 12^2 = 1369 - 144 = 1225, \ \sqrt{1225} = 35.$$

Второй способ.

$$37^2 - 12^2 = (37 - 12)(37 + 12) = 25 \cdot 49,$$
$$\sqrt{25 \cdot 49} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{49} = 5 \cdot 7 = 35. \ ■$$

Замечание 5. При первом способе мы проводили вычисления «в лоб». Второй способ изящнее: мы применили формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ и воспользовались свойством квадратных корней.

Пример 4. Вычислить:

а) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$; б) $\sqrt{24} : \sqrt{6}$.

Решение. Любая формула в алгебре используется не только справа налево, но и слева направо. Так, первое свойство квадратных корней означает, что $\sqrt{ab}$ в случае необходимости можно представить в виде $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, и обратно, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ можно заменить выражением $\sqrt{ab}$. То же относится и ко второму свойству квадратных корней. Учитывая это, решим предложенный пример.

а) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{24 \cdot 6} = \sqrt{144} = 12$;

б) $\sqrt{24} : \sqrt{6} = \sqrt{\dfrac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2$. ■

Завершая параграф, отметим ещё одно достаточно простое и в то же время важное свойство:

если $a \geqslant 0$ и n — натуральное число, то

$$\boxed{\sqrt{a^{2n}} = a^n.}$$

Например,

$$\sqrt{a^6} = a^3, \ \sqrt{a^{10}} = a^5 \text{ и т. д.}$$

Пример 5. Вычислить $\sqrt{7056}$, не используя таблицу квадратов чисел и микрокалькулятор.

Решение. Разложим подкоренное число на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 7056 & 2 \\ 3528 & 2 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Значит, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. Тогда

$$\sqrt{7056} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2} = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Ответ: $\sqrt{7056} = 84$.

Замечание 6. Этот пример можно было решить так же, как и аналогичный пример в § 8. Нетрудно догадаться, что в ответе получится «80 с хвостиком», поскольку $80^2 < 7056 < 90^2$. Найдём «хвостик», т. е. последнюю цифру искомого числа. Пока мы знаем, что если корень извлекается, то в ответе может получиться 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 или 89. Проверить надо только числа 84 и 86, поскольку только они при возведении в квадрат дадут в результате четырёхзначное число, оканчивающееся цифрой 6, т. е. той же цифрой, которой оканчивается число 7056. Имеем $84^2 = 7056$ — это то, что нужно. Следовательно, $\sqrt{7056} = 84$.

Вопросы для самопроверки

1. Закончите предложение: «Квадратный корень из произведения двух неотрицательных чисел равен ...». Запишите это утверждение на математическом языке.

2. Закончите предложение: «Корень из частного равен ...». Запишите это утверждение на математическом языке.

3. Какие из приведённых ниже соотношений, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, являются верными равенствами, а какие — нет:

а) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$; г) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$;

б) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$; д) $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$;

в) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$; е) $b = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}$?

§ 14. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ОПЕРАЦИЮ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

До сих пор мы с вами выполняли преобразования только рациональных выражений, используя для этого правила действий над многочленами и алгебраическими дробями, формулы сокращённого умножения и пр. В этой главе мы ввели новую операцию — операцию извлечения квадратного корня из неотрицательного числа; мы установили, что

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b};$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ (b > 0);$$

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

Используя эти формулы, можно выполнять различные преобразования выражений, содержащих операцию извлечения квадратного корня. Рассмотрим несколько примеров, причём во всех примерах будем предполагать, что *переменные принимают только неотрицательные значения.*

Пример 1. Упростить выражения:

а) $\sqrt{a^2b^4}$; б) $\sqrt{\frac{16a^4}{9b^6}}$.

Решение. а) $\sqrt{a^2b^4} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = ab^2$;

б) $\sqrt{\frac{16a^4}{9b^6}} = \frac{\sqrt{16a^4}}{\sqrt{9b^6}} = \frac{4a^2}{3b^3}$. ■

Пример 2. Вынести множитель из-под знака квадратного корня:

а) $\sqrt{81a}$; б) $\sqrt{32a^2}$; в) $\sqrt{9a^7b^5}$.

Решение. а) $\sqrt{81a} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{a} = 9\sqrt{a}$;

б) $\sqrt{32a^2} = \sqrt{16 \cdot a^2 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = 4a\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{9a^7b^5} = \sqrt{9 \cdot a^6 \cdot a \cdot b^4 \cdot b} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a^6} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b^4} \cdot \sqrt{b} =$

$= 3a^3b^2\sqrt{ab}$. ■

Пример 3. Внести множитель под знак квадратного корня:

а) $2\sqrt{2}$; б) $\frac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}}$.

Решение. а) $2\sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{8}$;

б) $\frac{3a\sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \frac{\sqrt{9a^2} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{3a}} = \sqrt{\frac{9a^2 \cdot b}{3a}} = \sqrt{3ab}$. ■

Пример 4. Выполнить действия:

а) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)$; б) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$.

Решение. а) Пусть $\sqrt{a} = x$, $\sqrt{b} = y$. Тогда

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

Но $x^2 = a$, $y^2 = b$, значит, $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = a - b$.

На самом деле новые переменные x и y можно было и не вводить, тогда запись решения будет короче:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{b}\right)^2 = a - b.$$

б) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$. ■

Пример 5. Разложить на множители:

а) $4a - 4\sqrt{ab} + b$; б) $x\sqrt{x} + 1$.

Решение.

а) $4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2$.

Заметим, что это — квадрат разности выражений $2\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$. Следовательно,

$$4a - 4\sqrt{ab} + b = \left(2\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2.$$

б) $x\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \cdot \sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3.$

Остаётся лишь вспомнить формулу разложения суммы кубов на множители:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Здесь в роли a выступает $\sqrt{x}$, а в роли b — число 1. Получаем:

$$\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1^3 = \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2 - \sqrt{x} \cdot 1 + 1^2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right). \quad \blacksquare$$

Пример 6. Упростить выражение

$$\frac{a\sqrt{a} + 3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a}} \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right).$$

Решение. Выполним последовательные преобразования:

1) $a\sqrt{a} + 3\sqrt{3} = \left(\sqrt{a}\right)^3 + \left(\sqrt{3}\right)^3 =$

$= \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - \sqrt{a} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) =$

$= \left(\sqrt{a} + \sqrt{3}\right)\left(a - \sqrt{3a} + 3\right);$

2) $\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a} = \left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\right) + \sqrt{3a} =$

$= a - 2\sqrt{3a} + 3 + \sqrt{3a} = a - \sqrt{3a} + 3$

(мы привели подобные члены: $-2\sqrt{3a} + \sqrt{3a} = -\sqrt{3a}$);

3) $\dfrac{(\sqrt{a} + \sqrt{3})(a - \sqrt{3a} + 3)}{a - \sqrt{3a} + 3} = \sqrt{a} + \sqrt{3}$ (сократили дробь на $a - \sqrt{3a} + 3$, т. е. на общий множитель числителя и знаменателя дроби);

4) $(\sqrt{a} + \sqrt{3})(\sqrt{a} - \sqrt{3}) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = a - 3.$

Итак, $\dfrac{a\sqrt{a} + 3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a}} \cdot \left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right) = a - 3.$

Выясним, какова здесь область допустимых значений переменной a. Во-первых, заметим, что должно выполняться условие $a \geqslant 0$, поскольку в левой части тождества фигурирует $\sqrt{a}$. Во-вторых, должно выполняться условие $\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a} \neq 0$, поскольку в левой части тождества соответствующее выражение находится в знаменателе дроби. Это условие выполняется, так как $\left(\sqrt{a} - \sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3a}$ — сумма двух неотрицательных выражений, которые одновременно в нуль не обращаются. Значит, эта сумма положительна, т. е. отлична от нуля. Таким образом, доказанное тождество справедливо при $a \geqslant 0$. ■

Пример 7. Преобразовать заданное алгебраическое выражение к такому виду, чтобы знаменатель дроби не содержал знаков квадратных корней:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

Решение. В обоих случаях воспользуемся тем, что значение дроби не изменится, если её числитель и знаменатель одновременно умножить на одно и то же отличное от нуля число или выражение.

а) Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{3} + \sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + \sqrt{2}. \quad ■$$

Если знаменатель алгебраической дроби содержит знак квадратного корня, то обычно говорят, что в *знаменателе содержится иррациональность*. Преобразование выражения к такому виду, чтобы в знаменателе дроби не оказалось знаков квадратных корней, называют *освобождением от иррациональности в знаменателе*. Два основных приёма освобождения от иррациональности в знаменателе мы как раз и рассмотрели в примере 7:

если знаменатель имеет вид $\sqrt{a}$, то числитель и знаменатель дроби следует умножить на $\sqrt{a}$;

если знаменатель имеет вид $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ или $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, то числитель и знаменатель дроби надо умножить соответственно на $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ или на $\sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Зачем нужно уметь освобождаться от иррациональности в знаменателе? Во многих случаях это облегчает тождественные преобразования алгебраических выражений, в чём мы сейчас и убедимся. Полезно это и в приближённых вычислениях, о чём мы поговорим в § 32.

Пример 8. Упростить выражение

$$\frac{7}{\sqrt{7}} - \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}.$$

Решение. Выполним последовательные преобразования:

1) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7};$

2) $\frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2} =$

$= \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{7 - 5} = \frac{2(\sqrt{7} + \sqrt{5})}{2} = \sqrt{7} + \sqrt{5};$

3) $\frac{4}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} =$

$= \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{5 - 3} = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{2} = 2(\sqrt{5} - \sqrt{3});$

4) $\sqrt{7} - (\sqrt{7} + \sqrt{5}) + 2(\sqrt{5} - \sqrt{3}) =$

$= \sqrt{7} - \sqrt{7} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} = \sqrt{5} - 2\sqrt{3}.$

Ответ: $\sqrt{5} - 2\sqrt{3}$.

Вопросы для самопроверки

1. Известно, что $a > 0$. Верно ли, что $a\sqrt{bc} = \sqrt{a^2bc}$?
2. Известно, что $a < 0$. Верно ли, что $a\sqrt{bc} = \sqrt{a^2bc}$?
3. Известно, что $a < 0$. Верно ли, что $a\sqrt{bc} = -\sqrt{a^2bc}$?
4. Сократите дробь $\frac{4 - x}{2 - \sqrt{x}}$.

5. Что такое сопряжённое выражение?

6. Какую операцию называют освобождением от иррациональности в знаменателе?

7. Для чего мы избавляемся от иррациональности в знаменателе? Что мы должны при этом получить?

8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{3}{4 + \sqrt{x}}$.

§ 15. АЛГОРИТМ ИЗВЛЕЧЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Квадратный корень из положительного числа, являющегося *точным квадратом*, т. е. из числа вида n^2, можно вычислить без таблиц и без калькулятора. Имеется сравнительно несложный алгоритм вычислений, который мы в этом параграфе покажем на двух примерах.

Пример 1. Вычислить $\sqrt{138\,384}$.

Решение. Число 138 384 разобьём на грани. *Грань* — это группа из двух цифр, начиная с цифры единиц:

$$138\,384 = 13'83'84.$$

Ищем наибольшее натуральное число, квадрат которого не превосходит числа 13, стоящего в первой грани. Этим числом является 3 (поскольку $3^2 = 9 < 13$, а $4^2 = 16 > 13$). Записываем его в ответ — это первая цифра результата.

Возводим 3 в квадрат и результат вычитаем из первой грани. Получим $13 - 3^2 = 4$. К найденной разности приписываем справа вторую грань и получаем число 483.

Удваиваем имеющуюся цифру результата (получаем 6) и приписываем к полученному числу справа такую наибольшую цифру a, чтобы произведение чисел $\overline{6a}$* и a не превосходило 483. В данном случае таким числом a служит 7, поскольку $67 \cdot 7 = 469 < 483$, а $68 \cdot 8 = 544 > 483$. Записываем цифру 7 вслед за цифрой 3 в ответ — это вторая цифра результата. Из числа 483 вычитаем 469 и получаем 14. К этому числу приписываем справа

* Запись $\overline{6a}$ означает двузначное число с цифрами 6 и a; запись $\overline{74b}$ (см. с. 74) означает трёхзначное число с цифрами 7, 4, b.

третью грань, получаем 1484. Имеющееся в результате число 37 удваиваем и к полученному числу 74 приписываем справа такую наибольшую цифру b, чтобы произведение чисел $\overline{74b}$ и b не превосходило 1484. В данном случае $b = 2$, так как $742 \cdot 2 = 1484$. Записываем цифру 2 в ответ — это третья цифра результата. Поскольку $1484 - 1484 = 0$, извлечение корня закончено.

Обычно рассмотренный алгоритм записывают так:

$$\begin{array}{rr}
 & \sqrt{13'83'84} = 372 \\
 & -\,9 \\
\cline{2-2}
67 & \multicolumn{1}{|r}{-\,483} \\
\times\;7 & \multicolumn{1}{|r}{469} \\
\cline{2-2}
742 & \multicolumn{1}{|r}{-\,1484} \\
\times\;2 & \multicolumn{1}{|r}{1484} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Ответ: $\sqrt{138\,384} = 372$.

Пример 2. Вычислить $\sqrt{45\,369}$.

Решение.

$$\begin{array}{rr}
 & \sqrt{4'53'69} = 213 \\
 & -\,4 \\
\cline{2-2}
41 & \multicolumn{1}{|r}{-\,53} \\
\times\;1 & \multicolumn{1}{|r}{41} \\
\cline{2-2}
423 & \multicolumn{1}{|r}{-\,1269} \\
\times\;3 & \multicolumn{1}{|r}{1269} \\
\cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

Ответ: $\sqrt{45\,369} = 213$.

§ 16. МОДУЛЬ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА. ФУНКЦИЯ $y = |x|$

1. Модуль действительного числа и его свойства

В младших классах вы уже встречались с понятием модуля (или абсолютной величины) числа, пользовались обозначением $|a|$. Вы знаете, что, например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$. Правда, раньше речь шла только о рациональных числах. Теперь надо ввести понятие модуля для любого действительного числа.

Определение. **Модулем неотрицательного действительного числа** x называют само это число: $|x| = x$; **модулем отрицательного действительного числа** x называют противоположное число: $|x| = -x$.

Например,

$$|5| = 5;\ |-5| = -(-5) = 5;\ |-3{,}7| = 3{,}7;$$

$$\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2 \text{ (так как } \sqrt{5} - 2 > 0);$$

$$\left|\sqrt{5} - 3\right| = -\left(\sqrt{5} - 3\right) = 3 - \sqrt{5} \text{ (так как } \sqrt{5} - 3 < 0).$$

Свойства модулей

1. $|a| \geqslant 0$.
2. $|ab| = |a|\,|b|$.
3. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.
4. $|a|^2 = a^2$.
5. $|a| = |-a|$.
6. $|a| \geqslant a$.
7. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Докажем последние два свойства.

Доказательство свойства 6. Если $a \geqslant 0$, то по определению $|a| = a$. Если $a < 0$, то по определению $|a| = -a$. Но при $a < 0$ выполняется неравенство $-a > a$, т. е. $|a| > a$. Итак, в любом случае выполняется неравенство $|a| \geqslant a$.

Доказательство свойства 7. Если a и b — неотрицательные числа, то $|a + b| = a + b$, $|a| = a$, $|b| = b$ и поэтому $|a + b| = |a| + |b|$. Если a и b — отрицательные числа, то $|a + b| = -(a + b)$, $|a| = -a$, $|b| = -b$ и поэтому $|a + b| = |a| + |b|$. Если a и b — числа разных знаков и, например, $|a| \geqslant |b|$, то по правилу сложения чисел разных знаков получаем

$$|a + b| = |a| - |b| < |a| + |b|.$$

Итак, если a и b — числа одного знака, то $|a + b| = |a| + |b|$. Если a и b — числа разных знаков, то $|a + b| < |a| + |b|$. Свойство 7 доказано.

2. Геометрический смысл модуля действительного числа

Вернёмся к множеству $\boldsymbol{R}$ действительных чисел и его геометрической модели — числовой прямой. Отметим на прямой две точки a и b (два действительных числа a и b), обозначим через $\rho(a;\ b)$ расстояние между точками a и b (ρ — буква греческого алфавита «ро»). Это расстояние равно $b - a$, если $b > a$ (рис. 21, *а*), оно равно $a - b$, если $a > b$ (рис. 21, *б*), наконец, оно равно нулю, если $a = b$.

Рис. 21

Все три случая охватываются одной формулой

$$\boxed{\rho(a;\ b) = |a - b|.}$$

Пример 1. Решить уравнения:

а) $|x - 2| = 3$;   в) $|x| = 2{,}7$;

б) $|x + 3{,}2| = 2$;   г) $|x - \sqrt{2}| = 0$.

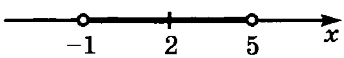


Рис. 22

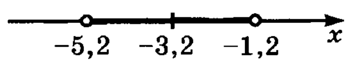


Рис. 23

Решение. а) Переведём соотношение $|x - 2| = 3$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;\ 2) = 3$, т. е. удалены от точки 2 на расстояние, равное 3. Это — точки -1 и 5 (рис. 22). Следовательно, уравнение имеет два корня: -1 и 5.

б) Уравнение $|x + 3{,}2| = 2$ перепишем в виде $|x - (-3{,}2)| = 2$ и далее $\rho(x;\ -3{,}2) = 2$. На координатной прямой есть две точки, которые удалены от точки $-3{,}2$ на расстояние, равное 2. Это — точки $-5{,}2$ и $-1{,}2$ (рис. 23). Значит, уравнение имеет два корня: $-5{,}2$ и $-1{,}2$.

в) Уравнение $|x| = 2{,}7$ перепишем в виде $|x - 0| = 2{,}7$, или, что то же самое, $\rho(x;\ 0) = 2{,}7$. На координатной прямой имеются две точки, которые удалены от точки 0 на расстояние, равное 2,7. Это — точки $-2{,}7$ и $2{,}7$ (рис. 24). Таким образом, уравнение имеет два корня: $-2{,}7$ и $2{,}7$.

г) Для уравнения $\left|x - \sqrt{2}\right| = 0$ можно обойтись без геометрической иллюстрации, ведь если $|a| = 0$, то $a = 0$. Поэтому $x - \sqrt{2} = 0$, т. е. $x = \sqrt{2}$. ■

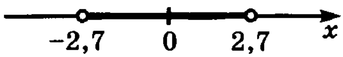


Рис. 24

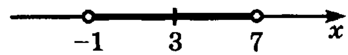


Рис. 25

Пример 2. Решить уравнения:

а) $|2x - 6| = 8$; б) $|5 - 3x| = 6$; в) $|4x + 1| = -2$.

Решение.

а) $|2x - 6| = |2(x - 3)| = |2|\cdot|x - 3| = 2|x - 3|$.

Значит, заданное уравнение можно преобразовать к виду $2|x - 3| = 8$, откуда получаем $|x - 3| = 4$.

Переведём соотношение $|x - 3| = 4$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x;\ 3) = 4$, т. е. удалены от точки 3 на расстояние, равное 4. Это — точки −1 и 7 (рис. 25). Итак, уравнение имеет два корня: −1 и 7.

б) $|5 - 3x| = \left|-3\left(x - \frac{5}{3}\right)\right| = |-3|\cdot\left|x - \frac{5}{3}\right| = 3\left|x - \frac{5}{3}\right|$.

Поэтому заданное уравнение можно преобразовать к виду $3\left|x - \frac{5}{3}\right| = 6$, откуда получаем $\left|x - \frac{5}{3}\right| = 2$.

Переведём соотношение $\left|x - \frac{5}{3}\right| = 2$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\left(x;\ \frac{5}{3}\right) = 2$, т. е. удалены от точки $\frac{5}{3}$ (от точки $1\frac{2}{3}$) на расстояние, равное 2. Это точки $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$ (рис. 26). Следовательно, уравнение имеет два корня: $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$.

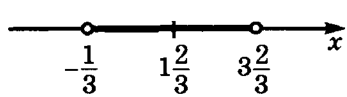


Рис. 26

в) Для уравнения $|4x + 1| = -2$ никаких преобразований выполнять не требуется. Оно явно не имеет корней, так как в левой его части содержится неотрицательное выражение, а в правой — отрицательное число. ■

Замечание. На практике для решения уравнений с модулями редко применяют тот способ, которым мы решили уравнения а) и б) из примера 2 (нам было важно обратить ваше внимание на геометрический смысл модуля). Обычно рассуждают так. Равенство $|c| = a$, где $a > 0$, эквивалентно совокупности двух равенств: $c = a$, $c = -a$. Поэтому если дано уравнение $|f(x)| = a$, где $a > 0$, то решают два уравнения: $f(x) = a$, $f(x) = -a$ (обычно говорят: *совокупность уравнений*). Например, для уравнения $|3x - 5| = 6$ получаем:

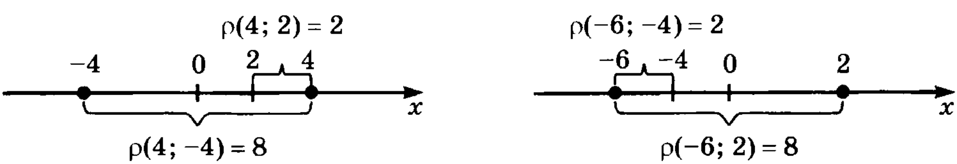
$$3x - 5 = 6; \qquad 3x - 5 = -6;$$
$$x = 3\frac{2}{3}; \qquad x = -\frac{1}{3}.$$

Подробнее о решении уравнений с модулями мы поговорим в § 37, а здесь рассмотрим ещё один пример изящного решения уравнения с модулями геометрическим способом.

Пример 3. Решить уравнение $|x - 2| + |x + 4| = 10$.

Решение. Переведём соотношение $|x - 2| + |x + 4| = 10$ на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) + \rho(x; -4) = 10$, т. е. сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 равна 10. Это точки 4 и -6; в самом деле,

$$\rho(4; 2) + \rho(4; -4) = 2 + 8 = 10 \text{ (рис. 27, } a\text{)};$$
$$\rho(-6; 2) + \rho(-6; -4) = 8 + 2 = 10 \text{ (рис. 27, } б\text{)}.$$



а *б*

Рис. 27

Значит, уравнение имеет два корня: 4 и -6. ■

Пример 4. Решить неравенства:

а) $|x - 2| < 3$; б) $|5 - 3x| \geqslant 6$; в) $|x - 2| + |x + 4| \leqslant 10$.

Решение. а) Переведём соотношение $|x - 2| < 3$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) < 3$, т. е. удалены от точки 2 на расстояние меньшее, чем 3. На расстояние, равное 3, удалены от точки 2 точки -1 и 5 (см. рис. 22). Следовательно, решениями интересующего нас неравенства являются все числа из интервала $(-1; 5)$ (см. рис. 22).

б) Рассуждая, как в примере 2 б), преобразуем неравенство $|5 - 3x| \geqslant 6$ к виду $\left|x - \frac{5}{3}\right| \geqslant 2$. Нам нужно найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho\left(x; \frac{5}{3}\right) \geqslant 2$, т. е. удалены от точки $1\frac{2}{3}$ на расстояние, большее или равное 2. На расстоянии, равном 2, от указанной точки находятся точки $-\frac{1}{3}$ и $3\frac{2}{3}$ (см. рис. 26). Значит, решения заданного неравенства таковы: $x \leqslant -\frac{1}{3}$; $x \geqslant 3\frac{2}{3}$ (рис. 28).

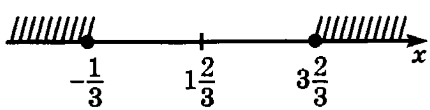


Рис. 28

в) Переведём соотношение $|x - 2| + |x + 4| \leqslant 10$ на геометрический язык: нам надо найти на координатной прямой такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) + \rho(x; -4) \leqslant 10$, т. е. сумма расстояний каждой из таких точек от точек 2 и -4 меньше или равна 10. В примере 3 мы установили, что точки $x = -6$ и $x = 4$ удовлетворяют условию $\rho(x; -4) + \rho(x; 2) = 10$ (рис. 29). Условию же $\rho(x; 2) + \rho(x; -4) < 10$ удовлетворяют точки из интервала $(-6; 4)$. Следовательно, решения заданного неравенства таковы: $-6 \leqslant x \leqslant 4$ (рис. 29). ■

Рис. 29

3. Тождество $\sqrt{a^2} = |a|$

Мы знаем, что если $a \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2} = a$, — этим мы постоянно пользовались в предыдущей главе. А как быть, если $a < 0$? Написать $\sqrt{a^2} = a$ в этом случае нельзя, ведь $a < 0$ и получится, что $\sqrt{a^2} < 0$. Это неверно, так как значение квадратного корня не может быть отрицательным.

Чему же равно выражение $\sqrt{a^2}$ при $a < 0$? По определению квадратного корня в ответе должно получиться такое число, которое, во-первых, положительно и, во-вторых, при возведении в квадрат даёт подкоренное число, т. е. a^2. Таким числом будет $-a$. Смотрите:

1) $-a > 0$ (ещё раз напомним, что a — отрицательное число, значит, $-a$ — положительное число);

2) $(-a)^2 = a^2$.

Итак,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Вам ничего не напоминает конструкция в правой части равенства? Вспомните, ведь точно так же определяется модуль числа a:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\sqrt{a^2}$ и $|a|$ — одно и то же. Тем самым мы доказали важное тождество:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|.}$$

В роли a может выступать любое числовое или алгебраическое выражение, например,

$$\sqrt{(3x-4)^2} = |3x-4|,$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{7}\right)^2} = \left|2-\sqrt{7}\right| \text{ и т. д.}$$

Пример 5. Упростить выражение $\sqrt{(a-1)^2}$, если:
а) $a - 1 > 0$; б) $a - 1 < 0$.

Решение. Как мы только что установили, справедливо тождество

$$\sqrt{(a-1)^2} = |a-1|.$$

а) Если $a - 1 > 0$, то $|a-1| = a - 1$. Следовательно, в этом случае $\sqrt{(a-1)^2} = a - 1$.

б) Если $a - 1 < 0$, то $|a-1| = -(a-1) = 1 - a$. Значит, в этом случае $\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$. ■

Пример 6. Упростить выражение $\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2}$, если $a < 0$.
Решение.

$$\frac{1}{2a} \cdot \sqrt{32a^2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{a^2}}{2a} = \frac{4\sqrt{2} \cdot |a|}{2a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot |a|}{a}.$$

Так как по условию $a < 0$, то $|a| = -a$. Значит,

$$\frac{2\sqrt{2} \cdot |a|}{a} = \frac{2\sqrt{2} \cdot (-a)}{a} = -2\sqrt{2}. \quad ■$$

Пример 7. Упростить выражение

$$\sqrt{52 - 30\sqrt{3}} - \sqrt{43 - 24\sqrt{3}}.$$

Решение. 1) Рассмотрим подкоренное выражение $52 - 30\sqrt{3}$. Имеем:

$$52 - 30\sqrt{3} = 52 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Положим $a = 5$, $b = 3\sqrt{3}$; тогда

$$a^2 + b^2 = 5^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 25 + 27 = 52.$$

Это значит, что рассматриваемое выражение можно представить в виде $a^2 + b^2 - 2ab$, т. е. в виде $(a - b)^2$.

Итак,

$$52 - 30\sqrt{3} = 25 + 27 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} =$$
$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \left(5 - 3\sqrt{3}\right)^2.$$

Значит,

$$\sqrt{52 - 30\sqrt{3}} = \sqrt{\left(5 - 3\sqrt{3}\right)^2} = \left|5 - 3\sqrt{3}\right| = 3\sqrt{3} - 5.$$

2) Рассмотрим подкоренное выражение $43 - 24\sqrt{3}$. Имеем:

$$43 - 24\sqrt{3} = 43 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}.$$

Положим $a = 4$, $b = 3\sqrt{3}$; тогда

$$a^2 + b^2 = 4^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 16 + 27 = 43.$$

Это значит, что рассматриваемое выражение можно представить в виде $a^2 + b^2 - 2ab$, т. е. в виде $(a - b)^2$.

Итак,

$$43 - 24\sqrt{3} = 16 + 27 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} =$$
$$= 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{3} + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = \left(4 - 3\sqrt{3}\right)^2.$$

Значит,

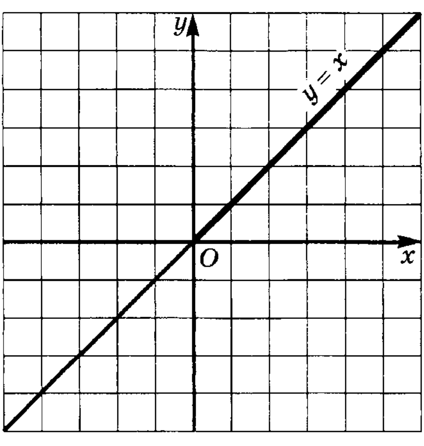
$$\sqrt{43 - 24\sqrt{3}} = \sqrt{\left(4 - 3\sqrt{3}\right)^2} = \left|4 - 3\sqrt{3}\right| = 3\sqrt{3} - 4.$$

3) $\left(3\sqrt{3} - 5\right) - \left(3\sqrt{3} - 4\right) = -1.$ ■

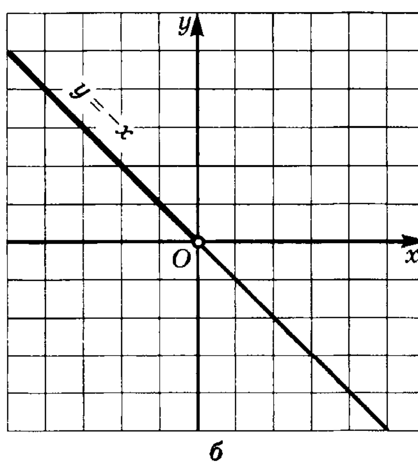
4. Функция $y = |x|$

Для любого действительного числа x можно вычислить $|x|$, т. е. можно говорить о функции $y = |x|$, определённой на множестве всех действительных чисел. Воспользовавшись определением модуля действительного числа, мы можем вместо $y = |x|$ записать

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$



а



б

Рис. 30

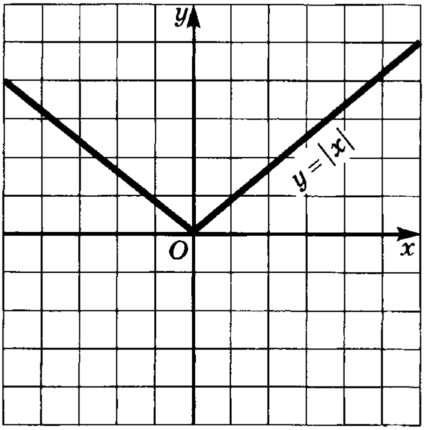


Рис. 31

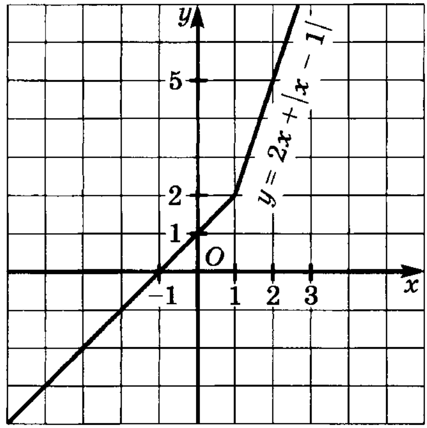


Рис. 32

Построение графика, как обычно в таких случаях, осуществим «по кусочкам». Сначала построим прямую $y = x$ и выделим её часть на луче $[0; +\infty)$ (рис. 30, *а*). Затем построим прямую $y = -x$ и выделим её часть на открытом луче $(-\infty; 0)$ (рис. 30, *б*). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = |x|$ (рис. 31).

Свойства функции $y = |x|$

1. Область определения функции: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$.
3. $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.
4. Функция непрерывна.
5. Область значений функции: $E(f) = [0; +\infty)$.

5. Разные графики функций с модулями

Пример 8. Построить график функции $y = 2x + |x - 1|$.

Решение. Если $x - 1 \geqslant 0$, то $|x - 1| = x - 1$; в этом случае

$$y = 2x + x - 1 = 3x - 1.$$

Если $x - 1 < 0$, то

$$|x - 1| = -(x - 1);$$

в этом случае

$$y = 2x - (x - 1) = x + 1.$$

Таким образом, фактически речь идёт о построении графика кусочной функции

$$y = \begin{cases} 3x - 1, \text{ если } x \geqslant 1; \\ x + 1, \text{ если } x < 1. \end{cases}$$

График изображён на рисунке 32. ■

Пример 9. Построить график функции

$$y = |2x - 4| + |x + 3| - 5.$$

Решение. Выражение $2x - 4$ обращается в 0 при $x = 2$, а выражение $x + 3$ — при $x = -3$. Эти две точки (2 и -3) разбивают числовую прямую на три промежутка (рис. 33). Рассмотрим первый промежуток — $(-\infty; -3]$. Если $x \leqslant -3$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 \leqslant 0$. Значит, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = -(x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

Рис. 33

$$y = -(2x - 4) - (x + 3) - 5 = -3x - 4.$$

Рассмотрим второй промежуток — $(-3; 2)$. Если $-3 < x < 2$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 > 0$. Следовательно, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

$$y = -(2x - 4) + (x + 3) - 5 = -x + 2.$$

Рассмотрим третий промежуток — $[2; +\infty)$. Если $x \geqslant 2$, то $2x - 4 \geqslant 0$ и $x + 3 > 0$. Значит, $|2x - 4| = (2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке получаем:

$$y = (2x - 4) + (x + 3) - 5 = 3x - 6.$$

Подведём итоги. Фактически речь идёт о построении графика кусочной функции

$$y = \begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x \leqslant -3; \\ -x + 2, \text{ если } -3 < x < 2; \\ 3x - 6, \text{ если } x \geqslant 2. \end{cases}$$

График функции изображён на рисунке 34. ■

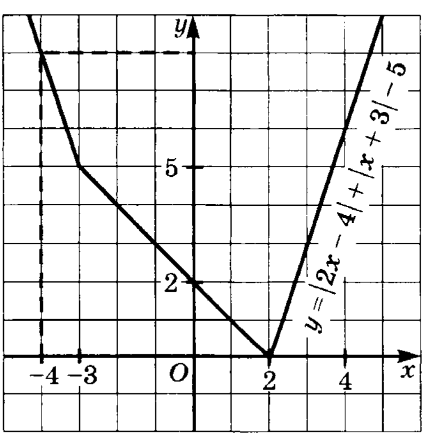


Рис. 34

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение модуля действительного числа.

2. Вычислите:

а) $|5{,}2|$; в) $|0|$; д) $\left|\pi^2 - \sqrt{101}\right|$.

б) $|-5{,}2|$; г) $|\pi - 4|$;

3. Запишите свойства модулей на математическом языке.

4. В чём состоит геометрический смысл выражения $|a|$?

5. В чём состоит геометрический смысл выражения $|a - b|$?

6. Сколько можно отметить чисел x на числовой прямой таких, что $|x| = 3$?

7. Верно ли, что $|ab| = |a| \cdot |b|$, а $\frac{|a|}{|b|} = \left|\frac{a}{b}\right|$ $(b \neq 0)$?

8. Приведите пример, когда соотношение $|a + b| = |a| + |b|$ является верным, и пример, когда оно неверно.

9. Приведите пример, когда соотношение $|a| - |b| = |a - b|$ является верным, и пример, когда оно неверно.

10. Что представляет собой график функции $y = |x|$?

11. Чему равно $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ для функции $y = |x|$?

12. Обладает ли график функции $y = |x|$ симметрией? Каков её характер?

13. При каких значениях a верно равенство:

а) $\sqrt{a^2} = a$; б) $\sqrt{a^2} = -a$; в) $\sqrt{a^2} = |a|$?

14. Вычислите:

а) $\sqrt{(\sqrt{2} - 2)^2}$; б) $\sqrt{(\pi - 2)^2}$.

15. Придумайте кусочную непрерывную функцию, график которой состоит из части графика функции $y = |x|$ и части графика функции $y = x^2$. Задайте её графически и аналитически (с помощью формул).

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Рациональные числа.
2. Иррациональные числа.
3. Модуль числа.
4. Графики функций, содержащие переменную под знаком модуля.

ГЛАВА 3 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$

§ 17. ФУНКЦИЯ $y = kx^2$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

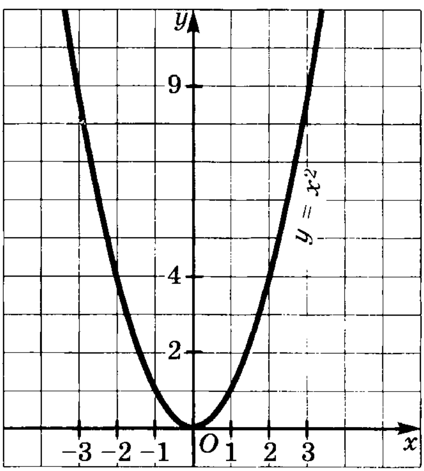


Рис. 35

В этом параграфе мы рассмотрим функцию $y = kx^2$, где коэффициент k — любое отличное от 0 число.

Заметим, что случай, когда $k = 1$, был рассмотрен в 7-м классе: если $k = 1$, то графиком функции $y = x^2$ является парабола (см. рис. 35).

Обсудим, как обстоит дело при других значениях коэффициента k.

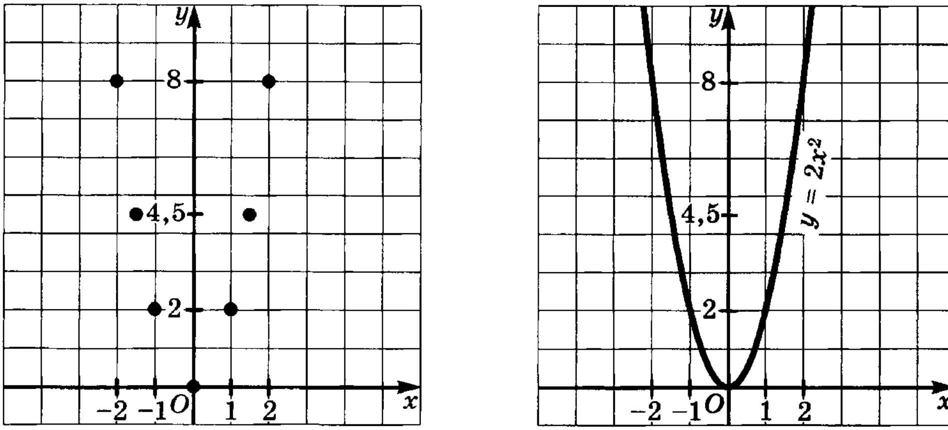
Рассмотрим две функции:

$$y = 2x^2 \text{ и } y = 0{,}5x^2.$$

Составим таблицу значений для функции $y = 2x^2$:

x	0	1	−1	2	−2	1,5	−1,5
y	0	2	2	8	8	4,5	4,5

Отметим точки (0; 0), (1; 2), (−1; 2), (2; 8), (−2; 8), (1,5; 4,5), (−1,5; 4,5) на координатной плоскости (рис. 36, *а*). Они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 36, *б*).



а *б*

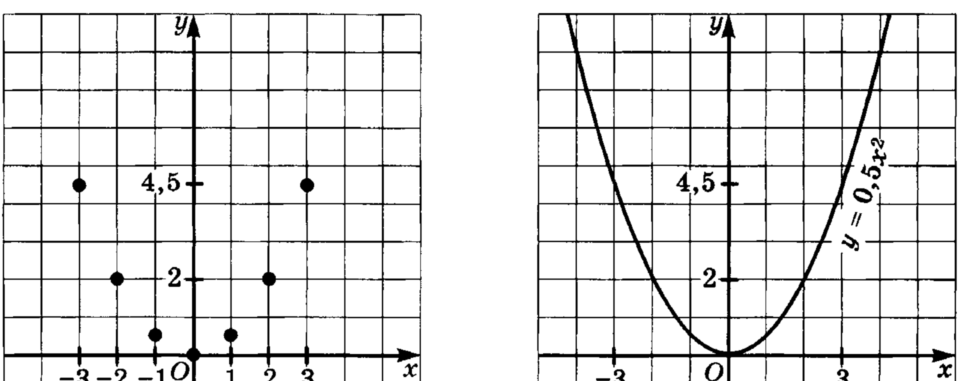
Рис. 36

Составим таблицу значений для функции $y = 0{,}5x^2$:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	0,5	0,5	2	2	4,5	4,5

Отметим точки (0; 0), (1; 0,5), (−1; 0,5), (2; 2), (−2; 2), (3; 4,5), (−3; 4,5) на координатной плоскости (рис. 37, *а*). Они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 37, *б*).

Сравните рисунки 35, 36, *б* и 37, *б*. Не правда ли, проведённые линии чем-то похожи? Каждую из них называют **параболой**; при этом точку (0; 0) называют **вершиной параболы**; ось y является **осью симметрии параболы**. От коэффициента k зависит «скорость устремления» ветвей параболы вверх, или, как ещё говорят, «степень



а *б*

Рис. 37

крутизны» параболы. Это хорошо видно на рисунке 38, где все три построенные выше параболы расположены в одной координатной плоскости.

Точно так же обстоит дело с любой функцией вида $y = kx^2$, где $k > 0$. Графиком её является парабола с вершиной в начале координат, её ветви направлены вверх, причём тем круче, чем больше коэффициент k. Ось y является осью симметрии параболы. Ради краткости математики часто вместо фразы: «Парабола, служащая графиком функции $y = kx^2$...» говорят: «Парабола $y = kx^2$...», а вместо термина *ось симметрии параболы* употребляют термин *ось параболы*.

Отметим одно любопытное свойство, которым обладают все параболы вида $y = kx^2$. Если представить параболу в виде зеркального экрана и в точке $\left(0; \frac{1}{4}k\right)$ — эту точку называют *фокусом параболы* — поместить источник света, то лучи, отражаясь от параболы-экрана, образуют параллельный пучок света (рис. 39). Эту идею используют в автомобилях: отражающей поверхности фары придают параболическую форму, а лампочку помещают в фокусе — тогда свет от фары распространяется достаточно далеко.

Выясним теперь, как обстоит дело в случае отрицательного коэффициента k. Построим, для примера, график функции $y = -x^2$ (здесь $k = -1$). Составим таблицу значений:

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	0	−1	−1	−4	−4	−9	−9

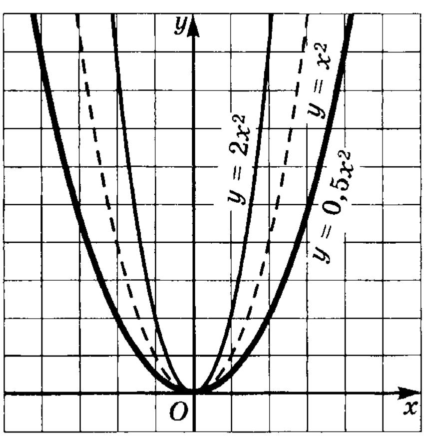


Рис. 38

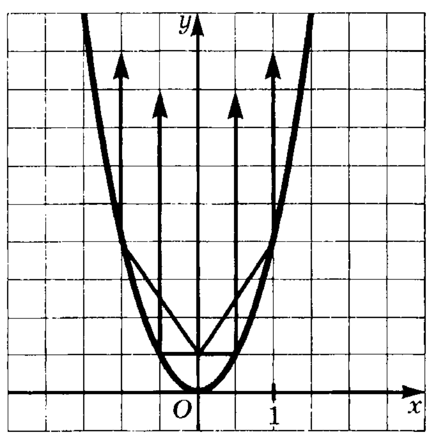
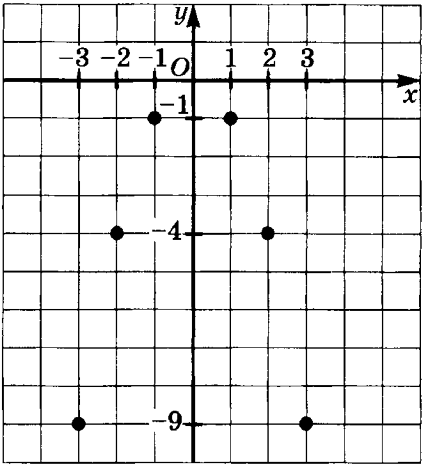
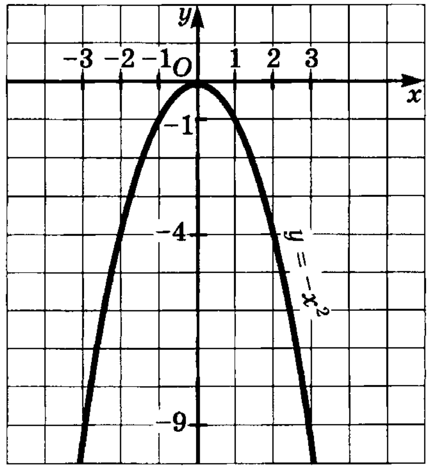


Рис. 39



а



б

Рис. 40

Отметим точки (0; 0), (1; −1), (−1; −1), (2; −4), (−2; −4), (3; −9), (−3; −9) на координатной плоскости (рис. 40, *а*). Они намечают некоторую линию, проведём её (рис. 40, *б*). Это — парабола с вершиной в точке (0; 0), ось y — ось симметрии параболы, но, в отличие от случая, когда $k > 0$, на этот раз ветви параболы направлены вниз. Аналогично обстоит дело и для других отрицательных значений коэффициента k.

Итак, ***графиком функции $y = kx^2$ ($k \neq 0$) является парабола с вершиной в начале координат; ось y является осью параболы; её ветви направлены вверх при $k > 0$ и вниз при $k < 0$.***

Отметим ещё, что *парабола $y = kx^2$ касается оси x в точке* (0; 0); термин «касается» мы пока будем считать интуитивно понятным, его смысл в том, что одна ветвь параболы плавно переходит в другую, как бы прижимаясь к оси x.

Если построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$, то нетрудно заметить, что построенные параболы симметричны друг другу относительно оси x (рис. 41). Точно так же будут симметричны друг другу относительно оси x параболы $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$. Вообще *график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс.*

Свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$ (рис. 42)

1. *Область определения функции.* Поскольку для любого значения x можно по формуле $y = kx^2$ вычислить соответствующее значение y, функция определена в любой точке x: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

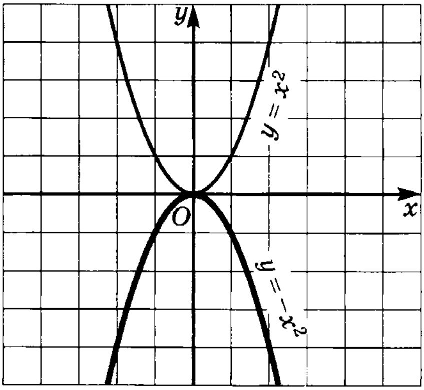


Рис. 41

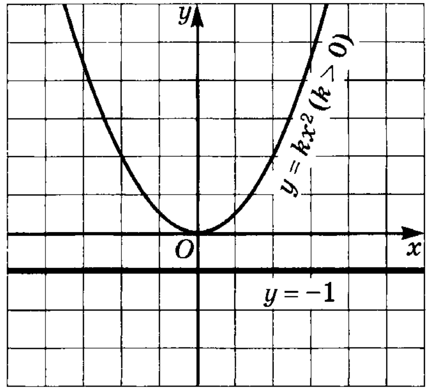


Рис. 42

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x \neq 0$.

3. $y = kx^2$ — *непрерывная функция.*

4. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$); $y_{\text{наиб}}$ не существует.

5. *Функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$.*

Докажем это. Рассмотрим функцию $y = kx^2$ на луче $[0; +\infty)$. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Тогда согласно свойствам числовых неравенств $x_1^2 < x_2^2$ и $kx_1^2 < kx_2^2$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$. Таким образом, функция $y = x^2$ *возрастает на луче* $[0; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $y = kx^2$ на луче $(-\infty; 0]$. Возьмём два неположительных числа x_1 и x_2 таких, что $x_1 < x_2$. Тогда $-x_1 > -x_2$. Так как числа $-x_1$ и $-x_2$ неотрицательны, то, возведя в квадрат обе части последнего неравенства, получим неравенство того же смысла $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, т. е. $x_1^2 > x_2^2$ и $kx_1^2 > kx_2^2$. Это значит, что $f(x_1) > f(x_2)$. Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Поэтому функция $y = x^2$ убывает на луче $(-\infty; 0]$.

В учебнике «Алгебра–7» процесс перечисления свойств функции мы называли *чтением графика.* Те свойства, что перечислены выше, мы уже обсуждали в 7-м классе для изучавшихся там функций. Добавим новые свойства.

Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной снизу*, если все значения функции больше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *выше* некоторой прямой, параллельной оси x.

А теперь посмотрим: график функции $y = kx^2$ расположен выше, например, прямой $y = -1$ (или $y = -2$, это неважно) — она проведена на рисунке 42. Значит, $y = kx^2$ $(k > 0)$ — ограниченная снизу функция.

Наряду с функциями, ограниченными снизу, бывают и функции, ограниченные сверху. Функцию $y = f(x)$ называют *ограниченной сверху*, если все значения функции меньше некоторого числа. Геометрически это означает, что график функции расположен *ниже* некоторой прямой, параллельной оси x.

Есть ли такая прямая для параболы $y = kx^2$, где $k > 0$? Нет, поскольку для любого $M > 0$ можно найти такое x, что выполнится неравенство $kx^2 > M$. Это значит, что функция не является ограниченной сверху.

Итак, мы получили ещё одно свойство, добавим его к тем пяти, что указаны выше.

6. *Функция $y = kx^2$ $(k > 0)$ ограничена снизу и не ограничена сверху.*

7. *Область значений функции — луч* $[0; +\infty)$.

8. *Функция выпукла вниз.*

Свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$ (рис. 43)

1. *Область определения функции* — $(-\infty; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $x \neq 0$.

3. $y = kx^2$ — *непрерывная функция.*

4. $y_{\text{наиб}} = 0$ (достигается при $x = 0$), $y_{\text{наим}}$ не существует.

5. *Функция возрастает при $x \leqslant 0$ и убывает* при $x \geqslant 0$.

6. *Функция ограничена сверху и не ограничена снизу.*

Дадим пояснения этому свойству: есть прямая, параллельная оси x (например, $y = 1$, она проведена на рис. 43), такая, что вся парабола лежит ниже этой прямой; это значит, что функция ограничена сверху. С другой стороны, нельзя провести прямую, параллельную оси x, так, чтобы вся парабола была расположена выше прямой; это значит, что функция не ограничена снизу.

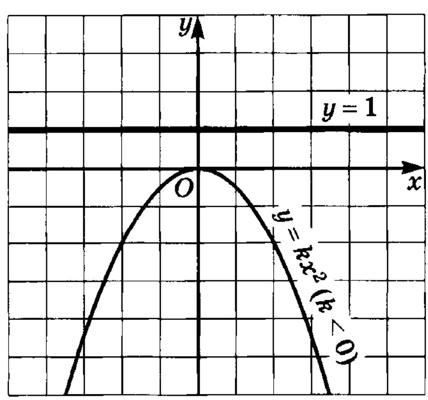


Рис. 43

7. *Область значений функции — луч* $(-\infty; 0]$.

8. *Функция выпукла вверх.*

Использованный выше порядок перечисления свойств функции не является законом, пока он у нас хронологически сложился именно таким. Более-менее определённый порядок ходов мы выработаем постепенно и унифицируем его в старших классах. Пока лишь отметим, что в дальнейшем свойство ограниченности функции будет предшествовать отысканию её наименьшего и наибольшего значений. Почему? Потому что если функция ограничена снизу (сверху), то у неё может быть наименьшее (наибольшее) значение. Если же функция не ограничена снизу (сверху), то сразу можно сделать вывод о том, что $y_{\text{наим}}$ (соответственно, $y_{\text{наиб}}$) не существует.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x^2$ на отрезке:

а) $[0; 2]$; б) $[-2; -1]$; в) $[-1; 1{,}5]$.

Решение. а) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[0; 2]$ (рис. 44). На этом отрезке функция возрастает, значит, $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}} = 8$ (достигается при $x = 2$).

б) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[-2; -1]$ (рис. 45). На этом отрезке функция убывает, значит, $y_{\text{наим}} = 2$ (достигается при $x = -1$), а $y_{\text{наиб}} = 8$ (достигается при $x = -2$).

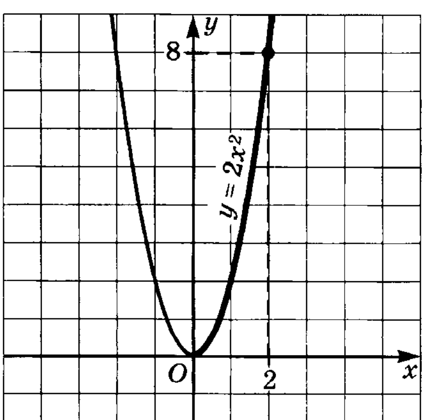


Рис. 44

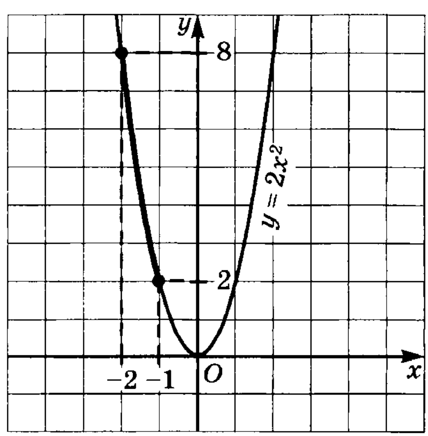


Рис. 45

в) Построим график функции $y = 2x^2$ и выделим его часть на отрезке $[-1; 1{,}5]$ (рис. 46). Замечаем, что $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$), а $y_{\text{наиб}}$ достигается в точке $x = 1{,}5$; подсчитаем это значение: $f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 = 2 \cdot 2{,}25 = 4{,}5$. Итак, $y_{\text{наиб}} = 4{,}5$. ■

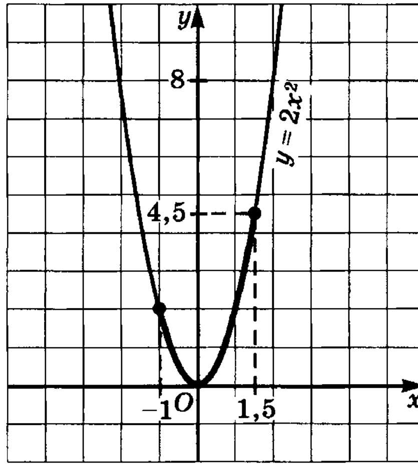


Рис. 46

Пример 2. Решить уравнение $-x^2 = 2x - 3$.

Решение. В § 12 мы уже говорили о том, что для графического решения уравнения $f(x) = g(x)$ нужно:

1) рассмотреть две функции: $y = f(x)$ и $y = g(x)$;

2) построить график функции $y = f(x)$;

3) построить график функции $y = g(x)$;

4) найти точки пересечения построенных графиков; абсциссы этих точек — корни уравнения $f(x) = g(x)$.

Применим этот алгоритм к заданному уравнению.

1) Рассмотрим две функции: $y = -x^2$ и $y = 2x - 3$.

2) Построим график функции $y = -x^2$ — параболу (рис. 47).

3) Построим график линейной функции $y = 2x - 3$. Это — прямая, для её построения достаточно найти любые две точки графика. Если $x = 0$, то $y = -3$; если $x = 1$, то $y = -1$; нашли две точки $(0; -3)$ и $(1; -1)$. Прямая, проходящая через эти две точки (график функции $y = 2x - 3$), изображена на том же чертеже (см. рис. 47).

4) По чертежу находим, что прямая и парабола пересекаются в двух точках: $A(1; -1)$ и $B(-3; -9)$. Следовательно, уравнение имеет два корня: 1 и −3 — это абсциссы точек A и B.

Ответ: 1; −3.

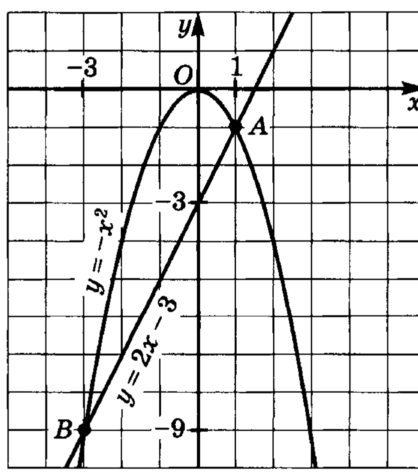


Рис. 47

Замечание. Разумеется, нельзя слепо доверять графическим иллюстрациям. А может быть, нам только кажется, что точка пересечения графиков имеет координаты (1; −1), а на самом деле они другие, например, (0,98; −1,01)? Поэтому всегда полезно проверить себя. Так, в рассмотренном примере необходимо убедиться, что точка $A(1; -1)$ принадлежит параболе $y = -x^2$ (это легко: достаточно подставить в формулу $y = -x^2$ координаты точки A; получим $-1 = -1^2$ — верное числовое равенство) и прямой $y = 2x - 3$ (и это легко: достаточно подставить в формулу $y = 2x - 3$ координаты точки A; получим $-1 = 2 - 3$ — верное числовое равенство). То же самое требуется сделать для точки B. Эта проверка показывает, что в рассмотренном уравнении предположения, сделанные на основе графических иллюстраций, привели к верному результату.

Есть и ещё одна неприятность: на самом ли деле имеются только две точки пересечения, как показано на графике? Да, только две, но обоснование этого факта мы получим позднее, в главе 4, когда узнаем, что уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ (квадратное уравнение) может иметь не более двух корней.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y + x^2 = 0, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы к виду $y = -x^2$. Графиком этой функции является парабола, представленная на рисунке 47.

Преобразуем второе уравнение системы к виду $y = 2x - 3$. Графиком этой функции является прямая, изображённая на рисунке 47.

Парабола и прямая пересекаются в точках $A(1; -1)$ и $B(-3; -9)$. Координаты этих точек и служат решениями заданной системы уравнений.

Ответ: (1; −1); (−3; −9).

Пример 4. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x^2, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ x + 1, \text{ если } 0 < x \leqslant 1; \\ 2x^2, \text{ если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Требуется:

а) вычислить $f(-4)$, $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1{,}5)$, $f(2)$, $f(3)$;

б) построить график функции;

в) с помощью графика перечислить свойства функции.

Решение. а) Значение $x = -4$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant 0$, поэтому $f(-4)$ надо вычислять по первой строке задания функции. Имеем $f(x) = -0{,}5x^2$, следовательно,

$$f(-4) = -0{,}5 \cdot (-4)^2 = -8.$$

Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant 0$, значит, $f(-2)$ нужно вычислять по первой строке задания функции. Имеем $f(x) = -0{,}5x^2$, следовательно, $f(-2) = -0{,}5 \cdot (-2)^2 = -2$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $-4 \leqslant x \leqslant 0$, поэтому $f(0)$ надо вычислять по первой строке задания функции. Имеем $f(x) = -0{,}5x^2$, следовательно, $f(0) = -0{,}5 \cdot 0^2 = 0$.

Значение $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 1$, т. е. $f\left(\frac{1}{2}\right)$ нужно вычислять по второй строке задания функции. Имеем $f(x) = x + 1$, следовательно, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1{,}5$.

Значение $x = 1{,}5$ удовлетворяет условию $1 < x \leqslant 2$, значит, $f(1{,}5)$ надо вычислять по третьей строке задания функции. Имеем $f(x) = 2x^2$, следовательно, $f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 = 4{,}5$.

Значение $x = 2$ удовлетворяет условию $1 < x \leqslant 2$, поэтому $f(2)$ нужно вычислять по третьей строке задания функции. Имеем $f(x) = 2x^2$, значит, $f(2) = 2 \cdot 2^2 = 8$.

Значение $x = 3$ не удовлетворяет ни одному из трёх условий задания функции, значит, в данном случае $f(3)$ вычислить нельзя, точка $x = 3$ не принадлежит области определения функции. Задание, состоящее в том, чтобы вычислить $f(3)$, — *некорректно*.

б) Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим параболу $y = -0{,}5x^2$ и выделим её часть на отрезке $[-4; 0]$ (рис. 48). Затем построим прямую $y = x + 1$ и выделим её часть на полуинтервале $(0; 1]$ (рис. 49). Далее построим параболу $y = 2x^2$ и выделим её часть на полуинтервале $(1; 2]$ (рис. 50). Наконец,

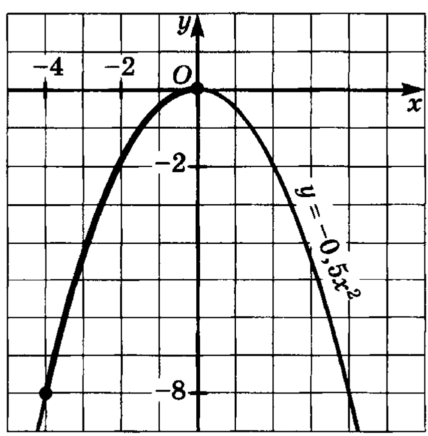


Рис. 48

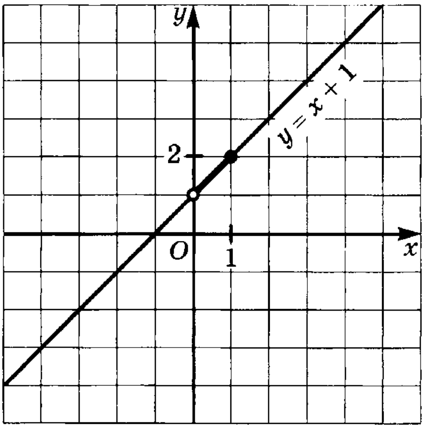


Рис. 49

все три «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 51).

в) Перечислим свойства функции $y = f(x)$, или, как мы условились говорить, прочтём график.

1. Область определения функции — отрезок $[-4; 2]$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $0 < x \leqslant 2$; $y < 0$ при $-4 \leqslant x < 0$.

3. Функция претерпевает разрыв при $x = 0$, а на промежутках $[-4; 0]$ и $(0; 2]$ она непрерывна.

4. Функция возрастает в своей области определения.

5. Функция ограничена и снизу, и сверху.

6. $y_{\text{наим}} = -8$ (достигается при $x = -4$); $y_{\text{наиб}} = 8$ (достигается при $x = 2$).

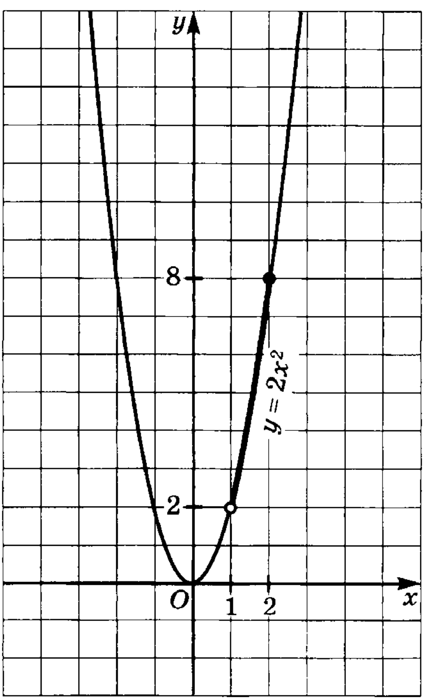


Рис. 50

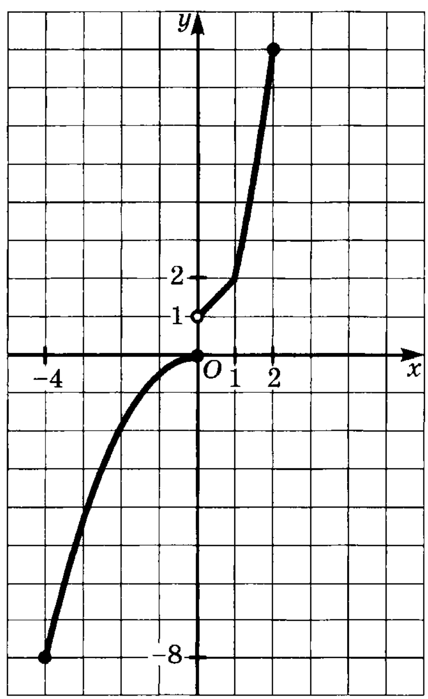


Рис. 51

7. Область значений функции состоит из отрезка $[-8; 0]$ и полуинтервала $(1; 8]$. В подобных случаях можно использовать символ $\cup$ — *знак объединения.* Тогда можно сказать, что область значений функции — объединение двух числовых промежутков: $E(f) = [-8; 0] \cup (1; 8]$. ■

Замечание. График функции, изображённый на рисунке 51, состоит из двух сплошных кусков: один — на отрезке $[-4; 0]$, другой — на полуинтервале $(0; 2]$. Значит, функция непрерывна на отрезке $[-4; 0]$ и на полуинтервале $(0; 2]$. Но (обратите внимание!) функция претерпевает разрыв в концевой точке $x = 0$.

Пример 5. Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = 3x^2$. Найти $f(1)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(2a)$, $f(a + 1)$, $f(-x)$, $f(3x)$, $f(x - 1)$, $f(x + a)$, $f(x) + 5$, $f(x) + b$, $f(x + a) + b$, $f(x^2)$, $f(2x^3)$.

Решение. Так как $f(x) = 3x^2$, то последовательно получаем:

$f(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$; $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 12$;

$f(a) = 3a^2$; $f(2a) = 3 \cdot (2a)^2 = 12a^2$;

$f(a + 1) = 3(a + 1)^2$; $f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 = 3x^2$;

$f(3x) = 3 \cdot (3x)^2 = 27x^2$; $f(x - 1) = 3(x - 1)^2$;

$f(x + a) = 3(x + a)^2$; $f(x) + 5 = 3x^2 + 5$;

$f(x) + b = 3x^2 + b$; $f(x + a) + b = 3(x + a)^2 + b$;

$f(x^2) = 3 \cdot (x^2)^2 = 3x^4$; $f(2x^3) = 3 \cdot (2x^3)^2 = 12x^6$. ■

Вопросы для самопроверки

1. Как называют график функции $y = kx^2$, где $k \neq 0$?
2. Какая прямая является осью симметрии графика функции $y = kx^2$?
3. Какая точка является вершиной графика функции $y = kx^2$?
4. Как расположены в координатной плоскости xOy друг относительно друга графики функций $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$?
5. Если $k > 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
б) функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$;
в) функция $y = kx^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
г) функция $y = kx^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$?

6. Если $k < 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;
б) функция $y = kx^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$;

в) функция $y = kx^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$;

г) функция $y = kx^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$?

7. Чему равно $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ для функции $y = kx^2$, если $k > 0$?

8. Чему равно $y_{\text{наим}}$ и $y_{\text{наиб}}$ для функции $y = kx^2$, если $k < 0$?

9. Какую функцию называют ограниченной снизу?

10. Какую функцию называют ограниченной сверху?

11. Как по графику функции установить, является ли она ограниченной снизу?

12. Как по графику функции установить, является ли она ограниченной сверху?

13. Какова область значений функции $y = kx^2$, если $k > 0$?

14. Какова область значений функции $y = kx^2$, если $k < 0$?

15. Если $k > 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = kx^2$ выпукла вверх;

б) функция $y = kx^2$ выпукла вниз?

16. Если $k < 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = kx^2$ выпукла вверх;

б) функция $y = kx^2$ выпукла вниз?

17. Перечислите свойства функции $y = kx^2$ при $k > 0$.

18. Перечислите свойства функции $y = kx^2$ при $k < 0$.

19. Придумайте непрерывную кусочную функцию, график которой состоит из части параболы $y = 2x^2$ и луча некоторой прямой. Попробуйте задать эту функцию аналитически.

§ 18. ФУНКЦИЯ $y = \frac{k}{x}$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

1. Функция $y = \frac{1}{x}$

В этом параграфе мы познакомимся с новой функцией — функцией $y = \frac{k}{x}$. Коэффициент k может принимать любые значения, кроме $k = 0$. Рассмотрим сначала случай, когда $k = 1$; таким образом, сначала речь пойдёт о функции $y = \frac{1}{x}$.

Чтобы построить график функции $y = \frac{1}{x}$, поступим так же, как в предыдущем параграфе: дадим независимой переменной x

несколько конкретных значений и вычислим (по формуле $y = \frac{1}{x}$) соответствующие значения зависимой переменной y. Правда, на этот раз удобнее проводить вычисления и построения постепенно, сначала придавая аргументу только положительные значения, а затем — только отрицательные.

Первый этап. Если $x = 1$, то $y = 1$ (напомним, что мы пользуемся формулой $y = \frac{1}{x}$);

если $x = 2$, то $y = \frac{1}{2}$;

если $x = \frac{1}{2}$, то $y = 2$;

если $x = 4$, то $y = \frac{1}{4}$;

если $x = \frac{1}{4}$, то $y = 4$.

Таким образом, мы составили следующую таблицу:

x	1	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4

Построим найденные точки (1; 1), $\left(2; \frac{1}{2}\right)$, $\left(4; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 52, *а*). Эти точки намечают некоторую линию, начертим её (рис. 52, *б*).

Второй этап.

Если $x = -1$, то $y = -1$;

если $x = -2$, то $y = -\frac{1}{2}$;

если $x = -\frac{1}{2}$, то $y = -2$;

если $x = -4$, то $y = -\frac{1}{4}$;

если $x = -\frac{1}{4}$, то $y = -4$.

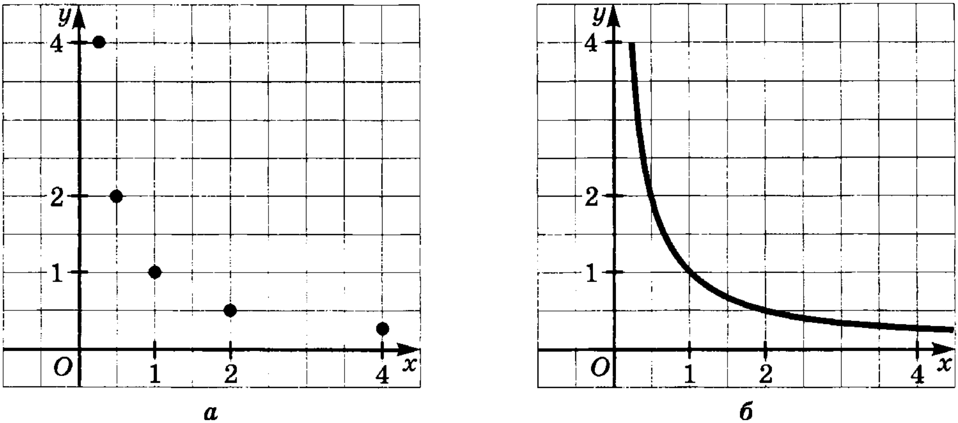


Рис. 52

Таким образом, мы составили следующую таблицу:

x	-1	-2	-4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-2	-4

Построим найденные точки $(-1; -1)$, $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -4\right)$ на координатной плоскости xOy (рис. 53, *а*). Эти точки намечают некоторую линию, начертим её (рис. 53, *б*).

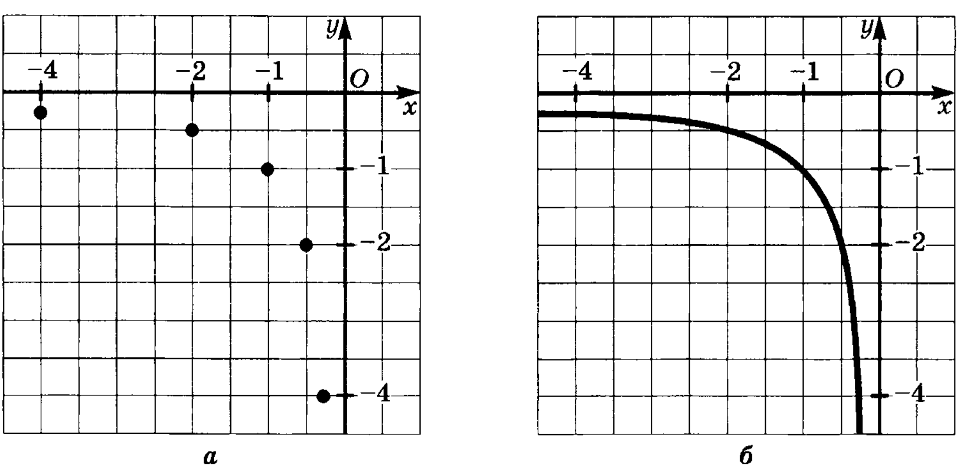


Рис. 53

Теперь объединим два этапа в один, т. е. из двух рисунков (52, *б* и 53, *б*) сделаем один. Получим (рис. 54) график функции $y = \frac{1}{x}$, его называют **гиперболой.**

Попытаемся по чертежу описать геометрические свойства гиперболы.

Во-первых, видим, что гипербола состоит из двух частей — их обычно называют **ветвями гиперболы.**

Во-вторых, замечаем, что гипербола обладает симметрией. Любая прямая, проходящая через начало координат и расположенная в первом и третьем координатных углах, пересекает гиперболу в двух точках, которые лежат на этой прямой по разные стороны от точки O, но на равных расстояниях от неё (рис. 55).

Доказать симметричность гиперболы относительно начала координат нетрудно. Пусть $a > 0$; возьмём на правой ветви гиперболы точку $\left(a; \frac{1}{a}\right)$. Если в уравнение $y = \frac{1}{x}$ подставить значение $x = -a$, получим $y = -\frac{1}{a}$, т. е. точка $\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$ принадлежит гиперболе, точнее, её левой ветви. Но точки $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $\left(-a; -\frac{1}{a}\right)$ симметричны относительно начала координат. Итак, O — центр симметрии гиперболы.

В-третьих, замечаем, что каждая ветвь гиперболы в одном направлении подходит всё ближе и ближе к оси абсцисс (правая — к положительному лучу оси x, левая — к отрицательному), а в

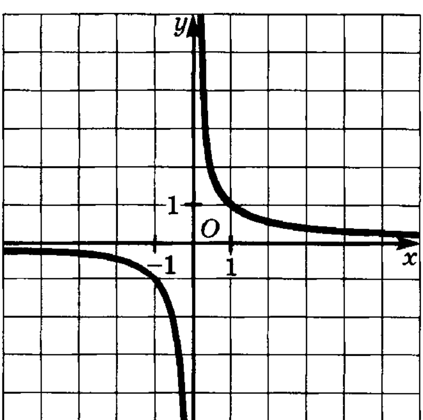


Рис. 54

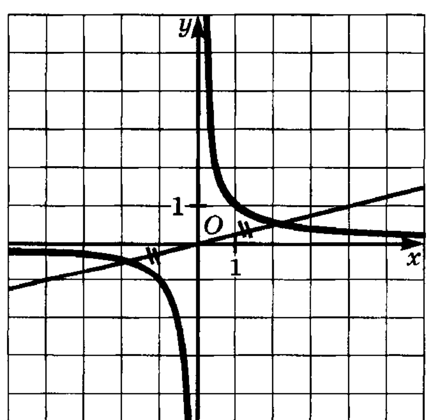


Рис. 55

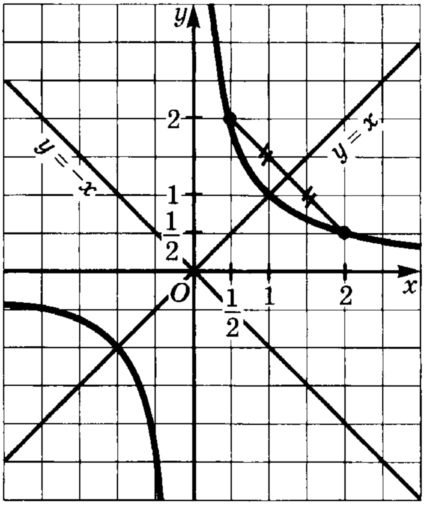


Рис. 56

другом направлении — к оси ординат. В подобных случаях соответствующие прямые называют **асимптотами**. Значит, *график функции $y = \frac{1}{x}$, т. е. гипербола, имеет две асимптоты: ось x и ось y.*

Если внимательно проанализировать построенный график, то можно обнаружить ещё одно геометрическое свойство, не такое очевидное, как три предыдущих (математики обычно говорят так: *более тонкое свойство*). У гиперболы имеется не только центр симметрии, но и оси симметрии.

В самом деле, построим прямую $y = x$ (рис. 56). А теперь посмотрим: точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ расположены по разные стороны от проведённой прямой, но на равных расстояниях от неё, они симметричны относительно этой прямой. То же можно сказать о точках $\left(4; \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$, $\left(8; \frac{1}{8}\right)$ и $\left(\frac{1}{8}; 8\right)$ и вообще о точках $\left(a; \frac{1}{a}\right)$ и $\left(\frac{1}{a}; a\right)$, где, конечно, $a \neq 0$. Следовательно, *прямая $y = x$ — ось симметрии гиперболы $y = \frac{1}{x}$.*

Заметим, что у гиперболы $y = \frac{1}{x}$ есть ещё одна ось симметрии — прямая $y = -x$ (см. рис. 56).

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \frac{1}{x}$:

а) на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$; б) на отрезке $[-8; -1]$.

Решение. а) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выделим ту его часть, которая соответствует значениям переменной x

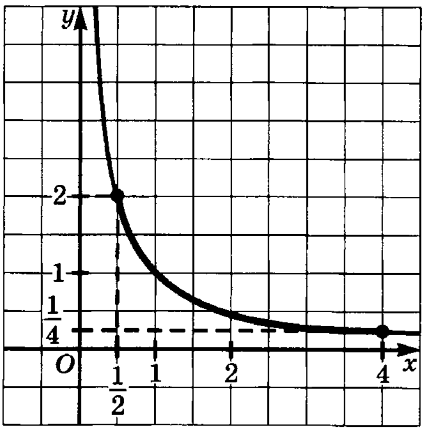


Рис. 57

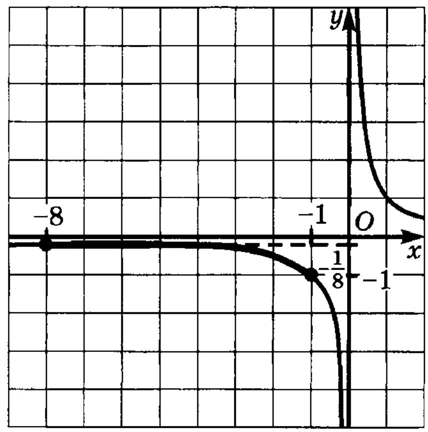


Рис. 58

из отрезка $\left[\frac{1}{2}; 4\right]$ (рис. 57). Для выделенной части графика находим:

$$y_{\text{наим}} = \frac{1}{4} \text{ (при } x = 4); \qquad y_{\text{наиб}} = 2 \text{ (при } x = \frac{1}{2}).$$

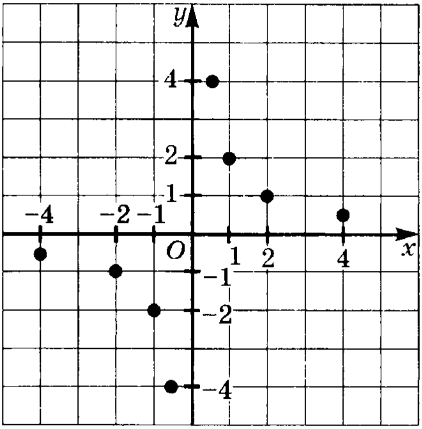
б) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ и выделим ту его часть, которая соответствует значениям переменной x из отрезка $[-8; -1]$ (рис. 58). Для выделенной части графика находим:

$$y_{\text{наим}} = -1 \text{ (при } x = -1); \qquad y_{\text{наиб}} = -\frac{1}{8} \text{ (при } x = -8). \quad \blacksquare$$

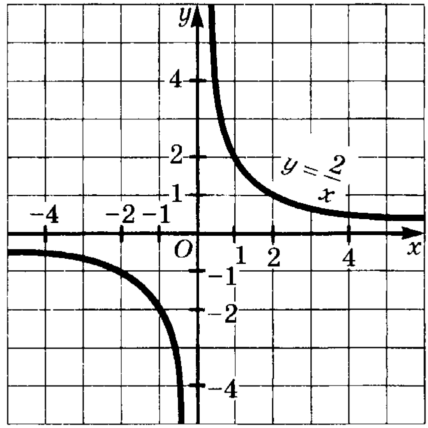
2. Функция $y = \frac{k}{x}$

В предыдущем пункте мы рассмотрели функцию $y = \frac{k}{x}$ для случая, когда $k = 1$. Пусть теперь k — положительное число, отличное от 1, например $k = 2$. Рассмотрим функцию $y = \frac{2}{x}$ и составим таблицу значений этой функции:

x	1	2	−1	−2	4	$\frac{1}{2}$	−4	$-\frac{1}{2}$
y	2	1	−2	−1	$\frac{1}{2}$	4	$-\frac{1}{2}$	−4



а



б

Рис. 59

Отметим точки (1; 2), (2; 1), (−1; −2), (−2; −1), $\left(4; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(-4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ на координатной плоскости (рис. 59, *а*). Они намечают некоторую линию, состоящую из двух ветвей; проведём её (рис. 59, *б*). Как и график функции $y = \frac{1}{x}$, эту линию называют *гиперболой*.

Рассмотрим теперь случай, когда $k < 0$; пусть, например, задана функция $y = \frac{k}{x}$, где $k = -1$. Построим график функции $y = -\frac{1}{x}$.

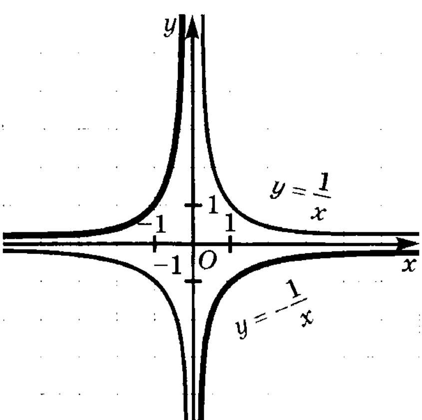


Рис. 60

В предыдущем параграфе мы отметили, что график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси x. Это значит, в частности, что график функции $y = -\frac{1}{x}$ симметричен графику функции $y = \frac{1}{x}$ относительно оси абсцисс (рис. 60). Получили гиперболу с ветвями во втором и четвёртом координатных углах. Вообще ***графиком функции*** $y = \frac{k}{x}$ **(**$k \neq 0$**)** ***является***

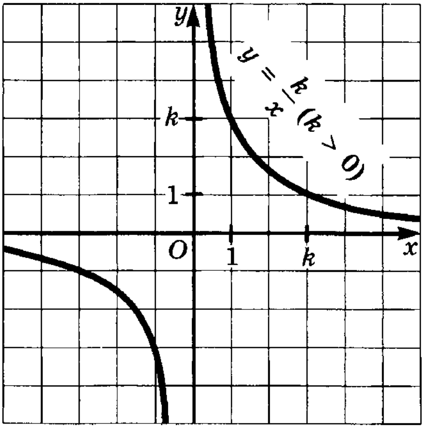


Рис. 61

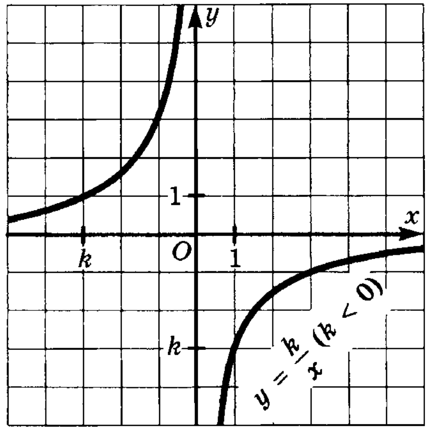


Рис. 62

гипербола, ветви которой расположены в первом и третьем координатных углах, если $k > 0$ (рис. 61), ***и во втором и четвёртом координатных углах, если $k < 0$*** (рис. 62). Точка (0; 0) — *центр симметрии гиперболы*, оси координат — *асимптоты гиперболы*, прямые $y = x$, $y = -x$ — *оси симметрии гиперболы*.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$ (рис. 61)

1. Область определения функции состоит из всех чисел, кроме $x = 0$. Используя знак $\cup$ — знак объединения множеств, можем записать так: $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y > 0$ при $x > 0$; $y < 0$ при $x < 0$.

3. Функция убывает и на промежутке $(-\infty; 0)$, и на промежутке $(0; +\infty)$.

Докажем это. Рассмотрим функцию $y = \frac{k}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Пусть $x_1 < x_2$. Так как x_1 и x_2 — положительные числа, то из $x_1 < x_2$ следует $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ (см. пример 1 из § 11), и далее, поскольку $k > 0$, $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$, т. е. $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$. Это значит, что функция убывает на открытом луче $(0; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $y = \frac{k}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$. Пусть $x_1 < x_2$, x_1 и x_2 — отрицательные числа. Тогда $-x_1 > -x_2$, причём обе части последнего неравенства — положительные числа, поэтому $\frac{1}{-x_1} < \frac{1}{-x_2}$ (мы снова воспользовались неравенством, доказанным в примере 1 из § 11). Далее имеем: $\frac{-1}{x_1} < \frac{-1}{x_2}$; $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$; $\frac{k}{x_1} > \frac{k}{x_2}$.

Итак, из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$.

Обратите внимание: нельзя говорить о том, что функция убывает во всей своей области определения.

4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

В самом деле, предположим, что функция $y = \frac{k}{x}$ ограничена сверху, т. е. все значения функции меньше некоторого числа M (можно считать, что $M > 0$). Возьмём на открытом луче $(0; +\infty)$ точку $x_0 = \frac{k}{M+1}$. Тогда $f(x_0) = \frac{k}{x_0} = k : \frac{k}{M+1} = M + 1 > M$. Мы нашли точку, в которой значение функции больше M. Получили противоречие, значит, функция не ограничена сверху.

Аналогично можно доказать, что функция не ограничена снизу.

5. Ни наибольшего, ни наименьшего значений у функции нет. Это сразу следует из её неограниченности.

6. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

7. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$ (рис. 62)

1. $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $y > 0$ при $x < 0$; $y < 0$ при $x > 0$.

3. Функция возрастает и на промежутке $(-\infty; 0)$, и на промежутке $(0; +\infty)$ (но не во всей области определения).

4. Функция не ограничена ни снизу, ни сверху.

5. Ни наибольшего, ни наименьшего значений у функции нет.

6. Функция непрерывна на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ и претерпевает разрыв в точке $x = 0$.

7. Область значений функции — объединение двух открытых лучей: $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2. Решить уравнение $\frac{4}{x} = 5 - x$.

Решение. 1) Рассмотрим две функции: $y = \frac{4}{x}$ и $y = 5 - x$.

2) Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ — гиперболу (рис. 63).

3) Построим график линейной функции $y = 5 - x$. Это — прямая, её можно построить по двум точкам $(0; 5)$ и $(5; 0)$. Прямая изображена на том же рисунке 63.

4) По чертежу устанавливаем, что гипербола и прямая пересекаются в точках $A(1; 4)$ и $B(4; 1)$. Проверка показывает, что это на самом деле так. Значит, заданное уравнение имеет два корня: 1 и 4 — это абсциссы точек A и B.

Ответ: 1; 4.

Пример 3. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } -2 \leqslant x \leqslant 1; \\ -\frac{1}{x}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение. Построим параболу $y = -x^2$ и выделим её часть на отрезке $[-2; 1]$ (рис. 64). Затем построим гиперболу $y = -\frac{1}{x}$ и вы-

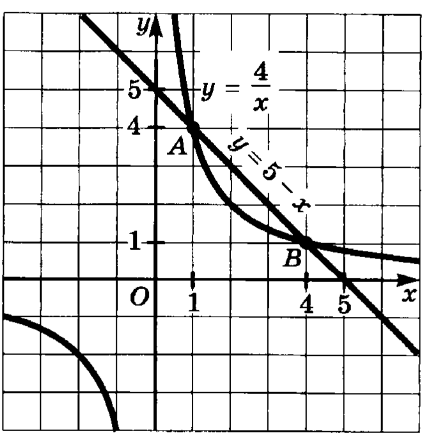


Рис. 63

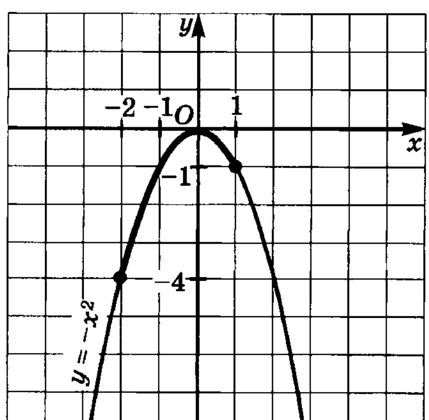


Рис. 64

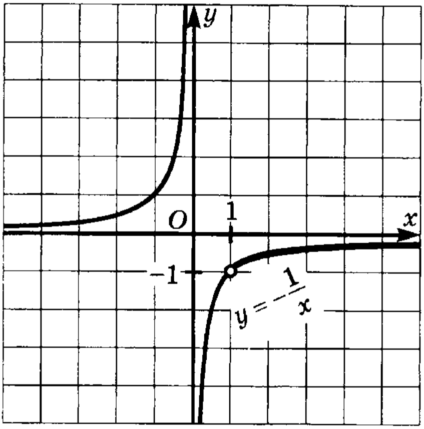


Рис. 65

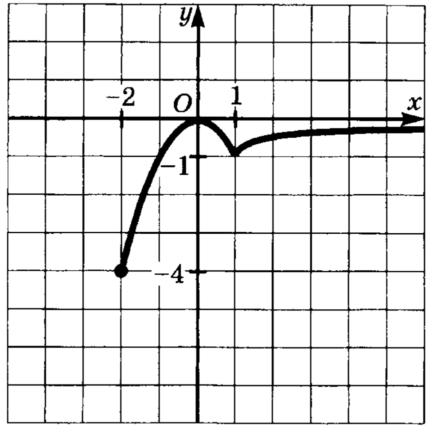


Рис. 66

делим её часть на открытом луче $(1; +\infty)$ (рис. 65). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 66).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$ (прочитаем график).

1. $D(f) = [-2; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y < 0$ при $-2 \leqslant x < 0$ и при $x > 0$.

3. Функция возрастает на отрезке $[-2; 0]$, убывает на отрезке $[0; 1]$, возрастает на луче $[1; +\infty)$.

4. Функция ограничена и снизу, и сверху.

5. $y_{\text{наим}} = -4$ (достигается при $x = -2$); $y_{\text{наиб}} = 0$ (достигается при $x = 0$).

6. Функция непрерывна в заданной области определения.

7. Область значений функции — отрезок $[-4; 0]$.

На графике рассматриваемой функции (см. рис. 66) есть две точки, обладающие особыми свойствами, — это точки $(0; 0)$ и $(1; -1)$. В точке $x = 0$ заданная функция принимает значение 0, которое больше всех значений функции вообще и, в частности, в достаточно близких к $x = 0$ точках. Словосочетание *в достаточно близких точках* означает, что можно указать интервал с центром в точке $x = 0$, в котором все значения функции (кроме значения в самой точке $x = 0$) меньше 0. Такой интервал обычно называют *окрестностью точки*. Та же картина с точкой $x = 1$. В точке $x = 1$ заданная функция принимает значение -1, которое меньше всех значений функции в *достаточно близких к* $x = 1$ *точках*. Иными словами, можно указать интервал с центром в точке $x = 1$ (*окрестность точки* $x = 1$), в котором все значения функции (кроме значения в самой точке $x = 1$) больше -1. В подобных случаях математики говорят так: $x = 0$ — *точка максимума функции* $y = f(x)$, $x = 1$ — *точка минимума функции* $y = f(x)$, — и пишут: $y_{max} = 0$, $y_{min} = -1$. Точки минимума и максимума объединяют общим названием: *точки экстремума* (от лат. *extremum* — крайний).

Обратите внимание: $y_{наиб}$ и y_{max}, а также $y_{наим}$ и y_{min} могут быть равны, но могут быть и не равны. Так, для рассмотренной в примере 3 функции $y_{min} = -1$, а $y_{наим} = -4$, т. е. $y_{min} \neq y_{наим}$. В то же время $y_{max} = 0$ и $y_{наиб} = 0$, т. е. $y_{max} = y_{наиб}$.

Итак, мы можем отметить ещё одно свойство функции, рассмотренной в примере 3.

8. Функция имеет две точки экстремума: $x = 0$ — точка максимума, причём $y_{max} = 0$; $x = 1$ — точка минимума, причём $y_{min} = -1$. ■

Пример 4. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, \text{ если } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 4; \\ \dfrac{8}{x}, \text{ если } x > 4. \end{cases}$$

Решение. 1) Построим график функции $y = 2x^2$ и возьмём ветвь этой параболы при $x < 0$ (рис. 67).

2) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ и выделим его часть на отрезке $[0; 4]$ (рис. 68).

3) Построим гиперболу $y = \dfrac{8}{x}$ и выделим её часть на открытом луче $(4; +\infty)$ (рис. 69; здесь уменьшен масштаб).

4) Все три «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и есть график функции $y = f(x)$ (рис. 70).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

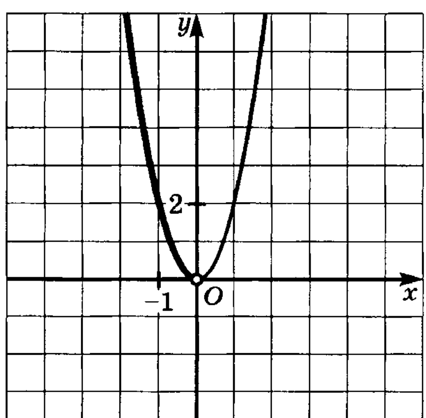


Рис. 67

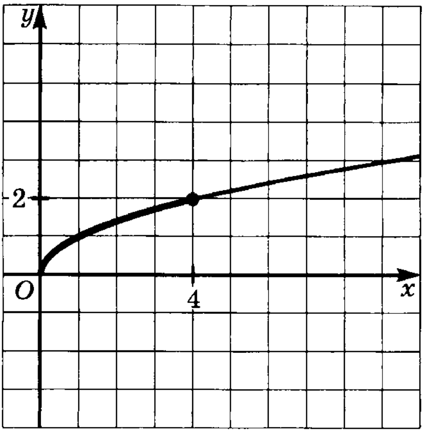


Рис. 68

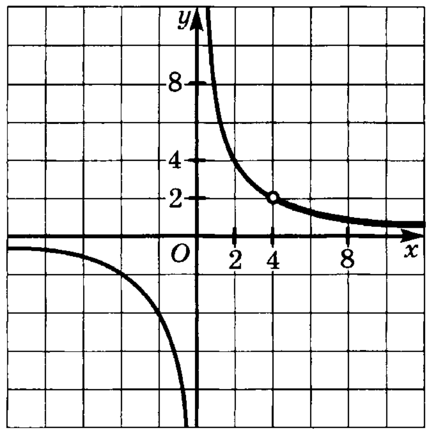


Рис. 69

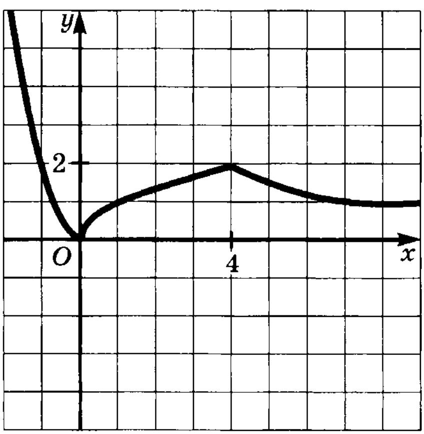


Рис. 70

2. $y = 0$ при $x = 0$; $y > 0$ при $x \neq 0$.

3. Функция убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на отрезке $[0; 4]$, убывает на луче $[4; +\infty)$.

4. Функция ограничена снизу, но не ограничена сверху.

5. $y_{\text{наим}} = 0$ (достигается при $x = 0$); $y_{\text{наиб}}$ не существует.

6. Функция непрерывна.

7. $E(f) = [0; +\infty)$.

8. $x = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = 0$; $x = 4$ — точка максимума, $y_{\max} = 2$. ■

Пример 5. Доказать, что функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{2}{x}$, удовлетворяет соотношению (*функциональному уравнению*)

$$f(x - 3) - f(x + 2) = 2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2).$$

Решение. Имеем: $f(x - 3) = \frac{2}{x - 3}$, $f(x + 2) = \frac{2}{x + 2}$.

Следовательно,

$$f(x - 3) - f(x + 2) = \frac{2}{x - 3} - \frac{2}{x + 2} =$$

$$= \frac{2(x + 2) - 2(x - 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{10}{(x - 3)(x + 2)}.$$

С другой стороны,

$$2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2) = 2{,}5 \cdot \frac{2}{x - 3} \cdot \frac{2}{x + 2} = \frac{10}{(x - 3)(x + 2)}.$$

Итак,

$$f(x - 3) - f(x + 2) = \frac{10}{(x - 3)(x + 2)},$$

$$2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2) = \frac{10}{(x - 3)(x + 2)}.$$

Значит, $f(x - 3) - f(x + 2) = 2{,}5f(x - 3) \cdot f(x + 2)$, что и требовалось доказать. ■

Вопросы для самопроверки

1. Как называют график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$?

2. В каких четвертях координатной плоскости xOy располагаются ветви графика функции $y = \frac{k}{x}$, если $k > 0$?

3. В каких четвертях координатной плоскости xOy располагаются ветви графика функции $y = \frac{k}{x}$, если $k < 0$?

4. Обладает ли график функции $y = \frac{k}{x}$ симметрией? Какая точка является центром симметрии? Как называется такой вид симметрии?

5. Что такое асимптота графика функции $y = f(x)$?

6. Запишите уравнения асимптот графика функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

7. Если $k > 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;

б) функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$;

в) функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;

г) функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$?

8. Если $k < 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;

б) функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$;

в) функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $x > 0$ и убывает при $x < 0$;

г) функция $y = \frac{k}{x}$ убывает при $x > 0$ и возрастает при $x < 0$?

9. Если $k > 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$;

б) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;

в) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;

г) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$?

10. Если $k < 0$, то какое из утверждений верно:

а) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$;

б) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вверх при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;

в) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вверх при $x < 0$;

г) функция $y = \frac{k}{x}$ выпукла вниз при $x > 0$ и выпукла вниз при $x < 0$?

11. Перечислите свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k > 0$.

12. Перечислите свойства функции $y = \frac{k}{x}$ при $k < 0$.

13. Придумайте непрерывную кусочную функцию, график которой состоит из части гиперболы и части параболы. Попробуйте задать эту функцию аналитически.

§ 19. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x + l) + m$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x + 3)^2$. Графиком первой функции является парабола (пунктирная линия на рис. 71). Для функции $y = (x + 3)^2$ составим таблицу значений:

x	-3	-2	-4	-5	-1	-6	0
y	0	1	1	4	4	9	9

Отметив точки $(-3; 0)$, $(-2; 1)$, $(-4; 1)$, $(-5; 4)$, $(-1; 4)$, $(-6; 9)$, $(0; 9)$ на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (сплошная линия на рис. 71). Обратите внимание — это та же парабола, что и $y = x^2$, но только сдвинутая вдоль оси x на 3 единицы масштаба *влево*. Вершина параболы теперь находится в точке $(-3; 0)$, а не в точке $(0; 0)$, как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии служит прямая $x = -3$, а не $x = 0$, как это было в случае параболы $y = x^2$.

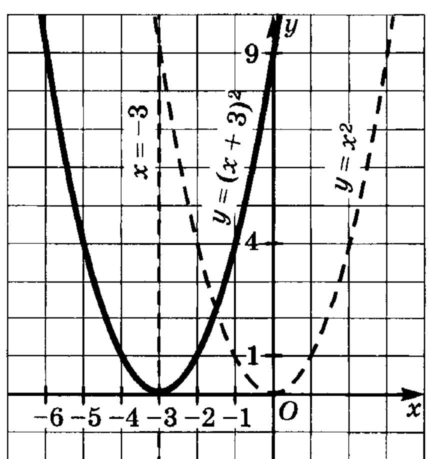


Рис. 71

Если же построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$, то заметим (рис. 72), что второй график получается из первого сдвигом (или, как ещё говорят, *параллельным переносом*) вдоль оси x на 2 единицы масштаба *вправо*.

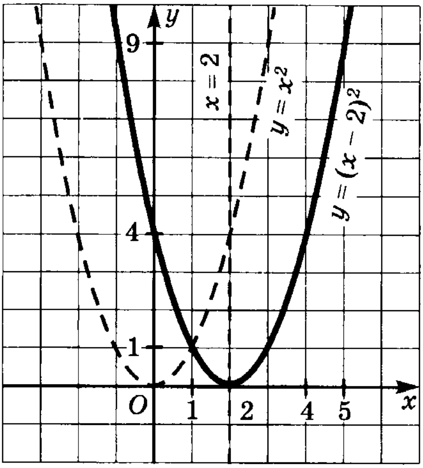


Рис. 72

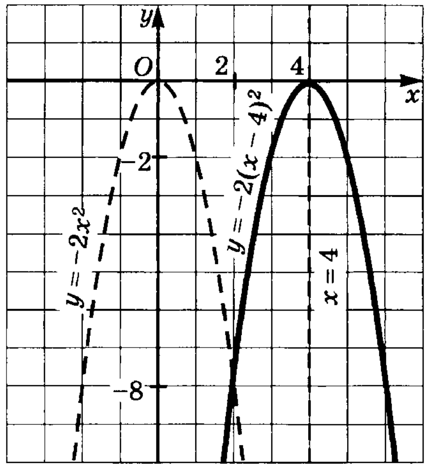


Рис. 73

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции $y = -2(x - 4)^2$ — парабола, которая получается из параболы $y = -2x^2$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси x на 4 единицы масштаба *вправо* (рис. 73).

Вообще справедливо следующее утверждение: ***чтобы построить график функции $y = f(x + l)$, где l — заданное положительное число, нужно осуществить параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба влево; чтобы построить график функции $y = f(x - l)$, где l — заданное положительное число, надо осуществить параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на l единиц масштаба вправо.***

Пример 1. Построить график функции $y = -\frac{3}{x + 5}$.

Решение. Построив гиперболу $y = -\frac{3}{x}$ и сдвинув её вдоль оси x *влево* на 5 единиц, получим требуемый график (рис. 74).

Обратите внимание, что для гиперболы $y = -\frac{3}{x}$ асимптотой служила ось y (прямая $x = 0$), а для гиперболы $y = -\frac{3}{x + 5}$ асимптотой служит прямая $x = -5$, т. е. асимптота (вместе с графиком) сдвинулась *влево* на 5 единиц. ■

По сути дела, речь шла о построении графика функции

$$y = f(x + l),$$

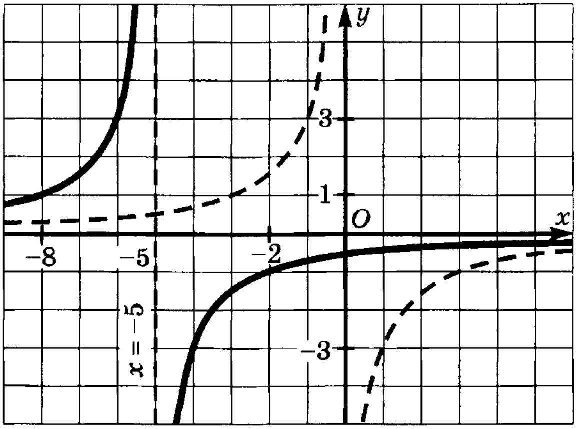


Рис. 74

где l — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что сдвиг графика осуществлялся на самом деле на $|l|$ единиц, а направление сдвига как раз и определялось знаком числа l: при $l > 0$ сдвиг осуществлялся *влево*, а при $l < 0$ — *вправо*.

Построим теперь в одной системе координат графики функций $y = x^2$ (пунктирная линия на рис. 75) и $y = x^2 + 4$. Составим таблицу значений для функции $y = x^2 + 4$:

x	0	1	−1	2	−2
y	4	5	5	8	8

Отметив точки (0; 4), (1; 5), (−1; 5), (2; 8), (−2; 8) на координатной плоскости и соединив их плавной кривой, получим параболу (сплошная линия на рис. 75). Обратите внимание — это та же парабола, что и $y = x^2$, она получена из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси y на 4 единицы масштаба *вверх*. Вершина параболы теперь находится в точке (0; 4), а не в точке (0; 0), как для параболы $y = x^2$. Осью симметрии по-прежнему служит прямая $x = 0$, как это было и в случае параболы $y = x^2$.

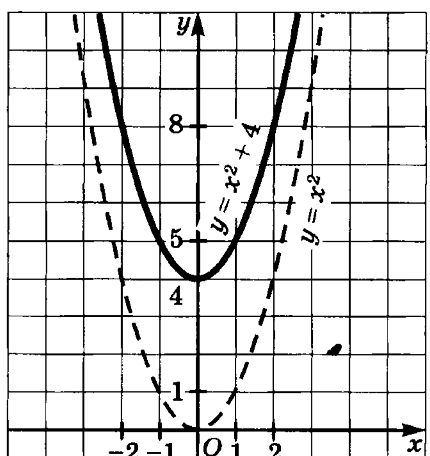


Рис. 75

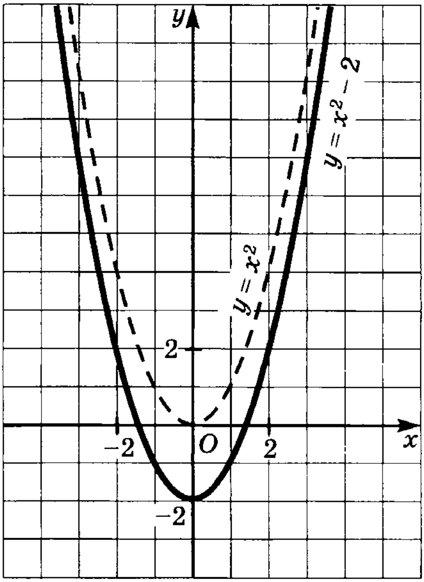


Рис. 76

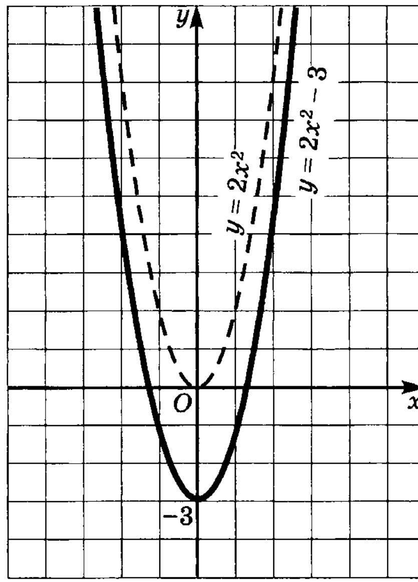


Рис. 77

Если же построить в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = x^2 - 2$ (рис. 76), то заметим, что второй график получается из первого сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси y на 2 единицы масштаба *вниз*.

Точно так же обстоит дело и с графиками других функций. Например, график функции $y = 2x^2 - 3$ — парабола, которая получается из параболы $y = 2x^2$ сдвигом (параллельным переносом) вдоль оси y на 3 единицы масштаба *вниз* (рис. 77).

Вообще справедливо следующее утверждение: ***чтобы построить график функции $y = f(x) + m$, где m — заданное положительное число, надо осуществить параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на m единиц масштаба вверх; чтобы построить график функции $y = f(x) - m$, где m — заданное положительное число, нужно осуществить параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на m единиц масштаба вниз.***

Пример 2. Построить график функции $y = -2x^2 + 5$.

Решение. Построив параболу $y = -2x^2$ и сдвинув её вдоль оси y *вверх* на 5 единиц, получим график функции $y = -2x^2 + 5$ (рис. 78). ■

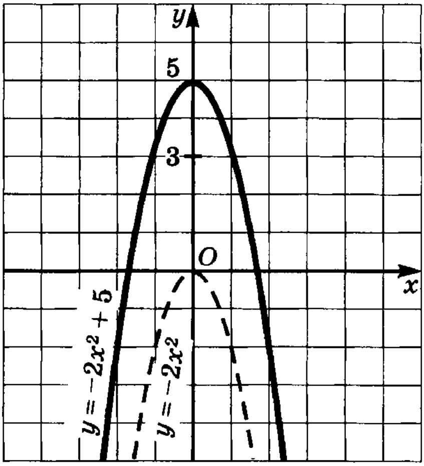


Рис. 78

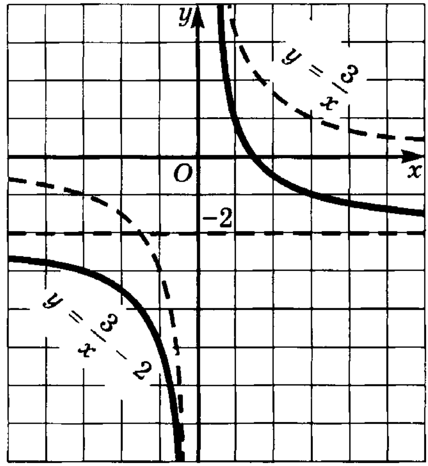


Рис. 79

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{3}{x} - 2$.

Решение. Построив гиперболу $y = \frac{3}{x}$ и сдвинув её вдоль оси y *вниз* на 2 единицы, получим график функции $y = \frac{3}{x} - 2$ (рис. 79).

Обратите внимание, что и горизонтальная асимптота гиперболы сдвинулась на 2 единицы *вниз*: для гиперболы $y = \frac{3}{x}$ асимптотой служила ось x (прямая $y = 0$), а для гиперболы $y = \frac{3}{x} - 2$ асимптотой служит прямая $y = -2$. ■

По сути дела, речь шла о построении графика функции $y = f(x) + m$, где m — любое число, как положительное, так и отрицательное. Вы, наверное, заметили, что, думая, на сколько единиц масштаба надо сдвинуть вдоль оси y график функции $y = f(x)$, мы не обращали внимание на знак числа m; сдвиг графика осуществлялся на самом деле на $|m|$ единиц. А вот направление сдвига как раз и определялось знаком числа m: при $m > 0$ сдвиг осуществлялся *вверх*, а при $m < 0$ — *вниз*.

Пример 4. Решить уравнение $\frac{2}{x} = x^2 + 1$.

Решение. 1) Рассмотрим две функции: $y = \frac{2}{x}$ и $y = x^2 + 1$.

2) Построим график функции $y = \frac{2}{x}$ — гиперболу (рис. 80).

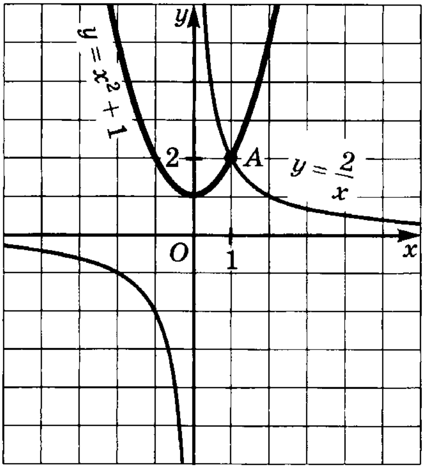


Рис. 80

3) Построим график функции $y = x^2 + 1$. Это — парабола, она изображена на том же рисунке 80.

4) По чертежу устанавливаем, что гипербола и парабола пересекаются в точке $A(1; 2)$. Проверка показывает, что на самом деле точка $A(1; 2)$ принадлежит и тому и другому графику. Значит, уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Пример 5. Построить и прочитать график функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^2, \text{ если } -4 \leqslant x \leqslant 0; \\ 4 - x^2, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала построим параболу $y = (x + 2)^2$ и выделим её часть на отрезке $[-4; 0]$ (рис. 81). Затем построим параболу $y = 4 - x^2$ и выделим её часть на открытом луче $(0; +\infty)$ (рис. 82). Наконец, оба «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 83).

Перечислим свойства функции $y = f(x)$, т. е. прочитаем график.

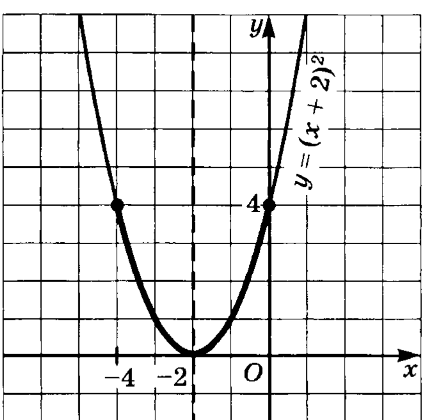


Рис. 81

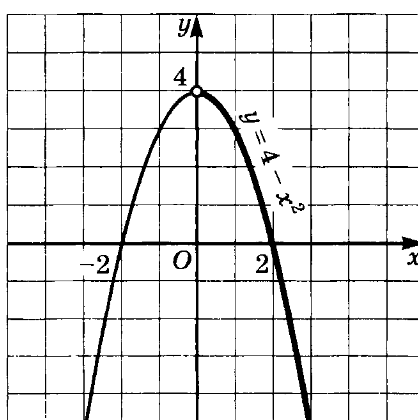


Рис. 82

1. Область определения функции: $D(f) = [-4; +\infty)$.

2. $y = 0$ при $x = -2$ и при $x = 2$; $y > 0$ при $-4 \leqslant x < -2$ и при $-2 < x < 2$; $y < 0$ при $x > 2$.

3. Функция убывает на отрезке $[-4; -2]$, возрастает на отрезке $[-2; 0]$, убывает на луче $[0; +\infty)$.

4. Функция ограничена сверху, но не ограничена снизу.

5. $y_{\text{наим}}$ не существует; $y_{\text{наиб}} = 4$ (достигается при $x = -4$ и при $x = 0$).

6. Функция непрерывна в заданной области определения.

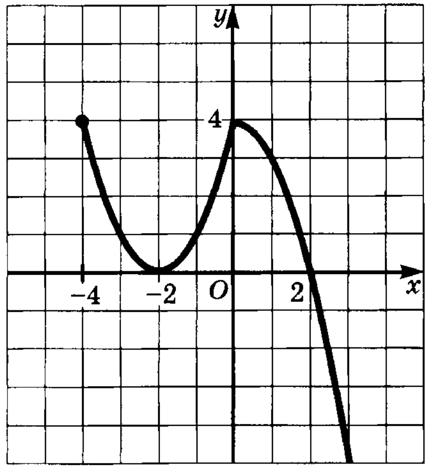


Рис. 83

7. Область значений функции — луч $(-\infty; 4]$; это хорошо видно по графику, если спроецировать его на ось y.

8. $x = -2$ — точка минимума, причём $y_{\min} = 0$; $x = 0$ — точка максимума, причём $y_{\max} = 4$. ■

П р и м е р 6. Построить график функции $y = (x - 2)^2 - 3$.

Р е ш е н и е. Осуществим построение по этапам.

Первый этап. Построим график функции $y = x^2$ (пунктирная линия на рис. 84).

Второй этап. Сдвинув параболу $y = x^2$ на 2 единицы *вправо*, получим график функции $y = (x - 2)^2$ (тонкая линия на рис. 84).

Третий этап. Сдвинув параболу $y = (x - 2)^2$ на 3 единицы *вниз*, получим график функции $y = (x - 2)^2 - 3$ (жирная линия на рис. 84). ■

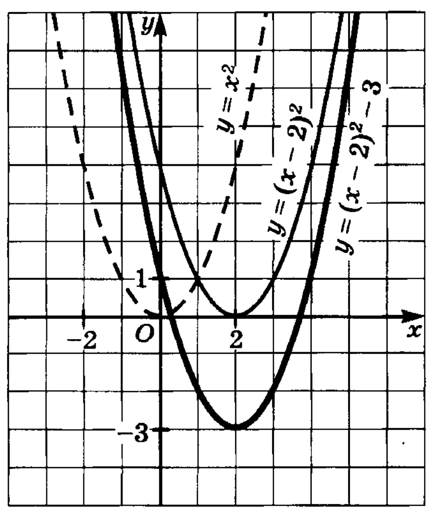


Рис. 84

З а м е ч а н и е. Математику, который привык быть экономным в своих действиях, такое решение не очень понравится, хотя оно абсолютно правильное. Он спросит: «Зачем мне строить три графика,

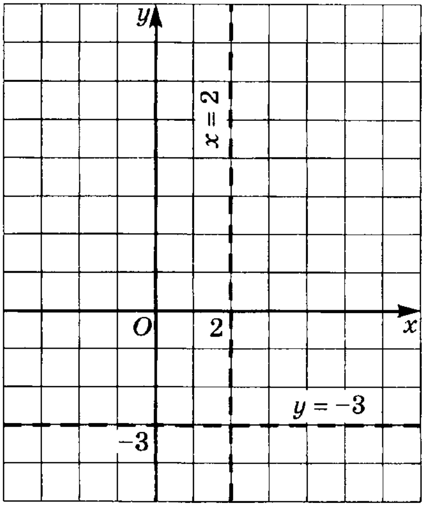


Рис. 85

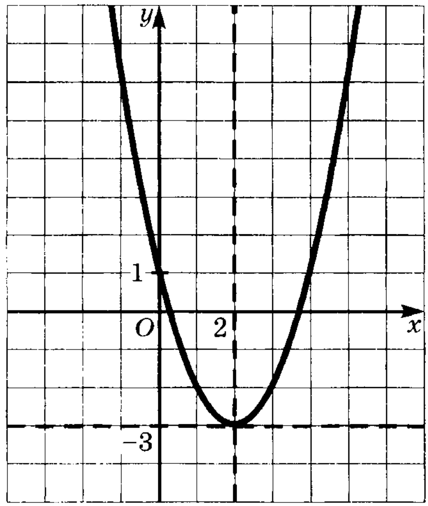


Рис. 86

когда я могу обойтись построением только одного графика? Ведь фактически графиком функции $y = (x - 2)^2 - 3$ является та же парабола, что служила графиком функции $y = x^2$, только вершина параболы переместилась из начала координат в точку (2; −3). Поэтому, — продолжит математик, — я сделаю так: перейду *к вспомогательной системе координат с началом в точке* (2; −3). Для этого построю (пунктиром) прямые $x = 2$ и $y = -3$ (рис. 85). В этой вспомогательной системе координат воспользуюсь шаблоном параболы $y = x^2$, то есть “привяжу” график функции $y = x^2$ к новой системе координат и в итоге получу требуемый график (рис. 86)».

Попробуем воспользоваться советом математика при решении следующего примера.

Пример 7. Построить график функции $y = -2(x + 3)^2 + 1$.

Решение. 1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке (−3; 1) (пунктирные прямые $x = -3$, $y = 1$ на рис. 87).

2) «Привяжем» функцию $y = -2x^2$ к новой системе координат. Как это сделать? Можно так. Выберем контрольные точки для графика функции $y = -2x^2$: (0; 0), (1; −2), (−1; −2), (2; −8), (−2; −8), — но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 87). Затем через полученные точки проведём параболу — это и будет требуемый график (рис. 88). ■

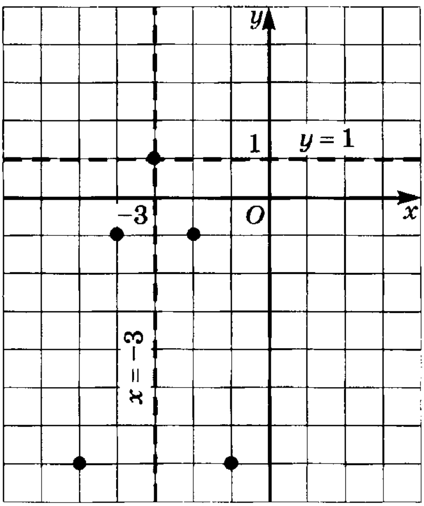


Рис. 87

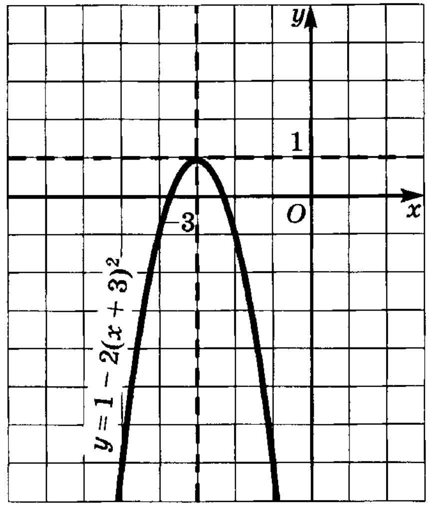


Рис. 88

Итак, мы получили *два алгоритма построения графика функции* $y = f(x + l) + m$.

Алгоритм 1

1. Построить график функции $y = f(x)$.

2. Осуществить параллельный перенос графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на $|l|$ единиц масштаба влево, если $l > 0$, и вправо, если $l < 0$.

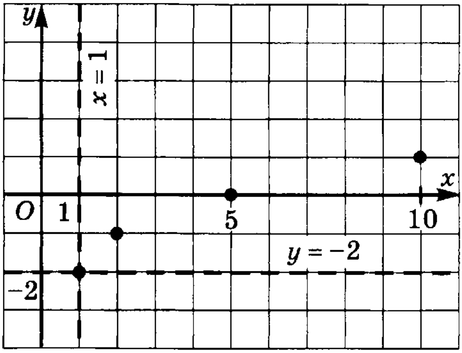
3. Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси y на $|m|$ единиц масштаба вверх, если $m > 0$, и вниз, если $m < 0$.

Алгоритм 2

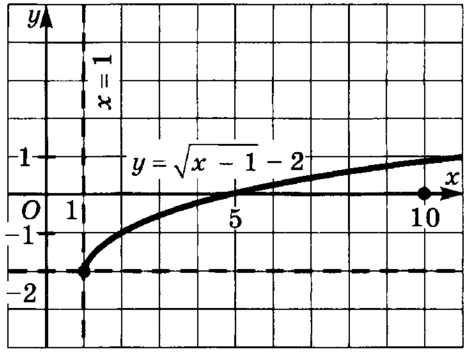
1. Перейти к новой системе координат, проведя (пунктиром) вспомогательные прямые $x = -l$, $y = m$ (т. е. выбрав началом новой системы точку $(-l; m)$).

2. «Привязать» график функции $y = f(x)$ к новой системе координат.

На практике пользуйтесь тем алгоритмом, который вам больше нравится.



а



б

Рис. 89

Пример 8. Построить график функции $y = \sqrt{x-1} - 2$.

Решение. 1) Перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке (1; −2) (пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ на рис. 89, *а*).

2) «Привяжем» функцию $y = \sqrt{x}$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = \sqrt{x}$, например (0; 0), (1; 1), (4; 2), (9; 3), но строить их будем *не в старой*, а *в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 89, *а*). Построим ветвь параболы, проходящую через выбранные точки, — это и есть требуемый график (рис. 89, *б*). ■

Пример 9. Построить график функции $y = x^2 - 4x + 5$.

Решение. Вы, наверное, подумали, какое отношение имеет этот пример к тем преобразованиям графиков, которые мы обсуждаем? Оказывается, самое прямое. Чтобы в этом убедиться, применим к квадратному трёхчлену $x^2 - 4x + 5$ *метод выделения полного квадрата* (он знаком вам из курса алгебры 7-го класса):

$$x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1.$$

Для построения графика функции $y = (x - 2)^2 + 1$ перейдём к новой системе координат с началом в точке (2; 1) (пунктирные прямые $x = 2$ и $y = 1$ на рис. 90). «Привяжем» функцию $y = x^2$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = x^2$: (0; 0), (1; 1), (−1; 1), (2; 4), (−2; 4), — но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 90). По этим точкам построим параболу — это и будет требуемый график (рис. 91). ■

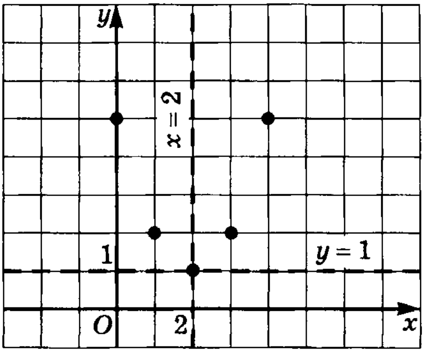


Рис. 90

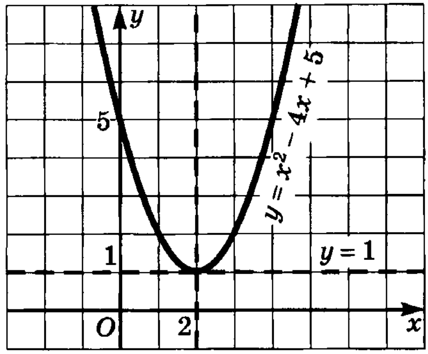


Рис. 91

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x - 3)$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

2. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x + 1)$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

3. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x) - 3$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

4. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x) + 1$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

5. Какие преобразования графиков объединяет этот параграф? Объясните суть каждого преобразования.

6. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x - 3) + 2$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

7. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(x + 2) - 1$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

8. Сформулируйте алгоритм 1 построения графика функции $y = f(x + l) + m$.

9. Сформулируйте алгоритм 2 построения графика функции $y = f(x + l) + m$.

10. Какой алгоритм построения графика функции $y = f(x + l) + m$ вам больше нравится? Каким вы будете пользоваться при решении задач и почему?

11. Из курса алгебры 7-го класса вспомните метод выделения полного квадрата.

12. Как, используя метод выделения полного квадрата, преобразовать квадратный трёхчлен $x^2 - 6x + 10$, чтобы построить график функции $y = x^2 - 6x + 10$? Проговорите, какой будет последовательность ваших действий.

§ 20. ФУНКЦИЯ $y = ax^2 + bx + c$, ЕЁ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Функцию $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — произвольные числа, но $a \neq 0$, называют **квадратичной** (это название можно объяснить тем, что старший член данного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ содержит x^2).

Опираясь на результаты, полученные выше, мы сможем построить график любой квадратичной функции. Один такой график построен в конце предыдущего параграфа. Рассмотрим ещё один пример.

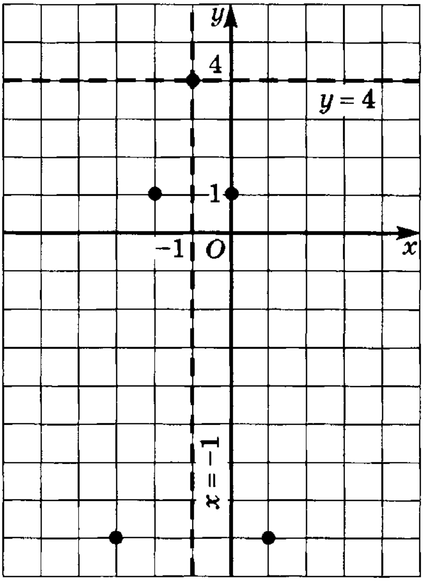
Пример 1. Построить график функции $y = -3x^2 - 6x + 1$.

Решение. Выполним некоторые преобразования квадратного трёхчлена $-3x^2 - 6x + 1$, конкретнее — выделим полный квадрат:

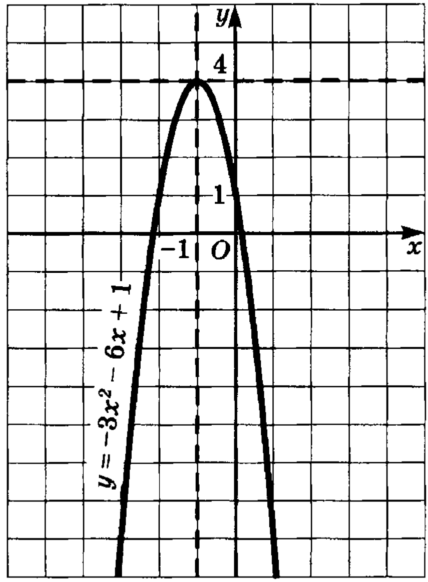
$$-3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3((x^2 + 2x + 1) - 1) + 1 =$$
$$= -3(x + 1)^2 + 3 + 1 = -3(x + 1)^2 + 4.$$

Для построения графика функции $y = -3(x + 1)^2 + 4$ перейдём к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; 4)$ (пунктирные прямые $x = -1$ и $y = 4$ на рис. 92, *а*). «Привяжем» функцию $y = -3x^2$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = -3x^2$: $(0; 0)$, $(1; -3)$, $(-1; -3)$, $(2; -12)$, $(-2; -12)$, — но строить их будем *не в старой, а в новой системе координат* (эти точки отмечены на рис. 92, *а*). По этим точкам построим параболу — это и будет требуемый график (рис. 92, *б*). ■

Итак, применив метод выделения полного квадрата, мы преобразовали квадратный трёхчлен к виду $a(x + l)^2 + m$ и использовали алгоритм 2 из § 19 (заметим, что с равным успехом мы могли бы использовать и алгоритм 1). Оказалось, что графиком функции $y = -3x^2 - 6x + 1$ является парабола, которая получается из параболы $y = -3x^2$ параллельным переносом. А в конце предыдущего параграфа мы видели, что графиком функции $y = x^2 - 4x + 5$ тоже



а



б

Рис. 92

является парабола; она получается параллельным переносом параболы $y = x^2$. На самом деле график любой квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ можно получить параллельным переносом из параболы $y = ax^2$, причём для доказательства этого факта используется та же идея — выделение полного квадрата.

Теорема. ***Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, которая получается из параболы $y = ax^2$ параллельным переносом.***

Доказательство. Воспользуемся методом выделения полного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Итак, нам удалось преобразовать трёхчлен $ax^2 + bx + c$ к виду $a(x + l)^2 + m$, где $l = \frac{b}{2a}$, $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Чтобы построить график функции $y = a(x + l)^2 + m$, нужно выполнить параллельный перенос параболы $y = ax^2$ так, чтобы

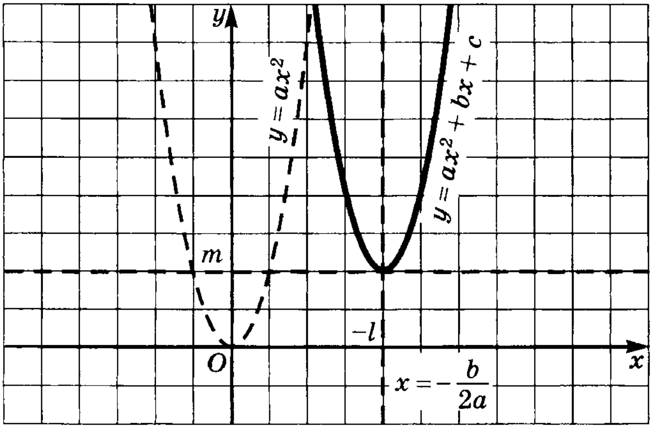


Рис. 93

вершина параболы оказалась в точке $(-l;\ m)$ (рис. 93). Теорема доказана.

Обратите внимание на следующее важное обстоятельство: из проведённого доказательства следует, что вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит точка $(-l;\ m)$, где $l = \frac{b}{2a}$, $m = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Осью параболы служит прямая $x = -l$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$.

Итак, ***осью параболы*** $y = ax^2 + bx + c$ ***служит прямая*** $x = -\frac{b}{2a}$; ***абсцисса*** x_0 ***вершины параболы вычисляется по формуле***

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Формулу для ординаты вершины параболы не надо запоминать (речь идёт о формуле $y_0 = m$, т. е. $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$). Во-первых, она довольно громоздкая, а во-вторых, если известна абсцисса x_0, то ординату y_0 всегда можно вычислить по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Пример 2. Не выполняя построения графика функции $y = -3x^2 - 6x + 1$, ответить на следующие вопросы.

а) Какая прямая служит осью симметрии параболы?

б) Каковы координаты вершины параболы?

в) Куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы?

Решение. а) Здесь $a = -3$, $b = -6$. Уравнение оси параболы: $x = -\frac{b}{2a}$, т. е. $x = -1$.

б) Абсцисса x_0 вершины параболы нам уже известна: $x_0 = -1$. Ординату y_0 найдём по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$:

$$y_0 = f(x_0) = f(-1) = -3(-1)^2 - 6(-1) + 1 = 4.$$

Итак, вершиной параболы служит точка $(-1; 4)$.

в) Парабола $y = -3x^2 - 6x + 1$ получается параллельным переносом параболы $y = -3x^2$. Ветви параболы $y = -3x^2$ направлены вниз (поскольку коэффициент при x^2 отрицателен), следовательно, и у параболы $y = -3x^2 - 6x + 1$ ветви направлены вниз. ■

Для любой функции вида $y = ax^2 + bx + c$ можно ответить на поставленные в примере 2 вопросы, не строя параболу — график функции. Проще ответить на вопрос, куда направлены ветви параболы:

ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, если $a > 0$, и вниз, если $a < 0$.

Несколько сложнее найти уравнение оси параболы $x = -\frac{b}{2a}$ (приходится немного посчитать). И ещё сложнее (больше вычислений) находить координаты вершины параболы: абсциссой является число $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 вычисляется по формуле $y_0 = f(x_0)$, где $f(x) = ax^2 + bx + c$, или по формуле $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

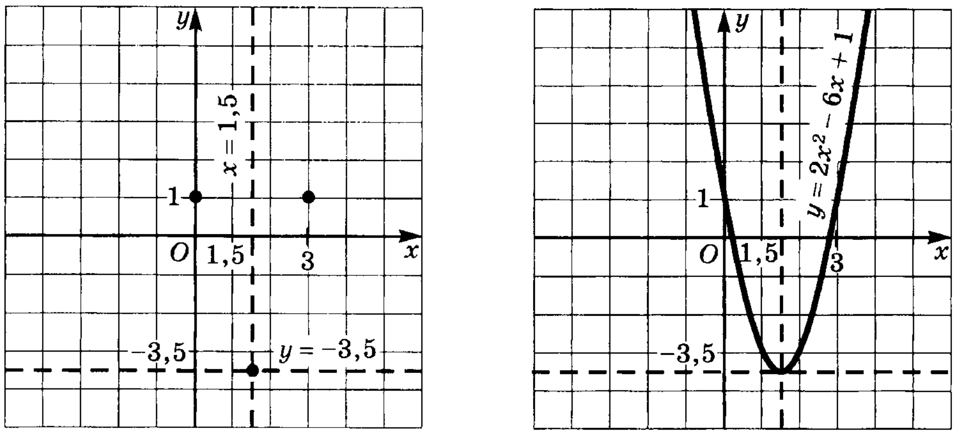
Пример 3. Построить график функции $y = 2x^2 - 6x + 1$.

Решение. Графиком функции является парабола с ветвями, направленными вверх, поскольку старший коэффициент 2 — положительное число. Найдём координаты вершины параболы. Имеем: $a = 2$, $b = -6$;

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1{,}5; \quad y_0 = f(x_0) = f(1{,}5),$$

где $f(x) = 2x^2 - 6x + 1$. Значит,

$$y_0 = f(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 1 = -3{,}5.$$



а *б*

Рис. 94

На рисунке 94, *а* отмечена точка (1,5; −3,5) — вершина искомой параболы, проведена её ось. Чтобы построить саму параболу, поступим так: возьмём на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, например, точки $x = 0$ и $x = 3$; вычислим значения функции в этих точках, при этом учтём, что $f(0) = f(3)$. Имеем $f(0) = 1$, следовательно, и $f(3) = 1$. Точки (0; 1) и (3; 1) отмечены на рисунке 94, *а*. Теперь, зная три точки, построим искомую параболу (рис. 94, *б*). ■

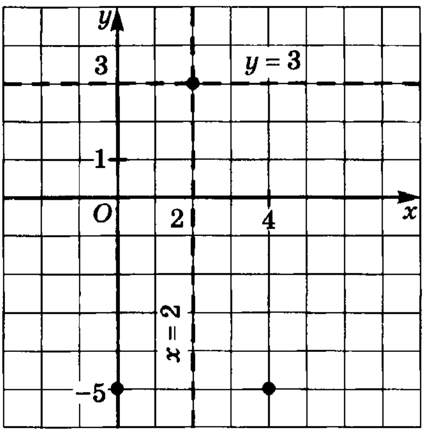
Фактически мы получили алгоритм построения графика квадратичной функции. Оформим его.

Алгоритм построения параболы $y = ax^2 + bx + c$

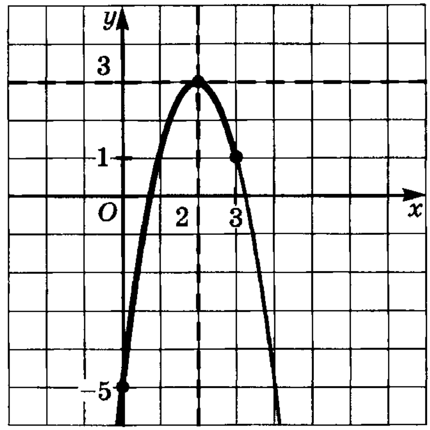
1. Найти координаты вершины параболы, построить на координатной плоскости соответствующую точку, провести ось параболы.

2. Отметить на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы (чаще всего в качестве одной из таких точек берут точку с абсциссой $x = 0$), найти значения функции в этих точках; построить на координатной плоскости соответствующие точки.

3. Через полученные три точки провести параболу (для большей точности полезно взять ещё одну пару точек, симметричных относительно оси параболы; тогда строят параболу по пяти точкам).



а



б

Рис. 95

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = -2x^2 + 8x - 5$ на отрезке [0; 3].

Решение.

Первый этап. Построим параболу, служащую графиком заданной функции. Воспользуемся алгоритмом.

1) Имеем: $a = -2$, $b = 8$;

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2; \quad y_0 = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 5 = 3.$$

Значит, вершиной параболы служит точка (2; 3), а осью параболы — прямая $x = 2$ (рис. 95, *а*).

2) Возьмём на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, — точки $x = 0$ и $x = 4$. Имеем: $f(0) = f(4) = -5$; построим на координатной плоскости (см. рис. 95, *а*) точки (0; −5) и (4; −5).

3) Через точки (2; 3), (0; −5), (4; −5) проводим параболу (рис. 95, *б*).

Второй этап. Выделим часть построенного графика на отрезке [0; 3] (см. рис. 95, *б*). Замечаем, что $y_{наим} = -5$ (достигается в точке $x = 0$), а $y_{наиб} = 3$ (достигается в точке $x = 2$).

Ответ: $y_{наим} = -5$, $y_{наиб} = 3$.

Вопросы для самопроверки

1. Какую функцию называют квадратичной?
2. Что является графиком функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$?

3. Как вычислить абсциссу x_0 вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$?

4. Какая прямая служит осью симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$?

5. Что надо сделать, чтобы найти ординату вершины параболы?

6. Если $a > 0$, то какое утверждение верно:

а) ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх;

б) ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз?

7. Если $a < 0$, то какое утверждение верно:

а) ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх;

б) ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз?

8. Опишите алгоритм построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$.

§ 21. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЙ

С квадратными уравнениями вы уже встречались в 7-м классе. Напомним, что *квадратным* называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — любые числа (коэффициенты), причём $a \neq 0$. Используя знания о некоторых функциях и их графиках, мы уже теперь в состоянии, не дожидаясь изучения темы «Квадратные уравнения» (это будет позднее, в главе 4), решать некоторые квадратные уравнения, причём различными способами; мы рассмотрим эти способы на примере одного квадратного уравнения.

Пример. Решить уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение.

Первый способ. Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$, воспользовавшись алгоритмом из § 20:

1) $a = 1$, $b = -2$;

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1; \quad y_0 = f(1) = 1^2 - 2 - 3 = -4.$$

Значит, вершиной параболы служит точка $(1; -4)$, а осью параболы — прямая $x = 1$.

2) Возьмём на оси x две точки, симметричные относительно оси параболы, — точки $x = -1$ и $x = 3$. Имеем: $f(-1) = f(3) = 0$; отметим на координатной плоскости точки $(-1; 0)$ и $(3; 0)$.

3) Через точки $(-1; 0)$, $(1; -4)$, $(3; 0)$ проводим параболу (рис. 96).

Корнями уравнения

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

служат абсциссы точек пересечения параболы с осью x:

$$x_1 = -1, \ x_2 = 3.$$

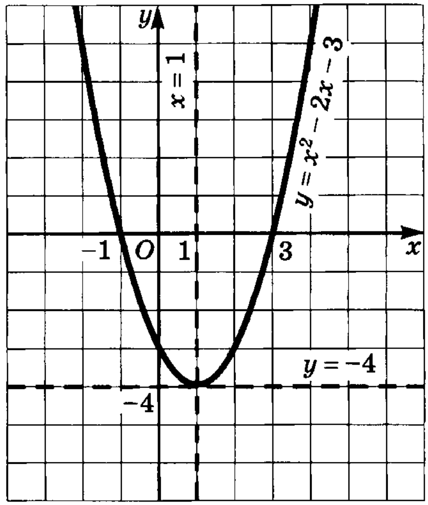


Рис. 96

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду $x^2 = 2x + 3$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 2x + 3$ (рис. 97). Они пересекаются в двух точках: $A(-1;\ 1)$ и $B(3;\ 9)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Третий способ. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 3 = 2x$. Построим в одной системе координат графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = 2x$ (рис. 98). Они пересекаются в двух точках: $A(-1;\ -2)$ и $B(3;\ 6)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, значит, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Четвёртый способ. Преобразуем уравнение к виду

$$x^2 - 2x + 1 - 4 = 0$$

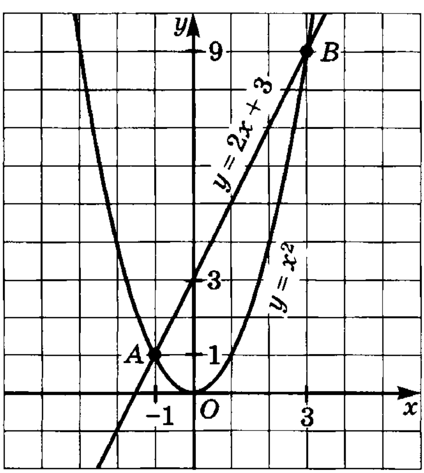


Рис. 97

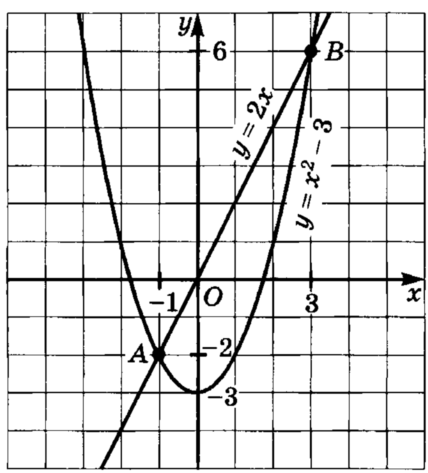


Рис. 98

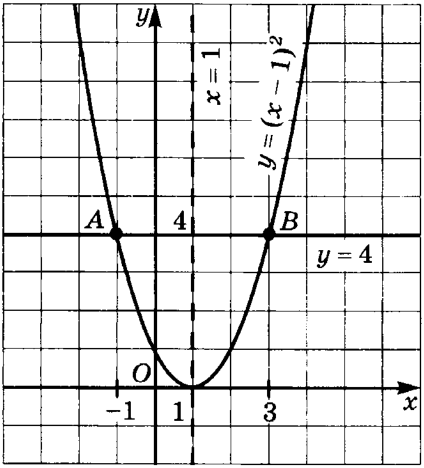


Рис. 99

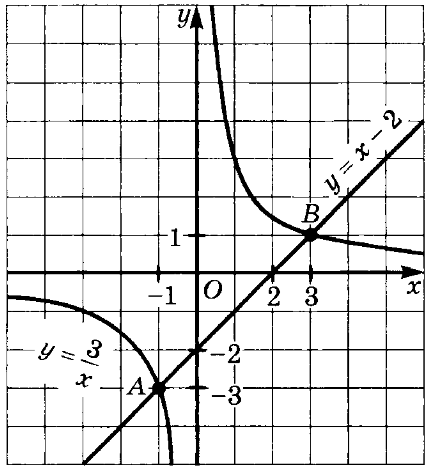


Рис. 100

и далее

$$x^2 - 2x + 1 = 4, \text{ т. е. } (x - 1)^2 = 4.$$

Построим в одной системе координат параболу $y = (x - 1)^2$ и прямую $y = 4$ (рис. 99). Они пересекаются в двух точках: $A(-1; 4)$ и $B(3; 4)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Пятый способ. Заметив, что в данном случае $x = 0$ не является корнем уравнения, и разделив почленно обе части уравнения на x, получим

$$x - 2 - \frac{3}{x} = 0$$

и далее

$$x - 2 = \frac{3}{x}.$$

Построим в одной системе координат гиперболу $y = \frac{3}{x}$ и прямую $y = x - 2$ (рис. 100). Они пересекаются в двух точках: $A(-1; -3)$ и $B(3; 1)$. Корнями уравнения служат абсциссы точек A и B, значит, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. ■

Итак, квадратное уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$ мы решили графически пятью способами. Давайте проанализируем, в чём суть этих способов.

Первый способ. Строят график функции $y = ax^2 + bx + c$ и находят точки его пересечения с осью x.

Второй способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 = -bx - c$, строят параболу $y = ax^2$ и прямую $y = -bx - c$ и находят точки их пересечения (корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения, если таковые имеются).

Третий способ. Преобразуют уравнение к виду $ax^2 + c = -bx$, строят параболу $y = ax^2 + c$ и прямую $y = -bx$ (она проходит через начало координат) и находят точки их пересечения.

Четвёртый способ. Применяя метод выделения полного квадрата, преобразуют уравнение к виду

$$a(x + l)^2 + m = 0$$

и далее

$$a(x + l)^2 = -m.$$

Строят параболу $y = a(x + l)^2$ и прямую $y = -m$, параллельную оси x, и находят точки пересечения параболы и прямой.

Пятый способ. Если $c \neq 0$, то значение $x = 0$ не является корнем уравнения. Заметив это, преобразуют уравнение к виду

$$\frac{ax^2}{x} + \frac{bx}{x} + \frac{c}{x} = \frac{0}{x},$$

т. е.

$$ax + b + \frac{c}{x} = 0,$$

и далее

$$\frac{c}{x} = -ax - b.$$

Строят гиперболу $y = \frac{c}{x}$ (это — гипербола при условии, что $c \neq 0$) и прямую $y = -ax - b$ и находят точки их пересечения.

Заметим, что первые четыре способа применимы к любым квадратным уравнениям, а пятый — только к тем, у которых $c \neq 0$. На практике вы вольны выбирать любой способ, который вам больше нравится. ■

Замечание. Несмотря на обилие способов графического решения квадратных уравнений, уверенности в том, что любое квадратное уравнение мы сможем решить графически, нет. Пусть, например, нужно решить уравнение $x^2 - x - 3 = 0$ (специально возьмём уравнение, похожее на то, что было рассмотрено в примере). Попробуем его решить вторым способом: преобразуем уравнение к виду $x^2 = x + 3$, построим параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 3$,

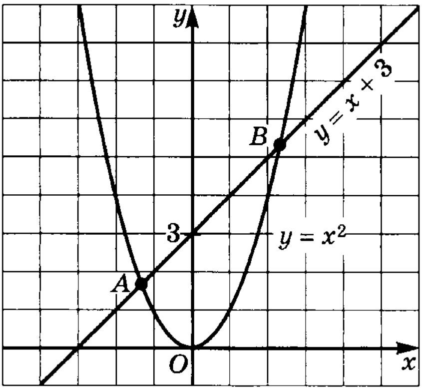


Рис. 101

они пересекаются в точках A и B (рис. 101), значит, уравнение имеет два корня. Но чему равны эти корни, с помощью чертежа мы сказать не можем — точки A и B имеют не такие «хорошие» координаты, как в приведённом выше примере.

А вот ещё один пример: решить уравнение $x^2 - 16x - 95 = 0$. Попробуем его решить, скажем, третьим способом. Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 95 = 16x$. Теперь надо построить параболу $y = x^2 - 95$ и прямую $y = 16x$. Но ограниченные размеры листа тетради не позволят этого сделать, ведь параболу $y = x^2$ нужно опустить на 95 клеточек вниз.

Итак, графические способы решения квадратного уравнения красивы, приятны, но не дают стопроцентной гарантии решения любого квадратного уравнения. Учтём это в дальнейшем.

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, как вы будете графически решать уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$. Предложите несколько способов. Решите это уравнение одним из предложенных вами способов.

2. Сколько способов решения квадратного уравнения графическим методом вы узнали в этом параграфе? Какой из способов вам понравился больше всего?

3. Всегда ли удобно решать квадратное уравнение графическим способом? Если нет, то приведите пример такого уравнения и укажите причины неудобства.

§ 22. ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

Дробно-линейной называют обычно функцию вида

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

На коэффициенты a, b, c, d накладывают ограничения: $c \neq 0$ и $\frac{b}{a} \neq \frac{d}{c}$. Дело в том, что при $c = 0$ функция принимает вид $y = \frac{ax + b}{d}$, т. е. $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$ — это линейная функция. Если же $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, то

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a\left(x + \frac{b}{a}\right)}{c\left(x + \frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c},$$ т. е. получается постоянная функция,

определённая всюду, кроме точки $x = -\frac{d}{c}$. Рассмотрение линейной и постоянной функций не представляет труда, мы эти случаи опускаем.

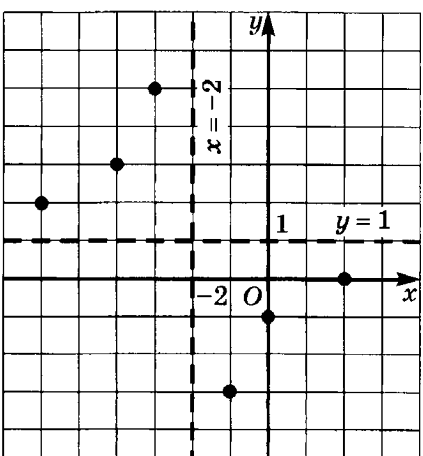
Для построения графика дробно-линейной функции выделяют из неправильной дроби $\frac{ax + b}{cx + d}$ целую часть; как это делают, покажем ниже в примерах 1 и 2.

Пример 1. Построить график функции $y = \frac{x - 2}{x + 2}$.

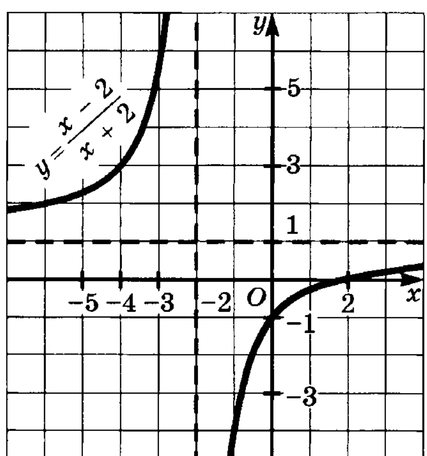
Решение. Имеем:

$$\frac{x - 2}{x + 2} = \frac{(x + 2) - 4}{x + 2} = \frac{x + 2}{x + 2} - \frac{4}{x + 2} = \frac{-4}{x + 2} + 1.$$

Итак, нам надо построить график функции $y = \frac{-4}{x + 2} + 1$. Для этого (см. § 19) следует перейти к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-2; 1)$ (пунктирные прямые $x = -2$, $y = 1$ на рис. 102, *а*) и «привязать» к ней гиперболу



а



б

Рис. 102

$y = \frac{-4}{x}$. График представлен на рисунке 102, *б*. ■

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{(2x-2)+5}{x-1} =$$

$$= \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = \frac{5}{x-1} + 2.$$

Итак, нам нужно построить график функции $y = \frac{5}{x-1} + 2$.

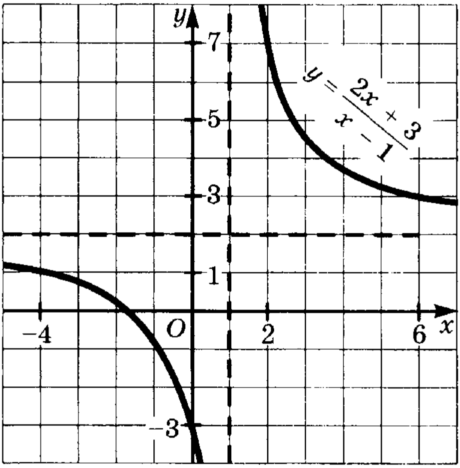


Рис. 103

Для этого следует перейти к вспомогательной системе координат с началом в точке (1; 2) (пунктирные прямые $x = 1$, $y = 2$ на рис. 103) и «привязать» к ней гиперболу $y = \frac{5}{x}$. График изображён на рисунке 103. ■

Вопросы для самопроверки

1. Какую функцию называют дробно-линейной?
2. Что представляет собой график дробно-линейной функции?
3. Запишите уравнения асимптот графика функции $y = \frac{3x-1}{x-2}$.

§ 23. КАК ПОСТРОИТЬ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y = |f(x)|$ И $y = f(|x|)$, ЕСЛИ ИЗВЕСТЕН ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = f(x)$

Предположим, что требуется построить график функции $y = |f(x)|$, причём график функции $y = f(x)$ нам известен (либо он задан, либо мы умеем его строить). Как будет выглядеть график функции $y = |f(x)|$?

Пусть, например, график функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 104. Обратите внимание, что $f(x) \geqslant 0$ на луче $(-\infty; a]$ и на луче

$[b; +\infty)$. На этих двух промежутках выполняется равенство $|f(x)| = f(x)$. Это значит, что на указанных промежутках график функции $y = |f(x)|$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$. Рассмотрим теперь интервал $(a; b)$. На этом интервале выполняется неравенство $f(x) < 0$. Но тогда $|f(x)| = -f(x)$, следовательно, на интервале $(a; b)$ нам предстоит построить график функции $y = -f(x)$. Для этого соответствующую часть графика функции $y = f(x)$ надо отобразить симметрично относительно оси x.

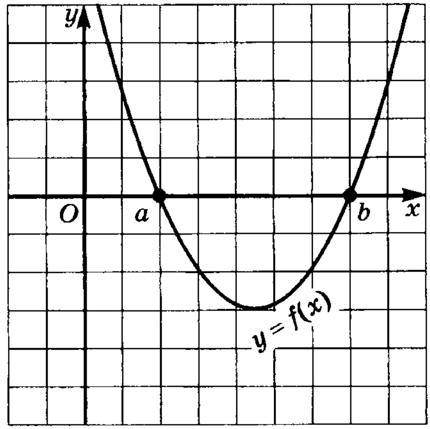


Рис. 104

График функции $y = |f(x)|$ изображён на рисунке 105.

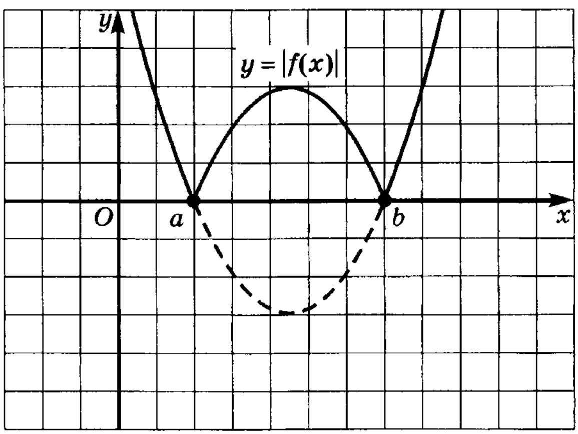


Рис. 105

Можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = |f(x)|$

1. Построить график функции $y = f(x)$.

2. Оставить без изменения те части графика функции $y = f(x)$, которые лежат не ниже оси x.

3. Части графика функции $y = f(x)$, которые лежат ниже оси x, заменить на симметричные им относительно оси x.

Пример 1. Построить график функции $y = \left|\frac{2x-4}{x-3}\right|$.

Решение. Построим график дробно-линейной функции $y = \frac{2x-4}{x-3}$ (см. § 22).

Имеем:

$$\frac{2x-4}{x-3} = \frac{(2x-6)+2}{x-3} = \frac{2(x-3)}{x-3} + \frac{2}{x-3} = \frac{2}{x-3} + 2.$$

Итак, нам надо построить график функции $y = \frac{2}{x-3} + 2$. Для этого следует перейти к вспомогательной системе координат с началом в точке (3; 2) (пунктирные прямые $x = 3$, $y = 2$ на рис. 106) и «привязать» к ней гиперболу $y = \frac{2}{x}$. График изображён на рисунке 106.

Теперь, воспользовавшись алгоритмом, построим требуемый график. Оставим без изменения те части гиперболы, которые лежат не ниже оси x — так обстоит дело на промежутках $(-\infty; 2]$ и $(3; +\infty)$. Отобразим симметрично относительно оси x ту часть гиперболы, которая лежит ниже оси x, — так обстоит дело на интервале (2; 3). В итоге получили требуемый график — он представлен на рисунке 107. ■

Предположим теперь, что нам нужно построить график функции $y = f(|x|)$, причём график функции $y = f(x)$ нам известен (либо он

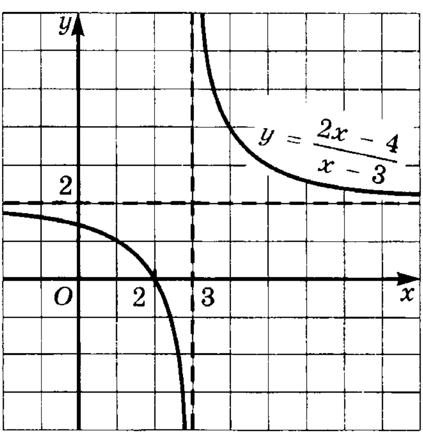


Рис. 106

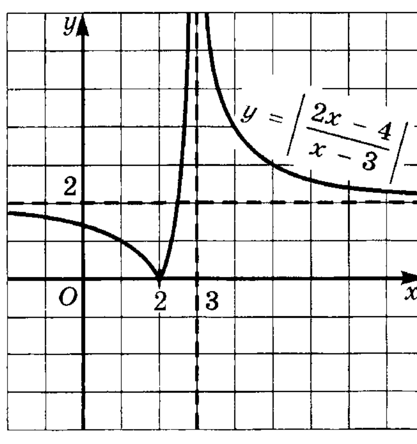


Рис. 107

задан, либо мы умеем его строить). Как будет выглядеть график функции $y = f(|x|)$?

Пусть, например, график функции $y = f(x)$ изображён на рисунке 108. Рассмотрим его часть при $x \geqslant 0$. Если $x \geqslant 0$, то $|x| = x$, но тогда и $f(|x|) = f(x)$. Это значит, что при $x \geqslant 0$ график функции $y = f(|x|)$ совпадает с графиком функции $y = f(x)$ (эта часть графика выделена на рис. 108). Далее воспользуемся тем, что $|x| = |-x|$ и соответственно $f(|x|) = f(|-x|)$. Это значит, что в точках с абсциссами x и $-x$ ординаты графика функции $y = f(|x|)$ равны, т. е. это точки, симметричные относительно оси y (рис. 109). Итак, интересующий нас график обладает свойством осевой симметрии относительно оси y, поэтому к уже построенной его ветви при $x \geqslant 0$ надо добавить симметричную ей относительно оси y (рис. 110).

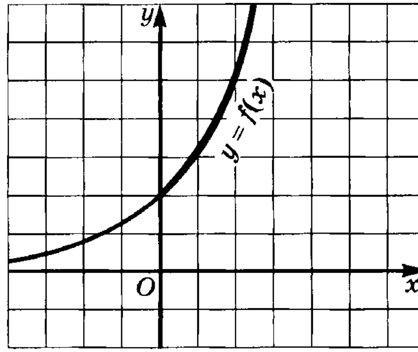


Рис. 108

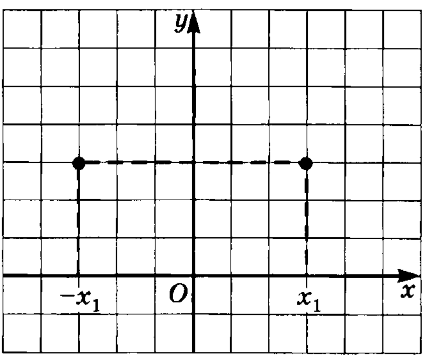


Рис. 109

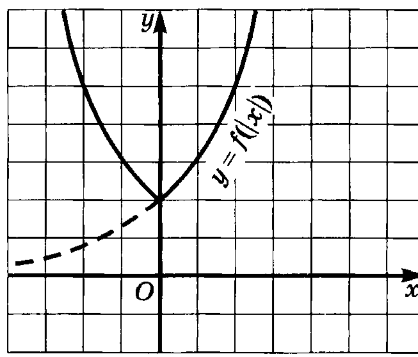


Рис. 110

Можно предложить следующий алгоритм.

Алгоритм построения графика функции $y = f(|x|)$

1. Построить график функции $y = f(x)$ при $x \geqslant 0$.
2. Добавить ветви, симметричные построенным относительно оси y.

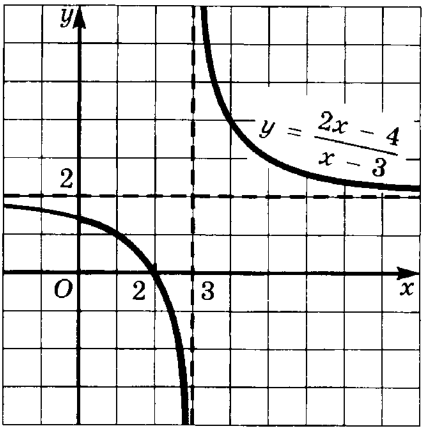


Рис. 111

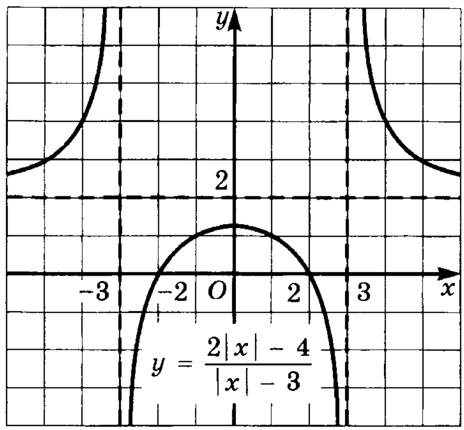


Рис. 112

Пример 2. Построить график функции $y = \frac{2|x| - 4}{|x| - 3}$.

Решение. Построим, как в примере 1, график дробно-линейной функции $y = \frac{2x - 4}{x - 3}$, но возьмём только те части гиперболы, которые лежат в правой координатной полуплоскости (выделены на рис. 111). Добавим к ним их симметричные образы относительно оси y. В итоге получим требуемый график — он представлен на рисунке 112. ■

Вопросы для самопроверки

1. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = |f(x)|$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.
2. Расскажите, как вы будете строить график функции $y = f(|x|)$, если на координатной плоскости xOy задан график функции $y = f(x)$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Графическое решение уравнений.
2. Преобразование графиков функций.
3. Дробно-линейная функция.

ГЛАВА

4 КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

С квадратными уравнениями мы уже не раз встречались, но только теперь, после введения операции извлечения квадратного корня, у нас появилась возможность построить теорию решения квадратных уравнений.

Определение 1. **Квадратным** называют **уравнение** вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a, b, c — любые действительные числа, но $a \neq 0$.

Коэффициенты a, b, c называют соответственно так: *первый* или *старший коэффициент*, *второй коэффициент* или *коэффициент при* x, *свободный член*.

Определение 2. Квадратное уравнение называют **приведённым**, если старший коэффициент равен 1; квадратное уравнение называют **неприведённым**, если старший коэффициент отличен от 1.

Так, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ — неприведённое квадратное уравнение (старший коэффициент равен 2), а $x^2 + 3x - 4 = 0$ — приведённое квадратное уравнение. Любое неприведённое квадратное уравнение можно преобразовать в приведённое. Например, неприведённое уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$ можно заменить приведённым, разделив все его члены на старший коэффициент: $x^2 - 2,5x + 1,5 = 0$.

Кроме приведённых и неприведённых квадратных уравнений, различают также полные и неполные уравнения. **Полное квадратное уравнение** — это уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, у которого коэффициенты b и c отличны от 0. **Неполное квадратное уравнение** — это уравнение, у которого либо $b = 0$, либо $c = 0$ (а может быть и $b = 0$, и $c = 0$). Обратите внимание, о старшем коэффициенте a речь не идёт, он по определению отличен от нуля.

Напомним, что многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, обычно называют *квадратным трёхчленом*.

Определение 3. **Корнем квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$ называют всякое значение переменной x, при котором квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обращается в 0; такое значение переменной x также называют **корнем квадратного трёхчлена.**

Можно сказать и так: корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ — это такое значение x, подстановка которого в уравнение обращает его в верное числовое равенство $0 = 0$.

Например, значение $x = 1$ является корнем квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x + p$, если $p = 3$ (при $x = 1$ трёхчлен $2x^2 - 5x + 3$ обращается в нуль); значение $x = 1$ не является корнем квадратного трёхчлена $2x^2 - 5x + p$, если $p \neq 3$.

Решить квадратное уравнение — значит найти *все* его корни или установить, что корней нет.

Сначала рассмотрим неполные квадратные уравнения, поскольку для их решения, как мы увидим, ничего нового придумывать не надо. Рассмотрим несколько таких уравнений.

Пример 1. Решить неполное квадратное уравнение:

а) $2x^2 - 7x = 0$;	в) $x^2 - 16 = 0$;	д) $3x^2 + 10 = 0$;
б) $-x^2 + 5x = 0$;	г) $-2x^2 + 7 = 0$;	е) $5x^2 = 0$.

Решение. а) $2x^2 - 7x = 0$;

$$x(2x - 7) = 0.$$

Значит, либо $x = 0$, либо $2x - 7 = 0$, откуда находим $x = 3{,}5$.

Итак, уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 3{,}5$.

б) $-x^2 + 5x = 0$;

$-x(x - 5) = 0$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$.

в) $x^2 - 16 = 0$;

$x^2 = 16$.

Ранее, в § 8, мы уже говорили о том, что уравнение вида $x^2 = a$, где $a > 0$, имеет два корня: $\sqrt{a}$ и $-\sqrt{a}$. Следовательно, для уравнения $x^2 = 16$ получаем $x_1 = 4$, $x_2 = -4$ (мы учли, что $\sqrt{16} = 4$). Допускается более экономная запись: $x_{1,2} = \pm 4$.

г) $-2x^2 + 7 = 0$;

$2x^2 = 7$;

$x^2 = 3{,}5$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \sqrt{3,5}$, $x_2 = -\sqrt{3,5}$. И в этом случае можно записать короче: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3,5}$.

д) $3x^2 + 10 = 0;$
$3x^2 = -10.$

Так как выражение $3x^2$ неотрицательно при любых значениях x, то уравнение $3x^2 = -10$ не имеет корней. Иными словами, нет ни одного числа, подстановка которого вместо переменной x обратила бы это уравнение в верное числовое равенство.

Иногда в таких случаях уточняют: нет *действительных* корней. Дело в том, что в математике, кроме действительных чисел, рассматриваются так называемые *мнимые числа*; так вот мнимые корни у этого уравнения есть.

е) Если $5x^2 = 0$, то $x^2 = 0$, откуда находим $x = 0$ — единственный корень уравнения. ■

Этот пример позволяет сделать вывод о том, как решаются неполные квадратные уравнения.

1) Если уравнение имеет вид $ax^2 = 0$, то оно имеет один корень $x = 0$.

2) Если уравнение имеет вид $ax^2 + bx = 0$, то используется метод разложения на множители: $x(ax + b) = 0$; значит, либо $x = 0$, либо $ax + b = 0$. В итоге получаем два корня: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

3) Если уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, то его преобразуют к виду $ax^2 = -c$ и далее $x^2 = -\frac{c}{a}$. Правая часть этого уравнения — число, отличное от нуля. В случае, когда $-\frac{c}{a}$ — отрицательное число, уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ не имеет корней (значит, не имеет корней и исходное уравнение $ax^2 + c = 0$). Если $-\frac{c}{a}$ — положительное число, то уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$ имеет два корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Неполное квадратное уравнение, как мы только что видели, может иметь два корня, один корень, ни одного корня. То же можно сказать и о полном квадратном уравнении. Почему?

Мы с вами знаем, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ служат абсциссы точек пересечения параболы $y = ax^2 + bx + c$ с осью x. Парабола может пересечь ось x в двух точках, может касаться оси x, т. е. иметь с ней лишь одну общую точку,

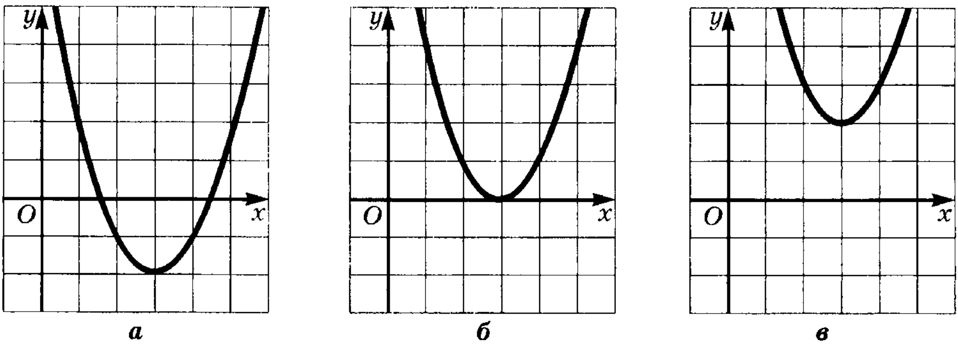


Рис. 113

может вообще не пересекаться с осью x (рис. 113). Это значит, что ***квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может иметь либо два корня, либо один корень, либо вообще не иметь корней.***

В следующем параграфе мы приведём доказательство этого утверждения, не опирающееся на геометрические иллюстрации.

Конечно, неплохо знать, сколько корней имеет квадратное уравнение, но ещё лучше уметь их находить. Если уравнение неполное, то, как мы видели выше, особых проблем не возникает. А если мы имеем полное квадратное уравнение? Далее на примере одного такого уравнения напомним, какими способами мы пользовались до сих пор, если приходилось встречаться с квадратным уравнением.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$.

Решение.

Первый способ. Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$ и разложим его на множители, используя способ группировки; предварительно представим слагаемое $-4x$ в виде $-x - 3x$:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - x - 3x + 3 = (x^2 - x) - (3x - 3) =$$
$$= x(x - 1) - 3(x - 1) = (x - 1)(x - 3).$$

Значит, заданное уравнение можно переписать в виде $(x - 1) \times (x - 3) = 0$, откуда ясно, что уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; при $x = 1$ обращается в нуль множитель $x - 1$, а при $x = 3$ обращается в нуль множитель $x - 3$.

Второй способ. Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 - 4x + 3$ и разложим его на множители, используя метод выделения полного квадрата; предварительно представим слагаемое 3 в виде $4 - 1$:

$$x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов, получим

$$(x - 2 + 1)(x - 2 - 1) = (x - 1)(x - 3).$$

Рассуждая, как в первом способе, находим $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

Третий способ. Предложенное квадратное уравнение можно решить и графическими методами. Вернитесь в § 21, вспомните разные способы графического решения квадратного уравнения и примените один из них к данному уравнению. ■

Итак, мы знаем много способов решения квадратных уравнений. Но наши успехи в решении квадратных уравнений до сих пор зависели от наличия одного из двух благоприятных обстоятельств: 1) квадратный трёхчлен удалось разложить на множители; 2) графики, которые мы используем для графического решения уравнения, пересеклись в «хороших» точках. Надеяться на такие подарки судьбы математики, естественно, не могли. Они искали универсальный способ, пригодный для решения *любых* квадратных уравнений, и нашли его; о нём и пойдёт речь в следующем параграфе.

Вопросы для самопроверки

1. Какое уравнение называют квадратным?
2. Что такое приведённое квадратное уравнение?
3. Что такое неприведённое квадратное уравнение?
4. Преобразуйте уравнение $3x^2 - 5x + 4 = 0$ к виду приведённого квадратного уравнения.
5. Преобразуйте уравнение $1{,}2x^2 + 0{,}4x - 5 = 0$ к уравнению с целыми коэффициентами.
6. Что такое полное квадратное уравнение?
7. Что такое неполное квадратное уравнение?
8. Что называют корнем квадратного уравнения?
9. Сколько корней может иметь квадратное уравнение?
10. Решите неполное квадратное уравнение:

а) $3x^2 = 0$; б) $3x^2 + 6x = 0$; в) $x^2 - 9 = 0$; г) $x^2 + 9 = 0$.

§ 25. ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Применим к квадратному трёхчлену $ax^2 + bx + c$ те же преобразования, которые мы выполняли в § 20, когда доказывали теорему о том, что графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола:

$$ax^2 + bx + c = (ax^2 + bx) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c =$$

$$= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Обычно выражение $b^2 - 4ac$ обозначают буквой D и называют **дискриминантом квадратного трёхчлена** $ax^2 + bx + c$ (или **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$). Таким образом,

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Значит, квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно переписать в виде

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a}$$

и далее

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \qquad (1)$$

Любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ можно преобразовать к виду (1), удобному, как мы сейчас убедимся, для того, чтобы определять число корней квадратного уравнения и находить их.

Теорема 1. ***Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.***

Доказательство. Если $D < 0$, то правая часть уравнения (1) — отрицательное число; в то же время левая его часть при любых значениях x принимает неотрицательные значения. Следовательно, нет ни одного значения x, которое удовлетворяло бы данному уравнению, поэтому уравнение (1) не имеет корней.

Пример 1. Решить уравнение $2x^2 + 4x + 7 = 0$.

Решение. Здесь $a = 2$, $b = 4$, $c = 7$;

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 16 - 56 = -40.$$

Так как $D < 0$, то по теореме 1 данное квадратное уравнение не имеет корней. ■

Теорема 2. ***Если $D = 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, который находится по формуле*** $x = -\frac{b}{2a}$.

Доказательство. Если $D = 0$, то уравнение (1) принимает вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Значит, $x + \frac{b}{2a} = 0$, т. е. $x = -\frac{b}{2a}$ — единственный корень уравнения.

Замечание 1. Помните ли вы, что $x = -\frac{b}{2a}$ — абсцисса вершины параболы, которая служит графиком функции $y = ax^2 + bx + c$? Почему именно это значение оказалось единственным корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$? Ларчик открывается просто: если $D = 0$, то, как мы ранее установили,

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Графиком же функции

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

является парабола с вершиной в точке $\left(-\frac{b}{2a}; 0\right)$ (рис. 114). Таким образом, абсцисса вершины параболы и единственный корень квадратного уравнения при $D = 0$ — одно и то же число.

Пример 2. Решить уравнение $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Решение. Здесь $a = 4$, $b = -20$, $c = 25$;

$$D = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25 = 400 - 400 = 0.$$

Так как $D = 0$, то по теореме 2 данное квадратное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$.

Значит, $x = \frac{20}{2 \cdot 4} = 2{,}5$.

Ответ: 2,5.

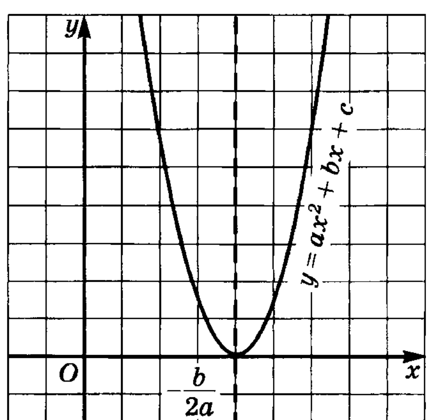


Рис. 114

Замечание 2. Обратите внимание, что $4x^2 - 20x + 25$ — полный квадрат: $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$. Если бы мы это заметили сразу, то решили бы уравнение так: $(2x - 5)^2 = 0$, значит, $2x - 5 = 0$, откуда получаем $x = 2{,}5$. Вообще если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ — это мы отметили ранее в замечании 1.

Теорема 3. ***Если $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которые находятся по формулам:***

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Доказательство. Перепишем квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ в виде (1):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2}.$$

По условию $D > 0$, значит, правая часть уравнения — положительное число. Тогда из уравнения (1) получаем, что

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{D}}{2a}; \quad x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{D}}{2a}.$$

Из первого уравнения находим:

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Из второго уравнения находим:

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Итак, заданное квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}. \qquad (2)$$

Замечание 3. Приведём правдоподобную версию происхождения термина *дискриминант*. Вспомните слово «дискриминация». Что оно означает? Оно означает унижение одних и возвышение других, т. е. различное отношение к разным людям.

Оба слова (и дискриминант, и дискриминация) происходят от латинского *discriminans* — «различающий». Дискриминант *различает* квадратные уравнения по числу корней.

Пример 3. Решить уравнение $3x^2 + 8x - 11 = 0$.

Решение. Здесь $a = 3$, $b = 8$, $c = -11$;

$$D = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-11) = 64 + 132 = 196.$$

Так как $D > 0$, то по теореме 3 данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находятся по формулам (2):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 + \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 + 14}{6} = 1;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-8 - \sqrt{196}}{2 \cdot 3} = \frac{-8 - 14}{6} = -\frac{11}{3} = -3\frac{2}{3}.$$

Ответ: $1; -3\frac{2}{3}$.

Фактически мы с вами выработали следующее правило.

Правило решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

1. Вычислить дискриминант D по формуле
$$D = b^2 - 4ac.$$
2. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень
$$x = -\frac{b}{2a}.$$
4. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Это правило универсально, оно применимо как к полным, так и к неполным квадратным уравнениям. Однако неполные квадратные уравнения обычно по этому правилу не решают, их удобнее решать так, как мы это делали в предыдущем параграфе.

Пример 4. Решить уравнения:

а) $x^2 + 3x - 5 = 0$; в) $2x^2 - x + 3,5 = 0$.

б) $-9x^2 + 6x - 1 = 0$;

Решение. а) Здесь $a = 1$, $b = 3$, $c = -5$;

$$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 9 + 20 = 29.$$

Так как $D > 0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня. Эти корни находим по формулам (2):

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2}.$$

б) Как показывает опыт, удобнее иметь дело с квадратными уравнениями, у которых старший коэффициент положителен. Поэтому сначала умножим обе части уравнения на -1, получим $9x^2 - 6x + 1 = 0$.

Здесь $a = 9$, $b = -6$, $c = 1$;

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0.$$

Так как $D = 0$, то данное квадратное уравнение имеет один корень. Этот корень находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$. Следовательно, $x = \frac{6}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}$.

Это уравнение можно было бы решить иначе: так как $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$, то получаем уравнение $(3x - 1)^2 = 0$, откуда находим: $3x - 1 = 0$, т. е. $x = \frac{1}{3}$.

в) Здесь $a = 2$, $b = -1$, $c = 3{,}5$;

$$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3{,}5 = 1 - 28 = -27.$$

Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней. ■

Приведённое выше правило решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ можно записать в виде одной формулы:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \qquad (3)$$

Если окажется, что дискриминант $D = b^2 - 4ac$ — отрицательное число, то записанная формула не имеет смысла (под знаком квадратного корня находится отрицательное число), значит, корней нет. Если же окажется, что дискриминант равен нулю, то получаем:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a},$$

т. е. один корень (говорят также, что в этом случае квадратное уравнение имеет *два одинаковых корня*: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$). Наконец, если окажется, что $b^2 - 4ac > 0$, то получаются два корня: x_1 и x_2. Само число $\sqrt{b^2 - 4ac}$ в этом случае положительно (как всякий квадратный корень из положительного числа), а двойной знак перед ним означает, что в одном случае (при отыскании x_1) это положительное число прибавляется к числу $-b$, а в другом случае (при отыскании x_2) это положительное число вычитается из числа $-b$.

У вас есть свобода выбора. Хотите — решайте квадратное уравнение подробно, используя сформулированное выше правило; хотите — запишите сразу формулу (3) и с её помощью делайте необходимые выводы.

Пример 5. Решить уравнения:

а) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12} = 0$; б) $3x^2 - 0{,}2x + 2{,}77 = 0$.

Решение. а) Конечно, можно использовать формулу (3), учитывая, что в данном случае $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = -\frac{7}{12}$. Но зачем выполнять действия с дробями, когда проще и приятнее иметь дело с целыми числами? Давайте освободимся от знаменателей. Для этого обе части уравнения нужно умножить на 12, т. е. на наименьший общий знаменатель дробей, служащих коэффициентами уравнения:

$$12\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{7}{12}\right) = 12 \cdot 0;$$

$$8x^2 + 10x - 7 = 0.$$

А теперь воспользуемся формулой (3):

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7)}}{2 \cdot 8};$$

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 + 224}}{16} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{-10 \pm 18}{16};$$

$$x_1 = \frac{-10 + 18}{16} = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-10 - 18}{16} = -\frac{7}{4}.$$

б) Здесь $a = 3$, $b = -0{,}2$, $c = 2{,}77$;

$$D = b^2 - 4ac = (-0{,}2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2{,}77.$$

Прикидка показывает, что дискриминант — отрицательное число. Значит, уравнение не имеет корней. ■

Пример 6. Решить уравнение $5x^2 - 2\sqrt{15}\,x + 1 = 0$.

Решение. Здесь $a = 5$, $b = -2\sqrt{15}$, $c = 1$;

$$D = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{15}\right)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 60 - 20 = 40.$$

Так как $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2\sqrt{15} \pm 2\sqrt{10}}{10} =$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{10} = \frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{5}. \quad ■$$

До сих пор мы активно «эксплуатировали» формулу (3) для отыскания корней квадратного уравнения. Но математики всегда пытаются облегчить себе вычисления. Они обнаружили, что формулу (3) можно упростить в случае, когда коэффициент b (коэффициент при x) имеет вид $2k$ (например, $b = 10$, $b = -20$, $b = 2\sqrt{15}$). В самом деле, подставив в формулу (3) $2k$ вместо b, получим:

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{(2k)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} =$$

$$= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Итак, *корни квадратного уравнения* $ax^2 + 2kx + c = 0$ можно находить по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (4)$$

Сравните эту формулу с формулой (3). В чём её преимущества? Во-первых, в квадрат (под знаком квадратного корня) возводится не число b, а его половина $\left(k = \frac{b}{2}\right)$. Во-вторых, вычитается из этого квадрата не $4ac$, а просто ac. В-третьих, в знаменателе содержится не $2a$, а просто a. Как видите, по крайней мере в трёх моментах мы облегчаем себе выкладки. А вот как выглядит формула (4) для приведённого квадратного уравнения вида $x^2 + 2kx + c = 0$:

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c}. \tag{5}$$

Выше, в примере 5, нам встретилось квадратное уравнение $8x^2 + 10x - 7 = 0$. Решали его так:

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-7)}}{2 \cdot 8} = \frac{-10 \pm \sqrt{324}}{16} = \frac{-10 \pm 18}{16}.$$

В итоге получили: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{4}$.

Теперь решим то же квадратное уравнение по формуле (4), учитывая, что в данном случае $b = 10$, т. е. $2k = 10$, $k = 5$:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 8 \cdot (-7)}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{8} = \frac{-5 \pm 9}{8}.$$

В итоге получили: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{4}$.

Согласитесь, что так работать проще.

Иными словами, если вам встретилось квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$, советуем пользоваться формулой (4) (или (5), если $a = 1$), так как вычисления будут проще.

Замечание 4. У вас может создаться впечатление, что существует несколько формул для отыскания корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ — формулы (2), (3), (4) или (5). На самом деле, это лишь некоторые модификации формулы

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{2}{2 - x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2x - x^2}.$$

Решение. Это — рациональное уравнение. Первое знакомство с рациональными уравнениями состоялось у нас ранее, в § 5. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{2 - x} + \frac{1}{2} = \frac{4}{x(2 - x)}.$$

Общим знаменателем имеющихся дробей служит $2x(2 - x)$. Расставим дополнительные множители:

$$\frac{2^{\backslash 2x}}{2 - x} + \frac{1^{\backslash x(2-x)}}{2} = \frac{4^{\backslash 2}}{x(2 - x)}.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель $2x(2 - x)$, получим:

$$4x + x(2 - x) = 8;$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Для отыскания корней полученного приведённого уравнения с чётным вторым коэффициентом воспользуемся формулой (5):

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{3^2 - 1 \cdot 8} = 3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1.$$

Итак, $x_1 = 4$, $x_2 = 2$. Осталось для найденных корней проверить выполнение условия $2x(2 - x) \neq 0$. Число 4 этому условию удовлетворяет, а число 2 — нет. Значит, 4 — корень заданного уравнения, а 2 — посторонний корень.

Ответ: 4.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$?

2. Что вы можете сказать о числе корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если его дискриминант D отрицателен?

3. Что вы можете сказать о числе корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если его дискриминант D равен нулю?

4. Что вы можете сказать о числе корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если его дискриминант D положителен?

5. Как расположен график функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знака дискриминанта квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$?

6. Как найти корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $D = 0$?

7. Как найти корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $D > 0$?

8. Опишите алгоритм решения квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Примените его для решения уравнения $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

9. Какую формулу удобно использовать при решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если $b = 2k$?

10. Решите уравнение $x^2 - 2x - 120 = 0$ двумя способами:

а) по общей формуле (формула (3) на с. 150);

б) по более простой формуле (формула (4) на с. 152 или (5) на с. 153).

В чём вы видите преимущества второго способа?

§ 26. ТЕОРЕМА ВИЕТА

В этом параграфе мы познакомимся с любопытными соотношениями между корнями квадратного трёхчлена (квадратного уравнения) и его коэффициентами. Эти соотношения впервые описал французский математик *Франсуа Виет* (1540—1603).

Теорема 1 (теорема Виета). ***Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то сумма корней равна $-\frac{b}{a}$, а произведение корней равно $\frac{c}{a}$:***

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Например, для уравнения $3x^2 - 8x - 6 = 0$, не находя его корней (а они есть, поскольку $D > 0$), можно, воспользовавшись теоремой Виета, сразу сказать, что сумма корней равна $\frac{8}{3}$, а произведение корней равно $-\frac{6}{3}$, т. е. -2. А для уравнения $x^2 - 6x + 8 = 0$ (здесь тоже $D > 0$) заключаем: сумма корней равна 6, произведение корней равно 8 (кстати, здесь нетрудно догадаться, чему равны корни: 4 и 2).

Доказательство. Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ находятся по формулам:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},$$

где $D = b^2 - 4ac$ — дискриминант уравнения. Сложив эти корни, получим:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D} - b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Первое соотношение доказано: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

Теперь вычислим произведение корней x_1 и x_2:

$$x_1x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Второе соотношение доказано: $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

Замечание. Теорема Виета справедлива и в том случае, когда квадратное уравнение имеет один корень (т. е. когда $D = 0$), просто в этом случае считают, что уравнение имеет два *одинаковых корня*, к которым и применяют указанные выше соотношения.

Особенно простой вид принимают доказанные соотношения для приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. В этом случае

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1x_2 = q,$$

т. е. ***сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.***

С помощью теоремы Виета можно получить и другие соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Пусть, например, x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. Тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q.$$

Итак,

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q.$$

Установим связь между суммой кубов корней приведённого квадратного уравнения и его коэффициентами:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = -p(x_1^2 + x_2^2 - q) =$$
$$= -p(p^2 - 2q - q) = -p(p^2 - 3q).$$

Итак,

$$x_1^3 + x_2^3 = -p(p^2 - 3q).$$

Выражение с двумя переменными a и b называют *симметрическим*, если оно не меняет свой вид от одновременной замены a на b и b на a. Например, $a + b$, $a^2 + b^2$, $a^3 + b^3$, $a^2b + b^2a$ — симметрические выражения. В принципе *любое симметрическое выражение относительно корней x_1 и x_2 приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ можно выразить через его коэффициенты p и q*. Например:

$$x_1^3x_2^2 + x_1^2x_2^3 = x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) = -pq^2;$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{p^2 - 2q}{q}.$$

Теорема 2 (обратная теореме Виета). ***Если числа x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то эти числа — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.***

Доказательство. Рассмотрим квадратный трёхчлен $x^2 + px + q$ и воспользуемся тем, что по условию $p = -(x_1 + x_2)$, а $q = x_1x_2$. Получим:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = (x^2 - x_1x) - (x_2x - x_1x_2) =$$
$$= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Таким образом, квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ мы преобразовали к виду $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, откуда сразу следует, что его корнями являются числа x_1 и x_2. Теорема доказана.

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, можно устно решать многие квадратные уравнения, не пользуясь громоздкими формулами корней, а также составлять квадратные уравнения с заданными корнями. Приведём ряд примеров.

1) $x^2 - 11x + 24 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = 11$, $x_1x_2 = 24$. Нетрудно догадаться, что

$$x_1 = 8, \quad x_2 = 3.$$

2) $x^2 + 11x + 30 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = -11$, $x_1x_2 = 30$. Нетрудно догадаться, что

$$x_1 = -5, \quad x_2 = -6.$$

Обратите внимание: если свободный член уравнения — положительное число, то оба корня либо положительны, либо отрицательны; это важно учитывать при подборе корней.

3) $x^2 + x - 12 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = -1$, $x_1x_2 = -12$. Нетрудно догадаться, что

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -4.$$

Обратите внимание: если свободный член уравнения — отрицательное число, то корни различны по знаку; это важно учитывать при подборе корней.

4) $5x^2 + 17x - 22 = 0$. Нетрудно заметить, что $x = 1$ удовлетворяет уравнению, т. е. $x_1 = 1$ — корень уравнения. Так как $x_1x_2 = -\frac{22}{5}$, а $x_1 = 1$, то получаем, что $x_2 = -\frac{22}{5}$.

5) $x^2 - 293x + 2830 = 0$. Здесь $x_1 + x_2 = 293$, $x_1x_2 = 2830$. Если обратить внимание на то, что $2830 = 283 \cdot 10$, а $293 = 283 + 10$, то становится ясно, что $x_1 = 283$, $x_2 = 10$ (а теперь представьте,

какие вычисления пришлось бы выполнить для решения этого квадратного уравнения с помощью стандартных формул).

6) Составим квадратное уравнение так, чтобы его корнями служили числа $x_1 = 8$, $x_2 = -4$. Обычно в таких случаях составляют приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Имеем $x_1 + x_2 = -p$, значит, $8 - 4 = -p$, т. е. $p = -4$. Далее, $x_1x_2 = q$, т. е. $8 \cdot (-4) = q$, откуда получаем $q = -32$. Итак, $p = -4$, $q = -32$, следовательно, искомое квадратное уравнение таково: $x^2 - 4x - 32 = 0$.

Теорему 2 удобно использовать для устного решения приведённых квадратных уравнений с целыми коэффициентами, как это было в только что рассмотренных примерах 1), 2), 3) и 5). Дело в том, что если у таких квадратных уравнений есть рациональные корни, то это обязательно целые числа, а целые числа, служащие корнями уравнения, нетрудно угадать (в чём ранее мы уже убедились). Рассмотрим приведённое квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$, где p и q — целые числа. Его дискриминант $D = p^2 - 4q$ — чётное число, если p — чётное, и нечётное число, если p — нечётное. Тогда и $\sqrt{D}$ — чётное число при чётном p и нечётное число при нечётном p (мы рассматриваем случай, когда этот корень — целое число). Составим формулу корней уравнения: $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{D}}{2}$. Замечаем, что и при чётном и при нечётном p числитель — чётное число. Таким образом, дробь можно сократить на 2, а потому оба корня — целые числа.

Пример 1. Не используя формулу корней, решить неприведённое квадратное уравнение $6x^2 + 5x - 6 = 0$.

Решение. Умножим все члены уравнения на 6 — на коэффициент при старшем члене. Получим $36x^2 + 5 \cdot 6x - 36 = 0$. Введём новую переменную $y = 6x$. Тогда уравнение примет вид приведённого квадратного уравнения $y^2 + 5y - 36 = 0$. Нетрудно подобрать его целочисленные корни: -9 и 4. Но $y = 6x$, значит, осталось решить два уравнения: $6x = -9$; $6x = 4$. Получаем соответственно $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$. ■

Пример 2. Не решая уравнения $2x^2 + 5x - 6 = 0$, составить уравнение, корни которого равны квадратам корней заданного уравнения.

Решение. Будем составлять интересующее нас уравнение в виде $y^2 + Py + Q = 0$. По условию его корни y_1 и y_2 должны быть равны соответственно x_1^2 и x_2^2, где x_1 и x_2 — корни заданного квадратного уравнения.

Преобразуем заданное уравнение к виду приведённого уравнения; для этого разделим все его члены на коэффициент при старшем члене. Получим $x^2 + 2{,}5x - 3 = 0$. Здесь $p = 2{,}5$, $q = -3$. Следовательно,

$$x_1x_2 = -3,$$

$$x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q = 6{,}25 - 2(-3) = 12{,}25.$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты P и Q:

$$P = -(y_1 + y_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -12{,}25,$$

$$Q = y_1y_2 = x_1^2x_2^2 = (x_1x_2)^2 = (-3)^2 = 9.$$

Значит, интересующее нас квадратное уравнение таково:

$$y^2 - 12{,}25y + 9 = 0, \quad \text{или} \quad 4y^2 - 49y + 36 = 0. \ \blacksquare$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Виета.
2. Чему равна сумма корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ (если они есть)?
3. Чему равно произведение корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ (если они есть)?
4. Объясните, как, не применяя формулу корней квадратного уравнения, найти устно корни уравнения: а) $x^2 - 8x + 15 = 0$; б) $x^2 + x - 12 = 0$.
5. Не находя корней квадратного уравнения $x^2 - 4x - 7 = 0$, найдите сумму квадратов его корней.

§ 27. РАЗЛОЖЕНИЕ КВАДРАТНОГО ТРЁХЧЛЕНА НА ЛИНЕЙНЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Основное назначение теоремы Виета не в том, что обнаружились какие-то соотношения между корнями и коэффициентами квадратного уравнения — это, наверное, любопытно только математикам и тем, кто интересуется математикой. Гораздо важнее то, что с помощью теоремы Виета выводится формула разложения квадратного трёхчлена на множители, без которой в дальнейшем не обойтись.

Теорема 1. ***Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Тогда справедливо тождество***

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доказательство. Преобразуем квадратный трёхчлен к виду $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ и положим $\frac{b}{a} = p$, $\frac{c}{a} = q$. Получим $ax^2 + bx + c = a(x^2 + px + q)$. В предыдущем параграфе при доказательстве теоремы 2 мы установили, что если x_1 и x_2 — корни трёхчлена $x^2 + px + q$, то

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Но тогда для квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ получаем:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (1)$$

Замечание. Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, т. е. $x_1 = x_2$ (кратный корень), то доказанная формула принимает вид

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Итак, мы доказали, что если квадратный трёхчлен имеет корни, то его можно разложить на линейные множители. Верно и обратное утверждение: если квадратный трёхчлен раскладывается на линейные множители, то он имеет корни.

В самом деле, пусть $ax^2 + bx + c = (kx + l)(mx + n)$. Полученное произведение можно переписать так: $k\left(x + \frac{l}{k}\right)m\left(x + \frac{n}{m}\right)$.

Значит,

$$ax^2 + bx + c = km\left(x + \frac{l}{k}\right)\left(x + \frac{n}{m}\right).$$

Числа $-\frac{l}{k}$ и $-\frac{n}{m}$ — корни квадратного трёхчлена.

Фактически мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. ***Если квадратный трёхчлен не имеет корней, то его нельзя разложить на линейные множители.***

Пример 1. Разложить на множители многочлен:

а) $3x^2 - 10x + 3$; б) $x^4 + 5x^2 + 6$.

Решение. а) Решив уравнение $3x^2 - 10x + 3 = 0$, найдём корни квадратного трёхчлена $3x^2 - 10x + 3$: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Воспользовавшись формулой (1), получим:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Есть смысл вместо $3\left(x - \frac{1}{3}\right)$ написать $3x - 1$; получим:

$$3x^2 - 10x + 3 = (x - 3)(3x - 1).$$

Между прочим, заданный квадратный трёхчлен можно разложить на множители и без применения формулы (1), использовав способ группировки:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3x^2 - 9x - x + 3 =$$
$$= 3x(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(3x - 1).$$

Но, как видите, при этом способе успех зависит от того, додумаемся мы до удачной группировки или нет, тогда как использование формулы (1) гарантирует успех.

б) Введём новую переменную $y = x^2$. Это позволит переписать заданное выражение в виде квадратного трёхчлена относительно переменной y, а именно в виде $y^2 + 5y + 6$. Найдём корни этого трёхчлена: $y_1 = -2$, $y_2 = -3$. Значит,

$$y^2 + 5y + 6 = (y + 2)(y + 3).$$

Осталось учесть, что $y = x^2$. Таким образом,

$$x^4 + 5x^2 + 6 = (x^2 + 2)(x^2 + 3). \quad \blacksquare$$

Пример 2. Сократить дробь:

а) $\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12}$; б) $\dfrac{2x + \sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x} - x}$.

Решение. а) Из уравнения $2x^2 + 5x + 2 = 0$ находим: $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x - (-2))\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) =$$
$$= 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 2)(2x + 1).$$

Из уравнения $x^2 - 4x - 12 = 0$ находим: $x_1 = 6$, $x_2 = -2$. Поэтому

$$x^2 - 4x - 12 = (x - 6)(x - (-2)) = (x - 6)(x + 2).$$

А теперь сократим заданную дробь на $x + 2$ (при условии $x \neq -2$):

$$\frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4x - 12} = \frac{(x + 2)(2x + 1)}{(x - 6)(x + 2)} = \frac{2x + 1}{x - 6}.$$

б) Введём новую переменную $y = \sqrt{x}$. Это позволит переписать заданное выражение в виде $\frac{2y^2 + y - 3}{y^3 - y^2}$. Решив уравнение $2y^2 + y - 3 = 0$, получим: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Значит,

$$2y^2 + y - 3 = 2(y - 1)\left(y + \frac{3}{2}\right) = (y - 1)(2y + 3);$$

$$\frac{2y^2 + y - 3}{y^3 - y^2} = \frac{(y - 1)(2y + 3)}{y^2(y - 1)} = \frac{2y + 3}{y^2}.$$

Осталось учесть, что $y = \sqrt{x}$. Итак, $\frac{2x + \sqrt{x} - 3}{x\sqrt{x} - x} = \frac{2\sqrt{x} + 3}{x}$.

Сокращение выполнено при условии $y \neq 1$, т. е. $\sqrt{x} \neq 1$, $x \neq 1$. Если говорить об области допустимых значений переменной x, то следует добавить ещё одно условие: $x > 0$. ■

Вопросы для самопроверки

1. Запишите формулу разложения квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ на линейные множители. Примените эту формулу для разложения на множители трёхчлена $2x^2 - 5x + 2$.

2. В каком случае квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ нельзя разложить на линейные множители?

3. Какой вид принимает формула разложения квадратного трёхчлена на множители, если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю?

§ 28. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Напомним, что алгебраическое выражение, составленное из чисел и переменных с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень, называют *рациональным*. Если $r(x)$ — рациональное выражение, то уравнение $r(x) = 0$ называют *рациональным уравнением*. Впрочем, удобнее пользоваться несколько более широким толкованием термина «рациональное уравнение», понимая под этим уравнение вида $h(x) = q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ — рациональные выражения.

То, что рациональные уравнения могут служить математическими моделями реальных ситуаций, вам известно; целый ряд соответствующих примеров был ранее рассмотрен в § 5 и в учебнике «Алгебра–7». Теперь поговорим об этом более подробно.

Пример 1. Перегон в 60 км поезд должен был проехать с постоянной скоростью за определённое расписанием время. Простояв перед перегоном у семафора 5 мин, машинист вынужден был увеличить скорость прохождения перегона на 10 км/ч, чтобы наверстать к окончанию прохождения перегона потерянные 5 мин. С какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию?

Решение.

<u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость поезда по расписанию. Так как протяжённость перегона равна 60 км, то время, отведённое расписанием на его прохождение, равно $\frac{60}{x}$ ч. Фактически поезд прошёл перегон в 60 км со скоростью $(x + 10)$ км/ч, следовательно, время, затраченное на прохождение перегона, равно $\frac{60}{x+10}$ ч.

Из двух величин $\frac{60}{x}$ ч и $\frac{60}{x+10}$ ч первая больше второй на 5 мин, т. е. на $\frac{1}{12}$ ч. Значит, мы приходим к уравнению

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = \frac{1}{12}.$$

Математическая модель задачи составлена. Это — рациональное уравнение.

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Освободимся от знаменателей, учтя, что общим знаменателем служит $12x(x + 10)$, и расставив дополнительные множители:

$$\frac{60^{\lfloor 12(x+10)}}{x} - \frac{60^{\lfloor 12x}}{x+10} = \frac{1^{\lfloor x(x+10)}}{12}.$$

Получим:

$$720x + 7200 - 720x = x^2 + 10x;$$
$$x^2 + 10x - 7200 = 0;$$
$$x_1 = 80, \quad x_2 = -90.$$

Оба значения удовлетворяют условию $12x(x + 10) \neq 0$, следовательно, эти значения — корни составленного рационального уравнения.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, с какой скоростью поезд должен был пройти перегон по расписанию? Именно эту величину мы обозначили буквой x. Получилось, что либо $x = 80$, либо $x = -90$. Второе значение нас явно не устраивает, поскольку скорость движения поезда (в реальной действительности) не может выражаться отрицательным числом. Значит, выбираем значение $x = 80$, это и есть ответ на вопрос задачи.

Ответ: 80 км/ч.

Сделаем некоторые комментарии к выполненному решению.

1. Конечно, рассмотренная ситуация несколько идеализирована: вряд ли в реальной жизни поезд пройдёт весь перегон с постоянной скоростью, ведь всегда есть и ускорения, и замедления. Но на такую идеализацию математикам приходится идти сознательно.

2. В очередной раз обращаем ваше внимание на то, что мы воспользовались привычной схемой рассуждений: составление математической модели, работа с составленной моделью, ответ на вопрос задачи.

3. Подчеркнём, что первый этап, т. е. составление математической модели, — ключевой в решении задачи. На этом этапе осуществляется перевод условия задачи с обыденного языка на математический, т. е. выполняется серьёзная творческая работа. Основательная работа проводится и на втором этапе, но эта работа не творческая, а чисто техническая, поскольку, действуя по алгоритму, особенно не приходится думать.

Вернёмся к рассмотренной задаче и проанализируем, как осуществляется перевод с обыденного языка на математический.

Искомую величину мы обозначили буквой x. Это дало нам возможность оперировать искомой скоростью, ведь с точки зрения алгебры не важно, имеем ли мы дело с числами или с буквами.

Зная путь (60 км) и скорость (x км/ч) и использовав физический закон равномерного движения $s = vt$ (s — путь, v — скорость, t — время), мы нашли время, предусмотренное расписанием, — оно выражается дробью $\frac{60}{x}$ ч.

По условию перегон был пройден со скоростью, на 10 км/ч большей, чем предполагалось расписанием. Перевод этого условия на математический язык дал следующее: $(x + 10)$ км/ч — фактическая скорость прохождения перегона, а $\frac{60}{x + 10}$ ч — фактическое время движения поезда по перегону в 60 км.

Далее, согласно условию на рассматриваемом перегоне машинист наверстал 5 мин, т. е. $\frac{1}{12}$ ч. Иными словами, время, предусмотренное расписанием ($\frac{60}{x}$ ч), больше фактического времени ($\frac{60}{x + 10}$ ч) на $\frac{1}{12}$ ч. На математическом языке это означает, что $\frac{60}{x} - \frac{60}{x + 10} = \frac{1}{12}$ (из большей величины вычли меньшую и получили указанную в условии разность).

Обратите внимание на то, что в обеих частях уравнения должны содержаться величины *одного и того же наименования* (в данном уравнении это — часы).

Пример 2. Пристани A и B расположены на реке, причём B — на 80 км ниже по течению, чем A. Катер прошёл путь из A в B и обратно за 8 ч 20 мин. За какое время катер прошёл расстояние от A до B и расстояние от B до A, если известно, что его собственная скорость (скорость в стоячей воде) равна 20 км/ч?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x км/ч — скорость течения реки. Тогда:

$(20 + x)$ км/ч — скорость движения катера по течению;

$(20 - x)$ км/ч — скорость движения катера против течения;

$\frac{80}{20 + x}$ ч — время движения катера по течению;

$\frac{80}{20 - x}$ ч — время движения катера против течения.

По условию на путь туда и обратно катер затратил 8 ч 20 мин, т. е. $8\frac{1}{3}$ ч, или $\frac{25}{3}$ ч. Но время, затраченное катером на путь из A в B и обратно, выражается суммой дробей $\left(\frac{80}{20 + x} + \frac{80}{20 - x}\right)$ ч.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{80}{20 + x} + \frac{80}{20 - x} = \frac{25}{3}.$$

<u>Второй этап.</u> *Работа с составленной моделью.*

Есть смысл разделить обе части уравнения почленно на 5 хотя бы для того, чтобы облегчить дальнейшие вычисления:

$$\frac{16}{20 + x} + \frac{16}{20 - x} = \frac{5}{3}.$$

Освободимся от знаменателей, учтя, что общим знаменателем служит $3(20 + x)(20 - x)$, и расставив дополнительные множители:

$$\frac{16^{\backslash 3(20 - x)}}{20 + x} + \frac{16^{\backslash 3(20 + x)}}{20 - x} = \frac{5^{\backslash (20 - x)(20 + x)}}{3}.$$

Выполним дальнейшие преобразования:

$$48(20 - x) + 48(20 + x) = 5(400 - x^2);$$
$$5x^2 - 80 = 0;$$
$$x_{1,2} = \pm 4.$$

Оба эти значения удовлетворяют условию $3(20 + x)(20 - x) \neq 0$, значит, оба они являются корнями составленного рационального уравнения.

<u>Третий этап.</u> *Ответ на вопрос задачи.*

Во-первых, за x мы приняли скорость течения реки, а скорость отрицательным числом выражаться не может. Поэтому из двух значений 4 и -4 мы выбираем первое и отбрасываем второе.

Во-вторых, нас не спрашивают, чему равна скорость течения реки, а спрашивают, *какое время* катер плыл из A в B и из B в A. Время движения из A в B выражается дробью $\frac{80}{20 + x}$. Подставив вместо x число 4, получим $\frac{80}{24}$, т. е. $\frac{10}{3}$, или $3\frac{1}{3}$. Учтём, что $3\frac{1}{3}$ ч = 3 ч 20 мин.

Время движения катера из B в A выражается дробью $\frac{80}{20 - x}$. Подставив вместо x число 4, получим $\frac{80}{16}$, т. е. 5 ч.

Ответ: 3 ч 20 мин; 5 ч.

Разумеется, не следует думать, что мы с вами будем решать задачи только на равномерное движение, как было в примерах 1 и 2. Самые разные ситуации моделируются с помощью рациональных уравнений, и общая схема решения таких задач по сути дела одна и та же. В этом мы сейчас убедимся.

Пример 3. Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, один его катет на 4 см больше другого. Чему равны стороны этого треугольника?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x см — меньший катет треугольника, тогда больший катет равен $(x + 4)$ см (ведь он на 4 см больше). Так как периметр треугольника равен 48 см, то гипотенуза равна $48 - x - (x + 4)$, т. е. $(44 - 2x)$ см.

На рисунке 115 представлена геометрическая модель задачи — прямоугольный треугольник с обозначенными длинами сторон. Применив к этому треугольнику теорему Пифагора, получим

$$x^2 + (x + 4)^2 = (44 - 2x)^2.$$

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив уравнение, получим: $x_1 = 80$, $x_2 = 12$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нас спрашивают, чему равны стороны треугольника. Меньший катет мы обозначили буквой x. Для x существуют две возможности: либо $x = 80$ см, либо $x = 12$ см. Первое значение нас не устраивает. Почему?

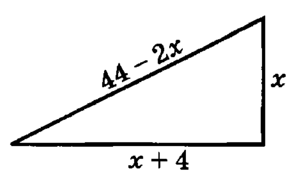


Рис. 115

Да потому, что одна сторона треугольника не может быть больше его периметра, а периметр треугольника по условию равен 48 см. Остаётся одна возможность: $x = 12$ см. Тогда второй катет, который на 4 см больше, равен 16 см, а гипотенуза равна $48 - 12 - 16 = 20$ см.

Ответ: 12 см, 16 см, 20 см.

Замечание. Математическую модель только что решённой задачи можно было бы составить иначе. Начнём так же: x см — меньший катет, $(x + 4)$ см — больший катет треугольника. Гипотенузу выразим по теореме Пифагора: $\sqrt{x^2 + (x + 4)^2}$ см. Так как по условию периметр треугольника (сумма трёх его сторон) равен 48 см, получаем уравнение

$$x + (x + 4) + \sqrt{x^2 + (x + 4)^2} = 48$$

и далее $\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$. В этом уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, такие уравнения называют *иррациональными*. Но как их решать, мы с вами ещё не обсуждали. Вернёмся к решению этого уравнения позднее, в § 38.

Пример 4. В райцентре два кинотеатра: «Факел» и «Слава», первый — на 400, а второй — на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в зрительном зале кинотеатра «Факел», и, кроме того, в каждом ряду мест на 5 больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число рядов в кинотеатре «Факел». Тогда:

$x + 4$ — число рядов в кинотеатре «Слава»;

$\frac{400}{x}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел»;

$\frac{600}{x + 4}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава».

По условию в каждом ряду к/т «Слава» на 5 мест больше, чем в каждом ряду к/т «Факел». Это значит, что

$$\frac{600}{x + 4} - \frac{400}{x} = 5.$$

Математическая модель составлена. Это — рациональное уравнение.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив уравнение, получим: $x_1 = 20$, $x_2 = 16$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли число рядов в к/т «Факел». В соответствии с полученными корнями мы должны проанализировать два случая: либо в к/т «Факел» 20 рядов и, следовательно, 20 мест в каждом ряду (поскольку в к/т «Факел» всего 400 мест в зрительном зале), либо в этом кинотеатре 16 рядов по 25 мест в каждом ряду. В первом случае в к/т «Слава» будет 24 ряда (по условию в к/т «Слава» на 4 ряда больше) по 25 мест в каждом ряду (по условию в каждом ряду к/т «Слава» на 5 мест больше, чем в к/т «Факел»). Но по условию в каждом ряду к/т «Слава» более 25 мест, значит, первый случай не удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим вторую возможность: в к/т «Факел» 16 рядов по 25 мест в каждом. Тогда в к/т «Слава» будет 20 рядов по 30 мест в каждом. Это удовлетворяет условию.

Итак, из двух указанных возможностей выбираем вторую, а это означает, что в к/т «Факел» 16 рядов.

Ответ: 16 рядов.

Пример 5. Двое рабочих выполняют некоторый заказ. После 45 мин совместной работы первый получил другое задание, а второй завершил выполнение заказа через 2 ч 15 мин. Если бы каждый рабочий выполнял заказ по отдельности, то второму понадобилось бы для этого на 1 ч больше, чем первому. За какое время они смогли бы выполнить заказ при полноценной совместной работе?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Если речь идёт о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане (т. е. не сказано, сколько деталей надо изготовить, сколько кубометров земли вынуть, сколько страниц перепечатать и т. д.), то объём работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x — число часов, необходимых первому рабочему для самостоятельного выполнения заказа. Тогда второму понадобится для этого $(x + 1)$ ч.

Если объём всей работы (т. е. 1) разделить на число часов, необходимых для выполнения всей работы, то узнаем долю работы, выполняемую за 1 ч. Итак,

$\frac{1}{x}$ — доля работы, которую выполняет первый рабочий за 1 ч,

$\frac{1}{x+1}$ — доля работы, которую выполняет второй рабочий за 1 ч.

По условию первый отработал 45 мин, т. е. $\frac{3}{4}$ ч. Доля его работы за это время выражается формулой $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x}$, т. е. $\frac{3}{4x}$. Второй отработал вместе с первым 45 мин и в одиночку 2 ч 15 мин. Таким образом, он работал 3 ч. Доля его работы за это время выражается формулой $3 \cdot \frac{1}{x+1}$, т. е. $\frac{3}{x+1}$.

Поскольку вместе они выполнили весь заказ (т. е. 1), составляем уравнение

$$\frac{3}{4x} + \frac{3}{x+1} = 1.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив уравнение, получим: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{1}{4}$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли число часов, необходимых первому рабочему для выполнения всего заказа в одиночку. Из найденных двух значений второе явно нас не устраивает. Таким образом, первый рабочий может выполнить всю работу за 3 ч. Значит, второму рабочему нужно для этого 4 ч. Работая вместе, они сделают за 1 ч долю работы, равную $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$, т. е. $\frac{7}{12}$ всей работы. Следовательно, вся работа будет выполнена за $\frac{12}{7}$ ч.

Ответ: $1\frac{5}{7}$ ч.

Пример 6. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Сплав состоит из меди и олова. Проследим за содержанием одного из этих веществ, например олова, в первоначальном и полученном сплавах.

В 12 кг сплава было 55% олова, т. е. $12 \cdot \frac{55}{100} = 6{,}6$ кг. Примем за x кг массу добавленного олова. Масса нового сплава равна $(12 + x)$ кг, и олова в нём 60%, т. е.

$$(12 + x) \cdot \frac{60}{100} = \frac{3}{5}(12 + x) \text{ кг.}$$

Итак, с одной стороны, масса олова в новом сплаве равна $(6{,}6 + x)$ кг, а с другой — выражается формулой $\frac{3}{5}(12 + x)$ кг. Значит,

$$\frac{3}{5}(12 + x) = 6{,}6 + x.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив уравнение, получим $x = 1{,}5$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли то, что надо найти. Значит, к первоначальному сплаву следует добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

Замечание. Наметим коротко ход составления уравнения, основанный на прослеживании за содержанием в первоначальном и полученном сплавах не олова, а меди. В первоначальном сплаве меди было 45%, т. е. $12 \cdot \frac{45}{100}$ кг. В $(12 + x)$ кг нового сплава меди стало 40%, т. е. $(12 + x) \cdot \frac{40}{100}$ кг. Получаем уравнение

$$(12 + x) \cdot \frac{40}{100} = 12 \cdot \frac{45}{100} + x.$$

Пример 7. Из сосуда, содержащего 54 л кислоты, вылили несколько литров и налили столько же литров воды. Затем вылили столько же, сколько в первый раз, литров смеси, после чего в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

Решение.

Первый этап. *Составление математической модели.*

Примем за x л количество кислоты, вылитой в первый раз, после чего в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты. Долив сосуд водой, получили 54 л смеси, в которой растворилось $(54 - x)$ л кислоты. Значит, в одном литре смеси содержится $\frac{54 - x}{54}$ л кислоты.

Во второй раз вылили x л смеси, в которой содержится $\frac{54 - x}{54} \cdot x$ л кислоты, а всего за 2 раза вылили $54 - 24 = 30$ л кислоты. Составляем уравнение:

$$x + \frac{54 - x}{54} \cdot x = 30.$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив уравнение, находим два корня: $x_1 = 90$, $x_2 = 18$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

За x мы приняли количество кислоты, вылитой в первый раз. По смыслу задачи должно выполняться неравенство $0 < x < 54$. Из найденных значений x этому условию удовлетворяет лишь значение $x = 18$.

Ответ: 18 л.

ТЕМА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Соотношение между корнями и коэффициентами квадратного уравнения.

ГЛАВА

5 НЕРАВЕНСТВА

§ 29. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Свойства числовых равенств помогали нам решать уравнения, т. е. находить те значения переменной, при которых уравнение обращается в верное числовое равенство. Точно так же свойства числовых неравенств помогут нам решать *неравенства с переменной*, т. е. находить те значения переменной, при которых неравенство с переменной обращается в верное числовое неравенство. Каждое такое значение переменной обычно называют *решением неравенства с переменной*.

Рассмотрим, например, неравенство

$$2x + 5 < 7.$$

Подставив вместо x значение 0, получим $5 < 7$ — верное неравенство; значит, $x = 0$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 1, получим $7 < 7$ — неверное неравенство; поэтому $x = 1$ не является решением данного неравенства. Подставив вместо x значение -3, получим $-6 + 5 < 7$, т. е. $-1 < 7$ — верное неравенство; следовательно, $x = -3$ — решение данного неравенства. Подставив вместо x значение 2,5, получим $2 \cdot 2{,}5 + 5 < 7$, т. е. $10 < 7$ — неверное неравенство. Значит, $x = 2{,}5$ не является решением неравенства.

Но вы же понимаете, что это — тупиковый путь: ни один математик не станет так решать неравенство, ведь *все числа* невозможно перебрать! Вот тут-то и нужно использовать свойства числовых неравенств, рассуждая следующим образом.

Нас интересуют такие числа x, при которых $2x + 5 < 7$ — верное числовое неравенство. Но тогда и $2x + 5 - 5 < 7 - 5$ — верное неравенство: к обеим частям неравенства прибавили одно и то же число -5. Получили более простое неравенство $2x < 2$. Разделив обе его части на положительное число 2, получим верное неравенство $x < 1$.

Это значит, что решением неравенства является любое число x, которое меньше 1. Эти числа заполняют открытый луч $(-\infty; 1)$. Обычно говорят, что этот луч — *решение неравенства* $2x + 5 < 7$ (точнее было бы говорить о *множестве решений*). Таким образом, можно использовать два варианта записи решений данного неравенства: $x < 1$ или $(-\infty; 1)$.

Свойства числовых неравенств позволяют руководствоваться при решении неравенств следующими правилами.

Правило 1. *Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не изменив при этом знак неравенства.*

Правило 2. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не изменив при этом знак неравенства.*

Правило 3. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.*

Применим эти правила для решения **линейных неравенств**, т. е. неравенств вида

$$ax + b > 0 \text{ (или } ax + b < 0),$$

где a и b — любые числа, за одним исключением — $a \neq 0$, и неравенств, сводящихся к указанному виду.

Пример 1. Решить неравенство $3x - 5 \geqslant 7x - 15$.

Решение. Перенесём член $7x$ в левую часть неравенства, а член -5 — в правую часть неравенства, не забыв при этом изменить знаки и у члена $7x$, и у члена -5 (руководствуемся правилом 1). Тогда получим:

$$3x - 7x \geqslant -15 + 5, \text{ т. е. } -4x \geqslant -10.$$

Разделим обе части последнего неравенства на одно и то же отрицательное число -4, не забыв при этом перейти к неравенству противоположного смысла (руководствуясь правилом 3). Получим $x \leqslant 2{,}5$. Это и есть решение заданного неравенства.

Как мы условились, для записи решения можно использовать обозначение соответствующего промежутка числовой прямой: $(-\infty; 2{,}5]$.

Ответ: $x \leqslant 2{,}5$, или $(-\infty; 2{,}5]$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}>2x-\frac{1}{15}.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения (правило 2). Это позволит нам освободиться от знаменателей:

$$15\left(\frac{x}{3}+\frac{2x-1}{5}\right)>15\left(2x-\frac{1}{15}\right);$$
$$5x+3(2x-1)>30x-1;$$
$$5x+6x-3>30x-1;$$
$$11x-3>30x-1.$$

Воспользовавшись для последнего неравенства правилом 1, получим:

$$11x-30x>-1+3;$$
$$-19x>2.$$

Наконец, применив правило 3, получим $x<-\frac{2}{19}$.

Ответ: $x<-\frac{2}{19}$, или $\left(-\infty;-\frac{2}{19}\right)$.

Пример 3. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x-1>3,\\3x-2<11;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-1>3,\\3x-2\geqslant 11;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x-1\leqslant 3,\\3x-2\geqslant 11.\end{cases}$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, находим: $2x>4$, $x>2$; решая второе неравенство системы, находим: $3x<13$, $x<\frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для выделения первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 116, *а*). Решением системы неравенств будет *пересечение решений неравенств системы* (на чертеже это промежуток, на котором обе штриховки совпали). В рассматриваемом примере получаем интервал $\left(2;\frac{13}{3}\right)$.

б) Решая первое неравенство системы, находим $x>2$, решая второе неравенство системы, находим: $3x\geqslant 13$, $x\geqslant\frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав

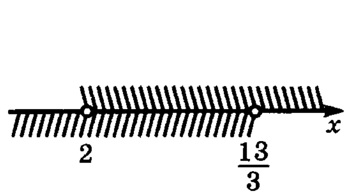


Рис. 116, *а*

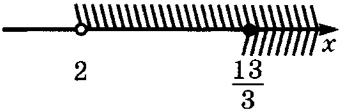


Рис. 116, *б*

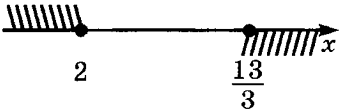


Рис. 116, *в*

для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 116, *б*). Решением системы неравенств будет луч $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$.

в) Решая первое неравенство системы, находим $x \leqslant 2$; решая второе неравенство системы, находим $x \geqslant \frac{13}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 116, *в*). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы. Оно пусто, значит, система неравенств не имеет решений.

Ответ: а) $2 < x < \frac{13}{3}$; б) $x \geqslant \frac{13}{3}$; в) нет решений.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте три правила решения неравенства с одной переменной.

2. Какие неравенства называют линейными неравенствами с одной переменной?

3. Как, применяя правила решения неравенства, вы решите неравенство:

а) $2x + 7 \leqslant 0$; б) $5x + 6 > 7x + 10$?

§ 30. КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Квадратным неравенством называют неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \text{ где } a \neq 0$$

(вместо знака > может быть, разумеется, любой другой знак неравенства). Всеми необходимыми для решения таких неравенств теоретическими сведениями мы с вами располагаем, в чём сейчас и убедимся.

Пример 1. Решить неравенства:

а) $x^2 - 2x - 3 > 0$; в) $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$;

б) $x^2 - 2x - 3 < 0$; г) $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

Решение. а) Рассмотрим параболу $y = x^2 - 2x - 3$, изображённую на рисунке 117. Решить неравенство $x^2 - 2x - 3 > 0$ — это значит ответить на вопрос, при каких значениях x ординаты точек параболы положительны. Замечаем, что $y > 0$, т. е. график функции расположен выше оси x, при $x < -1$ или при $x > 3$. Следовательно, решениями неравенства служат все точки открытого луча $(-\infty; -1)$, а также все точки открытого луча $(3; +\infty)$. Используя знак $\cup$ (*знак объединения множеств*), ответ можно записать так:

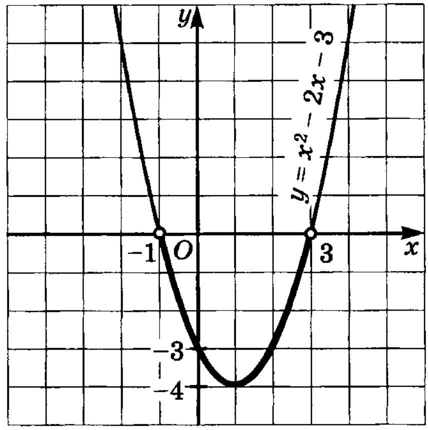


Рис. 117

$$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty).$$

Впрочем, ответ можно записать и так: $x < -1$; $x > 3$.

б) Неравенство $x^2 - 2x - 3 < 0$, или $y < 0$, где $y = x^2 - 2x - 3$, также можно решить с помощью рисунка 117: график расположен ниже оси x, если $-1 < x < 3$. Поэтому решениями данного неравенства служат все точки интервала $(-1; 3)$.

в) Неравенство $x^2 - 2x - 3 \geqslant 0$ отличается от неравенства $x^2 - 2x - 3 > 0$ тем, что в ответ надо включить и корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$, т. е. точки $x = -1$ и $x = 3$. Таким образом, решениями данного нестрогого неравенства являются все точки луча $(-\infty; -1]$, а также все точки луча $[3; +\infty)$.

г) Неравенство $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$ отличается от неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$ тем, что в ответ надо включить и корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$, т. е. $x = -1$ и $x = 3$. Следовательно, решениями данного нестрогого неравенства служат все точки отрезка $[-1; 3]$. ■

Практичные математики обычно говорят так: зачем нам, решая неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, аккуратно строить параболу — график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (как это было сделано в примере 1)? Достаточно сделать схематический набросок графика, для чего следует лишь найти корни квадратного трёхчлена (точки пересечения параболы с осью x) и определить, куда направлены ветви параболы — вверх или вниз. Этот схема-

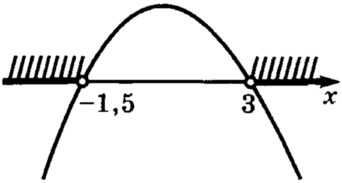


Рис. 118

тический набросок даст наглядное истолкование решению неравенства.

Пример 2. Решить неравенство $-2x^2 + 3x + 9 < 0$.

Решение. 1) Найдём корни квадратного трёхчлена $-2x^2 + 3x + 9$: $x_1 = 3$; $x_2 = -1{,}5$.

2) Парабола, служащая графиком функции $y = -2x^2 + 3x + 9$, пересекает ось x в точках 3 и −1,5, а ветви параболы направлены вниз, поскольку старший коэффициент — отрицательное число −2. На рисунке 118 представлен набросок графика.

3) Используя рисунок 118, делаем вывод: $y < 0$ на тех промежутках оси x, где график расположен ниже оси x; в данном случае это два открытых луча $(-\infty; -1{,}5)$ и $(3; +\infty)$.

Ответ: $x < -1{,}5$; $x > 3$.

Пример 3. Решить неравенство $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$.

Решение. 1) Из уравнения $4x^2 - 4x + 1 = 0$ находим $x_{1,2} = \frac{1}{2}$.

2) Квадратный трёхчлен имеет один корень $x = \frac{1}{2}$; это значит, что парабола, служащая графиком функции $y = 4x^2 - 4x + 1$, не пересекает ось x, а *касается* её в точке $x = 0{,}5$. Ветви параболы направлены вверх (рис. 119).

3) С помощью геометрической модели, представленной на рисунке 119, устанавливаем, что заданное неравенство выполняется только в точке $x = 0{,}5$, поскольку при всех других значениях x ординаты графика положительны.

Ответ: $x = 0{,}5$.

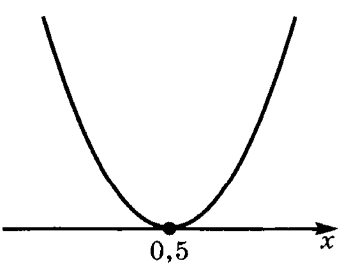


Рис. 119

Вы, наверное, заметили, что фактически в примерах 1, 2, 3 использовался вполне определённый алгоритм решения квадратных неравенств вида $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) в случае, когда квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни, т. е. при $D \geqslant 0$.

Алгоритм решения квадратного неравенства
$ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) при $D \geqslant 0$

1. Найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.
2. Отметить найденные корни на оси x и определить, куда (вверх или вниз) направлены ветви параболы, служащей графиком функции $y = ax^2 + bx + c$; сделать набросок графика.
3. С помощью полученной геометрической модели определить, на каких промежутках оси x ординаты графика положительны (отрицательны); включить эти промежутки в ответ.

На первом шаге этого алгоритма требуется найти корни квадратного трёхчлена. Но ведь корни могут и не существовать, что же делать? Тогда алгоритм неприменим, следовательно, придётся рассуждать иначе. Ключ к рассуждениям дают следующие теоремы.

Теорема 1. ***Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a > 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство***

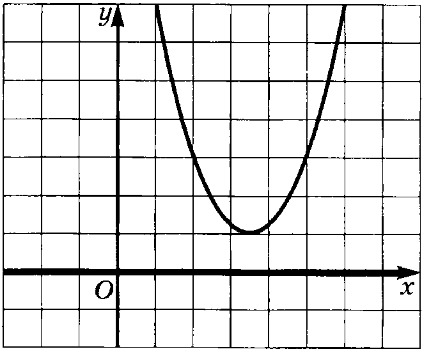
$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a > 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ не имеет решений.

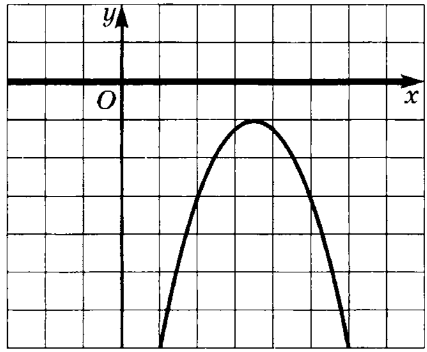
Доказательство. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вверх (поскольку $a > 0$) и которая не пересекает ось x, так как корней у квадратного трёхчлена по условию нет. График представлен на рисунке 120, *а*. При всех x график расположен выше оси x, а это значит, что при всех x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. ***Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a < 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство***

$$ax^2 + bx + c < 0.$$



а



б

Рис. 120

Иными словами, если $D < 0$, $a < 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ не имеет решений.

Доказательство. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, ветви которой направлены вниз (поскольку $a < 0$) и которая не пересекает ось x, так как корней у квадратного трёхчлена по условию нет. График представлен на рисунке 120, *б*. При всех x график расположен ниже оси x, а это значит, что при всех x выполняется неравенство $ax^2 + bx + c < 0$, что и требовалось доказать.

Пример 4. Решить неравенства:
а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Решение. а) Найдём дискриминант квадратного трёхчлена $2x^2 - x + 4$. Имеем $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$. Старший коэффициент трёхчлена (число 2) положителен. Значит, по теореме 1 при всех x выполняется неравенство $2x^2 - x + 4 > 0$, т. е. решением заданного неравенства служит вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

б) Найдём дискриминант квадратного трёхчлена $-x^2 + 3x - 8$. Имеем $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23 < 0$. Старший коэффициент трёхчлена (число -1) отрицателен. Следовательно, по теореме 2 при всех x выполняется неравенство $-x^2 + 3x - 8 < 0$. Это значит, что неравенство $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ не выполняется ни при каком значении x, т. е. заданное неравенство не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.

В следующем примере мы познакомимся ещё с одним способом рассуждений, который применяется при решении квадратных неравенств.

Пример 5. Решить неравенство $3x^2 - 10x + 3 < 0$.

Решение. Разложим квадратный трёхчлен $3x^2 - 10x + 3$ на множители. Корнями трёхчлена являются числа 3 и $\frac{1}{3}$, поэтому, воспользовавшись формулой

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

получим:

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Отметим на числовой прямой корни трёхчлена: 3 и $\frac{1}{3}$ (рис. 121). Пусть $x > 3$; тогда $x - 3 > 0$ и $x - \frac{1}{3} > 0$, значит, и произведение $3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ положительно. Далее, пусть $\frac{1}{3} < x < 3$; тогда $x - 3 < 0$, а $x - \frac{1}{3} > 0$. Следовательно, произведение $3(x - 3) \times \left(x - \frac{1}{3}\right)$ отрицательно. Пусть, наконец, $x < \frac{1}{3}$; тогда $x - 3 < 0$ и $x - \frac{1}{3} < 0$. Но в таком случае произведение $3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ положительно.

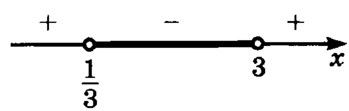


Рис. 121

Подводя итог рассуждениям, приходим к выводу: знаки квадратного трёхчлена $3x^2 - 10x + 3$ изменяются так, как показано на рисунке 121. Нас же интересует, при каких x квадратный трёхчлен принимает отрицательные значения. С помощью геометрической модели, представленной на рисунке 121, делаем вывод: квадратный трёхчлен $3x^2 - 10x + 3$ принимает отрицательные значения для любого значения x из интервала $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$, или $\frac{1}{3} < x < 3$.

Замечание. Метод рассуждений, который мы применили в примере 5, обычно называют *методом интервалов* (или *методом* *промежутков*). Он широко используется в математике для решения рациональных неравенств. В 9-м классе мы изучим метод интервалов более подробно.

Пример 6. При каких значениях параметра p квадратное уравнение $x^2 - 5x + p^2 = 0$:

а) имеет два различных корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет корней?

Решение. Число корней квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта D. В данном случае $D = 25 - 4p^2$.

а) Квадратное уравнение имеет два различных корня, если $D > 0$, значит, задача сводится к решению неравенства $25 - 4p^2 > 0$. Умножив обе части этого неравенства на -1 (не забыв изменить при этом знак неравенства), получим $4p^2 - 25 < 0$ и, далее,

$$4(p - 2,5)(p + 2,5) < 0.$$

Знаки выражения $4(p - 2,5)(p + 2,5)$ указаны на рисунке 122. Делаем вывод, что неравенство

$$4(p - 2,5)(p + 2,5) < 0$$

выполняется для всех значений p из интервала $(-2,5;\ 2,5)$. Именно при этих значениях параметра p данное квадратное уравнение имеет два различных корня.

б) Квадратное уравнение имеет один корень, если $D = 0$. Как мы установили ранее, $D = 0$ при $p = 2,5$ или $p = -2,5$. Именно при этих значениях параметра p данное квадратное уравнение имеет только один корень.

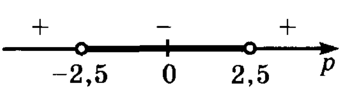


Рис. 122

в) Квадратное уравнение не имеет корней, если $D < 0$. Решим неравенство $25 - 4p^2 < 0$:

$$4p^2 - 25 > 0;$$
$$4(p - 2,5)(p + 2,5) > 0,$$

откуда (см. рис. 122) $p < -2,5$; $p > 2,5$. При этих значениях параметра p данное квадратное уравнение не имеет корней.

Ответ: а) при $p \in (-2,5;\ 2,5)$;

б) при $p = 2,5$ или $p = -2,5$;

в) при $p < -2,5$ или $p > 2,5$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение квадратного неравенства с одной переменной.

2. Что даёт схематический набросок графика квадратичной функции при решении квадратного неравенства?

3. Опишите алгоритм решения неравенства $ax^2 + bx + c > 0$, где $a \neq 0$. Примените его для решения неравенства $x^2 - 5x + 6 > 0$.

4. Опишите алгоритм решения неравенства $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $a \neq 0$. Примените его для решения неравенства $x^2 + x - 12 \leqslant 0$.

5. Известно, что дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен и $a > 0$. Что вы скажете о решении неравенства:

а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

Поясните свой ответ с помощью геометрической иллюстрации.

6. Известно, что дискриминант D квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ отрицателен и $a < 0$. Что вы скажете о решении неравенства:

а) $ax^2 + bx + c > 0$; в) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$;
б) $ax^2 + bx + c < 0$; г) $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

Поясните свой ответ с помощью геометрической иллюстрации.

§ 31. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

Выше, в § 11, мы уже рассмотрели несколько примеров на доказательство неравенств. В основном мы пользовались *методом оценки знака разности левой и правой частей доказываемого неравенства*. Рассмотрим ещё три примера использования этого метода.

Пример 1. Доказать, что для любых x, y, z выполняется неравенство

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 > 2x + 12y + 6z.$$

Решение. Составим разность левой и правой частей доказываемого неравенства:

$$(x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14) - (2x + 12y + 6z) =$$
$$= (x^2 - 2x + 1) + (4y^2 - 12y + 9) + (3z^2 - 6z + 3) + 1 =$$
$$= (x - 1)^2 + (2y - 3)^2 + 3(z - 1)^2 + 1.$$

Полученная сумма положительна при любых действительных значениях переменных x, y, z. Это значит, что требуемое неравенство доказано. ■

Пример 2. Пусть a — положительное число. Доказать, что $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Решение. Рассмотрим разность $\left(a + \frac{1}{a}\right) - 2$. Имеем:

$$\frac{a^2+1}{a} - 2 = \frac{a^2 - 2a + 1}{a} = \frac{(a-1)^2}{a}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Заметим, что $a + \frac{1}{a} = 2$ тогда и только тогда, когда $a = 1$; если же $a \neq 1$, то

$$a + \frac{1}{a} > 2. \quad \blacksquare$$

Пример 3. Пусть a и b — неотрицательные числа. Доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Решение. Составим разность левой и правой частей неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Получили неотрицательное число, значит, $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

Заметим, что $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ тогда и только тогда, когда $a = b$ (тогда $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ и, следовательно, $\frac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} = 0$); если же $a \neq b$, то $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$. $\blacksquare$

Число $\frac{a+b}{2}$ называют **средним арифметическим** чисел a и b; число $\sqrt{ab}$ называют **средним геометрическим** чисел a и b. Таким образом, неравенство, доказанное в примере 3, означает, что ***среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.*** Доказанное неравенство иногда называют **неравенством Коши** в честь французского математика XIX в. Огюста Коши.

Замечание. Неравенство Коши имеет любопытное геометрическое истолкование. Пусть дан прямоугольный треугольник и пусть высота h, проведённая из вершины прямого угла, делит

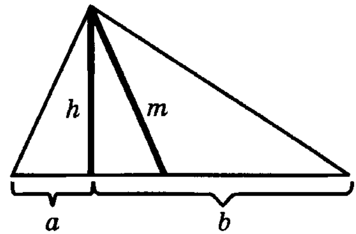


Рис. 123

гипотенузу на отрезки a и b (рис. 123). В геометрии доказано, что $h = \sqrt{ab}$ (так что неслучайно для этого выражения ввели термин «среднее геометрическое»). А что такое $\frac{a+b}{2}$? Это длина половины гипотенузы. Но из геометрии известно, что медиана m прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, как раз и равна половине гипотенузы. Таким образом, неравенство Коши означает, что длина медианы, проведённой к гипотенузе (т. е. $\frac{a+b}{2}$), не меньше длины высоты, проведённой к гипотенузе (т. е. $\sqrt{ab}$).

Дедуктивный способ доказательства неравенств. Суть этого способа состоит в следующем: требуемое неравенство выводят из какого-то известного (*опорного*) неравенства с помощью ряда преобразований. Такими опорными неравенствами могут служить, например, неравенство $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ (верное для любого $a > 0$) и неравенство Коши $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ (верное для любых неотрицательных значений переменных).

Пример 4. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Решение. Выпишем три опорных неравенства:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2;\ \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 2;\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 2.$$

Сложив их, получим: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geqslant 6;$

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c} \geqslant 6;$$

$$\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+b}{c}\right) \geqslant 9;$$

$$\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{c} \geqslant 9.$$

Вынесем за скобки общий множитель $a + b + c$ и получим:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9.$$

Заметим, что знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда он имеет место во всех трёх опорных неравенствах одновременно, т. е. при $a = b = c$. ■

Способ доказательства от противного. Проиллюстрируем этот способ на двух примерах. Первый из них связан с доказательством неравенства, которое мы ранее упомянули в § 13.

Пример 5. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то

$$\sqrt{a + b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Решение. Предположим противное, что существуют такие положительные числа a и b, для которых выполняется неравенство $\sqrt{a + b} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Тогда, используя свойства числовых неравенств, последовательно получаем:

$$\left(\sqrt{a + b}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2;$$

$$a + b \geqslant a + 2\sqrt{ab} + b;$$

$$\sqrt{ab} \leqslant 0.$$

Но по условию $a > 0$, $b > 0$, значит, $\sqrt{ab} > 0$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно, поэтому доказываемое неравенство верно. ■

Пример 6. Доказать, что для любых неотрицательных значений a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Решение. Предположим противное, что для некоторого набора неотрицательных чисел a, b, c, d справедливо неравенство

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Возведя обе его части в квадрат, получим:

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd;$$

$$bc + ad < 2\sqrt{abcd};$$

$$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{(bc)(ad)}.$$

Но согласно неравенству Коши

$$\frac{bc + ad}{2} \geqslant \sqrt{(bc)(ad)}.$$

Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно, поэтому доказываемое неравенство верно. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что такое среднее арифметическое двух чисел a и b?
2. Что такое среднее геометрическое двух чисел a и b?
3. Какая связь существует между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел a и b?
4. С какими способами доказательства неравенств вы познакомились в этом параграфе?

§ 32. ПРИБЛИЖЁННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

И в 7-м, и в 8-м классах мы часто решали уравнения графически. Заметили ли вы, что практически во всех таких примерах уравнения имели «хорошие» корни? Это были целые числа, которые без труда отыскивались с помощью графиков, особенно на бумаге в клетку. Но так бывает далеко не всегда, просто мы до сих пор подбирали «хорошие» примеры.

Рассмотрим два уравнения: $\sqrt{x} = 2 - x$ и $\sqrt{x} = 4 - x$. Первое уравнение имеет единственный корень $x = 1$, поскольку графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2 - x$ пересекаются в одной точке $A(1;\ 1)$ (рис. 124). Во втором случае графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 4 - x$ тоже пересекаются в одной точке B (рис. 125), но с «плохими» координатами. Пользуясь чертежом, можно сделать вывод, что абсцисса точки B примерно равна 2,5. В подобных случаях говорят не о точном, а о приближённом решении уравнения и пишут так: $x \approx 2{,}5$.

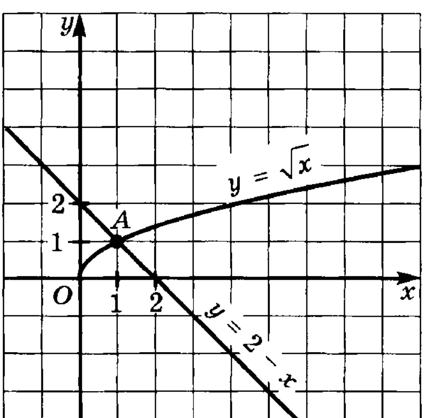


Рис. 124

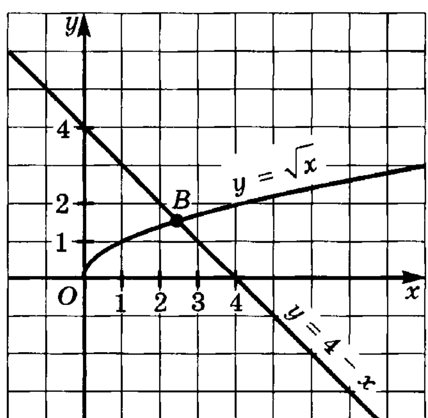


Рис. 125

Это одна из причин, по которой математики решили ввести в рассмотрение понятие приближённого значения действительного числа. Есть и вторая причина, причём, может быть, даже более существенная. Что такое действительное число? Чаще всего — бесконечная десятичная дробь. Но производить вычисления с бесконечными десятичными дробями неудобно, поэтому на практике пользуются приближёнными значениями действительных чисел. Например, для числа $\pi = 3{,}141592...$ пользуются приближёнными равенствами $\pi \approx 3{,}141$ или $\pi \approx 3{,}142$. Первое называют приближённым значением (или приближением) числа π *по недостатку с точностью до* 0,001; второе называют приближённым значением (приближением) числа π *по избытку с точностью до* 0,001. Можно взять более точные приближения, например, $\pi \approx 3{,}1415$ — приближение по недостатку с точностью до 0,0001, $\pi \approx 3{,}1416$ — приближение по избытку с точностью до 0,0001. Можно взять менее точные приближения, скажем, с точностью до 0,01: по недостатку $\pi \approx 3{,}14$, по избытку $\pi \approx 3{,}15$.

Знак приближённого равенства $\approx$ вы использовали и в курсе математики 5—6-го классов и, вероятно, в курсе физики, да и мы ранее пользовались им, например в § 9.

Пример 1. Найти приближённые значения по недостатку и по избытку с точностью до 0,01 для числа:

а) $\sqrt{5}$; б) $2 + \sqrt{5}$; в) $\frac{7}{22}$.

Решение. а) Мы знаем, что $\sqrt{5} = 2{,}236...$ (см. § 9). Следовательно, $\sqrt{5} \approx 2{,}23$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01.

б) $2 + \sqrt{5} = 2{,}000... + 2{,}236... = 4{,}236....$ Значит, $2 + \sqrt{5} \approx \approx 4{,}23$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01.

в) Имеем $\frac{7}{22} = 0{,}31818...$ (см. § 7). Следовательно, $\frac{7}{22} \approx 0{,}31$ — это приближение по недостатку с точностью до 0,01; $\frac{7}{22} \approx 0{,}32$ — это приближение по избытку с точностью до 0,01. ■

Приближение по недостатку и приближение по избытку называют иногда *округлением числа*.

Определение. **Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью)** называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a: погрешность — это $|x - a|$.

Например, погрешность приближённых равенств $\pi \approx 3{,}141$ или $\pi \approx 3{,}142$ выражается формулой $|\pi - 3{,}141|$ или соответственно формулой $|\pi - 3{,}142|$.

Возникает чисто практический вопрос: какое приближение лучше — по недостатку или по избытку, в каком случае погрешность будет меньше? Это, конечно, зависит от конкретного числа, для которого составляются приближения. Обычно при округлении положительных чисел пользуются следующим правилом.

Правило округления. *Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно брать приближение по недостатку; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то нужно брать приближение по избытку.*

Применим это правило ко всем рассмотренным в этом параграфе числам, выберем для рассмотренных чисел те приближения, для которых будет наименьшая погрешность.

1) $\pi = 3{,}141592...$. С точностью до 0,001 имеем $\pi \approx 3{,}142$; здесь первая отбрасываемая цифра равна 5 (на четвёртом месте после запятой), поэтому взяли приближение по избытку. С точностью до 0,0001 имеем $\pi \approx 3{,}1416$ — и тут взяли приближение по избытку, поскольку первая отбрасываемая цифра (на пятом месте после запятой) равна 9. А вот с точностью до 0,01 следует взять приближение по недостатку: $\pi \approx 3{,}14$.

2) $\sqrt{5} = 2{,}236...$. С точностью до 0,01 имеем $\sqrt{5} \approx 2{,}24$ (приближение по избытку).

3) $2 + \sqrt{5} = 4{,}236...$. С точностью до 0,01 имеем $2 + \sqrt{5} \approx 4{,}24$ (приближение по избытку).

4) $\frac{7}{22} = 0{,}31818...$. С точностью до 0,001 имеем $\frac{7}{22} \approx 0{,}318$ (приближение по недостатку).

Рассмотрим последний пример подробнее. Возьмём укрупнённый фрагмент координатной прямой (рис. 126). Точка $\frac{7}{22}$ принадлежит отрезку $[0{,}318; 0{,}319]$, значит, расстояния от неё до

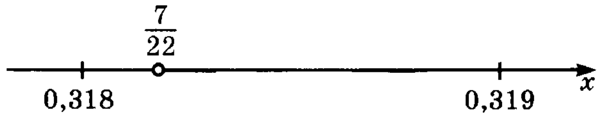


Рис. 126

концов отрезка не превосходят длины отрезка. Расстояния от точки $\frac{7}{22}$ до концов отрезка вычисляются по формулам соответственно $\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right|$, $\left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right|$, а длина отрезка [0,318; 0,319] равна 0,001. Следовательно,

$$\left|\frac{7}{22} - 0{,}318\right| \leqslant 0{,}001 \text{ и } \left|\frac{7}{22} - 0{,}319\right| \leqslant 0{,}001.$$

Таким образом, в обоих случаях (и для приближения числа $\frac{7}{22}$ по недостатку, и для приближения числа $\frac{7}{22}$ по избытку) погрешность не превосходит 0,001.

Итак, почему же важно уметь находить приближённые значения чисел? Да потому, что оперировать с бесконечными десятичными дробями практически невозможно, равно как и использовать их для измерения величин. На практике во многих случаях вместо точных значений берут приближения с наперёд заданной точностью (погрешностью). Эта идея заложена и в калькуляторах, на дисплеях которых высвечивается конечная десятичная дробь, т. е. приближение выводимого на экран числа (за тем редким исключением, когда выводимое число есть целое число или конечная десятичная дробь, умещающаяся на экране).

До сих пор мы говорили: приближения с точностью до 0,01, до 0,001 и т. д. Теперь мы можем навести порядок в употреблении терминологии.

Если a — приближённое значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что *погрешность приближения не превосходит* h или что число x равно числу *a с точностью до h*.

Переведём аналитическую модель $|x - a| \leqslant h$ на геометрический язык: числу x на координатной прямой соответствует такая точка, которая удовлетворяет условию $\rho(x, a) \leqslant h$, т. е. удалена от точки a на расстояние, меньшее или равное h. На расстояние, равное h, удалены от точки a точки $a - h$ и $a + h$, значит, точка x принадлежит отрезку $[a - h; a + h]$. Иногда в таких случаях используют запись $x = a \pm h$. Она удобна для измерений, если x — точное значение измеряемой величины, а a — более удобное для практики приближённое значение той же величины. При этом обычно идут ещё дальше: рассматривают отношение абсолютной погрешности h к приближённому значению a; отношение $\frac{h}{a}$ называют **относительной погрешностью.**

Известно, что 9,3 и 9,30 — две различные формы записи одного и того же числа. А есть ли разница в записях $x \approx 9{,}3$ и $x \approx 9{,}30$? Проанализируем эти приближённые равенства. Запись $x \approx 9{,}3$ означает, что $9{,}25 \leqslant x \leqslant 9{,}35$, т. е. $x = 9{,}3 \pm 0{,}05$. Запись $x \approx 9{,}30$ означает, что $9{,}295 \leqslant x \leqslant 9{,}305$, т. е. $x = 9{,}3 \pm 0{,}005$. Таким образом, записи $x \approx 9{,}3$ и $x \approx 9{,}30$ неравнозначны, вторая даёт значительно более точные оценки для числа x. Относительная погрешность приближённого равенства $x \approx 9{,}3$ равна $\frac{0{,}05}{9{,}3} = 0{,}0054$, тогда как относительная погрешность приближённого равенства $x \approx 9{,}30$ равна $\frac{0{,}005}{9{,}30} = 0{,}00054$.

Если производятся арифметические операции не с точными значениями величин, а с их приближёнными значениями, то полезно знать погрешность приближения полученного результата. Пусть для положительных величин x и y мы нашли приближённые значения a и b с точностью соответственно h_1 и h_2. Это значит, что

$$a - h_1 \leqslant x \leqslant a + h_1, \quad b - h_2 \leqslant y \leqslant b + h_2. \tag{1}$$

Тогда для суммы получаем:

$$(a + b) - (h_1 + h_2) \leqslant x + y \leqslant (a + b) + (h_1 + h_2).$$

Это двойное неравенство означает, что $a + b$ — приближённое значение суммы $x + y$, а абсолютная погрешность приближения равна $h_1 + h_2$. Таким образом, *при сложении приближённых значений их абсолютные погрешности складываются.*

Для разности $x - y$ получаем:

$$\begin{gathered} a - h_1 \leqslant x \leqslant a + h_1, \\ -b - h_2 \leqslant -y \leqslant -b + h_2, \\ (a - b) - (h_1 + h_2) \leqslant x - y \leqslant (a - b) + (h_1 + h_2). \end{gathered}$$

Это двойное неравенство означает, что $a - b$ — приближённое значение разности $x - y$, а абсолютная погрешность приближения равна $h_1 + h_2$. Таким образом, *при вычитании приближённых значений их абсолютные погрешности складываются.*

Перемножив неравенства (1) (считая, что все их части положительны), получим:

$$ab - (ah_2 + bh_1) + h_1h_2 \leqslant xy \leqslant ab + (ah_2 + bh_1) + h_1h_2. \qquad (2)$$

Обычно достаточно малую величину h_1h_2 отбрасывают и переписывают неравенство (2) в виде

$$ab - (ah_2 + bh_1) \leqslant xy \leqslant ab + (ah_2 + bh_1).$$

Это значит, что абсолютная погрешность произведения равна $ah_2 + bh_1$. Отсюда, в частности, следует, что если a — приближённое значение величины x с точностью h, то a^n — приближённое значение для x^n, причём абсолютная погрешность приближения равна nah.

Пример 2. Вычислить $\dfrac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ с точностью 0,01.

Решение. Освободимся от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}.$$

Известно, что $\sqrt{5} = 2{,}236...$, следовательно, $\sqrt{5} \approx 2{,}24$, причём абсолютная погрешность этого приближённого равенства $h_1 = 0{,}01$.

Известно, что $\sqrt{2} = 1{,}414...$, значит, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, причём абсолютная погрешность этого приближённого равенства $h_2 = 0{,}01$.

При сложении приближённых значений абсолютные погрешности складываются, следовательно, $\sqrt{5} + \sqrt{2} \approx 3{,}65$, причём абсолютная погрешность этого приближённого равенства $h = 0{,}02$. Тогда абсолютная погрешность h приближённого равенства

$\dfrac{1}{3}\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) \approx \dfrac{1}{3} \cdot 3{,}65$ равна $\dfrac{1}{3} \cdot 0{,}02$, т. е. $h < 0{,}01$.

Итак, с точностью 0,01 имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \approx \frac{1}{3} \cdot 3{,}65 = 1{,}21666... \approx 1{,}22. \quad ■$$

Завершая параграф, поговорим о приближённом вычислении квадратных корней. Выше, в § 15, мы познакомили вас с алгоритмом извлечения квадратного корня из *точного квадрата*, т. е. из числа вида n^2. На самом деле указанный алгоритм можно применять не только для отыскания точных, но и для отыскания приближённых значений квадратных корней. Мы говорили (см. § 15), что для извлечения квадратного корня из натурального числа нужно это число разбить на грани — по две цифры в каждой грани при движении по цифрам числа справа налево. Если корень не извлекается, то после цифры единиц заданного числа ставят запятую и образуют дальнейшие грани, каждая из которых имеет вид 00. Последовательные цифры результата находят по правилу, описанному в § 15. В этом случае процесс извлечения квадратного корня бесконечен, его прекращают тогда, когда достигнута требуемая точность.

Пример 3. Вычислить $\sqrt{5}$ с точностью 0,01.

Решение. Представим число 5 в виде 5,00′00′00.... Имеем:

$$
\begin{array}{rl}
 & \sqrt{5{,}00'00'00} = 2{,}236\ldots \\
 & -\ \underline{4} \\
\times\begin{array}{r}42\\2\end{array} & \Big|\ -\begin{array}{r}100\\ \underline{84}\end{array} \\
\times\begin{array}{r}443\\3\end{array} & \Big|\ -\begin{array}{r}1600\\ \underline{1329}\end{array} \\
\times\begin{array}{r}4466\\6\end{array} & \Big|\ -\begin{array}{r}27100\\ \underline{26796}\end{array} \\
 & \qquad\quad 304 \\
 & \qquad\quad \ldots
\end{array}
$$

Итак, с точностью 0,01 получаем $\sqrt{5} \approx 2{,}24$. ■

Иногда для приближённого вычисления квадратных корней используют формулу

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a} \text{ (здесь } a > 0\text{).} \qquad (3)$$

Если число $a + \frac{b}{2a}$ возвести в квадрат, получим $a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}$. Значит, точное равенство имеет вид

$$\sqrt{a^2 + b + \frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a}.$$

К указанному выше приближённому равенству имеет смысл переходить при достаточно малых (по модулю) значениях b, когда слагаемым $\frac{b^2}{4a^2}$ можно пренебречь.

Например,

$$\sqrt{4{,}1} = \sqrt{2^2 + 0{,}1} \approx 2 + \frac{0{,}1}{4} = 2{,}025.$$

С помощью калькулятора получаем

$$\sqrt{4{,}1} = 2{,}0248... \approx 2{,}025.$$

Как видите, использование в данном случае формулы (3) дало вполне приемлемую точность.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют приближённым значением числа по недостатку?
2. Что называют приближённым значением числа по избытку?
3. Что называют округлением числа?
4. Сформулируйте определение погрешности приближения (абсолютной погрешности).
5. Сформулируйте правило округления.
6. Закончите предложение: «Если a — приближённое значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что ...».
7. Округлите число 3,4582165 до десятых; сотых; тысячных; десятитысячных. Найдите в каждом случае абсолютную погрешность.
8. Найдите приближённое значение числа 2,31872 с точностью до 0,01:

а) по недостатку; б) по избытку.

§ 33. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Выше мы отмечали, что на практике для вычислений используются конечные десятичные дроби, которые служат либо точными, либо приближёнными значениями величин. При этом для удобства вычислений положительную конечную десятичную дробь иногда представляют в *стандартном виде*. Что это такое? Рассмотрим несколько примеров.

1. Число $a_1 = 274{,}35$ можно записать так: $2{,}7435 \cdot 10^2$.
2. Число $a_2 = 5434$ можно записать так: $5{,}434 \cdot 10^3$.
3. Число $a_3 = 0{,}273$ можно записать так: $2{,}73 \cdot 0{,}1 = 2{,}73 \cdot 10^{-1}$.
4. Число $a_4 = 0{,}0013$ можно записать так: $1{,}3 \cdot 0{,}001 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$.
5. Число $a_5 = 3{,}62$ можно записать так: $3{,}62 \cdot 10^0$.

Во всех случаях мы представили заданное положительное число a_k в виде произведения двух множителей. В качестве первого множителя мы брали число с одной значащей цифрой до запятой, т. е. число, целая часть которого — однозначное число (от 1 до 9). В качестве второго множителя брали число 10 в целой степени.

***Определение*.** **Стандартным видом положительного числа** a называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a.

Так, в рассмотренных выше примерах имеем:

1) порядок числа 274,35 равен 2;
2) порядок числа 5434 равен 3;
3) порядок числа 0,273 равен −1;
4) порядок числа 0,0013 равен −3;
5) порядок числа 3,62 равен 0.

Переход к стандартному виду числа иногда используют для вычислений.

Пример. Вычислить:

а) $2734 \cdot 0{,}007$; б) $24{,}377 : 0{,}22$; в) $(0{,}0043)^2$.

Решение. а) $2734 \cdot 0{,}007 = (2{,}734 \cdot 10^3) \cdot (7 \cdot 10^{-3}) =$
$= (2{,}734 \cdot 7) \cdot (10^3 \cdot 10^{-3}) = 19{,}138 \cdot 10^0 = 19{,}138 \cdot 1 = 19{,}138$;

б) $24{,}377 : 0{,}22 = (2{,}4377 \cdot 10) : (2{,}2 \cdot 10^{-1}) =$
$= (2{,}4377 : 2{,}2) \cdot (10 : 10^{-1}) = 1{,}10805 \cdot 10^{1-(-1)} =$
$= 1{,}10805 \cdot 100 = 110{,}805$;

в) $(0{,}0043)^2 = (4{,}3 \cdot 10^{-3})^2 = 4{,}3^2 \cdot (10^{-3})^2 = 18{,}49 \cdot 10^{-6} =$
$= 1{,}849 \cdot 10 \cdot 10^{-6} = 1{,}849 \cdot 10^{-5} = 0{,}00001849$. ■

Однако основная польза от стандартной записи числа заключается в следующем. Представьте себе, что вы производите вычисления или с очень большими, или с очень маленькими положительными числами. Вам нужно вывести, скажем, на дисплей калькулятора числа $a = 217\,000\,000\,000$ и $b = 0{,}000045412$ и перемножить их. А на экране умещается только 8 знаков. Вот тут-то и пригодятся стандартные записи чисел. Имеем: $a = 2,17 \cdot 10^{11}$, $b = 4,5412 \cdot 10^{-6}$; тогда

$$a \cdot b = 2,17 \cdot 10^{11} \cdot 4,5412 \cdot 10^{-6} = 9,854404 \cdot 10^{5} = 985440,4.$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение стандартного вида положительного числа a.
2. Что называют порядком числа a?
3. В чём заключается польза от стандартной записи числа?
4. Запишите в стандартном виде число:

а) 25,437; в) 7,222; д) 0,005.
б) 2013; г) 0,48;

ТЕМА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Доказательство неравенств.

ГЛАВА

6 АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 34. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Арифметические операции над многочленами от одной переменной

Пусть $p(x)$ — многочлен, представляющий собой сумму одночленов a_0, a_1x, a_2x^2, a_3x^3, ..., $a_{n-1}x^{n-1}$, a_nx^n, где n — натуральное число, а a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n — произвольные числа (*коэффициенты*), причём $a_n \neq 0$. Условимся располагать эти одночлены по убывающим степеням переменной x, т. е. записывать многочлен в виде

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

и называть эту запись **стандартным видом многочлена** $p(x)$. Одночлен a_nx^n называют **старшим членом** многочлена $p(x)$, коэффициент a_n — **коэффициентом при старшем члене**. Если $a_n = 1$, то многочлен называют **приведённым**, если же $a_n \neq 1$ — то **неприведённым**. Одночлен a_0 называют **свободным членом** многочлена $p(x)$. Число n — показатель степени старшего члена — называют **степенью многочлена**. Например, $x + 3$ — приведённый многочлен первой степени, $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ — неприведённый многочлен пятой степени. Все числа удобно считать *многочленами нулевой степени*; например, число 3 можно представить в виде $3x^0$, так как $x^0 = 1$ (если $x \neq 0$).

Многочлены от одной переменной, как и любые многочлены, можно складывать, вычитать, перемножать, возводить в натуральную степень; при этом снова получается многочлен от одной переменной. Если складываются или вычитаются многочлены разной степени, то в результате получится многочлен, степень которого равна большей из имеющихся степеней. Если складываются или вычитаются многочлены одной и той же степени, то в результате получится многочлен той же или меньшей степени. Например, сложив многочлены первой степени $x + 3$ и пятой степени $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$, получим $-0{,}5x^5 + 3x^2 + x - 1$ — многочлен пятой степени. Сложив два многочлена третьей степени $2x^3 + 3x^2 - x$ и $-2x^3 + 3x - 4$, получим $3x^2 + 2x - 4$ — многочлен второй степени; если же составить разность этих многочленов, то получится $(2x^3 + 3x^2 - x) - (-2x^3 + 3x - 4) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + 4$ — многочлен третьей степени.

Если многочлен $p(x)$ умножается на многочлен $s(x)$, то старший член произведения равен произведению старших членов многочленов $p(x)$ и $s(x)$. Поэтому если многочлен $p(x)$ имеет степень n, а многочлен $s(x)$ — степень m, то их произведение $p(x) \cdot s(x)$ имеет степень $m + n$. Например, перемножив многочлен пятой степени $-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ и многочлен первой степени $x + 3$, получим:

$$(-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)(x + 3) = -0{,}5x^6 - 1{,}5x^5 + 3x^3 + 9x^2 - 4x - 12.$$

Это многочлен шестой степени ($5 + 1 = 6$). Обратите внимание, что старший член полученного многочлена шестой степени равен произведению старших членов перемножаемых многочленов: $-0{,}5x^6 = -0{,}5x^5 \cdot x$.

Если многочлен $p(x)$ степени n возвести в степень m, то получится многочлен степени nm. Например, возведя многочлен пятой степени $p(x) = -0{,}5x^5 + 3x^2 - 4$ в квадрат, получим:

$$\begin{gathered}(p(x))^2 = (-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)^2 = \\ = (-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4)(-0{,}5x^5 + 3x^2 - 4) = \\ = 0{,}25x^{10} - 1{,}5x^7 + 2x^5 - 1{,}5x^7 + 9x^4 - 12x^2 + 2x^5 - 12x^2 + 16 = \\ = 0{,}25x^{10} - 3x^7 + 4x^5 + 9x^4 - 24x^2 + 16.\end{gathered}$$

Это многочлен 10-й степени ($5 \cdot 2 = 10$).

Иногда выполнимо и деление многочлена на многочлен. Говорят, что **многочлен $p(x)$ делится на многочлен $s(x)$**, если существует такой многочлен $q(x)$, что выполняется тождество

$$p(x) = s(x) \cdot q(x). \qquad (1)$$

При этом употребляется та же терминология, что и при делении чисел: $p(x)$ — *делимое*, $s(x)$ — *делитель*, $q(x)$ — *частное*. Впрочем, тождество (1) можно прочесть иначе: $s(x)$ — частное, а $q(x)$ — делитель.

Например, многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ делится на многочлен $x^2 + 5$ и на многочлен $x - 3$, поскольку

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3).$$

Многочлены $x^2 + 5$ и $x - 3$ — делители многочлена $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

2. Деление многочлена на многочлен с остатком

Как и для целых чисел, для многочленов рассматривают *деление с остатком.*

Теорема 1. ***Если степень многочлена $p(x)$ не меньше степени многочлена $s(x)$, то существует пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ такая, что выполняется тождество***

$$p(x) = s(x) \cdot q(x) + r(x), \tag{2}$$

причём степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $s(x)$.

В формуле (2) многочлен $p(x)$ называют *делимым*, $s(x)$ — *делителем*, $q(x)$ — *частным* (или *неполным частным*), а $r(x)$ — *остатком*. Если $r(x) \equiv 0$, т. е. $p(x)$ делится на $q(x)$ без остатка, формула (2) принимает вид $p(x) = s(x) \cdot q(x)$. Таким образом, записанная выше формула (1) — частный случай формулы (2).

Степень не равного нулю остатка в формуле (2) должна быть меньше степени делителя. Если в качестве делителя выступает многочлен первой степени, то в остатке будет многочлен нулевой степени, т. е. число; если в качестве делителя выступает многочлен второй степени, то в остатке может быть число или многочлен первой степени. Степень частного $q(x)$ равна разности степеней делимого $p(x)$ и делителя $s(x)$.

Пример 1. Выполнить деление с остатком многочлена

$$2x^2 - x - 3 \text{ на } x - 2.$$

Решение. Имеем: $2x^2 - x - 3 = 2x^2 - 4x + 3x - 6 + 3 = 2x(x - 2) + 3(x - 2) + 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$.

Итак, $2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$.

Здесь $2x^2 - x - 3$ — делимое, $x - 2$ — делитель, $2x + 3$ — частное (неполное частное), 3 — остаток. ■

Теорема 2. ***Остаток от деления многочлена $p(x)$ на двучлен $x - a$ равен $p(a)$ (т. е. значению многочлена $p(x)$ при $x = a$).***

Доказательство. Если $p(x)$ — делимое, $x - a$ — делитель (многочлен первой степени), $q(x)$ — частное и r — остаток (многочлен нулевой степени, т. е. число), то по формуле (2)

$$p(x) = (x - a)q(x) + r. \tag{3}$$

Если в формулу (3) подставить вместо x значение a, получим

$$p(a) = (a - a)q(a) + r,$$

т. е. $p(a) = r$, что и требовалось доказать.

Эту теорему обычно называют *теоремой Безу* в честь французского математика Этьена Безу (1730—1783).

Пример 2. Найти остаток от деления многочлена $2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$.

Решение. По теореме Безу остаток от деления многочлена $p(x) = 2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$ равен $p(2)$. Значит,

$$r = p(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 3 = 3. \quad ■$$

Сравните это решение с решением примера 1. Там мы получили такой же остаток, но по-другому, использовав при этом более сложные рассуждения.

Если при $x = a$ многочлен $p(x)$ обращается в нуль, т. е. выполняется равенство $p(a) = 0$, то число a называют **корнем многочлена**. Если $p(a) = 0$, то в формуле (3) $r = 0$ и она принимает вид $p(x) = (x - a)q(x)$. Это значит, что многочлен $p(x)$ делится на $x - a$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. ***Если число a является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$.***

Для деления многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ можно применять правило деления уголком, похожее на правило деления многозначных чисел. Чтобы получить старший член частного, старший член делимого $p(x)$ делят на старший член делителя $s(x)$. Полученный член частного (это будет старший член) умножают на делитель и произведение вычитают из делимого. Разделив старший член полученной первой разности на старший член делителя, находят второй член частного, умножают его на делитель, а произведение вычитают из первой разности. С полученной второй разностью поступают так же: делят её старший член на старший член делителя, тем самым находят третий член частного, затем умножают его на делитель, произведение вычитают из второй разности и т. д. Этот процесс либо приведёт к делению многочлена $p(x)$ на многочлен $s(x)$ без остатка, либо на некотором шаге получится разность, степень которой меньше степени делителя, — эта разность и будет остатком $r(x)$.

Пример 3. Выполнить деление с остатком многочлена $2x^2 - x - 3$ на двучлен $x - 2$.

Решение. Как видите, фактически мы в третий раз обращаемся к одному и тому же примеру. Но на этот раз выполним деление уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\ 2x^2 - x - 3 & x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{2x^2 - 4x} & 2x + 3 \\
-\ 3x - 3 & \text{(первая разность)} \\
\underline{3x - 6} & \\
3 & \text{(вторая разность, остаток)}
\end{array}$$

Итак, $2x^2 - x - 3 = (x - 2)(2x + 3) + 3$. ■

Пример 4. Разделить многочлен $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$ на многочлен $x^2 + 5$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-\ x^3 - 3x^2 + 5x - 15 & x^2 + 5 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 5x } & x - 3 \\
-\ -3x^2 - 15 & \\
\underline{-3x^2 - 15} & \\
0 &
\end{array}$$

Итак, мы выполнили деление без остатка:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x^2 + 5)(x - 3). \quad ■$$

3. Разложение многочлена на множители

Вы знаете многие приёмы разложения многочлена на множители, например: вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращённого умножения, группировка, разложение квадратного трёхчлена на множители с помощью его корней x_1, x_2 (речь идёт о формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$). Этим мы неоднократно пользовались в предыдущих главах. Доказанная выше теорема 3 вооружает нас ещё одним приёмом: если число a является корнем многочлена $p(x)$, то $p(x)$ делится на двучлен $x - a$, т. е. может быть представлен в виде $p(x) = (x - a) \times q(x)$. Но чтобы составить такое разложение на множители, надо уметь находить корень многочлена $p(x)$. Отметим одну теорему, которая позволит нам иногда пользоваться указанным приёмом разложения многочлена на множители.

Теорема 4. ***Пусть все коэффициенты многочлена $p(x)$ — целые числа. Если целое число a является корнем многочлена $p(x)$, то a — делитель свободного члена многочлена $p(x)$.***

Доказательство проведём для случая, когда $p(x)$ — многочлен третьей степени: $p(x) = bx^3 + cx^2 + dx + m$, где все коэффициенты b, c, d, m — целые числа. По условию целое число a является корнем многочлена $p(x)$. Это значит, что $p(a) = 0$, т. е.

$$ba^3 + ca^2 + da + m = 0.$$

Преобразуем полученное равенство к виду $m = a(-ba^2 - ca - d)$ и обозначим целое число $-ba^2 - ca - d$ буквой k. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $m = ak$, а это и означает, что число a — делитель числа m, т. е. делитель свободного члена многочлена $p(x)$.

Аналогично проводится доказательство теоремы для случая, когда $p(x)$ — многочлен 4-й, 5-й и вообще n-й степени.

Пример 5. Разложить на множители многочлен

$$p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6.$$

Решение. Попробуем найти целочисленные корни этого многочлена. Если они есть, то по теореме 4 их следует искать среди делителей свободного члена заданного многочлена, т. е. среди делителей числа 6. Выпишем эти делители — «кандидаты в целочисленные корни»: ±1, ±2, ±3, ±6. Будем подставлять выписанные значения поочерёдно в выражение для $p(x)$:

$$p(1) = 4 \neq 0;$$
$$p(-1) = 0.$$

Итак, $x = -1$ — корень многочлена $p(x)$, значит, $p(x)$ делится на $x + 1$.

Разделим многочлен $p(x)$ на двучлен $x + 1$:

$$\begin{array}{l|l}
\;\;x^3-4x^2+x+6 & x+1 \\ \cline{2-2}
-\;x^3+x^2 & x^2-5x+6 \\ \cline{1-1}
\quad -5x^2+x & \\
\quad -\;-5x^2-5x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 6x+6 & \\
\qquad -\;6x+6 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Итак, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$. Далее,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3),$$

поскольку 2 и 3 — корни квадратного трёхчлена $x^2 - 5x + 6$.

Таким образом,

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3). \quad ■$$

4. Общие делители и общие кратные нескольких многочленов

Если многочлен $p_1(x)$ делится на многочлен $s(x)$ и многочлен $p_2(x)$ делится на многочлен $s(x)$, то многочлен $s(x)$ называют **общим делителем многочленов** $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Чтобы найти общий делитель двух многочленов, нужно их разложить на множители.

Пример 6. Найти общий делитель многочленов

$$p_1(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15 \text{ и } p_2(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Решение. Выше (см. примеры 4 и 5) мы видели, что

$$p_1(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(x^2 + 5),$$
$$p_2(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

Сравнивая эти разложения на множители, делаем вывод: $x - 3$ — общий делитель заданных многочленов. ■

Обычно стараются найти *наибольший общий делитель* — многочлен максимально возможной степени, на который делятся данные многочлены. Если, например,

$$p_1(x) = x^2(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^5,$$
$$p_2(x) = x^3(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^2,$$

то общими делителями будут x, x^2, $(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)$ и т. д. Наибольший общий делитель — его обозначают $D(x)$ — должен включать в себя множители x^2, $x^4 + 1$, $x - 3$, $(2x + 1)^2$. Значит, $D(x) = x^2(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^2$.

Если многочлен $q(x)$ делится на многочлен $p_1(x)$ и на многочлен $p_2(x)$, то многочлен $q(x)$ называют **общим кратным многочленов** $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Самый простой способ отыскания общего кратного двух многочленов — перемножить заданные многочлены: ясно, что многочлен $q(x) = p_1(x)p_2(x)$ — общее кратное многочленов $p_1(x)$ и $p_2(x)$. Но обычно пытаются найти *наименьшее общее кратное* — его обозначают $K(x)$ — многочлен минимально возможной степени, который делится на данные многочлены.

Пример 7. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$p_1(x) = x^2(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^5,$$
$$p_2(x) = x^3(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^2.$$

Решение. Многочлен $K(x)$, который будет служить наименьшим общим кратным заданных многочленов, должен включать в себя множители x^3, $x^4 + 1$, $x - 3$, $(2x + 1)^5$. Следовательно,

$$K(x) = x^3(x^4 + 1)(x - 3)(2x + 1)^5. \quad \blacksquare$$

Вопросы для самопроверки

1. Запишите в стандартном виде какой-нибудь многочлен пятой степени от одной переменной.
2. Сформулируйте теорему о делении с остатком многочлена на многочлен.
3. Сформулируйте теорему Безу.
4. Найдите остаток от деления многочлена $2x^5 + x^4 - 3x^2 + x + 1$ на двучлен $x - 1$.
5. Не производя деления, выясните, делится ли многочлен $x^3 + 2x^2 + 7x + 6$ на двучлен $x + 1$.
6. Известно, что многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ имеет целочисленные корни. Какие из указанных ниже чисел могут быть корнями данного многочлена: 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, −4, 5, −5, 6, −6?
7. Найдите корни многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ и разложите его на множители.

§ 35. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

В этом параграфе мы поговорим о решении уравнений вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше второй. Имеются два основных метода решения таких уравнений: метод разложения на множители и метод введения новой переменной.

Что касается *метода введения новой переменной*, то он вам знаком, мы не раз с успехом применяли его в алгебраических преобразованиях, а ниже на примерах покажем, как он применяется при решении уравнений.

Сущность *метода разложения на множители* состоит в следующем. Дано уравнение $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен, степень которого выше второй. Предположим, что нам удалось разложить многочлен на множители: $P(x) = P_1(x)P_2(x)P_3(x)$. Тогда заданное уравнение примет вид

$$P_1(x)P_2(x)P_3(x) = 0.$$

Значит, либо $P_1(x) = 0$, либо $P_2(x) = 0$, либо $P_3(x) = 0$. Обычно в таких случаях говорят, что получили *совокупность уравнений*:

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = 0; \quad P_3(x) = 0.$$

Множество корней уравнения $P(x) = 0$ представляет собой *объединение множеств корней уравнений*:

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = 0; \quad P_3(x) = 0.$$

Для разложения многочлена на множители используют известные приёмы (вынесение общего множителя за скобки, формулы сокращённого умножения, группировку), а также некоторые факты теории многочленов, о которых мы говорили в § 34.

Добавим ещё одно полезное утверждение.

Теорема. ***Если приведённое уравнение с целыми коэффициентами имеет рациональный корень, то этот корень обязательно является целым числом.***

Доказательство (проведём его на примере уравнения третьей степени). Дано уравнение $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где b, c, d — целые числа. Предположим, что оно имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$, где $q \neq 1$ и $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Подставив это значение в уравнение, получим:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + b\left(\frac{p}{q}\right)^2 + c\frac{p}{q} + d = 0;$$

$$p^3 + bp^2q + cpq^2 + dq^3 = 0;$$

$$p^3 = q(-bp^2 - cpq - dq^2).$$

Обозначив числовое выражение в скобках буквой m, получим $p^3 = qm$. Это значит, что $p^3 \,\vdots\, q$*, т. е. $p \cdot p \cdot p \,\vdots\, q$. Мы предположили, что $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, т. е. числа p и q не имеют общих делителей. Но тогда соотношение $p \cdot p \cdot p \,\vdots\, q$ не имеет места. В силу взаимной простоты чисел p и q последнее соотношение возможно лишь в случае, когда $q = 1$, и, следовательно, $x = \frac{p}{q} = p$ — целочисленный корень уравнения.

---

* Вместо фразы «a делится на b» в математике используют запись $a \,\vdots\, b$.

Как доказанная теорема применяется на практике? Если дано приведённое уравнение с целыми коэффициентами, то методом проб следует найти целочисленный корень уравнения среди делителей свободного члена. Если это не удаётся, приходится констатировать, что рациональных корней у уравнения нет и, значит, для его решения надо либо пользоваться готовыми формулами (они известны для уравнений третьей и четвёртой степеней, но достаточно сложны, мы их не приводим), либо что-то изобретать (раскладывать на множители, вводить новую переменную). Если же дано неприведённое уравнение, то существуют способы замены переменной, обращающие уравнение в приведённое, — мы их покажем в примерах 6 и 7.

Пример 1. Решить уравнение $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2(x + 2) + 3(x + 2) = 0;$$
$$(x + 2)(x^2 + 3) = 0;$$
$$x + 2 = 0; \quad x^2 + 3 = 0.$$

Из первого уравнения получаем $x_1 = -2$. Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: -2.

Пример 2. Решить уравнение $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$.

Решение. Имеем:

$$(x^4 + x^3 + x^2) + (2x^2 + 2x + 2) = 0;$$
$$x^2(x^2 + x + 1) + 2(x^2 + x + 1) = 0;$$
$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 2) = 0.$$

Остаётся решить совокупность уравнений:

$$x^2 + x + 1 = 0; \quad x^2 + 2 = 0.$$

Ни одно из них не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.

Пример 3. Решить уравнение $x^3 + 4x^2 - 24 = 0$.

Решение. Попробуем найти целый корень заданного уравнения. Целым корнем многочлена с целыми коэффициентами по теореме 4 из § 34 может быть только делитель свободного члена, в данном случае числа 24. Выпишем делители свободного члена: ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; ± 8; ± 12; ± 24. Подставив вместо x в данное уравнение значение $x = 1$, получаем: $1^3 + 4 \cdot 1^2 - 24 \neq 0$; таким образом, $x = 1$ не является корнем уравнения. Далее, при $x = -1$ и $x = 2$ имеем: $(-1)^3 + 4(-1)^2 - 24 \neq 0$, $2^3 + 4 \cdot 2^2 - 24 = 0$. Итак, $x_1 = 2$ — корень уравнения.

Мы знаем, что если a — корень многочлена $P(x)$, то $P(x)$ делится без остатка на $x - a$ (см. теорему 3 из § 34). Воспользовавшись этим, разделим многочлен $x^3 + 4x^2 - 24$ на $x - 2$:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 4x^2 \qquad\qquad - 24 & x - 2 \\
\cline{2-2}
-\ \underline{x^3 - 2x^2} \qquad\qquad\quad & x^2 + 6x + 12 \\
6x^2 \qquad\qquad\quad & \\
-\ \underline{6x^2 - 12x} \qquad\quad & \\
12x - 24 & \\
-\ \underline{12x - 24} & \\
0 &
\end{array}
$$

Таким образом, $x^3 + 4x^2 - 24 = (x - 2)(x^2 + 6x + 12)$, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$(x - 2)(x^2 + 6x + 12) = 0.$$

Это уравнение сводится к совокупности уравнений (одно из которых фактически уже решено): $x - 2 = 0$; $x^2 + 6x + 12 = 0$. Второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 2.

Пример 4. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 20 = 0$.

Решение. Введём новую переменную $y = x^2$. Так как $x^4 = (x^2)^2 = y^2$, то заданное уравнение можно переписать в виде

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Это — квадратное уравнение, корни которого найдём, используя известные формулы: $y_1 = 4$, $y_2 = -5$.

Но $y = x^2$, значит, задача свелась к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4; \quad x^2 = -5.$$

Из первого уравнения находим: $x_{1,2} = \pm 2$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: ± 2.

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

называют **биквадратным** («би» — два, т. е. как бы «дважды квадратное» уравнение). Только что решённое уравнение было именно биквадратным. Любое биквадратное уравнение решается так же, как уравнение из примера 4: вводят новую переменную $y = x^2$, решают полученное квадратное уравнение относительно переменной y, а затем возвращаются к переменной x.

В примере 4 метод введения новой переменной был адекватен ситуации, т. е. хорошо ей соответствовал. Почему? Да потому что одно и то же выражение явно встречалось в записи уравнения несколько раз и был резон обозначить это выражение новой буквой. Но так бывает не всегда, иногда новая переменная «проявляется» только в процессе преобразований. Именно так будет обстоять дело в следующем примере.

Пример 5. Решить уравнение $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$.

Решение. Имеем:

$$x(x - 3) = x^2 - 3x;$$
$$(x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2.$$

Таким образом, заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 24.$$

Вот теперь новая переменная «проявилась»: $y = x^2 - 3x$. С её помощью уравнение можно переписать в виде $y(y + 2) = 24$ и, далее, $y^2 + 2y - 24 = 0$. Корнями этого уравнения служат числа 4 и −6.

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем два квадратных уравнения: $x^2 - 3x = 4$ и $x^2 - 3x = -6$. Из первого уравнения находим: $x_1 = 4$, $x_2 = -1$; второе уравнение не имеет корней.

Ответ: 4, −1.

Пример 6. Решить уравнение $21x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$.

Решение. Если свободный член уравнения равен 1 или −1, то значение $x = 0$ не является корнем уравнения, а потому можно обе части уравнения разделить почленно на x^3, а затем ввести новую переменную $y = \frac{1}{x}$:

$$\frac{21x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3} - \frac{1}{x^3} = \frac{0}{x^3};$$

$$21 + \frac{1}{x} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 0;$$

$$y^3 + 5y^2 - y - 21 = 0.$$

Среди делителей числа −21 методом проб (как в примере 3) найдём целочисленный корень последнего уравнения: $y_1 = -3$. Разделив многочлен $y^3 + 5y^2 - y - 21$ на $y + 3$, получим квадратный трёхчлен $y^2 + 2y - 7$ с корнями $y_{2,3} = -1 \pm 2\sqrt{2}$. Так как, далее, $x = \frac{1}{y}$, то находим соответственно:

$$x_1 = \frac{1}{y_1} = -\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{y_2} = \frac{1}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{(2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)} = \frac{2\sqrt{2} + 1}{7};$$

$$x_3 = \frac{1}{y_3} = \frac{1}{-2\sqrt{2} - 1} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{7}. \quad ■$$

Пример 7. Решить уравнение $4x^3 - 10x^2 + 14x - 5 = 0$.

Решение. Умножив обе части уравнения на 2, получим:

$$8x^3 - 20x^2 + 28x - 10 = 0;$$
$$(2x)^3 - 5 \cdot (2x)^2 + 14 \cdot (2x) - 10 = 0.$$

Введём новую переменную $y = 2x$, получим приведённое уравнение $y^3 - 5y^2 + 14y - 10 = 0$. Целочисленный корень уравнения очевиден: $y_1 = 1$. Разделив многочлен $y^3 - 5y^2 + 14y - 10$ на $y - 1$, получим квадратный трёхчлен $y^2 - 4y + 10$, не имеющий действительных корней. Так как $x = \frac{y}{2}$, то $x_1 = \frac{y_1}{2} = \frac{1}{2}$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 0,5.

Уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ (где все коэффициенты отличны от нуля) называют *возвратными* (первые два коэффициента a и b как бы *возвращаются* в последних двух членах уравнения). Покажем способ решения возвратных уравнений.

Разделим почленно все члены уравнения на x^2 (что вполне законно, так как значение $x = 0$ не является корнем уравнения); получим:

$$ax^2 + bx + c + b\frac{1}{x} + a\left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0;$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0. \qquad (1)$$

Положим $y = x + \dfrac{1}{x}$, тогда $y^2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$, откуда находим, что $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = y^2 - 2$. С помощью новой переменной y уравнение (1) можно переписать в виде $a(y^2 - 2) + by + c = 0$. Предположим, что это квадратное уравнение имеет корни y_1 и y_2. Тогда, возвращаясь к переменной x, остаётся лишь решить два уравнения:

$$x + \frac{1}{x} = y_1; \quad x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Уравнения вида $ax^4 + bx^3 + cx^2 + kbx + k^2a = 0$ (где все коэффициенты отличны от нуля) также называют *возвратными*. Здесь после почленного деления на x^2 получаем:

$$ax^2 + bx + c + b\frac{k}{x} + a\left(\frac{k}{x}\right)^2 = 0;$$

$$a\left(x^2 + \frac{k^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{k}{x}\right) + c = 0. \qquad (2)$$

Если $y = x + \dfrac{k}{x}$, то $y^2 = \left(x + \dfrac{k}{x}\right)^2$, откуда

$$x^2 + \frac{k^2}{x^2} = y^2 - 2k.$$

С помощью новой переменной y уравнение (2) можно переписать в виде квадратного уравнения

$$a(y^2 - 2k) + by + c = 0.$$

Если это уравнение имеет корни y_1 и y_2, то остаётся решить два уравнения:

$$x + \frac{k}{x} = y_1; \quad x + \frac{k}{x} = y_2.$$

Пример 8. Решить уравнение

$$3x^4 - 2x^3 - 9x^2 - 4x + 12 = 0.$$

Решение. Здесь $-4 = -2 \cdot 2$, $12 = 3 \cdot 2^2$, значит, коэффициенты многочлена имеют вид a, b, c, $2b$, 2^2a. Это — возвратное уравнение. Поделив обе части уравнения почленно на x^2, получим:

$$3x^2 - 2x - 9 - 2\frac{2}{x} + 3\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 0;$$

$$3\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 9 = 0. \qquad (3)$$

Положим $y = x + \frac{2}{x}$, тогда $y^2 = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2$, откуда находим, что $x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4$. С помощью новой переменной y уравнение (3) можно переписать в виде $3(y^2 - 4) - 2y - 9 = 0$, т. е. $3y^2 - 2y - 21 = 0$. Найдём корни этого квадратного уравнения: $y_1 = 3$, $y_2 = -\frac{7}{3}$. Возвращаясь к переменной x, остаётся решить два простых уравнения: $x + \frac{2}{x} = 3$ и $x + \frac{2}{x} = -\frac{7}{3}$. Из первого уравнения находим: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: 1, 2.

Вопросы для самопроверки

1. Может ли какая-нибудь несократимая дробь быть корнем многочлена $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$?

2. Что такое биквадратное уравнение? Опишите метод его решения. Примените описанный метод для решения уравнения $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$.

3. Назовите два основных метода решения уравнений высших степеней.

§ 36. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рациональные уравнения мы уже решали в предыдущих параграфах (см., например, § 5, 25, 28). Здесь рассмотрим несколько более сложных примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2 - 1} + \frac{3}{2x - 2} = \frac{1}{2x + 2}.$$

Решение.

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{(x-1)(x+1)} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = 0;$$

$$\frac{4x^3 - 10x^2 + 3x + 3 - x + 1}{2(x-1)(x+1)} = 0;$$

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x + 2}{(x-1)(x+1)} = 0. \qquad (1)$$

Приравняв нулю числитель дроби, содержащейся в левой части уравнения (1), получим:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0. \qquad (2)$$

Рассмотрим многочлен $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$. Заметим, что $x = 1$ — корень этого многочлена, поскольку $p(1) = 2 - 5 + 1 + 2 = 0$. Следовательно, по теореме 3 из § 34 многочлен $p(x)$ делится без остатка на двучлен $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 + x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{2x^3 - 2x^2\phantom{{}+x+2}} & 2x^2 - 3x - 2 \\ -3x^2 + x\phantom{{}+2} & \\ -\underline{-3x^2 + 3x\phantom{{}+2}} & \\ -2x + 2 & \\ -\underline{-2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Итак, $p(x) = (x - 1)(2x^2 - 3x - 2)$. Квадратный трёхчлен $2x^2 - 3x - 2$ имеет корни 2 и $-0{,}5$. Итак, мы нашли корни уравнения (2): 1, 2, $-0{,}5$.

Но (внимание!) утверждать, что уравнение (1) уже решено (а с ним и заданное уравнение) пока нельзя, ведь мы не проверили второе условие равенства дроби нулю. Нужно убедиться в том, что при найденных значениях переменной x знаменатель дроби, содержащейся в левой части уравнения (1), не обращается в нуль.

Замечаем, что при $x = 1$ знаменатель $(x - 1)(x + 1)$ обращается в нуль, т. е. это значение не является корнем уравнения (1); $x = 1$ — *посторонний корень.*

При значениях $x = 2$ или $x = -0{,}5$ знаменатель $(x - 1)(x + 1)$ в нуль не обращается. Эти значения — корни исходного уравнения.

Ответ: 2, $-0{,}5$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2 + 3x - 3} + \frac{2}{x^2 + 3x + 1} = \frac{7}{5}.$$

Решение. Введём новую переменную $y = x^2 + 3x$. Это позволит представить уравнение в более простом виде (что, собственно говоря, и составляет цель введения новой переменной — запись упрощается и структура уравнения становится более ясной):

$$\frac{1}{y - 3} + \frac{2}{y + 1} = \frac{7}{5}.$$

Общим знаменателем имеющихся дробей служит

$$5(y - 3)(y + 1).$$

Перепишем уравнение, расставив дополнительные множители:

$$\frac{1^{\backslash 5(y+1)}}{y-3} + \frac{2^{\backslash 5(y-3)}}{y+1} = \frac{7^{\backslash (y-3)(y+1)}}{5}.$$

Умножив обе части уравнения на общий знаменатель $5(y - 3) \times$ $\times (y + 1)$, получим:

$$7y^2 - 29y + 4 = 0;$$

$$y_1 = 4, \quad y_2 = \frac{1}{7}.$$

Теперь для найденных корней надо проверить выполнение условия $5(y - 3)(y + 1) \neq 0$. Оба корня этому условию удовлетворяют.

Осталось, возвращаясь к переменной x, решить два уравнения:

$$x^2 + 3x = 4; \quad x^2 + 3x = \frac{1}{7}.$$

Корнями первого уравнения являются числа 1 и -4, корнями второго — числа $\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

Ответ: 1, -4, $\frac{-21 \pm \sqrt{469}}{14}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 27. \qquad (3)$$

Решение. Левая часть уравнения (3) представляет собой сумму квадратов выражений x и $\frac{3x}{x+3}$. Это наталкивает на мысль вычесть из обеих частей уравнения удвоенное произведение указанных выражений, чтобы левая часть уравнения стала полным квадратом разности. Итак, прибавим к обеим частям уравнения (3) выражение $-2x \cdot \frac{3x}{x+3}$. Получим уравнение

$$\left(x - \frac{3x}{x+3}\right)^2 = 27 - 6\frac{x^2}{x+3}.$$

Преобразовав выражение в скобках, получим:

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2 + 6\frac{x^2}{x+3} - 27 = 0.$$

Положим теперь $y = \frac{x^2}{x + 3}$. Тогда уравнение примет вид $y^2 + 6y - 27 = 0$, откуда $y_1 = -9$, $y_2 = 3$. Задача свелась к решению совокупности уравнений:

$$\frac{x^2}{x + 3} = -9; \qquad \frac{x^2}{x + 3} = 3.$$

Первое уравнение не имеет корней; из второго находим $x_{1,2} = \frac{3\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$. Оба найденных значения x удовлетворяют условию $x + 3 \neq 0$ и являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $\frac{3\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2}$.

Вопросы для самопроверки

1. Какие уравнения называют рациональными уравнениями с одной переменной?
2. Опишите алгоритм решения рационального уравнения.
3. Расскажите, почему при решении рационального уравнения могут появиться посторонние корни. Как их отсеять?

§ 37. УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЯМИ

Выше, в § 16, уже говорилось о решении *уравнений с модулями*, т. е. о решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля. Там речь шла о решении простейших уравнений с модулями — уравнений вида $|ax + b| = c$. Мы показали способ решения таких уравнений, основанный на геометрическом смысле выражения $|x - a|$. Теперь рассмотрим более сложные примеры.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 + 2|x - 1| - 6 = 0$.

Решение. Если $x - 1 \geqslant 0$, то $|x - 1| = x - 1$ и заданное уравнение принимает вид

$$x^2 + 2(x - 1) - 6 = 0, \text{ т. е. } x^2 + 2x - 8 = 0.$$

Если же $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1)$ и заданное уравнение принимает вид

$$x^2 - 2(x - 1) - 6 = 0, \text{ т. е. } x^2 - 2x - 4 = 0.$$

Таким образом, заданное уравнение следует рассмотреть по отдельности в каждом из двух указанных случаев.

1) Пусть $x - 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant 1$. Из уравнения $x^2 + 2x - 8 = 0$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Условию $x \geqslant 1$ удовлетворяет лишь значение $x_1 = 2$.

2) Пусть $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$. Из уравнения $x^2 - 2x - 4 = 0$ находим $x_3 = 1 + \sqrt{5}$, $x_4 = 1 - \sqrt{5}$. Условию $x < 1$ удовлетворяет лишь значение $x_4 = 1 - \sqrt{5}$.

Ответ: 2, $1 - \sqrt{5}$.

Замечание 1. Способ, который мы использовали при решении примера 1, иногда называют так: *раскрытие модуля по определению*.

Пример 2. Решить уравнение $|x^2 - 6x + 7| = \frac{5x - 9}{3}$.

Решение.

Первый способ (*раскрытие модуля по определению*). Рассуждая, как в примере 1, приходим к выводу, что заданное уравнение нужно рассмотреть в двух случаях:

1) $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$; 2) $x^2 - 6x + 7 < 0$.

1) Если $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$, то $|x^2 - 6x + 7| = x^2 - 6x + 7$ и заданное уравнение принимает вид $x^2 - 6x + 7 = \frac{5x - 9}{3}$, т. е. $3x^2 - 23x + 30 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим:

$$x_1 = 6,\ x_2 = \frac{5}{3}.$$

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_1 = 6$ условию $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $6^2 - 6 \cdot 6 + 7 \geqslant 0$, т. е. $7 \geqslant 0$ — верное неравенство. Значит, $x_1 = 6$ — корень заданного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_2 = \frac{5}{3}$ условию $x^2 - 6x + 7 \geqslant 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \frac{5}{3} \cdot 6 + 7 \geqslant 0$, т. е. $\frac{25}{9} - 3 \geqslant 0$ — неверное неравенство. Следовательно, $x_2 = \frac{5}{3}$ не является корнем заданного уравнения.

2) Если $x^2 - 6x + 7 < 0$, то $|x^2 - 6x + 7| = -(x^2 - 6x + 7)$ и заданное уравнение принимает вид $-(x^2 - 6x + 7) = \frac{5x - 9}{3}$, т. е. $3x^2 - 13x + 12 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получим:

$$x_3 = 3,\ x_4 = \frac{4}{3}.$$

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_3 = 3$ условию $x^2 - 6x + 7 < 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $3^2 - 6 \cdot 3 + 7 < 0$, т. е. $-2 < 0$ — верное неравенство. Значит, $x_3 = 3$ — корень заданного уравнения.

Выясним, удовлетворяет ли значение $x_4 = \frac{4}{3}$ условию $x^2 - 6x + 7 < 0$. Для этого подставим указанное значение в квадратное неравенство. Получим: $\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot 6 + 7 < 0$, т. е. $\frac{16}{9} - 1 < 0$ — неверное неравенство. Таким образом, $x_4 = \frac{4}{3}$ не является корнем заданного уравнения.

Вывод: заданное уравнение имеет корни 6 и 3.

Второй способ. Выше, в § 16, уже говорилось о том, что при решении уравнений с модулями часто рассуждают так. Равенство $|c| = a$ при $a < 0$ неверно, при $a > 0$ эквивалентно совокупности двух равенств $c = a$, $c = -a$, при $a = 0$ сводится к $c = 0$ (впрочем, последний случай можно объединить со случаем $a > 0$). Поэтому если дано уравнение $|f(x)| = h(x)$, то при $h(x) < 0$ оно не имеет решений, а при $h(x) \geqslant 0$ надо рассмотреть два случая: $f(x) = h(x)$; $f(x) = -h(x)$ (*совокупность уравнений*).

Для заданного уравнения потребуем выполнения условия $\frac{5x - 9}{3} \geqslant 0$ и рассмотрим совокупность уравнений:

$$x^2 - 6x + 7 = \frac{5x - 9}{3}; \quad x^2 - 6x + 7 = -\frac{5x - 9}{3}.$$

Оба эти уравнения решены выше (при первом способе решения заданного уравнения), их корни таковы: 6, $\frac{5}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$. Условию $\frac{5x - 9}{3} \geqslant 0$ из этих четырёх значений удовлетворяют лишь два: 6 и 3.

Вывод: заданное уравнение имеет корни 6 и 3.

Третий способ (*графический*).

1) Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 7|$. Сначала построим параболу $y = x^2 - 6x + 7$. Имеем:

$$x^2 - 6x + 7 = (x - 3)^2 - 2.$$

График функции $y = (x - 3)^2 - 2$ можно получить из графика функции $y = x^2$ сдвигом его на 3 единицы масштаба вправо (по оси x) и на 2 единицы масштаба вниз (по оси y). Прямая $x = 3$ — ось интересующей нас параболы. В качестве контрольных точек для более точного построения графика удобно взять точку $(3; -2)$ — вершину параболы, точку $(0; 7)$ и симметричную ей относительно оси параболы точку $(6; 7)$. Парабола изображена на рисунке 127.

Чтобы теперь построить график функции $y = |x^2 - 6x + 7|$, надо (см. § 23) оставить без изменения те части построенной параболы, которые лежат не ниже оси x, а ту часть параболы, которая лежит ниже оси x, отобразить симметрично относительно оси x (рис. 127).

2) Построим график линейной функции $y = \frac{5x - 9}{3}$. В качестве контрольных точек удобно взять точки $(0; -3)$ и $(3; 2)$. Прямая, служащая графиком указанной линейной функции, представлена на том же рисунке 127.

Сделаем некоторые пояснения к рисунку 127. Парабола пересекает ось x в двух точках; чтобы их найти, надо решить уравнение $x^2 - 6x + 7 = 0$. Получим $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$. Прямая $y = \frac{5x - 9}{3}$ пересекает ось x в точке 1,8 (в этой точке $y = 0$). Но $3 - \sqrt{2} < 1{,}8$, значит, точка пересечения прямой с осью x находится правее соответствующей точки пересечения параболы с осью x. Это нашло своё отражение на рисунке 127.

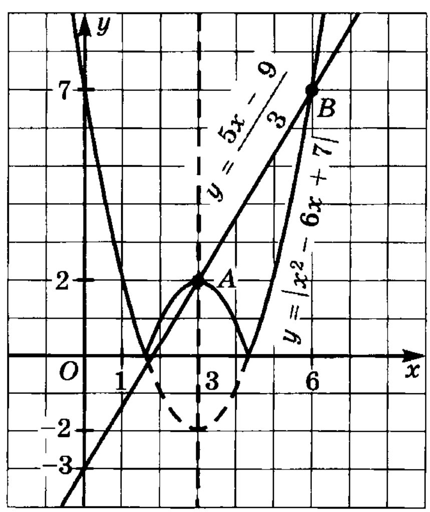


Рис. 127

3) Судя по чертежу, графики пересекаются в точках $A(3;\ 2)$ и $B(6;\ 7)$. Подставив абсциссы этих точек $x = 3$ и $x = 6$ в заданное уравнение, убеждаемся, что и при том и при другом значении получается верное числовое равенство. Таким образом, наша гипотеза подтвердилась — уравнение имеет корни 3 и 6. ■

Замечание 2. Вы, конечно, понимаете, что графический способ при всём своём изяществе не очень надёжен. В рассмотренном примере он сработал только потому, что корни уравнения — целые числа. Тем не менее в пользе этого метода мы не раз с вами убеждались.

Пример 3. Решить уравнение $|2x - 4| + |x + 3| = 8$.

Решение.

Первый способ. Выражение $2x - 4$ обращается в 0 при $x = 2$, а выражение $x + 3$ — при $x = -3$. Эти две точки разбивают числовую прямую на три промежутка (рис. 128).

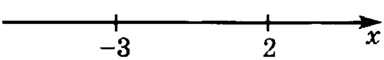


Рис. 128

Рассмотрим первый промежуток $(-\infty;\ -3)$. Если $x < -3$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 < 0$. Значит, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = -(x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $-(2x - 4) - (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим $x = -\frac{7}{3}$. Это значение не принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому не может служить корнем заданного уравнения.

Рассмотрим второй промежуток $[-3;\ 2)$. Если $-3 \leqslant x < 2$, то $2x - 4 < 0$ и $x + 3 \geqslant 0$. Следовательно, $|2x - 4| = -(2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $-(2x - 4) + (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим $x = -1$. Это значение принадлежит рассматриваемому промежутку, поэтому является корнем заданного уравнения.

Рассмотрим третий промежуток $[2;\ +\infty)$. Если $x \geqslant 2$, то $2x - 4 \geqslant 0$ и $x + 3 > 0$. Значит, $|2x - 4| = (2x - 4)$, а $|x + 3| = (x + 3)$. Таким образом, на рассматриваемом промежутке заданное уравнение принимает вид $(2x - 4) + (x + 3) = 8$. Решив это уравнение, находим $x = 3$. Это значение принадлежит рассматриваемому промежутку, а потому является корнем заданного уравнения.

Итак, нашли два корня: −1, 3.

Рис. 129

Второй способ. Преобразуем уравнение к виду

$$2|x-2|+|x+3|=8.$$

Переведём это соотношение на геометрический язык: нам нужно найти на координатной прямой такие точки $M(x)$, которые удовлетворяют условию $2\rho(x;\ 2)+\rho(x;\ -3)=8$, или (см. рис. 129)

$$MA+2MB=8 \qquad (1)$$

(здесь $A=A(-3)$, $B=B(2)$).

Интересующая нас точка M не может находиться левее точки A, так как в этом случае $2MB>10$ и, следовательно, равенство (1) не может выполняться.

Рассмотрим случай, когда точка $M(x)$ лежит между A и B (точка M_1 на рис. 129). Для такой точки равенство (1) принимает вид

$$(x-(-3))+2(2-x)=8,$$

откуда находим $x=-1$.

Рассмотрим случай, когда точка $M(x)$ лежит правее точки B (точка M_2 на рис. 129). Для такой точки равенство (1) принимает вид

$$(x-(-3))+2(x-2)=8,$$

откуда находим $x=3$.

Ответ: −1, 3.

Замечание 3. Советуем вам попробовать использовать для решения уравнения из примера 3 графический способ. Для этого надо построить график функции $y=|2x-4|+|x+3|$. Почти такой же график был ранее построен в § 16.

Вопросы для самопроверки

1. Назовите три основных способа решения уравнений с модулями.

2. Примените указанные вами способы для решения уравнения $|x-3|=2$.

§ 38. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные понятия, связанные с иррациональными уравнениями

Если в уравнении переменная содержится под знаком корня (квадратного, кубического и т. д.; мы пока ограничимся квадратными корнями), то уравнение называют **иррациональным**. Бывают случаи, когда математическая модель реальной ситуации представляет собой иррациональное уравнение — мы с этим уже встречались (см. замечание к примеру 3 в § 28).

Рассмотрим иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x+1} = 3.$$

Это равенство по определению квадратного корня означает, что $2x + 1 = 3^2$. Фактически от заданного иррационального уравнения мы перешли к рациональному уравнению $2x + 1 = 9$, возведя в квадрат обе части иррационального уравнения. *Метод возведения в квадрат обеих частей уравнения* — основной метод решения иррациональных уравнений. Впрочем, это понятно: как же иначе освободиться от знака квадратного корня? Из уравнения $2x + 1 = 9$ находим $x = 4$. Это корень как уравнения $2x + 1 = 9$, так и заданного иррационального уравнения.

Метод возведения в квадрат технически несложен, но иногда приводит к неприятностям. Рассмотрим, например, иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x-5} = \sqrt{4x-7}.$$

Возведя обе его части в квадрат, получим:

$$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 = \left(\sqrt{4x-7}\right)^2;$$

$$2x - 5 = 4x - 7;\ x = 1.$$

Но значение $x = 1$, будучи корнем рационального уравнения $2x - 5 = 4x - 7$, не является корнем заданного иррационального уравнения. Почему? Подставив 1 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим $\sqrt{-3} = \sqrt{-3}$. Как же можно говорить о выполнении числового равенства, если и в левой и в правой его частях содержатся выражения, не имеющие смысла? В подобных случаях говорят: $x = 1$ — *посторонний корень* для заданного иррационального уравнения. Получается, что заданное иррациональное уравнение не имеет корней.

Решим иррациональное уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} = x - 6.$$

Воспользуемся методом возведения в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x^2 + 5x - 2}\right)^2 = (x - 6)^2;$$

$$2x^2 + 5x - 2 = x^2 - 12x + 36;$$
$$x^2 + 17x - 38 = 0.$$

Корни этого уравнения можно найти устно: их произведение равно -38, а сумма равна -17; нетрудно догадаться, что это — числа 2 и -19. Итак, $x_1 = 2$, $x_2 = -19$.

Подставив значение 2 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2} = 2 - 6, \text{ т. е. } \sqrt{16} = -4.$$

Это неверно.

Подставив значение -19 вместо x в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot (-19)^2 + 5 \cdot (-19) - 2} = -19 - 6, \text{ т. е. } \sqrt{625} = -25.$$

Это также неверно.

Каков же вывод? Оба найденных значения — *посторонние корни*. Иными словами, заданное иррациональное уравнение, как и предыдущее, не имеет корней.

Посторонний корень — не новое для вас понятие, посторонние корни уже встречались при решении рациональных уравнений, обнаружить их помогает проверка. Для иррациональных уравнений проверка — обязательный этап решения уравнения, который поможет обнаружить посторонние корни, если они есть, и отбросить их (обычно говорят «отсеять»).

Итак, иррациональное уравнение решают *методом возведения обеих его частей в квадрат*; решив полученное в итоге рациональное уравнение, надо обязательно сделать *проверку*, отсеяв возможные *посторонние корни*.

Используя этот вывод, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{5x-16} = x - 2. \qquad (1)$$

Решение. Возведём обе части уравнения (1) в квадрат:

$$\left(\sqrt{5x-16}\right)^2 = (x-2)^2;$$
$$5x - 16 = x^2 - 4x + 4;$$
$$x^2 - 9x + 20 = 0;$$
$$x_1 = 5, \quad x_2 = 4.$$

Проверка. Подставив $x = 5$ в уравнение (1), получим $\sqrt{9} = 3$ — верное равенство. Подставив $x = 4$ в уравнение (1), получим $\sqrt{4} = 2$ — верное равенство. Значит, оба найденных значения — корни уравнения (1).

Ответ: 4; 5.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$ (это уравнение встретилось нам в § 28, но его решение мы «отложили до лучших времён»).

Решение. Возведя в квадрат обе части заданного иррационального уравнения, получим:

$$2x^2 + 8x + 16 = (44 - 2x)^2;$$
$$2x^2 + 8x + 16 = 1936 - 176x + 4x^2;$$
$$-2x^2 + 184x - 1920 = 0;$$
$$x^2 - 92x + 960 = 0;$$
$$x_1 = 80, \quad x_2 = 12.$$

Проверка. Подставив $x = 80$ в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 80^2 + 8 \cdot 80 + 16} = 44 - 2 \cdot 80.$$

Ясно, что это — неверное равенство, поскольку в его правой части содержится отрицательное число, а в левой — положительное число. Следовательно, $x = 80$ — посторонний корень для данного уравнения.

Подставив $x = 12$ в заданное иррациональное уравнение, получим:

$$\sqrt{2 \cdot 12^2 + 8 \cdot 12 + 16} = 44 - 2 \cdot 12,$$

т. е. $\sqrt{400} = 20$ — верное равенство. Значит, $x = 12$ — корень данного уравнения.

Ответ: 12.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+7} + \sqrt{x+2} = 3. \qquad (2)$$

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{3x+7} = 3 - \sqrt{x+2}$$

и применим метод возведения в квадрат:

$$\left(\sqrt{3x+7}\right)^2 = \left(3 - \sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x+2} + \left(\sqrt{x+2}\right)^2;$$

$$3x + 7 = 9 - 6\sqrt{x+2} + x + 2;$$

$$6\sqrt{x+2} = 4 - 2x;$$

$$3\sqrt{x+2} = 2 - x.$$

Ещё раз применим метод возведения в квадрат:

$$\left(3\sqrt{x+2}\right)^2 = (2-x)^2;$$
$$9(x+2) = 4 - 4x + x^2;$$
$$x^2 - 13x - 14 = 0;$$
$$x_1 = 14, \quad x_2 = -1.$$

Проверка. Подставив значение $x = 14$ в уравнение (2), получим: $\sqrt{49} + \sqrt{16} = 3$ — неверное равенство, следовательно, $x = 14$ — посторонний корень.

Подставив значение $x = -1$ в уравнение (2), получим: $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$ — верное равенство. Поэтому $x = -1$ — корень уравнения (2).

Ответ: -1.

Пример 4. Решить уравнение $2x + \sqrt{x} - 3 = 0$.

Решение. Конечно, можно решить это уравнение по той же схеме, которую мы применяли в предыдущих примерах: переписать уравнение в виде $\sqrt{x} = 3 - 2x$, возвести обе части этого уравнения в квадрат, решить полученное рациональное уравнение и проверить найденные корни подстановкой их в исходное иррациональное уравнение.

Но мы применим более изящный способ: введём новую переменную $y = \sqrt{x}$. Тогда получим $2y^2 + y - 3 = 0$ — квадратное уравнение относительно переменной y. Найдём его корни: $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{2}$. Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений:

$$\sqrt{x} = 1; \quad \sqrt{x} = -\frac{3}{2}.$$

Из первого уравнения находим $x = 1$; второе уравнение не имеет корней (вы же помните, что $\sqrt{x}$ принимает только неотрицательные значения).

Ответ: 1.

2. Равносильность уравнений

Вы уже накопили некоторый опыт в решении разных уравнений — линейных, квадратных, рациональных, иррациональных. Вы знаете, что при решении уравнений выполняют различные преобразования, например:

- член уравнения переносят из одной части уравнения в другую с противоположным знаком;
- обе части уравнения умножают или делят на одно и то же отличное от нуля число;
- освобождаются от знаменателя, т. е. заменяют уравнение $\frac{p(x)}{q(x)} = 0$ уравнением $p(x) = 0$;
- обе части уравнения возводят в квадрат.

Конечно, вы обратили внимание на то, что в результате некоторых преобразований могли появиться посторонние корни, поэтому приходилось быть бдительными и проверять все найденные корни. Вот мы и попытаемся сейчас осмыслить всё это с теоретической точки зрения.

Определение. Два уравнения $f(x) = g(x)$ и $r(x) = s(x)$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые корни (или, в частности, если оба уравнения не имеют корней).

Обычно при решении уравнения стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием уравнения.**

Укажем *основные равносильные преобразования уравнения.*

1. Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.

Например, замена уравнения $2x + 5 = 7x - 8$ уравнением $2x - 7x = -8 - 5$ есть равносильное преобразование уравнения.

Это значит, что уравнения $2x + 5 = 7x - 8$ и $2x - 7x = -8 - 5$ равносильны.

2. Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число.

Например, замена уравнения $0{,}5x^2 - 0{,}3x = 2$ уравнением $5x^2 - 3x = 20$ (обе части первого уравнения почленно умножили на 10) есть равносильное преобразование уравнения.

Укажем *основные неравносильные преобразования уравнения.*

1. Освобождение от знаменателей, содержащих переменную.

Например, замена уравнения $\frac{x^2}{x-2} = \frac{4}{x-2}$ уравнением $x^2 = 4$ есть неравносильное преобразование уравнения. Дело в том, что второе уравнение имеет два корня: 2 и -2, а первому уравнению значение $x = 2$ не может удовлетворять, при этом значении знаменатели обращаются в нуль. В подобных случаях мы говорили так: $x = 2$ — посторонний корень (для первого уравнения).

Когда говорят *неравносильное преобразование*, это не значит, что посторонние корни обязательно появятся, это значит, что они *могут появиться*, как это было в только что рассмотренном примере. А вот замена уравнения $\frac{x^2}{x-2} = \frac{x}{x-2}$ уравнением $x^2 = x$ есть равносильное преобразование уравнения, корни второго уравнения 0 и 1 являются в то же время и корнями первого уравнения.

2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат.

Примеры приводить не будем, так как в этом параграфе их было достаточно много.

Есть и другие неравносильные преобразования уравнений, но мы пока ограничимся только указанными двумя.

Если в процессе решения уравнения применялось одно из указанных неравносильных преобразований, то все найденные корни нужно проверить подстановкой в исходное уравнение, поскольку среди них могут оказаться посторонние корни.

Впрочем, иногда проверка корней подстановкой бывает весьма обременительной. Тогда используются другие соображения, которые мы сейчас обсудим.

Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ возвести в квадрат, то получится уравнение $(f(x))^2 = (g(x))^2$. Если обе части уравнения

$f(x) = -g(x)$ возвести в квадрат, то снова получится уравнение $(f(x))^2 = (g(x))^2$. Таким образом, уравнение $(f(x))^2 = (g(x))^2$ как бы «склеивает» два уравнения $f(x) = g(x)$ и $f(x) = -g(x)$, отсюда и появляются *посторонние корни* (корни уравнения $f(x) = -g(x)$ чаще всего оказываются посторонними для уравнения $f(x) = g(x)$). Посторонних корней не будет, если, например, второе уравнение не имеет корней. В этом мы можем быть уверены, если известно, что обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны.

Итак, *возведение обеих частей уравнения в квадрат есть равносильное преобразование, если известно, что обе части уравнения принимают только неотрицательные (или только неположительные) значения.*

В связи с этим вернёмся к уравнению $\sqrt{5x - 16} = x - 2$ (см. выше пример 1). Так как подкоренное выражение должно быть неотрицательным, должно выполняться неравенство $5x - 16 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant \frac{16}{5}$. При этом условии правая часть уравнения заведомо положительна, так что возведение в квадрат обеих частей уравнения есть равносильное преобразование уравнения. В результате возведения в квадрат мы получаем квадратное уравнение с корнями 5 и 4, удовлетворяющими условию $x \geqslant \frac{16}{5}$. В силу равносильности преобразований это корни исходного уравнения (проверять их подстановкой в исходное уравнение не нужно).

Теперь вернёмся к уравнению $\sqrt{2x^2 + 8x + 16} = 44 - 2x$. Неравенство $2x^2 + 8x + 16 \geqslant 0$ выполняется при всех x, поскольку $2x^2 + 8x + 16 = 2(x + 2)^2 + 8$. Возведение в квадрат обеих частей уравнения будет равносильным преобразованием при условии $44 - 2x \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant 22$. Возведя обе части уравнения в квадрат, мы пришли к квадратному уравнению с корнями 80 и 12. Из них указанному условию удовлетворяет лишь значение 12. Поэтому 12 — корень заданного иррационального уравнения, а 80 — посторонний корень.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + x - 5} + \sqrt{x^2 + 8x - 4} = 5.$$

Решение. Если обе части заданного уравнения возвести в квадрат, то получится довольно сложное уравнение. Поступим иначе: преобразуем уравнение к виду

$$\sqrt{x^2 + x - 5} = 5 - \sqrt{x^2 + 8x - 4}$$

и возведём обе части в квадрат:

$$\left(\sqrt{x^2 + x - 5}\right)^2 = \left(5 - \sqrt{x^2 + 8x - 4}\right)^2;$$

$$x^2 + x - 5 = 25 - 10\sqrt{x^2 + 8x - 4} + x^2 + 8x - 4;$$

$$10\sqrt{x^2 + 8x - 4} = 7x + 26. \qquad (3)$$

Ещё раз возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\left(10\sqrt{x^2 + 8x - 4}\right)^2 = (7x + 26)^2;$$

$$100x^2 + 800x - 400 = 49x^2 + 364x + 676;$$

$$51x^2 + 436x - 1076 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -\frac{538}{51}.$$

Проверка. Значение $x = 2$ удовлетворяет исходному уравнению. Что касается значения $x = -\frac{538}{51}$, то подстановка его в исходное уравнение приводит к весьма сложным вычислениям. Однако такой подстановки можно избежать, если заметить, что при этом значении правая часть уравнения (3) принимает отрицательное значение: $7 \cdot \left(-\frac{538}{51}\right) + 26 = -\frac{2440}{51}$. В то же время левая часть уравнения отрицательной быть не может. Таким образом, $-\frac{538}{51}$ не является корнем заданного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 6. Решить уравнение

$$x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 1{,}5(x + 4).$$

Решение. Если проявить некоторую наблюдательность, можно заметить, что заданное уравнение легко сводится к квадратному. Действительно, умножив обе части заданного уравнения на 2, получим:

$$2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3x + 12;$$

$$2x^2 - 3x + 2 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} - 8 = 0.$$

Полагая $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = y$, получим $y^2 - 2y - 8 = 0$, откуда $y_1 = 4$, $y_2 = -2$. Таким образом, задача сводится к решению двух уравнений:

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4, \qquad \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = -2.$$

Из первого уравнения находим $x_1 = \frac{7}{2}$, $x_2 = -2$; второе уравнение не имеет решений.

Так как исходное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$ (поскольку второе уравнение не имело решений), найденные значения можно проверить подстановкой в уравнение $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$. Эта подстановка показывает, что оба значения являются корнями указанного, а следовательно, и исходного уравнения.

Ответ: 3,5; −2.

Пример 7. Решить уравнение

$$2x - 5 + 2\sqrt{x^2 - 5x} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} = 48. \tag{4}$$

Решение. Если $x \geqslant 5$, то все выражения под знаками квадратных корней неотрицательны, поэтому выражение $\sqrt{x^2 - 5x}$ можно представить в виде $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x - 5}$. Далее, так как $2x = x + x$, то уравнение (4) можно переписать следующим образом:

$$x + x - 5 + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x - 5} + 2\sqrt{x} - 48 = 0;$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{x - 5} + \left(\sqrt{x - 5}\right)^2 + \left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right) - 48 = 0;$$

$$\left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right)^2 + 2\left(\sqrt{x - 5} + \sqrt{x}\right) - 48 = 0.$$

Введя новую переменную $y = \sqrt{x - 5} + \sqrt{x}$, получим квадратное уравнение $y^2 + 2y - 48 = 0$, из которого находим $y_1 = 6$, $y_2 = -8$. Таким образом, задача свелась к решению двух уравнений:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = 6; \qquad \sqrt{x - 5} + \sqrt{x} = -8.$$

Из первого уравнения находим $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$; второе уравнение решений не имеет.

Проверка показывает, что $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ является корнем уравнения $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 6$. Но это уравнение равносильно уравнению (4), значит, $x = \left(\frac{41}{12}\right)^2$ является корнем и уравнения (4). ■

Вопросы для самопроверки

1. Какие уравнения называют иррациональными?
2. Почему при решении иррационального уравнения следует обязательно делать проверку найденных корней?
3. В каком случае уравнения $f(x) = g(x)$ и $r(x) = s(x)$ называют равносильными?
4. Какие преобразования уравнения являются равносильными?
5. Какие преобразования уравнения могут привести к появлению посторонних корней?

§ 39. ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

Чтобы познакомиться с понятием *уравнения с параметром*, рассмотрим два сравнительно несложных примера.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 - (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0.$$

Решение. В заданном квадратном уравнении в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или *уравнениями с параметрами*. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения.

Найдём дискриминант:

$$D = (2p + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p^2 + p - 2) =$$
$$= (4p^2 + 4p + 1) - (4p^2 + 4p - 8) = 9.$$

Далее,

$$x_1 = \frac{(2p + 1) + \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 + 3}{2} = \frac{2(p + 2)}{2} = p + 2;$$

$$x_2 = \frac{(2p + 1) - \sqrt{9}}{2} = \frac{2p + 1 - 3}{2} = \frac{2(p - 1)}{2} = p - 1.$$

Ответ: $p + 2$; $p - 1$.

Замечание 1. Данное уравнение можно решить устно, если заметить, что $p^2 + p - 2 = (p + 2)(p - 1)$. Переписав уравнение в виде

$$x^2 - (2p + 1)x + (p + 2)(p - 1) = 0,$$

легко сообразить (с помощью теоремы, обратной теореме Виета), что его корнями служат числа $p + 2$ и $p - 1$.

Пример 2. Решить уравнение $px^2 + (1 - p)x - 1 = 0$.

Решение. Это также уравнение с параметром p, но, в отличие от предыдущего примера, его нельзя сразу решать по формуле корней квадратного уравнения. Дело в том, что про заданное уравнение мы пока не можем сказать, является ли оно квадратным. В самом деле, а вдруг $p = 0$? Тогда уравнение примет вид

$$0 \cdot x^2 + (1 - 0)x - 1 = 0,$$

т. е. $x - 1 = 0$, откуда получаем $x = 1$. Вот если точно известно, что $p \neq 0$, то можно применять формулу корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-(1 - p) \pm \sqrt{(1 - p)^2 - 4 \cdot p \cdot (-1)}}{2p} =$$

$$= \frac{p - 1 \pm \sqrt{1 - 2p + p^2 + 4p}}{2p} =$$

$$= \frac{p - 1 \pm \sqrt{(p + 1)^2}}{2p} = \frac{p - 1 \pm (p + 1)}{2p};$$

$$x_1 = \frac{p - 1 + (p + 1)}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1;$$

$$x_2 = \frac{p - 1 - (p + 1)}{2p} = \frac{-2}{2p} = -\frac{1}{p}.$$

Если $p = -1$, то $x_1 = x_2 = 1$.

Ответ: если $p = 0$ или $p = -1$, то $x = 1$; если $p \neq 0, -1$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{p}$.

Замечание 2. Обратили ли вы внимание на то, что в процессе решения последнего квадратного уравнения мы допустили неточность: заменили выражение $\sqrt{(p+1)^2}$ выражением $p+1$, хотя, как было установлено в § 16, имеет место формула $\sqrt{(p+1)^2} = |p+1|$? Почему же мы не использовали знак модуля? Ответ на этот вопрос связан с практичностью математиков. Зачем, говорят они, писать $\pm|m|$, когда можно написать $\pm m$; и в том и в другом случае выражение будет объединять два противоположных числа: m и $-m$.

Замечание 3. Квадратное уравнение

$$px^2 + (1-p)x - 1 = 0$$

можно было решить, не применяя формулу корней. Достаточно заметить, что значение $x_1 = 1$ удовлетворяет уравнению (при $x = 1$ получаем: $p + (1-p) - 1 = 0$ — верное равенство), и воспользоваться теоремой Виета, согласно которой $x_1x_2 = -\frac{1}{p}$; значит, $x_2 = -\frac{1}{p}$.

Параметр в уравнении может быть обозначен любой буквой. Мы в примерах 1 и 2 обозначали его буквой p (она как бы напоминала вам о слове *параметр*), но далее перейдём к более употребительной для обозначения параметра букве a.

Итак, если дано уравнение $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано **уравнение с параметром.** Основная трудность, связанная с решением таких уравнений, состоит в следующем. При одних значениях параметра уравнение не имеет корней, при других — имеет; при одних значениях параметра корни находятся по одним формулам, при иных — по другим. Как всё это учесть? Вернитесь к примеру 2 и обратите внимание на то, что при $p = 0$ мы решали уравнение как линейное (по одной формуле), а при $p \neq 0$ — как квадратное (по другой формуле).

Пример 3. Решить уравнение с параметром a:

$$2a(a-2)x = a - 2.$$

Решение. Обычно корень уравнения $bx = c$ мы легко находим по формуле $x = \frac{c}{b}$, так как в конкретном уравнении коэффициент b отличен от нуля. В заданном уравнении коэффициент при x равен $2a(a-2)$, а поскольку значение параметра a нам неизвестно и в принципе оно может быть любым, следует подстраховаться, т. е. сначала предусмотреть возможность обращения указанного коэффициента в нуль. Это будет при $a = 0$ или при $a = 2$.

Итак, рассмотрим следующие случаи: 1) $a = 0$; 2) $a = 2$; 3) $a \neq 0$, $a \neq 2$.

1) При $a = 0$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 2$ — это уравнение не имеет корней.

2) При $a = 2$ уравнение принимает вид $0 \cdot x = 0$ — этому уравнению удовлетворяют любые значения x.

3) При $a \neq 0$, $a \neq 2$ коэффициент при x отличен от нуля и, следовательно, на этот коэффициент можно разделить обе части уравнения. Получим:

$$x = \frac{a-2}{2a(a-2)} = \frac{1}{2a}.$$

О т в е т: 1) если $a = 0$, то корней нет;
2) если $a = 2$, то x — любое действительное число;
3) если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

П р и м е р 4. Сколько корней имеет уравнение

$$2|x-a| = x+1$$

при различных значениях параметра a?

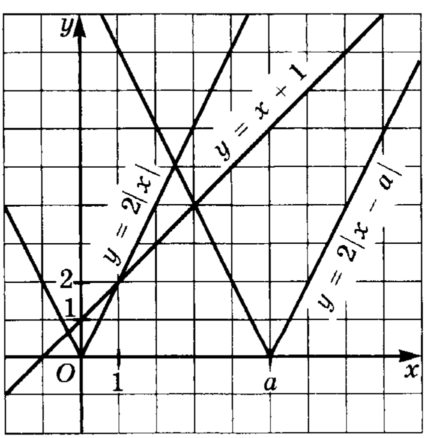


Рис. 130

Р е ш е н и е. На рисунке 130 изображены в одной системе координат графики функций $y = 2|x|$ и $y = x + 1$. Они пересекаются в двух точках, значит, заданное уравнение при $a = 0$ имеет два корня. Если взять любое $a > 0$, то график функции $y = 2|x-a|$ получится из графика функции $y = 2|x|$ сдвигом последнего вдоль оси x вправо. При этом полученный график пересекается с графиком функции $y = x + 1$ опять-таки в двух точках (см. рис. 130).

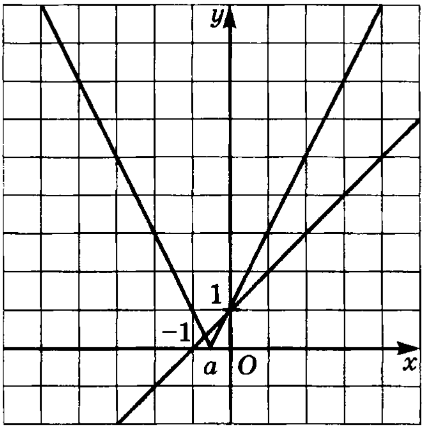


Рис. 131

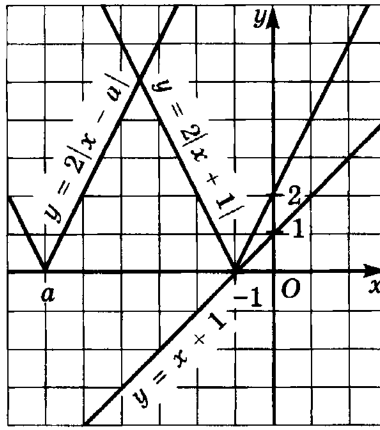


Рис. 132

Теперь будем двигать график функции $y = 2|x|$ вдоль оси x влево — это будет при $a < 0$. Если $-1 < a < 0$, графики по-прежнему пересекаются в двух точках (рис. 131), при $a = -1$ графики имеют лишь одну общую точку (рис. 132) и, следовательно, заданное уравнение имеет один корень. Наконец, при $a < -1$ графики не пересекаются (см. рис. 132) и, следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: уравнение имеет два корня, если $a > -1$; один корень, если $a = -1$; уравнение не имеет корней, если $a < -1$.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{x - a} = 2a - x$.

Решение. Первый способ. Сначала будем действовать по стандартной схеме — возведём обе части заданного иррационального уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$$\left(\sqrt{x - a}\right)^2 = (2a - x)^2;$$

$$x - a = 4a^2 - 4ax + x^2;$$

$$x^2 - (4a + 1)x + 4a^2 + a = 0.$$

Найдём дискриминант: $D = (4a + 1)^2 - 4(4a^2 + a) = 4a + 1$. Значит,

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}.$$

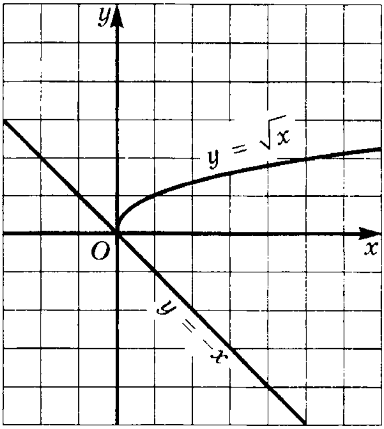


Рис. 133

Теперь нужно выполнить проверку, подставляя поочерёдно каждый из найденных корней в исходное уравнение. Эта проверка, видимо, будет весьма трудной. Мы выберем другой путь — графический, построим графики функций $y = \sqrt{x - a}$ и $y = 2a - x$ и найдём точки их пересечения. При этом целесообразно рассмотреть три случая: $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$.

В первом случае (при $a = 0$) заданное уравнение принимает вид $\sqrt{x} = -x$. Построив графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = -x$ (рис. 133), убеждаемся, что они имеют одну общую точку (0; 0), поэтому уравнение имеет только один корень $x = 0$.

Во втором случае (при $a < 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ не пересекаются (рис. 134), следовательно, заданное уравнение не имеет корней.

В третьем случае (при $a > 0$) графики функций $y = 2a - x$ и $y = \sqrt{x - a}$ пересекаются в одной точке (рис. 135), значит, заданное уравнение имеет один корень. Таким образом, из двух полученных выше корней один окажется посторонним. Какой? Ответ можно почерпнуть из графической иллюстрации, представленной на рисунке 135. Абсцисса точки пересечения графиков меньше, чем $2a$

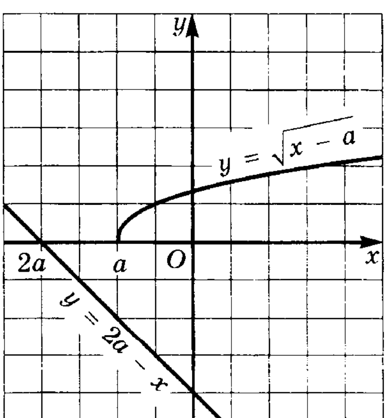


Рис. 134

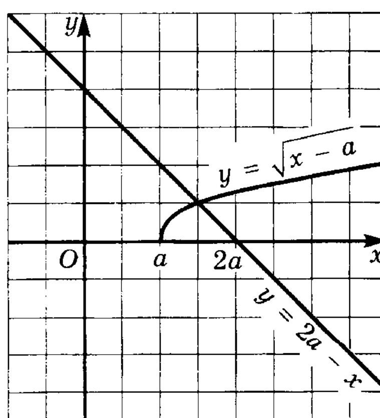


Рис. 135

(это — абсцисса точки пересечения прямой $y = 2a - x$ с осью x). Из двух найденных выше корней

$$x_1 = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a+1}}{2},$$

$$x_2 = \frac{4a + 1 + \sqrt{4a+1}}{2}$$

второй явно больше, чем $2a$; чтобы в этом убедиться, достаточно переписать второй корень в виде $x_2 = 2a + \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

Итак, если $a > 0$, то заданное уравнение имеет один корень:

$$x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Ответ: если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a+1}}{2}$.

Замечание 4. Ответ можно записать компактнее. Дело в том, что записанная при $a > 0$ формула для корня уравнения пригодна и при $a = 0$: если $a = 0$, то по указанной формуле получаем $x = 0$. Поэтому ответ можно было записать так: если $a < 0$, то корней нет; если $a \geqslant 0$, то

$$x = \frac{4a + 1 - \sqrt{4a+1}}{2}.$$

Второй способ. Имеем $\sqrt{x - a} = 2a - x$. Положим $t = \sqrt{x - a}$. Тогда $x = t^2 + a$, и заданное иррациональное уравнение принимает вид $t = 2a - (t^2 + a)$, т. е.

$$t^2 + t - a = 0, \qquad (1)$$

где новая переменная t может принимать только неотрицательные значения: $t = \sqrt{x - a} \geqslant 0$.

Найдём дискриминант квадратного уравнения (1): $D = 1 + 4a$.

Если $D < 0$, т. е. $1 + 4a < 0$, $a < -\frac{1}{4}$, то уравнение (1) не имеет корней.

Если $D = 0$, т. е. $1 + 4a = 0$, $a = -\frac{1}{4}$, то уравнение (1) принимает вид

$$t^2 + t + \frac{1}{4} = 0,$$

откуда находим: $t = -\frac{1}{2}$. Это нас не устраивает, так как должно быть $t \geqslant 0$.

Рассмотрим последний случай, когда $D > 0$, т. е. $a > -\frac{1}{4}$. В этом случае квадратное уравнение (1) имеет два корня t_1 и t_2, причём по теореме Виета $t_1 + t_2 = -1$, $t_1t_2 = -a$.

Если $a < 0$, то $t_1t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 < 0$, откуда следует, что $t_1 < 0$, $t_2 < 0$. Это нас не устраивает, а потому заданное уравнение не имеет корней.

Если $a \geqslant 0$, то $t_1t_2 \leqslant 0$, следовательно, один из корней t_1, t_2 — неотрицательное число, а другой — отрицательное число. Устраивает нас только неотрицательный корень. Из уравнения (1) находим:

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Ясно, что неотрицательным является значение $t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ — это единственный устраивающий нас неотрицательный корень уравнения (1).

Далее находим:

$$x = t^2 + a = \left(\frac{\sqrt{1 + 4a} - 1}{2}\right)^2 + a = \frac{1 + 4a - 2\sqrt{1 + 4a} + 1}{4} + a =$$

$$= \frac{2 + 8a - 2\sqrt{1 + 4a}}{4} = \frac{1 + 4a - \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

Ответ: если $a < 0$, корней нет;

если $a \geqslant 0$, то $x = \frac{1 + 4a - \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

ТЕМЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТ

1. Уравнения с модулями.
2. Иррациональные уравнения.
3. Задачи с параметрами.

ГЛАВА 7

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДЕЛИМОСТИ

§ 40. ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Целые числа, как известно, можно складывать, вычитать, перемножать и возводить в натуральную степень — в результате получится целое число. Иначе обстоит дело с делением. Эта операция на множестве целых чисел, с одной стороны, выполнима далеко не всегда, а с другой стороны, очень важна для приложений. Без этой операции мы не смогли бы сокращать дроби, находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел, приводить дроби к общему знаменателю, выполнять различные упрощения алгебраических выражений. Именно поэтому вопросами делимости математики занимаются очень давно и очень активно. Теория делимости составляет существенную часть теории чисел — важной и интересной математической науки.

Определение. Пусть даны два натуральных числа a и b. Если существует натуральное число q такое, что выполняется равенство $a = bq$, то говорят, что **число a делится на число b.** При этом число a называют *делимым*, b — *делителем*, q — *частным*. Число a называют также *кратным числа* b.

Из записи $a = bq$ следует, что b — делитель a и что a кратно b. Впрочем, из той же записи следует, что q — делитель a и что a кратно q. Например, из записи $35 = 5 \cdot 7$ следует, что 35 делится на 5 и 35 делится на 7, что 35 кратно 5 и 35 кратно 7, что 5 — делитель числа 35 (и тогда 7 — частное) и что 7 — делитель числа 35 (и тогда 5 — частное).

Вместо фразы «a делится на b» часто используют запись $a \vdots b$. Например, вместо очевидных утверждений «a делится на a» или «a делится на 1» можно писать $a \vdots a$ или соответственно $a \vdots 1$. Ясно, что если $a \vdots b$, то $a \geqslant b$.

Обратите внимание, что запись $8 : 2$ означает требование выполнить деление числа 8 на число 2 (в результате этой операции получится число 4), в то время как запись $8 \vdots 2$ означает, что число 8 делится на 2 (делится *нацело*, делится *без остатка*); речь идёт лишь о принципиальной возможности выполнить деление, а само деление не требуется выполнять. Примерно так же обстоит дело со знаком $>$. Если написано $8 > 2$, то это лишь констатация факта: число 8 больше числа 2; при этом не требуется отвечать на вопрос, *на сколько больше*.

Опираясь на сформулированное определение, можно получить ряд свойств отношения делимости на множестве натуральных чисел.

Свойство 1. Если $a \vdots c$ и $c \vdots b$, то $a \vdots b$.

Например, из того, что $48 \vdots 6$ и $6 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $48 \vdots 3$.

Свойство 2. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то $(a + c) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 + 21) \vdots 3$.

Свойство 3. Если $a \vdots b$ и c не делится на b, то $(a + c)$ не делится на b.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и 22 не делится на 3, можно сделать вывод, что $(12 + 22)$ не делится на 3. В то же время из того, что *каждое слагаемое* не делится на b, нельзя сделать вывод, что и сумма не делится на b. Например, 14 не делится на 3 и 22 не делится на 3, но $(14 + 22) \vdots 3$.

Свойства 2 и 3 распространяются на сумму любого конечного числа слагаемых следующим образом: *если каждое слагаемое делится на число b, то и сумма делится на b; если каждое слагаемое, кроме одного, делится на b, то сумма не делится на b.*

Свойство 4. Если $a \vdots b$ и $(a + c) \vdots b$, то $c \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $(12 + 21) \vdots 3$, можно сделать вывод, что $21 \vdots 3$.

Свойство 5. Если $a \vdots b_1$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1b_2$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $28 \vdots 7$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 28) \vdots (3 \cdot 7)$.

Свойство 6. Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots bc$; обратно, из $ac \vdots bc$ следует, что $a \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots (3 \cdot 5)$, и обратно.

Свойство 7. Если $a \vdots b$ и c — любое натуральное число, то $ac \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(12 \cdot 5) \vdots 3$.

Следует заметить, что свойство, обратное свойству 7, не имеет места: из того, что $ac \vdots b$, нельзя сделать вывод, что или a, или c делится на b. Например, $45 \vdots 15$ и $45 = 9 \cdot 5$, но ни 9, ни 5 не делятся на 15.

Свойство 8. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) \vdots b$.

Например, из того, что $12 \vdots 3$ и $21 \vdots 3$, можно сделать вывод, что $(25 \cdot 12 + 271 \cdot 21) \vdots 3$.

Доказательства свойств 1—4, 8

1. Отношение $a \vdots c$ означает, что существует число q_1 такое, что выполняется равенство $a = cq_1$. Далее, $c \vdots b$ означает, что существует число q_2 такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Следовательно, $a = cq_1 = (bq_2)q_1 = b(q_2q_1)$. Обозначим число q_2q_1 буквой q. Тогда получим, что $a = bq$, а это и означает, что $a \vdots b$.

2. Так как $a \vdots b$, то существует число q_1 такое, что выполняется равенство $a = bq_1$. Так как $c \vdots b$, то существует число q_2 такое, что выполняется равенство $c = bq_2$. Тогда $a + c = bq_1 + bq_2 = b(q_1 + q_2)$. Обозначим число $q_1 + q_2$ буквой q. Тогда получим, что

$$a + c = bq,$$

а это и означает, что $(a + c) \vdots b$.

3. Предположим противное, что $(a + c) \vdots b$. Тогда из $a \vdots b$ следует, что $a = bq_1$, а из $(a + c) \vdots b$ следует, что $a + c = bq_2$. Значит, $c = bq_2 - a = bq_2 - bq_1 = b(q_2 - q_1)$. Это означает, что $c \vdots b$. Но по условию c не делится на b. Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно и $a + c$ не делится на b.

4. Предположим, что c не делится на b. Тогда по свойству 3 $a + c$ не делится на b, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно и, следовательно, $c \vdots b$.

Свойства 5, 6 и 7 докажите самостоятельно.

8. Если $a \vdots b$ и $c \vdots b$, то по свойству 7 $an \vdots b$ и $ck \vdots b$. Тогда по свойству 2

$$(an + ck) \vdots b.$$

Отметим ещё одно свойство, связанное с делимостью натуральных чисел.

Свойство 9. Среди n последовательных натуральных чисел одно и только одно делится на n.

Если мы возьмём любые три подряд идущих натуральных числа, например, 8, 9, 10 или 106, 107, 108, то одно число из тройки делится на 3 (для первой тройки это число 9, для второй — число 108). Если мы возьмём любые 10 подряд идущих натуральных чисел, то одно обязательно делится на 10. Если же мы возьмём два подряд идущих чётных числа, то одно обязательно делится на 4.

Доказательство свойства 9 будет дано в § 42.

Пример 1. Доказать, что для любого натурального числа n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8.

Решение. Разложим многочлен $n^5 - 5n^3 + 4n$ на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) =$$
$$= n(n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1)) = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) =$$
$$= (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

Рассмотрим полученное произведение. При $n = 1$, $n = 2$ оно обращается в 0, значит, делится на 2, 3, 4, 5, 8. При $n > 2$ имеем произведение пяти последовательных натуральных чисел $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$. Из этих пяти чисел по свойству 9 одно обязательно делится на 5, хотя бы одно — на 3, хотя бы одно — на 4 и, кроме того, есть ещё хотя бы одно чётное число, т. е. число, делящееся на 2. Тогда по свойствам 5 и 7 произведение этих пяти чисел делится на произведение чисел 2 и 4, т. е. делится на 8. ■

Теперь поговорим о конкретных признаках делимости — на 2, 3, 4, 5 и т. д. В формулировках признаков мы впервые используем словесную конструкцию *необходимо и достаточно*. Обычно если из условия A следует условие B (прямая теорема), то математики говорят так: B является *необходимым условием* для A. Если же из условия B следует условие A (обратная теорема), то математики говорят так: B является *достаточным условием* для A. Если же и из A следует B, и из B следует A, математики используют словесную конструкцию *необходимо и достаточно* (или *тогда и только тогда*).

Признак делимости на 2. Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Доказательство. Пусть c — цифра единиц натурального числа p. Тогда число p можно представить в виде $10a + c$. Так как $10 \vdots 2$, то по свойству 7 $10a \vdots 2$. Если $c \vdots 2$, то $(10a + c) \vdots 2$. Обратно, если $(10a + c) \vdots 2$, то по свойству 4 $c \vdots 2$.

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 5 и 10.

Признак делимости на 5. Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т. е. цифра единиц либо 0, либо 5).

Признак делимости на 10. Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

Прежде чем формулировать и доказывать признак делимости на 4, заметим, что любое число p, содержащее не менее трёх цифр, можно представить в виде $100a + c$, где c — число, образованное последними двумя цифрами числа p. Например, $275 = 100 \cdot 2 + 75$, $14\,508 = 100 \cdot 145 + 8$ и т. д.

Признак делимости на 4. Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трёх цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа p.

Доказательство. Пусть c — число, образованное двумя последними цифрами числа p. Тогда число p можно представить в виде $100a + c$. Так как $100a \vdots 4$, то по свойствам 3 и 4 $(100a + c) \vdots 4$ тогда и только тогда, когда $c \vdots 4$.

Например, 12456 делится на 4, поскольку делится на 4 число 56. А число 7906 не делится на 4, поскольку не делится на 4 число 06, т. е. число 6.

Аналогичные рассуждения позволяют получить признаки делимости на 25, 8 и 125.

Признак делимости на 25. Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее трёх цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p.

Признак делимости на 8. Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырёх цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа p.

Признак делимости на 125. Для того чтобы натуральное число p, содержащее не менее четырёх цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p.

Признак делимости на 3. Для того чтобы натуральное число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Доказательство. Количество цифр в числе p, как мы увидим, значения не имеет, поэтому будем считать, что в числе p, например, пять цифр: $p = \overline{abcde}$ (черта наверху — условное обозначение того, что $\overline{abcde}$ рассматривается не как произведение чисел a, b, c, d, e, а как число с соответствующими цифрами).

Имеем:

$$p = \overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e =$$
$$= (9999 + 1)a + (999 + 1)b + (99 + 1)c + (9 + 1)d + e =$$
$$= (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e).$$

Сумма четырёх слагаемых в первых скобках делится на 3 по свойству 8 (поскольку 9, 99, 999, 9999 делятся на 3). Значит, по свойствам 2 и 3 для делимости числа p на 3 необходимо и достаточно, чтобы делилась на 3 сумма пяти слагаемых во вторых скобках — а это как раз сумма цифр числа p.

Аналогично доказывается признак делимости на 9.

Признак делимости на 9. Для того чтобы натуральное число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Рассмотрим, например, число 2742. Сумма его цифр равна 15. Число 15 делится на 3 и не делится на 9. Следовательно, число 2742 делится на 3 и не делится на 9.

Пример 2. Найти пятизначное число, кратное 45, если известно, что каждая из трёх его средних цифр на 1 больше предыдущей.

Решение. Пусть $\overline{abcde}$ — искомое число. По условию каждая из цифр b, c, d на 1 больше предыдущей. Это означает, что $b = a + 1$, $c = a + 2$, $d = a + 3$. Далее, по условию искомое число делится на 45. Это значит (по свойству 1), что оно делится на 5 и на 9. Поскольку число делится на 5, для его последней цифры есть лишь две возможности: либо $e = 0$, либо $e = 5$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Пусть $e = 0$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 0$, т. е. $4a + 6$. По условию искомое число делится на 9. Согласно признаку делимости на 9 это означает, что сумма цифр искомого числа делится на 9.

Итак, $(4a + 6) \vdots 9$. При каких значениях a это возможно? Будем рассуждать так. Поскольку $(4a + 6) \vdots 9$, то по свойству 1 $(4a + 6) \vdots 3$ или, что то же самое, $((3a + 6) + a) \vdots 3$. Но $(3a + 6) \vdots 3$, значит, и $a \vdots 3$. Итак, для первой цифры искомого числа есть следующие возможности: $a = 3$, $a = 6$, $a = 9$. Впрочем, сразу заметим, что $a = 9$ нас не устраивает, так как в этом случае $b = a + 1 = 10$ — не цифра.

Если $a = 3$, то $4a + 6 = 18$, а 18 делится на 9. Значение $a = 3$ нас устраивает.

Если $a = 6$, то $4a + 6 = 30$, а 30 не делится на 9. Значение $a = 6$ нас не устраивает.

Итак, осталась единственная возможность: $a = 3$. Тогда следующие три цифры искомого числа — 4, 5, 6, а само искомое число — 34 560.

2) Пусть $e = 5$. Тогда сумма цифр искомого числа, т. е. $a + b + c + d + e$, будет иметь вид $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3) + 5$, т. е. $4a + 11$. По условию искомое число делится на 9. Следовательно, $(4a + 11) \vdots 9$. Придавая переменной a последовательные значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 ($a = 7$ нас уже не устраивает, поскольку в этом случае $d = a + 3 = 10$ — не цифра; тем более нас не устраивают значения $a = 8$, $a = 9$), убеждаемся, что указанное соотношение выполняется лишь при $a = 4$; в этом случае выражение $4a + 11$ принимает значение 27, т. е. делится на 9.

Если $a = 4$, то следующие три цифры искомого числа — 5, 6, 7, а само искомое число — 45 675.

Ответ: 34 560 или 45 675.

Завершая разговор о делимости натуральных чисел, рассмотрим более сложные признаки делимости на 11, на 7 и на 13.

Проведём вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признак делимости на 11.

Рассмотрим числа 99, 9999, 999 999, 99 999 999 и т. д.; в каждом из этих чисел — чётное число девяток. Все эти числа, во-первых, делятся на 11, а во-вторых, представимы в виде соответственно $10^2 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, $10^8 - 1$ и т. д.

Рассмотрим теперь числа 11, 1001, 100 001, 10 000 001 и т. д.; в каждом из этих чисел — чётное число нулей между единицами. Все эти числа, во-первых, делятся на 11 (поскольку $1001 = 990 + 11$, $100001 = 99990 + 11$, $10000001 = 9999990 + 11$; в записанных суммах первые слагаемые делятся на 11), а во-вторых, представимы в виде соответственно $10^1 + 1$, $10^3 + 1$, $10^5 + 1$, $10^7 + 1$ и т. д.

Признак делимости на 11. Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечётных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на чётных местах, делилась на 11.

Например, для числа 24 569 алгебраическая сумма, о которой идёт речь в формулировке признака, имеет вид $9 - 6 + 5 - 4 + 2$, она равна 6; поскольку число 6 не делится на 11, то и число 24 569 не делится на 11.

Для иллюстрации идеи доказательства признака возьмём 8-значное число $\overline{abcdefkm}$.

Имеем:

$$\overline{abcdefkm} = a \cdot 10^7 + b \cdot 10^6 + c \cdot 10^5 + d \cdot 10^4 + e \cdot 10^3 + f \cdot 10^2 + k \cdot 10 + m = (a \cdot (10^7 + 1) - a) + (b \cdot (10^6 - 1) + b) + (c \cdot (10^5 + 1) - c) + (d \cdot (10^4 - 1) + d) + (e \cdot (10^3 + 1) - e) + (f \cdot (10^2 - 1) + f) + (k \cdot (10^1 + 1) - k) + m =$$
$$= a \cdot (10^7 + 1) + b \cdot (10^6 - 1) + c \cdot (10^5 + 1) + d \cdot (10^4 - 1) + e \cdot (10^3 + 1) + f \cdot (10^2 - 1) + k \cdot (10 + 1) + (m - k + f - e + d - c + b - a).$$

Поскольку, как мы уже ранее установили, числа $10^7 + 1$, $10^6 - 1$, $10^5 + 1$, $10^4 - 1$, $10^3 + 1$, $10^2 - 1$, $10^1 + 1$ делятся на 11, делимость числа $\overline{abcdefkm}$ на 11 целиком и полностью зависит от делимости на 11 алгебраической суммы цифр $m - k + f - e + d - c + b - a$.

Пример 3. Не выполняя деления, доказать, что число 86 849 796 делится на 11.

Решение. Составим алгебраическую сумму цифр данного числа, начиная с цифры единиц и чередуя знаки «+» и «−»: $6 - 9 + 7 - 9 + 4 - 8 + 6 - 8 = -11$. Число -11 делится на 11, значит, и заданное число делится на 11. ■

Проведём вспомогательные рассуждения, которые позволят получить признаки делимости на 7 и на 13.

Рассмотрим число $10^3 + 1$, т. е. 1001. Имеем $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Следовательно, $(10^3 + 1) \vdots 7$ и $(10^3 + 1) \vdots 13$.

Рассмотрим число $10^6 - 1$. Имеем $10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$. Значит, $(10^6 - 1) \vdots 7$ и $(10^6 - 1) \vdots 13$.

Аналогично можно установить, что $10^9 + 1$, $10^{12} - 1$ и т. д. кратны 1001, а поэтому делятся на 7 и на 13. Например,

$$10^9 + 1 = (10^3 + 1)(10^6 - 10^3 + 1),$$
$$10^{12} - 1 = (10^6 - 1)(10^6 + 1) = (10^3 + 1)(10^3 - 1)(10^6 + 1).$$

Покажем, как используются проведённые рассуждения для получения признака делимости на 7 (на 13). Возьмём, например, 8-значное число $\overline{abcdefkm}$ и разобьём его на грани, по 3 цифры в каждой грани, начиная с цифры единиц: $\overline{ab}\,\overline{cde}\,\overline{fkm}$. Введём обозначения: $\overline{ab} = x$, $\overline{cde} = y$, $\overline{fkm} = p$. Тогда заданное число $\overline{abcdefkm}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\overline{abcdefkm} &= x \cdot 10^6 + y \cdot 10^3 + p = \\ &= (x \cdot (10^6 - 1) + x) + (y \cdot (10^3 + 1) - y) + p = \\ &= x \cdot (10^6 - 1) + y \cdot (10^3 + 1) + (p - y + x).\end{aligned}$$

Поскольку, как мы установили выше, числа $10^6 - 1$ и $10^3 + 1$ делятся на 7 (на 13), делимость числа $\overline{abcdefkm}$ на 7 (на 13) целиком и полностью зависит от делимости на 7 (на 13) алгебраической суммы чисел $(p - y + x)$.

Теперь сформулируем признак делимости натурального числа на 7 и на 13.

Признак делимости на 7 (на 13). Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечётных граней и со знаком «минус» для чётных граней, делилась на 7 (на 13).

Пример 4. Не выполняя деления, доказать, что число 254 390 815 делится на 7 и не делится на 13.

Решение. Разобьём число на грани 254, 390, 815. Составим алгебраическую сумму граней, начиная с последней грани и чередуя знаки «+» и «−»: $815 - 390 + 254 = 679$. Число 679 делится на 7 и не делится на 13, значит, и заданное число делится на 7 и не делится на 13. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что означает запись $a \vdots b$, где a, b — натуральные числа? Чем она отличается от записи $a : b$?

2. Какие вы знаете свойства отношения делимости на множестве натуральных чисел?

3. Докажите, что если $a \vdots b_2$ и $c \vdots b_2$, то $ac \vdots b_1 b_2$.

4. Докажите, что если $a \vdots b$ и $c \in N$, то $ac \vdots bc$. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

5. Докажите, что если $a \vdots b$ и $c \in N$, то $ac \vdots b$.

6. Объясните, почему среди 2013 подряд идущих натуральных чисел одно и только одно делится на 2013.

7. Сформулируйте признак делимости на 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 12; 18; 36; 45.

8. Дано число 123 456. Делится ли оно: на 2; 3; 4; 5; 6; 9; 12; 18? Обоснуйте свои выводы.

§ 41. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Определение. Если натуральное число имеет только два натуральных делителя — само себя и 1, — то его называют **простым числом**; если оно имеет более двух делителей, то его называют **составным числом.** Число 1, имеющее лишь один делитель 1, не относят ни к простым, ни к составным.

Например, числа 2, 3, 5, 7, 19, 101 — простые, а числа 4, 6, 8, 35, 121 — составные.

Теорема 1. ***Любое натуральное число $a > 1$ имеет хотя бы один простой делитель.***

Доказательство. Если a — простое число, то $a = a \cdot 1$, откуда следует, что у заданного числа есть простой делитель a. Пусть теперь a — составное число. Тогда его можно представить в виде $a = a_1c_1$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано. Если оба множителя — составные числа, то рассмотрим число a_1 и представим его в виде $a_1 = a_2c_2$, где оба множителя отличны от 1 и меньше a_1. Если хотя бы один из множителей — простое число, то свойство доказано, если нет, то представим a_2 в виде произведения чисел, меньших, чем a_2, и т. д. Тогда либо на каком-то шаге обнаружится простой множитель, либо придётся предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, так как все указанные числа разные и меньше a, поэтому их — конечное множество. Следовательно, на каком-то шаге обнаружится простой делитель числа a.

Простые числа обладают многими интересными свойствами. Остановимся на двух из них.

Теорема 2. ***Множество простых чисел бесконечно.***

Доказательство. Предположим противное, что множество простых чисел конечно. Тогда можно выписать все простые числа: p_1, p_2, p_3, ..., p_k. Составим теперь число a следующим образом: $a = p_1p_2p_3 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$. По теореме 1 у числа a есть хотя бы один простой делитель, т. е. число a делится на одно из чисел p_1, p_2, p_3, ..., p_k (ведь мы предположили, что других простых чисел нет). Но 1 не делится ни на одно из этих чисел, значит, по свойству 3 из § 40 число a не делится ни на одно из этих чисел. Получили противоречие, поэтому сделанное предположение неверно, т. е. на самом деле множество простых чисел бесконечно.

Исследователей всегда интересовал вопрос о распределении простых чисел среди натуральных чисел. Выпишем подряд простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Назовём *расстоянием* между соседними простыми числами их разность. Обратите внимание, что в выписанной последовательности эти расстояния равны соответственно 1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6. А между соседними простыми числами 119 и 127 расстояние равно 8. Вообще имеет место следующая теорема.

Теорема 3. ***Расстояние между двумя соседними простыми числами может быть больше любого наперёд заданного натурального числа.***

Доказательство. Возьмём произвольное натуральное число a и докажем, что найдутся два соседних простых числа, расстояние между которыми больше a. Составим натуральное число $c = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot a \cdot (a + 1)$. Оно делится на 2, 3, 4, 5, ..., a, $a + 1$. Тогда число $c + 2$ делится на 2, число $c + 3$ делится на 3, число $c + 4$ — на 4 и т. д., число $c + a$ — на a, число $c + a + 1$ — на $a + 1$ (см. свойство 2 в § 40). Это значит, что a подряд идущих чисел $c + 2$, $c + 3$, $c + 4$, ..., $c + a$, $c + a + 1$ — составные, т. е. расстояние между ближайшим к $c + 2$ простым числом (слева) и ближайшим к $c + a + 1$ простым числом (справа) больше a.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое простое число? Что такое составное число?

2. Может ли расстояние между двумя соседними простыми числами быть равным 2, 4, 6? Приведите примеры. Может ли это расстояние быть больше 2013?

3. Конечно или бесконечно множество простых чисел? Конечно или бесконечно множество составных чисел?

§ 42. ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Если натуральное число a не делится на натуральное число b, то рассматривают *деление с остатком*. Например, при делении числа 37 на число 15 в частном получается 2 (*неполное частное*) и в остатке 7. При этом имеет место соотношение $37 = 15 \cdot 2 + 7$. Вообще справедлива следующая теорема.

Теорема. ***Если натуральное число а больше натурального числа b и а не делится на b, то существует одна, и только одна пара натуральных чисел q и r, причём r < b, такая, что выполняется равенство***

$$a = bq + r. \tag{1}$$

Например, для $a = 37$, $b = 15$ такая пара чисел найдена выше: $q = 2$, $r = 7$ — при этом остаток r меньше делителя b.

Доказательство. По условию $b < a$. Рассмотрим числа b, $2b$, $3b$, $4b$, ... Начиная с некоторого места все они будут больше числа a. Первое из чисел такого вида, которое станет больше числа a, обозначим $(q + 1)b$, т. е. $qb + b$. Следовательно,

$$qb < a < qb + b.$$

Но тогда $a = bq + r$, где $r < b$.

Итак, *существование* интересующей нас пары чисел q, r доказано. Докажем теперь, что такая пара *единственна*.

Предположим, что существуют две различные пары натуральных чисел $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ такие, что

$$a = bq_1 + r_1, \quad r_1 < b;$$
$$a = bq_2 + r_2, \quad r_2 < b.$$

Сразу заметим, что если $r_1 = r_2 = r$, то из равенства $bq_1 + r = bq_2 + r$ получим $q_1 = q_2$, т. е. пары $(q_1; r_1)$ и $(q_2; r_2)$ одинаковы; если $q_1 = q_2 = q$, то из равенства $bq + r_1 = bq + r_2$ получим $r_1 = r_2$, значит, опять пары одинаковы. Таким образом, если пары различны, то $r_1 \neq r_2$ и $q_1 \neq q_2$.

Будем считать для определённости, что $r_1 > r_2$. Так как $bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, то $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$. Это значит, что $r_1 - r_2$ делится на b. Но это невозможно, поскольку натуральное число $r_1 - r_2$ меньше b. Следовательно, сделанное предположение о существовании двух пар натуральных чисел неверно и единственность доказана.

Замечание 1. Если $a \vdots b$, то также можно считать, что для чисел a и b выполняется равенство (1), где $r = 0$.

Замечание 2. Иногда удобнее формулу деления с остатком записывать несколько в ином виде. Имеем

$$a = bq + r = b(q + 1) - (b - r).$$

Поэтому можно записать так:

$$a = bq_1 - r_1, \tag{2}$$

где $0 < r_1 < b$.

Пример 1. Составить формулу:
а) чётного числа;
б) нечётного числа;
в) натурального числа, которое при делении на 3 даёт в остатке 2.

Решение. а) Чётное число n — это число, которое делится на 2. Значит, $n = 2k$ — это хорошо известная вам формула чётного числа.

б) Нечётное число n — это число, которое при делении на 2 даёт в остатке 1. Воспользовавшись соотношениями (1) или (2), получим формулу нечётного числа $n = 2k + 1$ или $n = 2k - 1$.

в) Согласно соотношению (1), формула натурального числа n, которое при делении на 3 даёт в остатке 2, имеет вид $n = 3k + 2$. То же самое по формуле (2) можно записать так: $n = 3k - 1$. ■

Пример 2. Доказать, что если натуральное число при делении на 3 даёт в остатке 2, то оно не может быть точным квадратом.

Решение. Пусть $n = 3m + 2$. Предположим, что это число является точным квадратом, т. е. существует такое натуральное число a, что $n = a^2$. Для самого числа a есть три возможности: a делится на 3, т. е. имеет вид $a = 3k$; a при делении на 3 даёт в остатке 1, т. е. имеет вид $a = 3k + 1$; a при делении на 3 даёт в остатке 2, т. е. имеет вид $a = 3k + 2$.

Если $a = 3k$, то $n = a^2 = (3k)^2 = 9k^2$. Это число делится на 3, что противоречит условию. Если $a = 3k + 1$, то $n = a^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$. Это число при делении на 3 даёт в остатке 1, что противоречит условию. Если, наконец, $a = 3k + 2$, то $n = a^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Это число при делении на 3 даёт в остатке 1, что противоречит условию.

Итак, в любом возможном случае приходим к противоречию; таким образом, наше предположение неверно, т. е. заданное число не является точным квадратом. ■

Завершая параграф, докажем свойство 9 из § 40.

Даны n подряд идущих натуральных чисел: k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$. Требуется доказать, что среди них имеется число, которое делится на n, причём такое число единственно.

Если $k \,\vdots\, n$, то утверждение доказано: само число k уже делится на n, тогда как числа $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ на n не делятся (см. свойство 3 из § 40).

Если k не делится на n и $k < n$, то среди чисел k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ встретится само число n: это будет $k + (n - k)$; только оно и делится на n.

Если k не делится на n и $k > n$, то по теореме существует одна, и только одна пара натуральных чисел q и r, причём $r < n$, такая, что выполняется равенство $k = nq + r$. Тогда среди чисел k, $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + (n - 1)$ опять-таки встретится только одно число, делящееся на n, им будет число $nq + r + (n - r)$. В самом деле,

$$nq + r + (n - r) = nq + n = n(q + 1).$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему о делении с остатком.
2. Запишите общий вид натуральных чисел, которые при делении на 15 дают в остатке 11.

§ 43. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ И НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ НЕСКОЛЬКИХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим два числа 72 и 96. Выпишем все делители числа 72:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.$$

Выпишем теперь все делители числа 96:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96.$$

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 \text{ —}$$

их называют *общими делителями чисел 72 и 96, а наибольшее из них называют наибольшим общим делителем (НОД) чисел 72 и 96*. Итак, НОД(72, 96) = 24.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОД. Например, НОД(45, 75, 120) = 15, НОД(27, 81) = 27.

Определение. Два натуральных числа a и c называют **взаимно простыми числами**, если у них нет общих делителей, отличных от 1; иными словами, если НОД(a, c) = 1.

Например, взаимно простыми являются числа 35 и 36, хотя каждое из них — составное число. В самом деле, у числа 35 четыре делителя: 1, 5, 7, 35, — а у числа 36 девять делителей: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Общих делителей, отличных от 1, у чисел 35 и 36 нет.

Вполне очевидно следующее утверждение: *если даны натуральные числа* a и p, *причём* p *— простое число, то либо* a *делится на* p, *либо* a *и* p *— взаимно простые числа.*

Рассмотрим два числа: 12 и 18. Выпишем числа, кратные 12:

12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, 132, 144, 156, … .

Выпишем теперь числа, кратные 18:

18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, … .

Среди выписанных чисел есть одинаковые:

36, 72, 108, 144, … —

их называют *общими кратными чисел* 12 *и* 18, а наименьшее из них называют *наименьшим общим кратным* (*НОК*) *чисел* 12 *и* 18. Итак, НОК(12, 18) = 36.

Для любых заданных натуральных чисел можно найти НОК. Например, НОК(20, 30, 40) = 120, НОК(27, 81) = 81.

Обычные приёмы отыскания НОД и НОК мы напомним в следующем параграфе.

Теорема 1. ***Если*** K ***— общее кратное чисел*** a ***и*** c, ***то*** $K \,\vdots\,$ **НОК**(a, c).

Доказательство. По условию $K \,\vdots\, a$, $K \,\vdots\, c$. Предположим противное, что K не делится на НОК(a, c). Обозначим НОК(a, c) буквой m. Заметим, что $m \,\vdots\, a$, $m \,\vdots\, c$.

По теореме о делении с остатком число K можно представить в виде $K = mq + r$, где $0 < r < m$. Так как $K \,\vdots\, a$, $m \,\vdots\, a$, то и $r \,\vdots\, a$. Далее, так как $K \,\vdots\, c$, $m \,\vdots\, c$, то и $r \,\vdots\, c$. Итак, $r \,\vdots\, a$, $r \,\vdots\, c$, следовательно, r — общее кратное чисел a и c, поэтому $r \geqslant m$ вопреки условию $0 < r < m$. Полученное противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Значит, $K \,\vdots\,$ НОК(a, c).

<u>*Следствие 1.*</u> ***Если*** $a \,\vdots\, b_1$ ***и*** $a \,\vdots\, b_2$, ***то*** $a \,\vdots\,$ **НОК**(b_1, b_2).

<u>*Следствие 2.*</u> ***Если*** $a \,\vdots\, c$ ***и*** $b \,\vdots\, c$, ***то*** $\frac{ab}{c}$ ***— общее кратное чисел*** a ***и*** b.

Доказательство. Так как $a \,\vdots\, c$, то $a = cm$, $ab = bcm$, $\frac{ab}{c} = bm$, т. е. $\frac{ab}{c} \,\vdots\, b$. Аналогично доказывается, что $\frac{ab}{c} \,\vdots\, a$.

Пример 1. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо соотношение $(n^5 - 5n^3 + 4n) \,\vdots\, 120$.

Решение. В § 40 в примере 1 было доказано, что при любом натуральном значении n число $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 2, 3, 4, 5, 8.

Тогда по следствию 1 оно делится и на НОК чисел 2, 3, 4, 5, 8, т. е. на 120. ■

Теорема 2. ***Для любых натуральных чисел a и b справедливо равенство***

$$\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab. \tag{1}$$

Доказательство. Введём обозначения:

$$\text{НОК}(a, b) = k, \quad \text{НОД}(a, b) = d.$$

Так как ab — общее кратное чисел a и b, то по теореме 1 $ab \,\vdots\, k$, поэтому $ab = kc$. Поскольку $k \,\vdots\, a$, то $k = am$. Подставив выражение am вместо k в равенство $ab = kc$, получим $ab = amc$, т. е. $b = mc$. Это значит, что $b \,\vdots\, c$. Аналогично можно доказать, что $a \,\vdots\, c$. Таким образом, c — общий делитель чисел a и b, поэтому c не больше их НОД: $c \leqslant d$. Но тогда $k = \frac{ab}{c} \geqslant \frac{ab}{d}$.

Итак, $\frac{ab}{d} \leqslant k$.

С другой стороны, по следствию 2 из теоремы 1 $\frac{ab}{d}$ — общее кратное чисел a и b, поэтому оно не меньше их НОК: $\frac{ab}{d} \geqslant k$.

Итак, $\frac{ab}{d} \geqslant k$ и в то же время $\frac{ab}{d} \leqslant k$. Следовательно, $\frac{ab}{d} = k$, т. е. $ab = dk$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. ***Если числа a и b — взаимно простые, то НОК(a, b) = ab.***

Следствие 2. ***Если $a \,\vdots\, b_1$, $a \,\vdots\, b_2$ и числа b_1 и b_2 — взаимно простые, то $a \,\vdots\, b_1b_2$.***

Равенство (1) иногда используют для отыскания наименьшего общего кратного двух чисел.

Пример 2. Найти НОК(276, 282).

Решение. Оба заданных числа чётные и делятся на 3, значит, делятся и на 6. Поскольку 282 − 276 = 6, у заданных чисел не может быть общего делителя, большего чем 6. Итак, НОД(276, 282) = 6. По формуле (1) получаем

$$\text{НОК}(276, 282) = \frac{276 \cdot 282}{\text{НОД}(276, 282)} = \frac{276 \cdot 282}{6} =$$

$$= (276 : 6) \cdot 282 = 12972. \quad ■$$

Отметим ещё два свойства делимости, из которых второе является следствием первого.

Теорема 3. ***Если числа a и p взаимно простые и $ac \vdots p$, то $c \vdots p$.***

Доказательство. Так как a и p — взаимно простые числа, то НОК$(a, p) = ap$. По условию $ac \vdots p$; кроме того, $ac \vdots a$. Следовательно, ac — общее кратное чисел a и p, и по теореме 1 оно делится на НОК(a, p). Таким образом, $ac \vdots ap$, откуда следует, что $c \vdots p$ (см. свойство 6 из § 40).

Следствие. ***Если p — простое число и $ac \vdots p$, то хотя бы одно из чисел a, c делится на p.***

Пример 3. Доказать, что $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число.

Решение. Предположим, что $\sqrt[3]{6}$ — рациональное число. Ясно, что это не натуральное число, а потому $\sqrt[3]{6} = \frac{m}{n}$, где $n > 1$ и $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, т. е. m и n — взаимно простые числа. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 6$, $m^3 = 6n^3$, поэтому $m^3 \vdots n^3$. Значит, $m^3 \vdots n$, т. е. $(m \cdot m^2) \vdots n$. По предположению числа m и n — взаимно простые, значит, по теореме 3 $m^2 \vdots n$, т. е. $(m \cdot m) \vdots n$. Но тогда по той же теореме $m \vdots n$, т. е. $\frac{m}{n}$ — сократимая дробь вопреки сделанному предположению.

Таким образом, наше предположение неверно, поэтому $\sqrt[3]{6}$ — иррациональное число. ■

Вопросы для самопроверки

1. Что такое наибольший общий делитель двух натуральных чисел? Найдите НОД(72; 108).
2. Что такое наименьшее общее кратное двух натуральных чисел? Найдите НОК(72; 15).
3. Каким соотношением связаны между собой числа a, b, НОД$(a; b)$ и НОК$(a; b)$?
4. Что такое взаимно простые числа?
5. Известно, что числа a и b — взаимно простые. Найдите НОД$(a; b)$ и НОК$(a; b)$.

§ 44. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Основной теоремой арифметики называют обычно совокупность двух утверждений, одно из которых (теорему 1) мы докажем, а другое (теорему 2) приведём без доказательства.

Теорема 1. ***Любое натуральное число (кроме 1) либо является простым, либо его можно разложить на простые множители.***

Например, $35 = 5 \cdot 7$, $54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $169 = 13 \cdot 13$, $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ и т. д.

Доказательство. Пусть a — составное число. По теореме 1 из § 41 оно имеет простой делитель, т. е. число a можно представить в виде $a = a_1 p_1$, где p_1 — простое число. Если при этом и a_1 — простое число, то теорема доказана. Если a_1 — составное число, то его можно представить в виде $a_1 = a_2 p_2$, где p_2 — простое число. Если при этом и a_2 — простое число, то теорема доказана. Если a_2 — составное число, то продолжим указанный процесс. Тогда либо на каком-то шаге получится разложение на простые множители, либо придётся предположить, что процесс составления чисел a_1, a_2, a_3, a_4 и т. д. бесконечен. Но бесконечным он быть не может, так как все указанные числа меньше a, поэтому их — конечное множество. Следовательно, на каком-то конечном шаге получится окончательное разложение числа a на простые множители.

Теорема 2. ***Если натуральное число разложено на простые множители, то такое разложение единственно; иными словами, любые два разложения числа на простые множители отличаются друг от друга лишь порядком множителей.***

При разложении числа на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагают справа от вертикальной черты, а частное записывают под делимым.

Пример 1. Разложить на простые множители число:
а) 3780; б) 7056.

Решение. а)

$$\begin{array}{r|l} 3780 & 2 \\ 1890 & 2 \\ 945 & 3 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$.

б)
$$\begin{array}{r|l} 7056 & 2 \\ 3528 & 2 \\ 1764 & 2 \\ 882 & 2 \\ 441 & 3 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$. ■

В обоих случаях мы использовали так называемые *канонические разложения*, когда простые множители располагаются в порядке возрастания.

Знание канонических разложений позволяет без особого труда находить наибольший общий делитель или наименьшее общее кратное заданных чисел.

Пример 2. Вычислить

$$\text{НОД}(3780,\ 7056) \text{ и } \text{НОК}(3780,\ 7056).$$

Решение. Имеем

$$3780 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7,$$
$$7056 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2.$$

Значит,

$$\text{НОД}(3780,\ 7056) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252;$$
$$\text{НОК}(3780,\ 7056) = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 105\,840. \ ■$$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте основную теорему арифметики натуральных чисел.
2. Разложите на простые множители число 630.

ТЕМА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЫ

Признаки делимости.

ОГЛАВЛЕНИЕ