频率域滤波

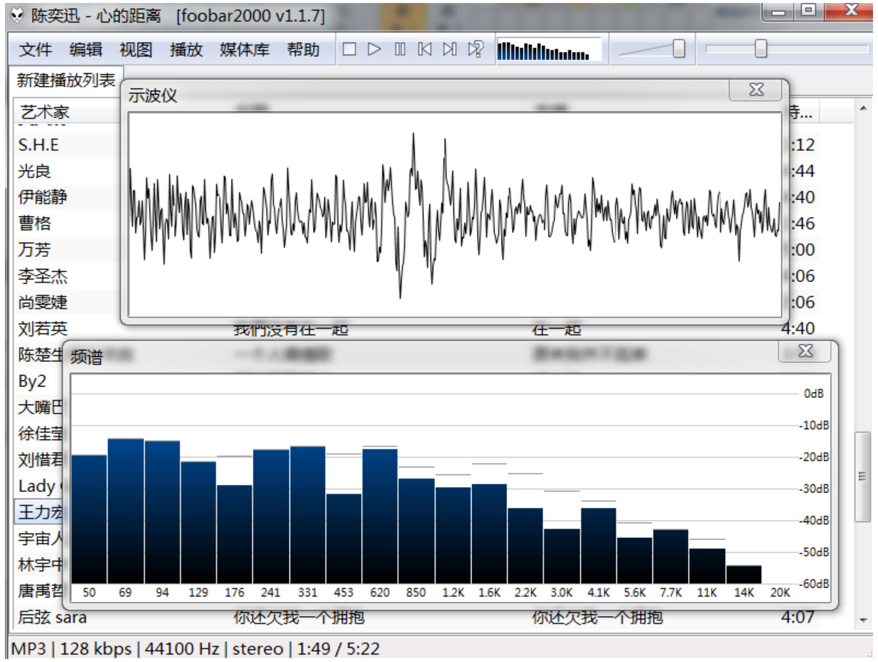
数字图像处理 第4讲

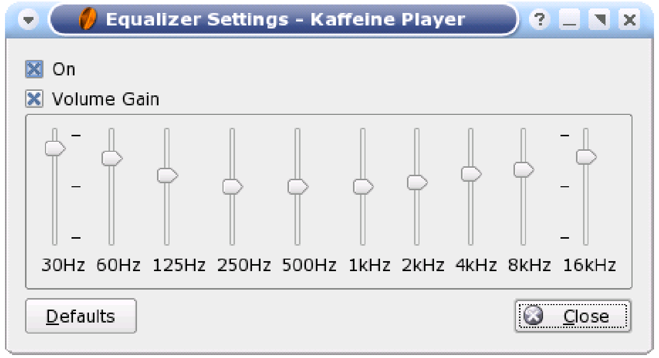
内容

- 图像的频域
- 傅里叶变换
- 图像的傅里叶变换
- 频域滤波原理
- 常用滤波器

声音的频域

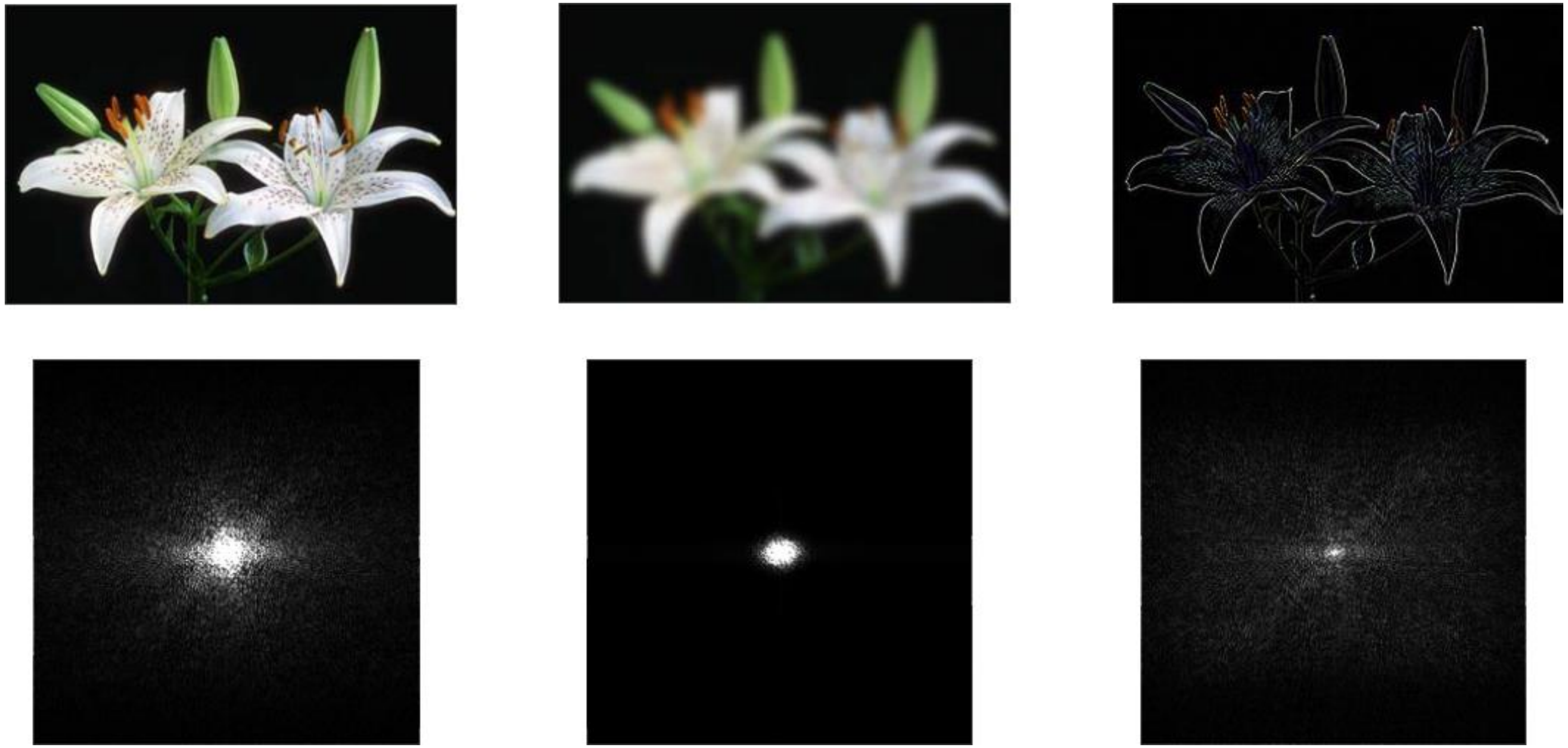
- 声音的时域与频域表示
  - 时域 – 坐标为时间
  - 频域 – 坐标为频率





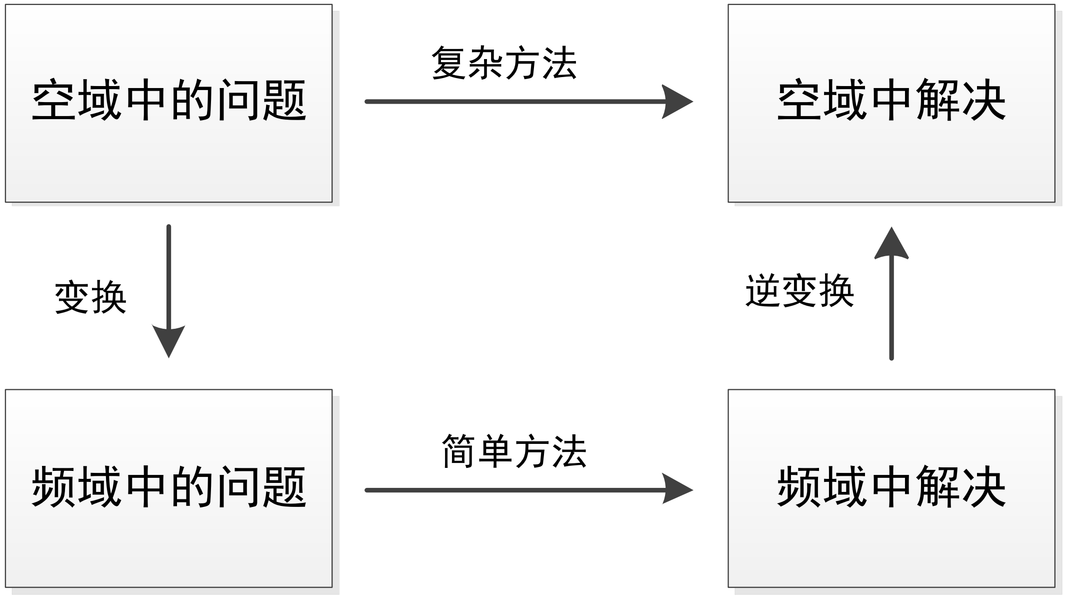
图像的频域

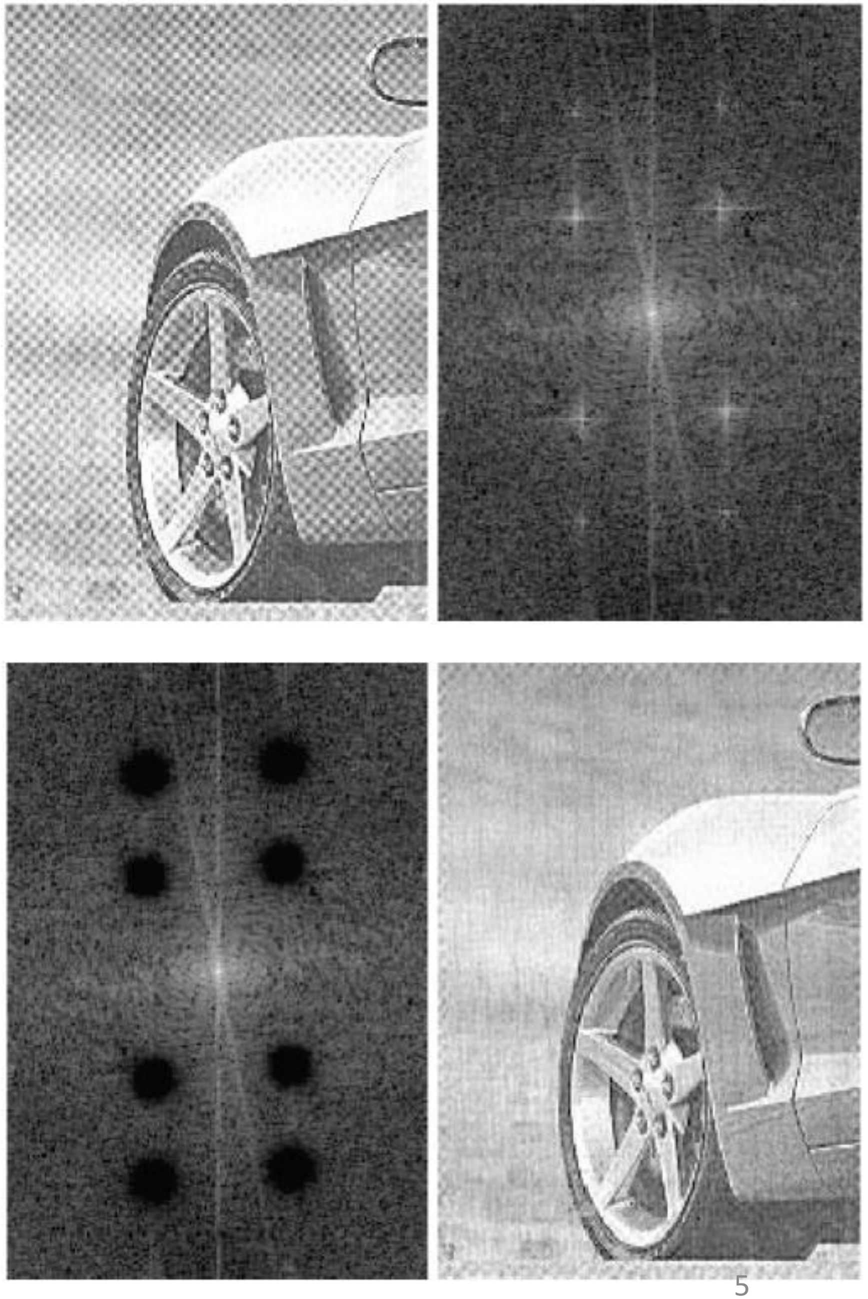
- 低频成分对应于图像的主体特征
- 高频成分对应于图像中的细节



为什么在频域中处理图像

- 人类视觉所感受到的是在空间域
- 有些在空域不好处理的问题
- 在频域中却很容易处理





图像的变换域

- 将图像由空间域变换到变换域，使图像的某些特征突出，便于后面的处理

- 常见变换方法
  - 傅立叶变换、离散余弦变换、小波变换、KL变换

- 应用
  - 图像增强：低通滤波，高通滤波
  - 图像压缩：正交变换、DCT
  - 提取图像特征：直流分量，目标物边缘

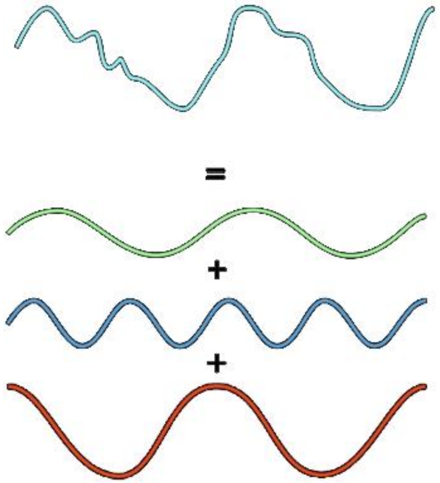
内容

- 图像的频域
- 傅里叶变换
- 图像的傅里叶变换
- 频域滤波原理
- 常用滤波器

约瑟夫·傅里叶

- Joseph Fourier 男爵
  - 法国数学家、物理学家

- 1807年的一个疯狂想法
  - 任何**周期**函数可表示为不同频率三角函数的加权之和
    - cosine与sine函数
  - Lagrange等主流数学家反对
  - Fast Fourier Transform (FFT)
    - 快速傅里叶变换
    - 20世纪10大算法之一

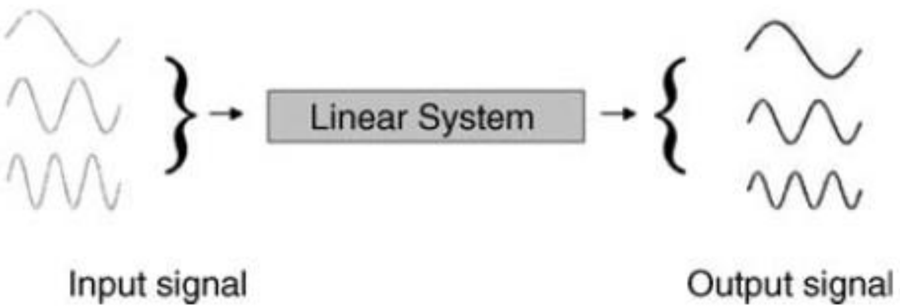


为什么选三角函数

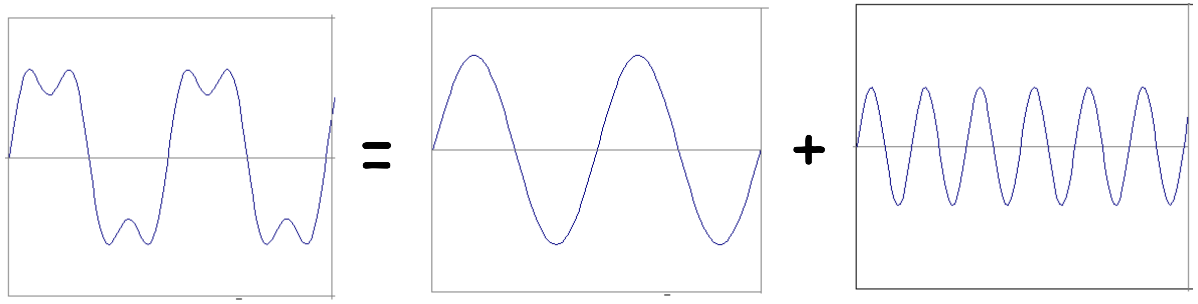
- 三角函数都具有单一频率
- 线性系统只改变幅度和相位

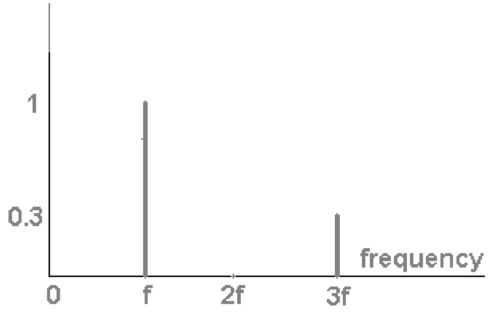
- 权重确定了信号的频率分量

$$\sin(2\pi \cdot fx)$$



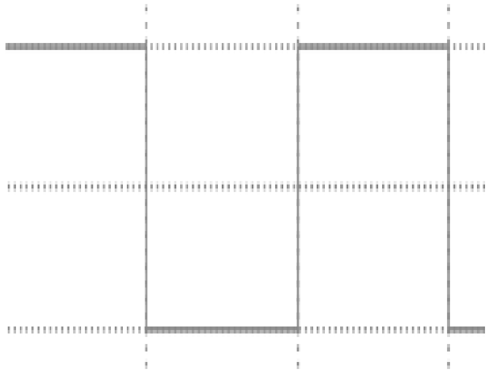
$$g(x) = \sin(2\pi \cdot fx) + \frac{1}{3}\sin(2\pi \cdot 3fx)$$



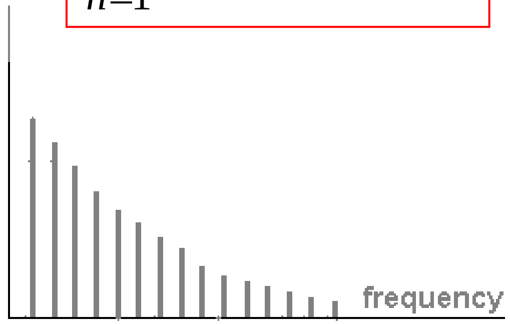


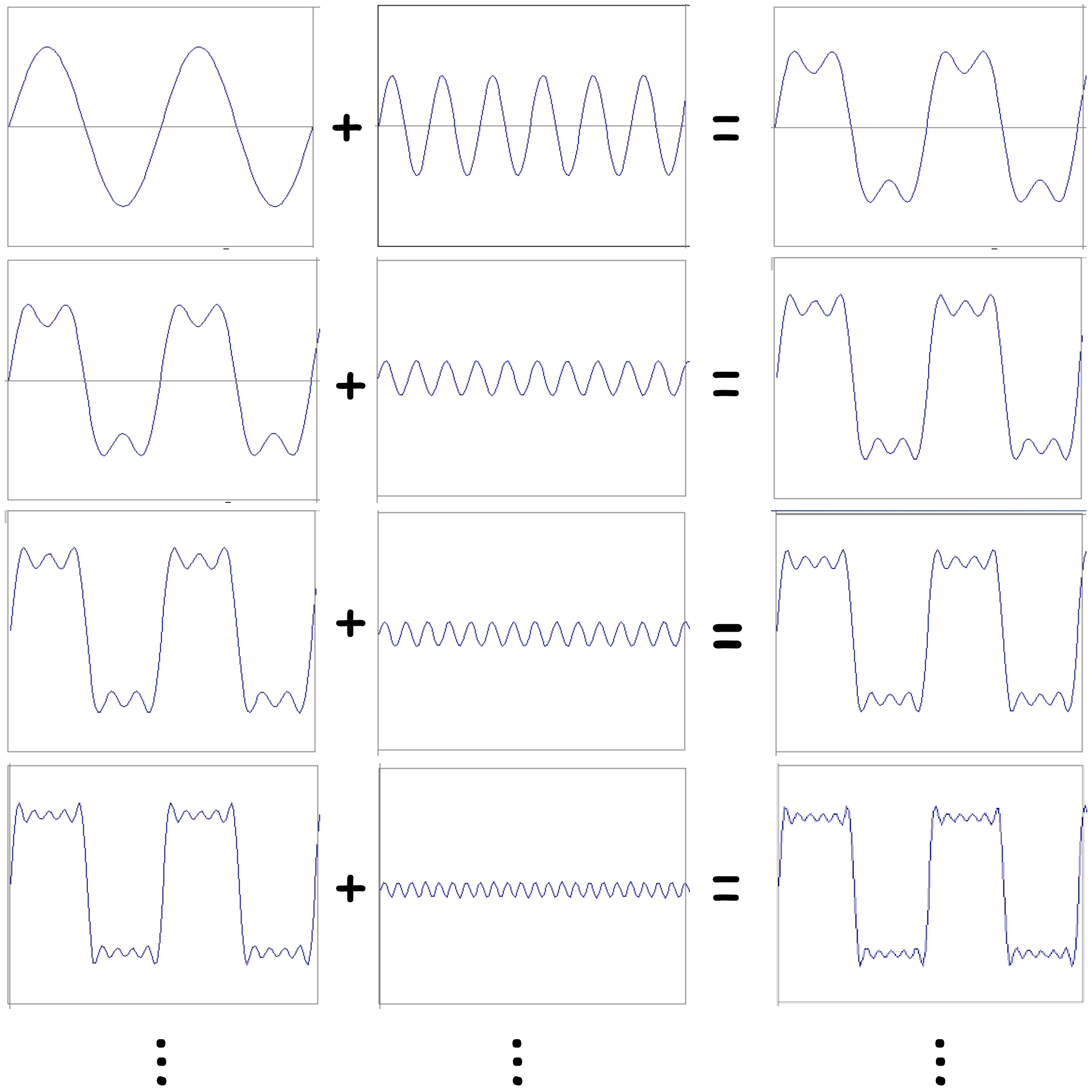
示例

- 方波



$$= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nfx)}$$





傅里叶级数

- 一个周期为 T 的函数可以展开为

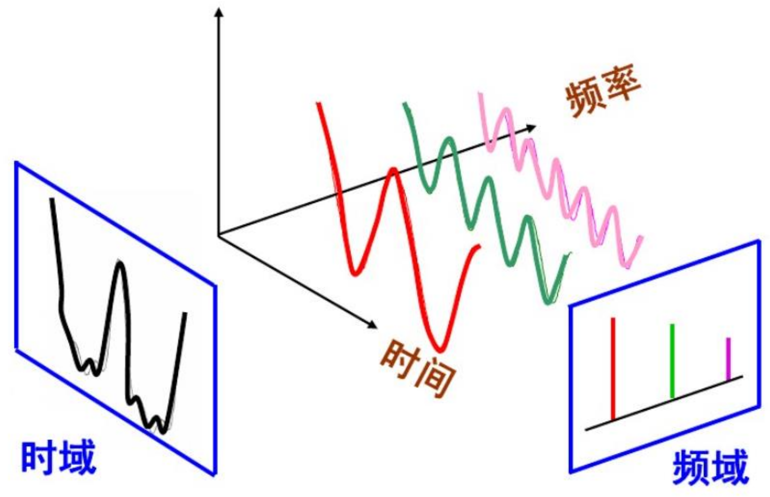
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(w_n x) + b_n \sin(w_n x)\right] \quad w_n = \frac{2\pi n}{T}$$

- 权重表示了信号的频率成分

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(w_n x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(w_n x)\,dx$$



傅里叶级数的复数表示

- cos和sin同时存在不方便表示和计算
- 欧拉公式

$$\cos x + j\sin x = e^{jx} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = (e^{jx} + e^{-jx})/2 \\ \sin x = (e^{jx} - e^{-jx})/2j \end{cases}$$

- 复数表示

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(w_n x) + b_n\sin(w_n x)] \qquad w_n = \frac{2\pi n}{T}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jw_n x} \qquad \begin{cases} c_k = a_k + jb_k \\ c_{-k} = a_k - jb_k \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,\infty$$

非周期函数拓展 - 傅里叶变换

- 周期函数表示为加权之和

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jw_n x} \qquad w_n=\frac{2\pi n}{T}$$

- 非周期函数表示为积分
  - 连续频率变量 μ

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\cdot e^{j2\pi\mu x}d\mu \qquad -\infty<\mu<+\infty$$

  - 其中的频率分量求解

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi\mu x}dx$$

傅里叶变换

- 得到信号频率分量的变换

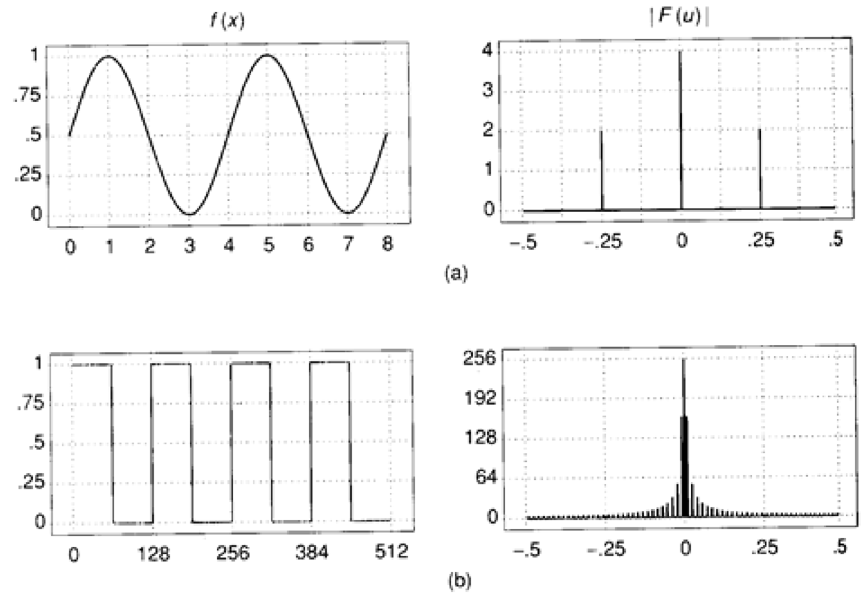
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi\mu x}dx$$

  - $F(\mu)$ 通常为复数
  - 幅度谱（频谱）

$$|F(\mu)|=\sqrt{R^2(\mu)+I^2(\mu)}$$

- 傅里叶反变换

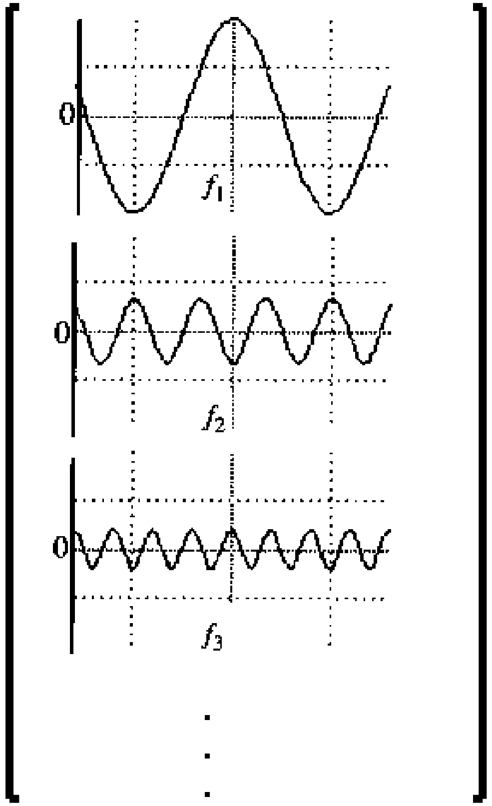
$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\cdot e^{j2\pi\mu x}d\mu$$



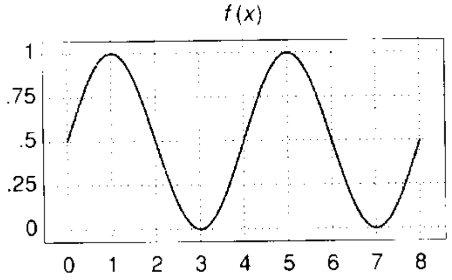
傅里叶变换的意义 – 数学棱镜

- 从一种新的方式来看待和表达信号

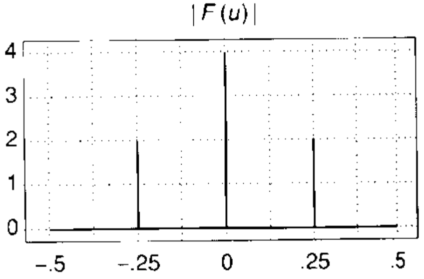
$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi\mu x}dx$$



*



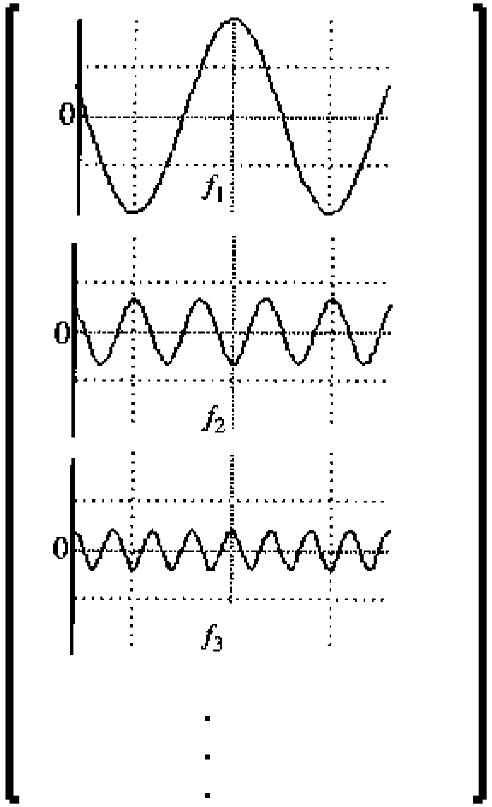
=



$$\begin{cases} c_k = a_k + jb_k \\ c_{-k} = a_k - jb_k \end{cases} \quad k = 0,1,\ldots,\infty$$

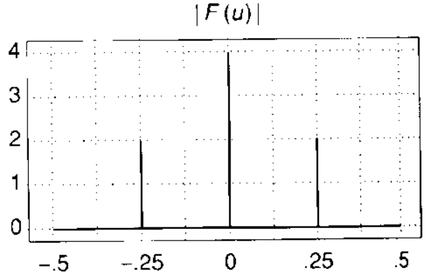
傅里叶反变换的意义

- 通过频率分量可以完全重建信号
- 体现傅里叶变换的完备性

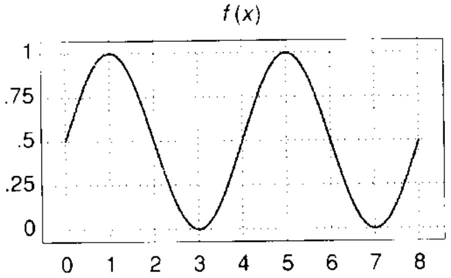


*

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\mu)\cdot e^{j2\pi\mu x}d\mu$$

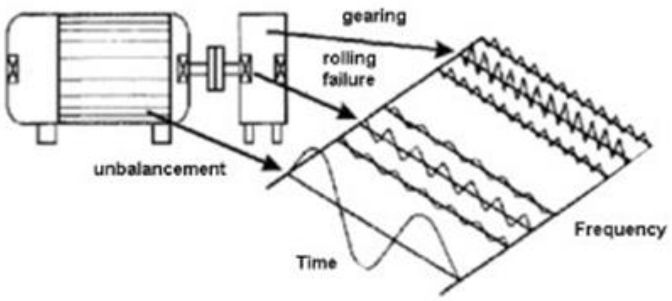


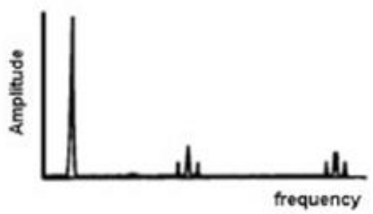
=



傅里叶变换的用途

- 提供了一个全新的角度来分析信号
- 信号的特征有时出现在时域，有时则在频域
  - 如机械的振动，人类的语音等
  - 用机械故障的杂音来判断故障类型





- 信号的时域描述与频域描述是从不同的角度看待同一个事物

内容

- 图像的频域
- 傅里叶变换
- 图像的傅里叶变换
- 频域滤波原理
- 常用滤波器

二维傅里叶变换 2D-FT

- 图像是二维函数 $f(x,y)$

$$F(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cdot e^{-j2\pi\mu x}dx$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu)\cdot e^{j2\pi\mu x}d\mu$$

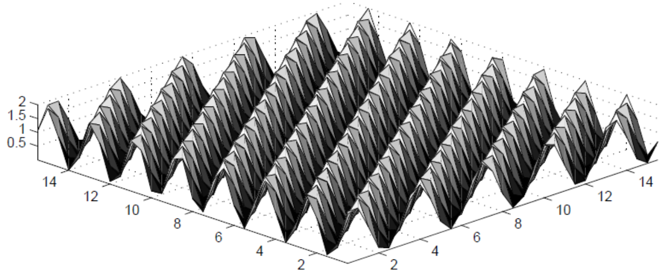
⬇

$$F(\mu,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

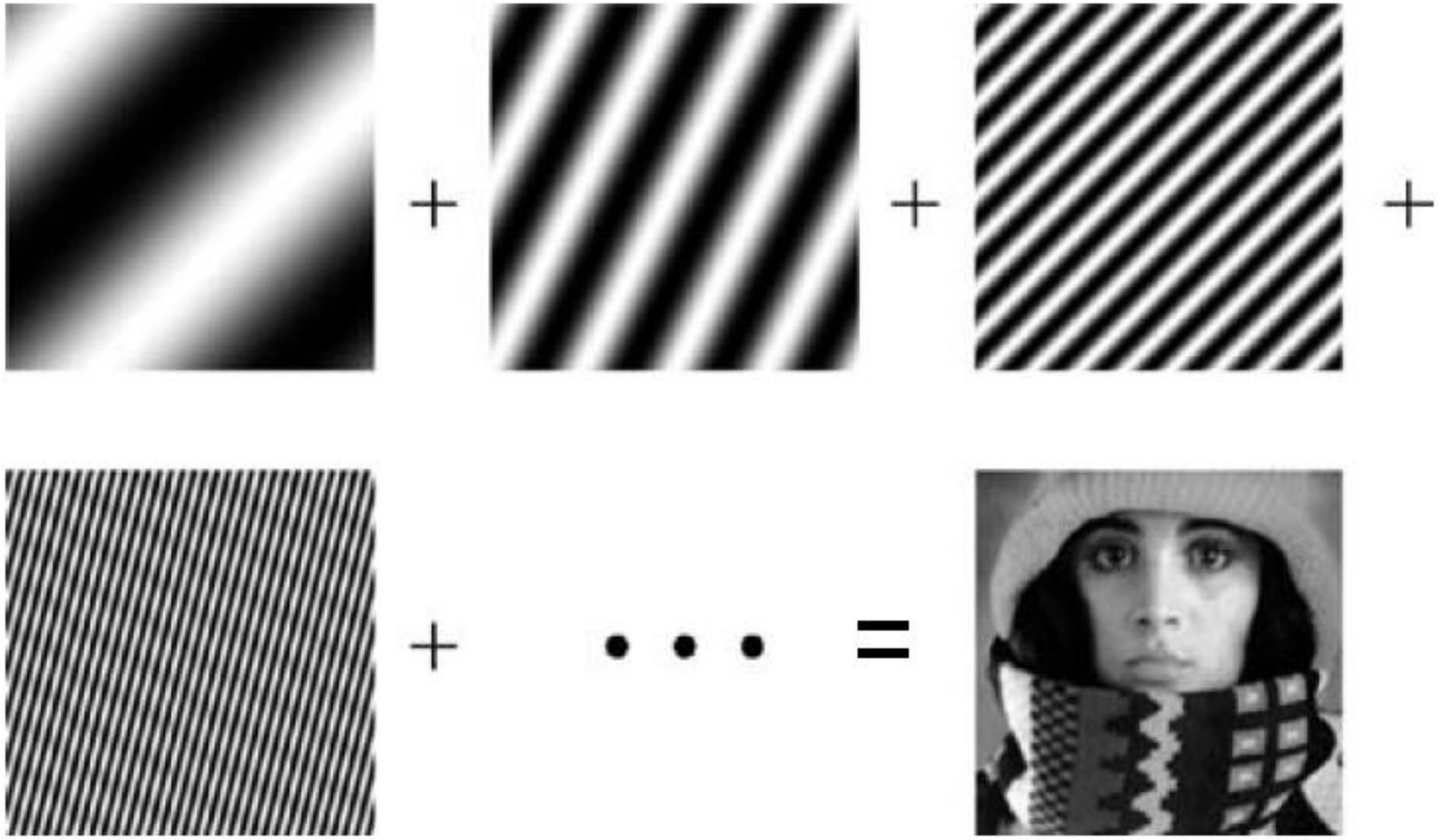
$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,v)\cdot e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

图像傅里叶变换的理解

$$f(x,y)=\sin(2\pi(ux+vy))$$



- 图像由不同频率的二维三角函数构成



二维离散傅里叶变换 2D-DFT

- 图像是离散信号，假设图像尺寸为$M \times N$

$$F(\mu,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mu,v)\cdot e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

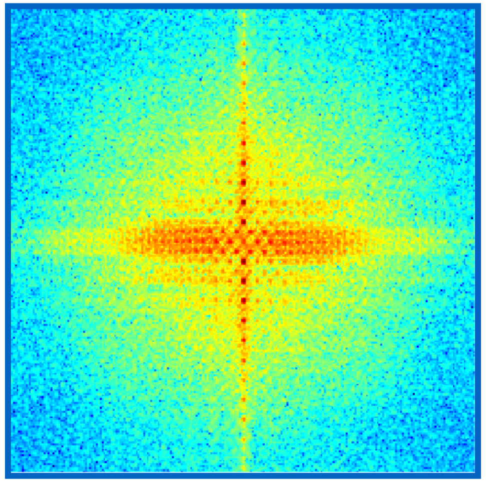
$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

图像的频谱

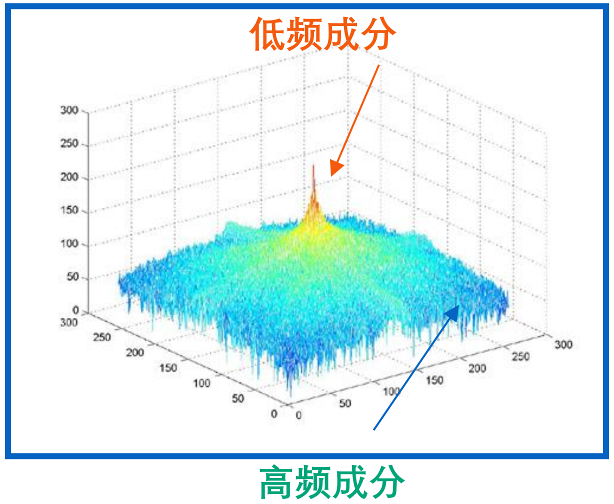
$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

- 通常为复数，考虑幅度谱

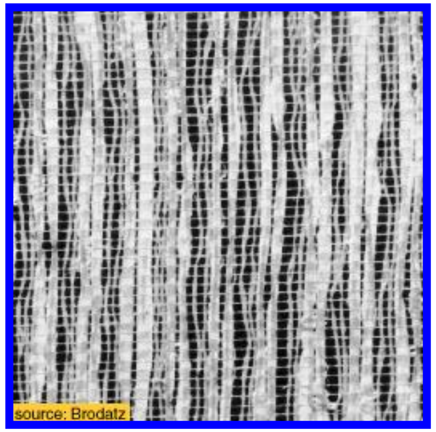
$$|F(u,v)|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$$

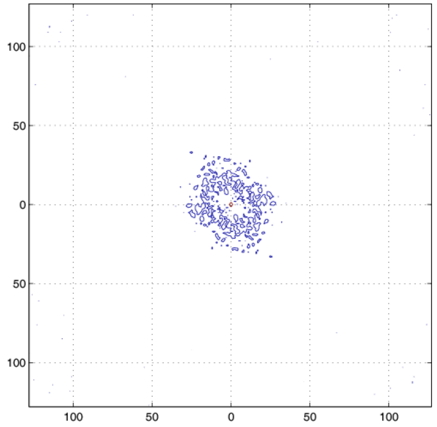


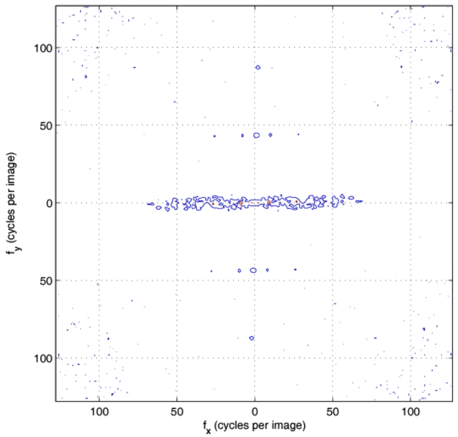
取对数后的频谱值

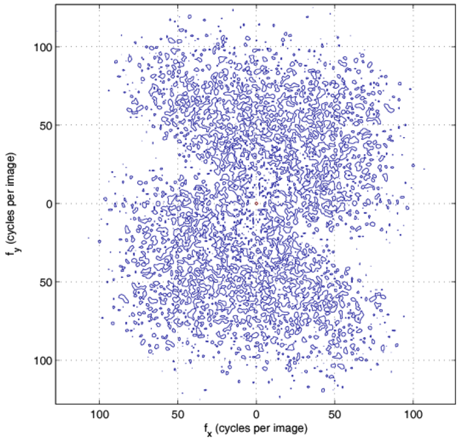


图像的傅里叶变换

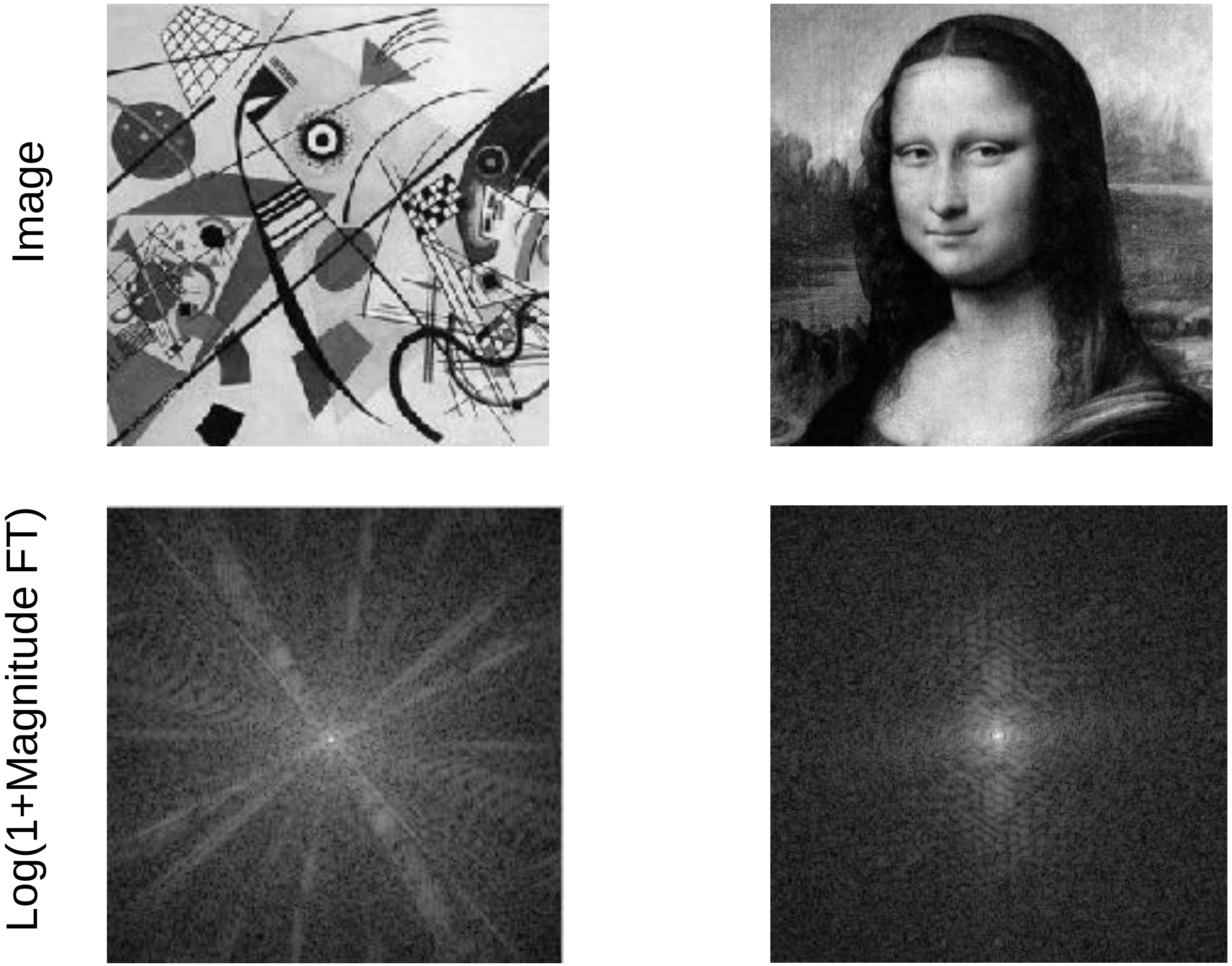

source: Brodatz


100
50
0
50
100


f_y (cycles per image)
f_x (cycles per image)
100
50
0
50
100


f_y (cycles per image)
f_x (cycles per image)
100
50
0
50
100

图像的傅里叶变换



图像的傅里叶反变换

- 傅里叶反变换可以完全重建图像
- JPEG压缩的核心
  - 保存的是傅里叶变换后的系数
  - 丢弃人眼不可查的高频系数可实现极大压缩

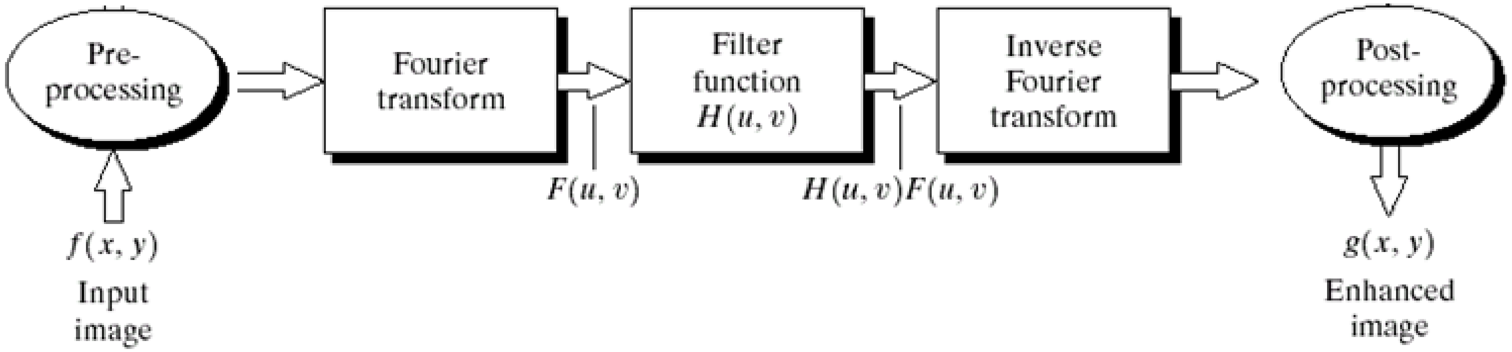
$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cdot e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

Low　　Frequency　　High

内容

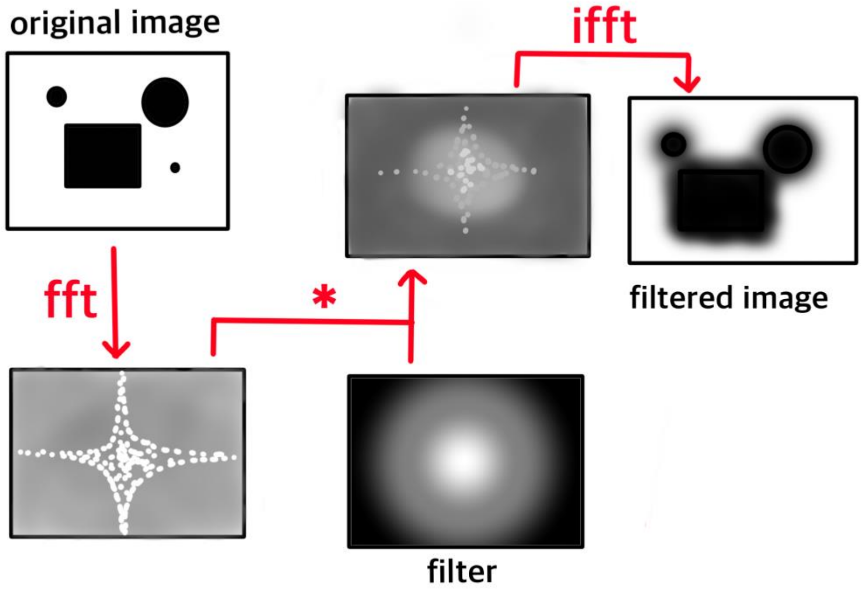
- 图像的频域
- 傅里叶变换
- 图像的傅里叶变换
- 频域滤波原理
- 常用滤波器

频域滤波的原理

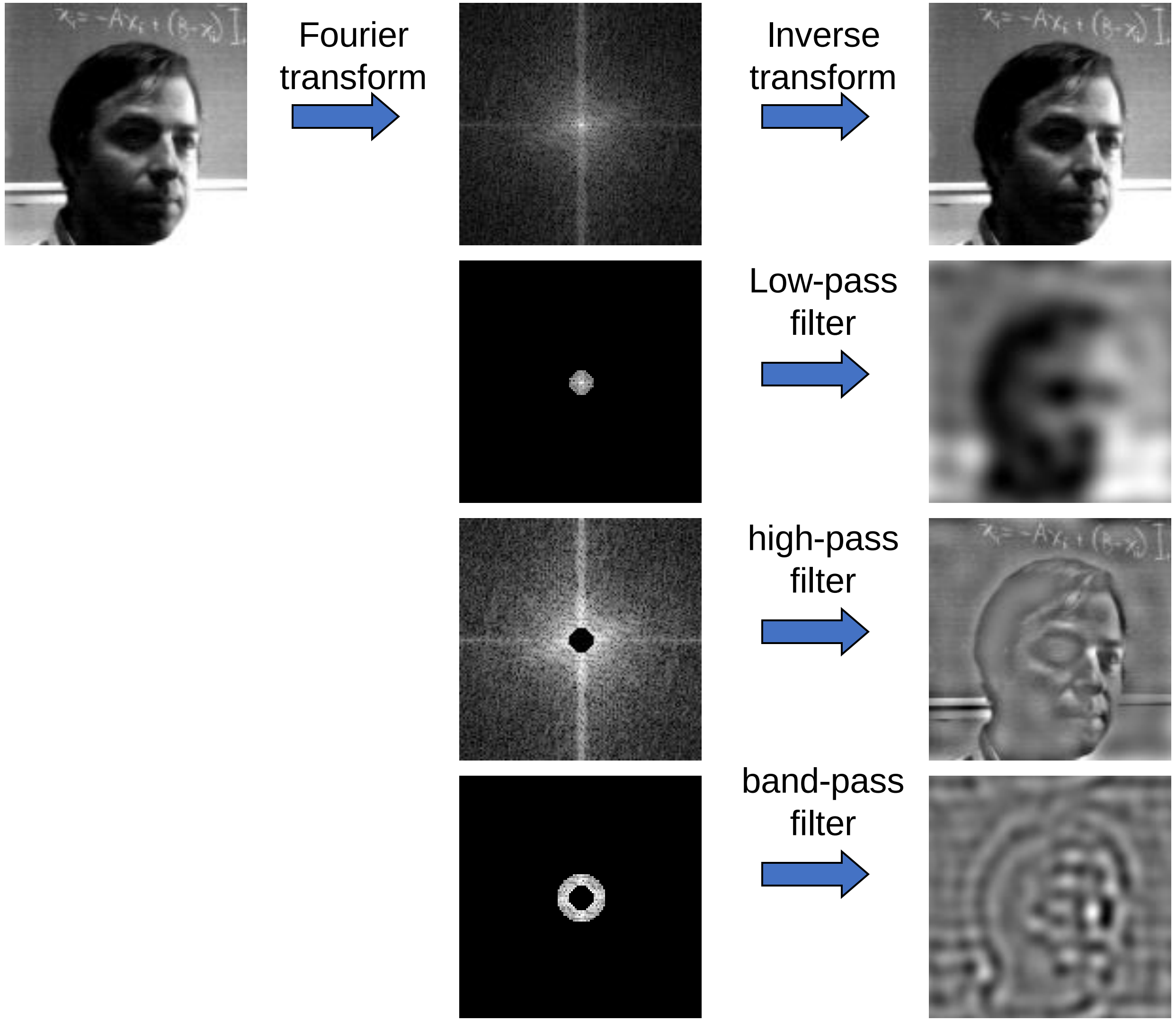


- 得到图像的傅里叶变换 $F(u,v)$
- 构造一个滤波函数 $H(u,v)$
- 将二者相乘 $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$
- 通过傅里叶反变换得到处理后的图像

$$g(x,y) = F^{-1}[G(u,v)]$$



图像的频域滤波



Fourier transform
Inverse transform
Low-pass filter
high-pass filter
band-pass filter

内容

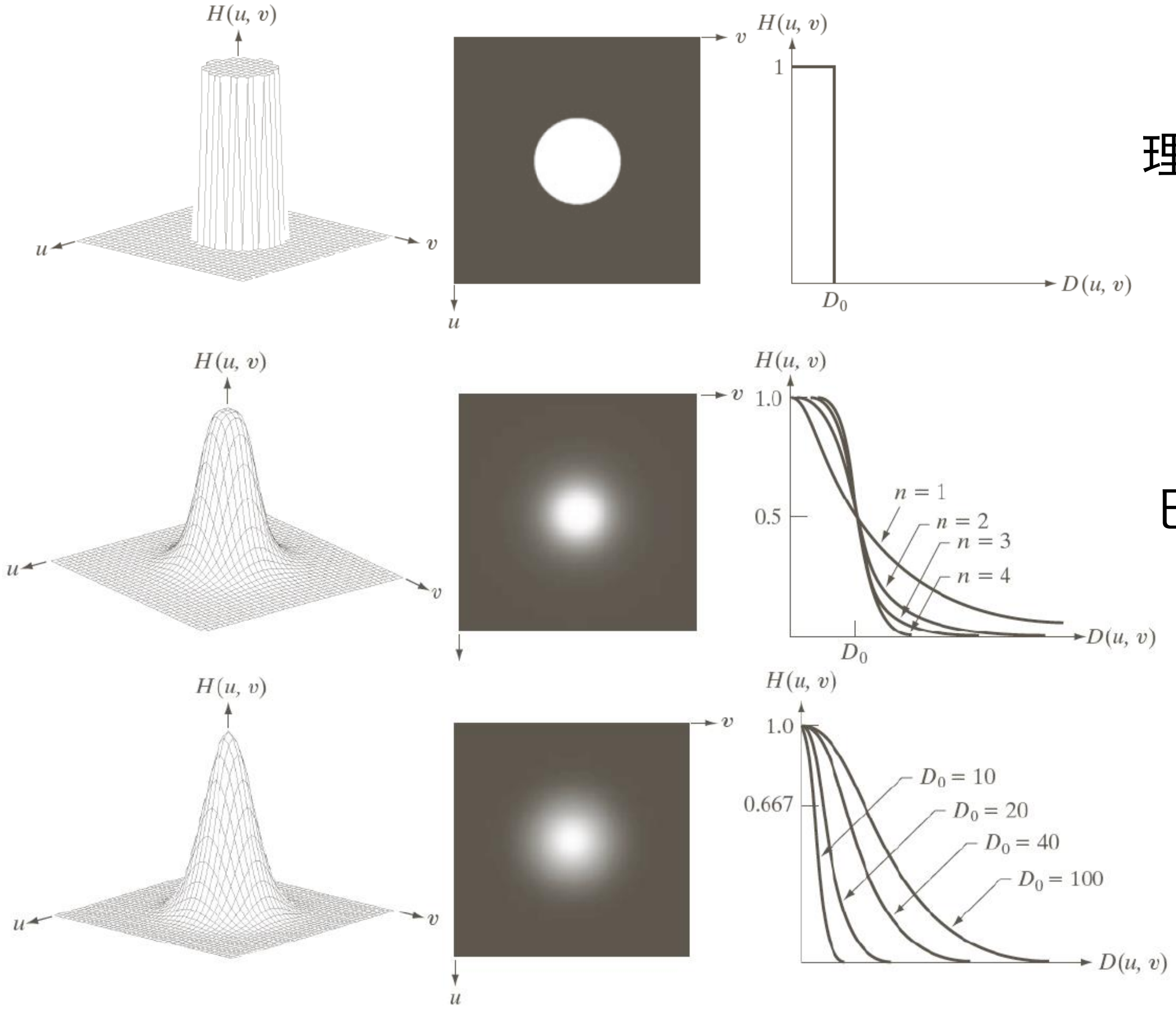
- 图像的频域
- 傅里叶变换
- 图像的傅里叶变换
- 频域滤波原理
- 常用滤波器
  - 低通滤波器
  - 高通滤波器
  - 选择性滤波器

低通滤波器

- 去掉高频分量，保留低频分量
- 低频对应于图像中灰度缓慢变化部分
  - 图像的平滑区域、反映整体灰度特征等
- 可以平滑图像

- 常见低通滤波器
  - 理想滤波器
  - 巴特沃思滤波器
  - 高斯滤波器

理想低通滤波器



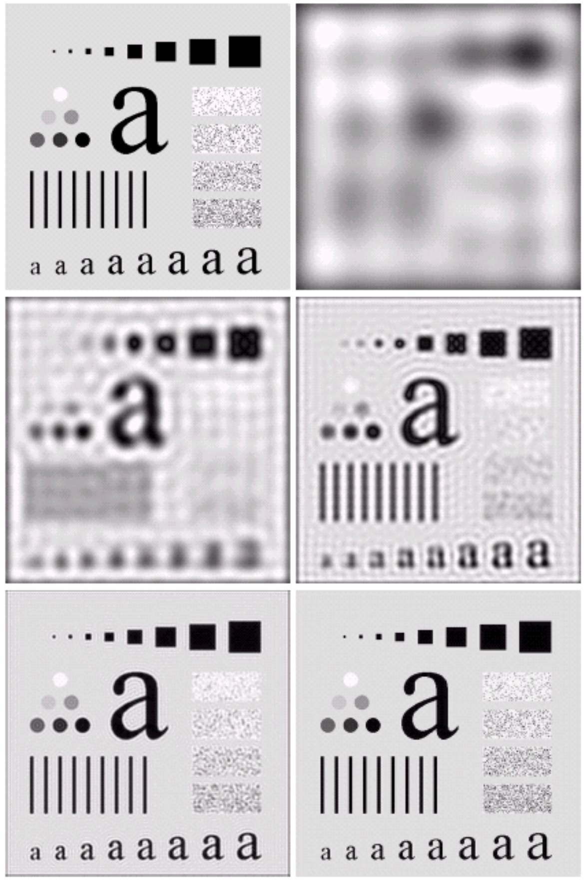
理想低通滤波器

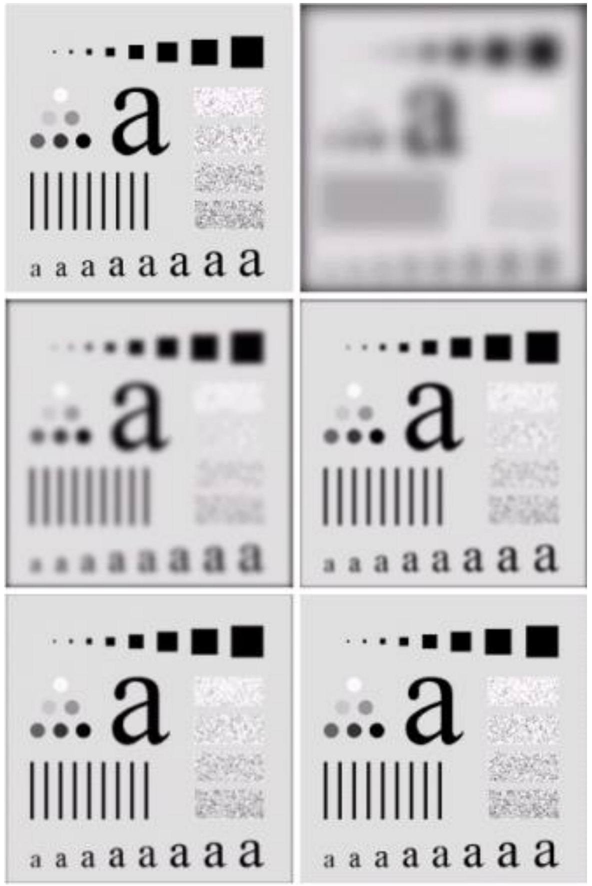
巴特沃思滤波器

高斯滤波器

低通滤波器

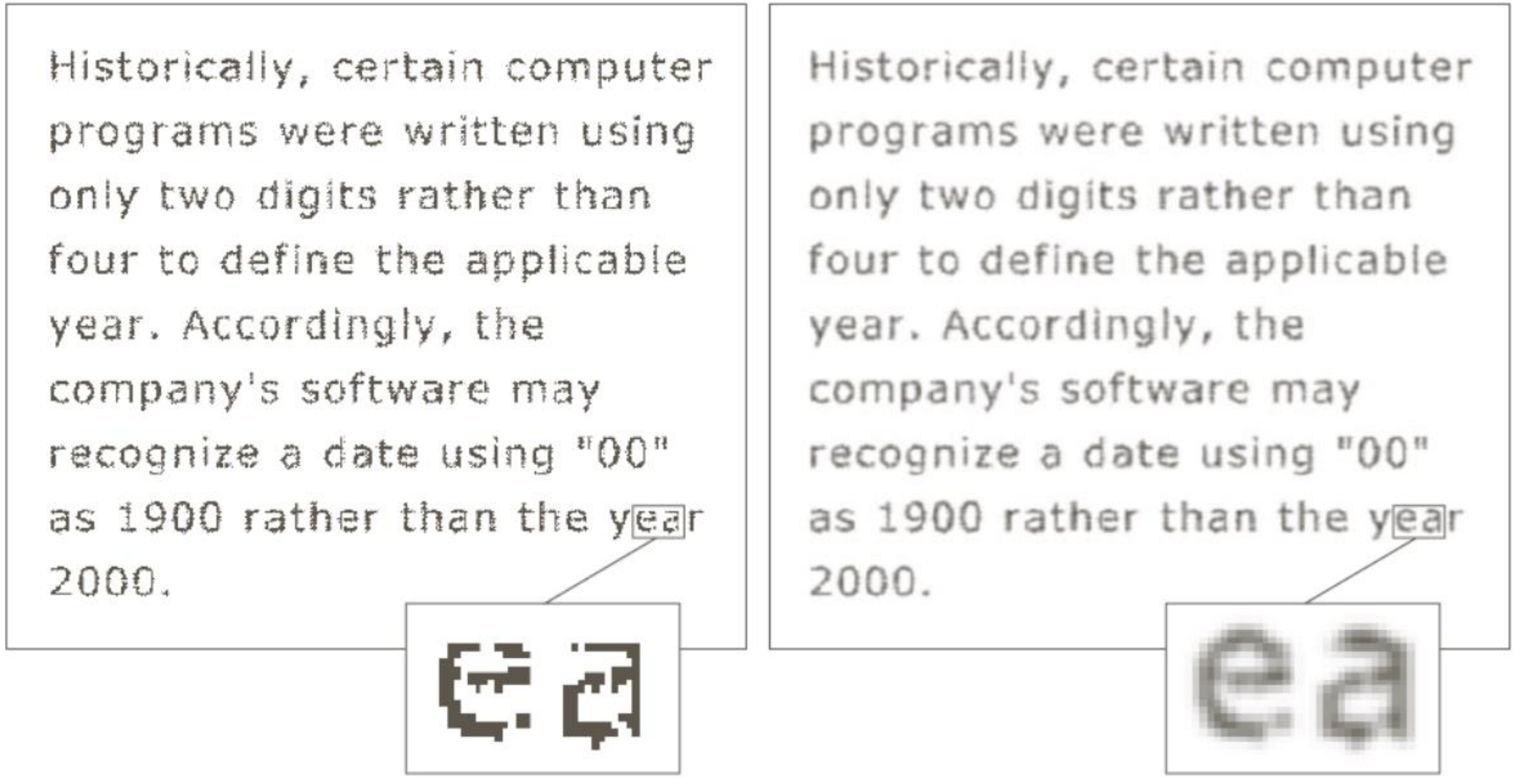
- 不同截止频率的结果（理想、高斯）





低通滤波器的应用

- 文字识别中用来美化修复



低通滤波器的应用

- 美化图片

高通滤波器

- 去掉低频分量，保留高频分量
- 高频对应于图像中灰度快速变化的区域
  - 图像的边缘、纹理等细节
- 可以用来边缘提取

- 高通滤波器用低通滤波的反操作得到

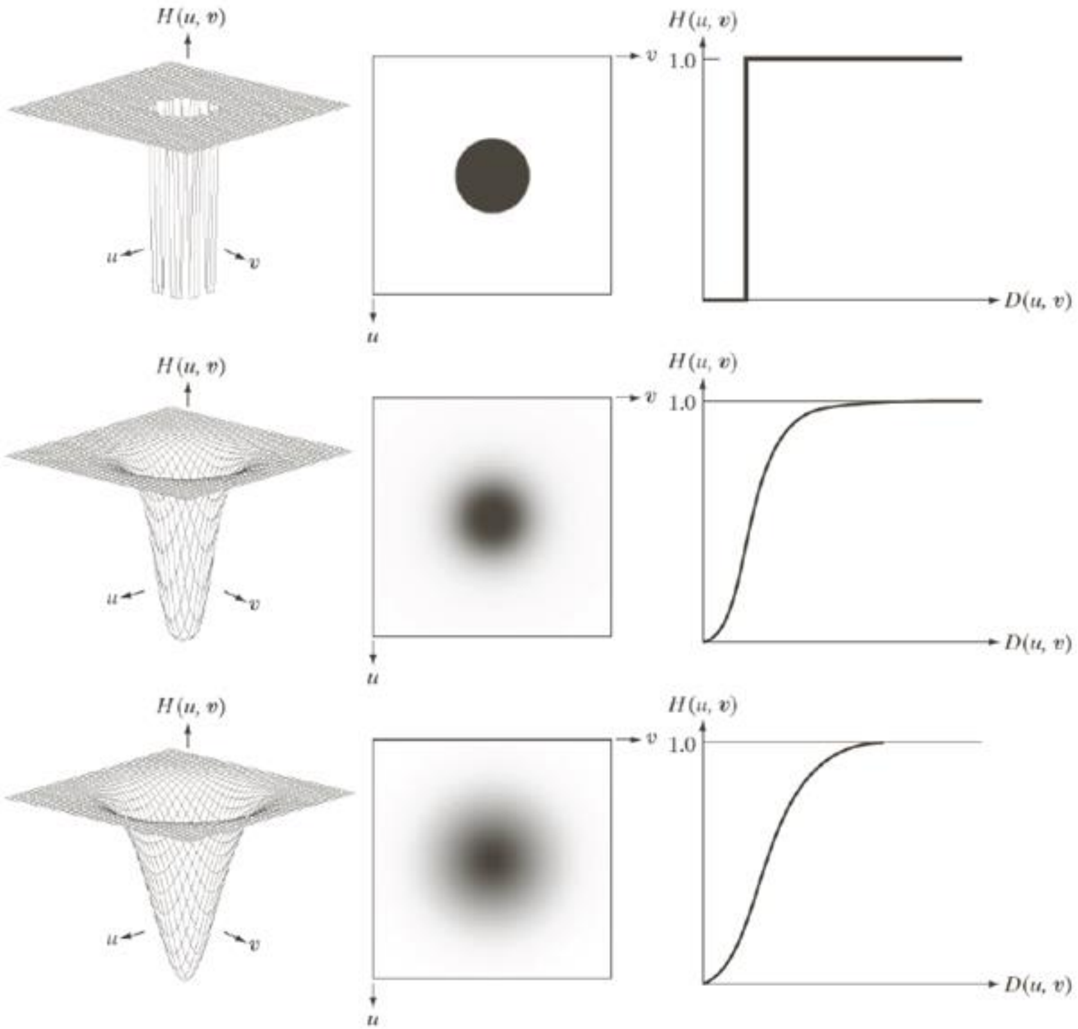
$$H_{\mathrm{HP}}(u,v) = 1 - H_{\mathrm{LP}}(u,v)$$

  - $H_{\mathrm{LP}}(u,v)$ 是对应的低通滤波器函数

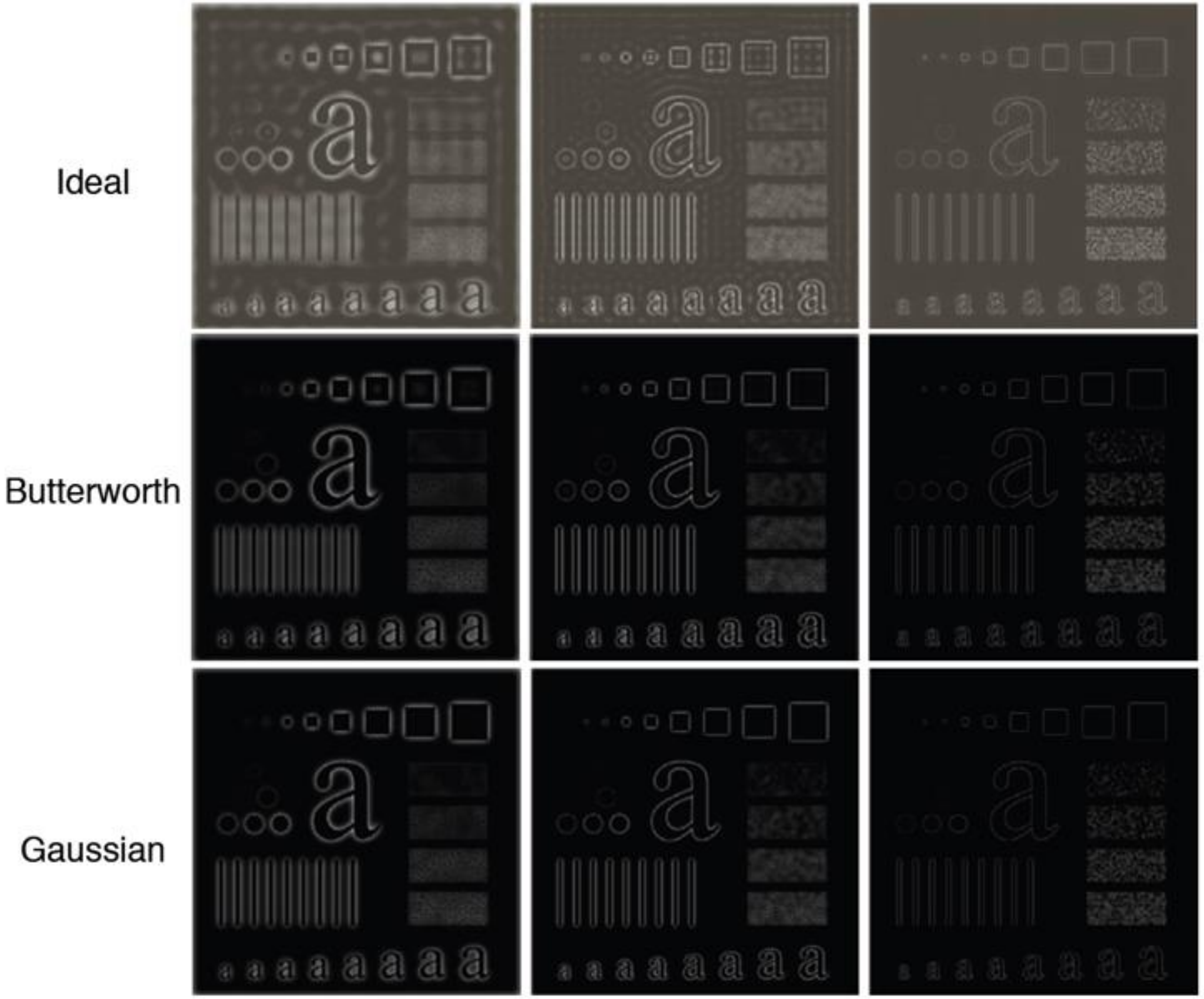
高通滤波器

- 三种
  - 理想型
  - 巴特沃斯型
  - 高斯型

$$H_{\mathrm{HP}}(u,v) = 1 - H_{\mathrm{LP}}(u,v)$$



高通滤波器结果



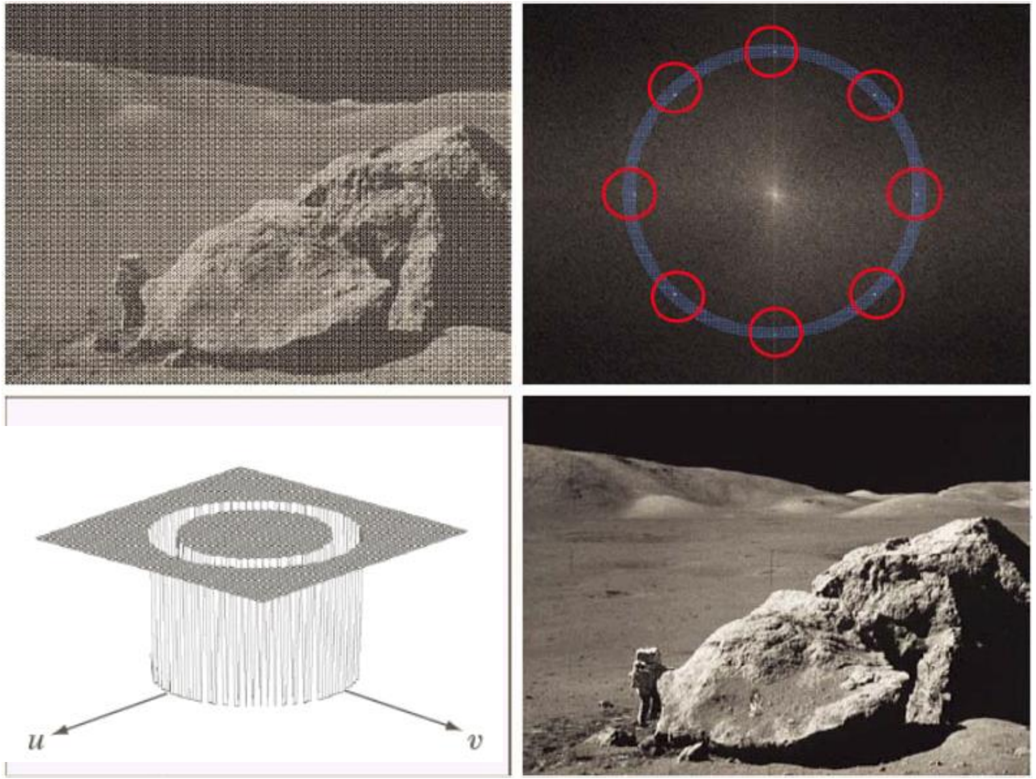
高通滤波器的应用

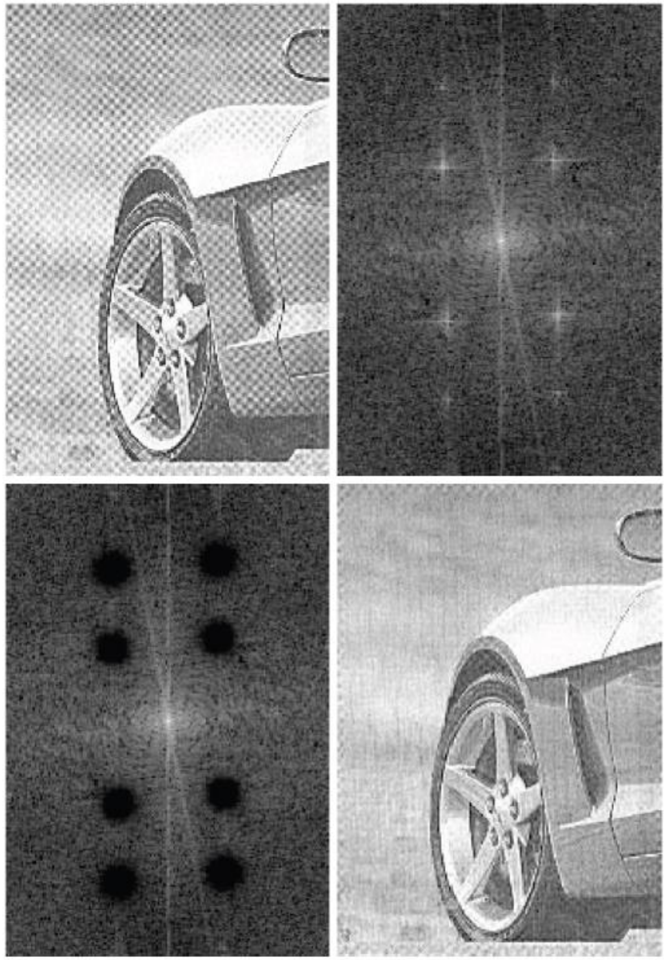
- 用于指纹图像的增强

FIGURE 4.57 (a) Thumb print. (b) Result of highpass filtering (a). (c) Result of thresholding (b)

选择性滤波器

- 带通、带阻、陷波





空域滤波与频域滤波的关系

- 卷积定理

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$$

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) \bullet F_2(\omega)$$

  - 空域中的卷积与频域中的相乘等价

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	90	0	90	90	90	0	0
0	0	0	90	90	90	90	90	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	90	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

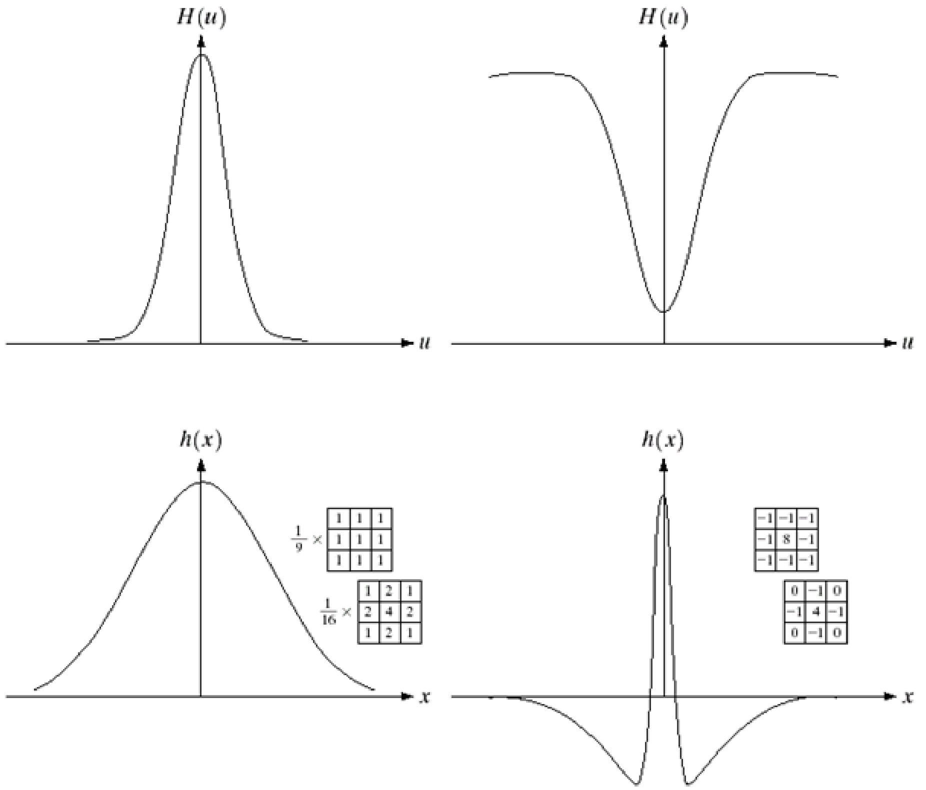
	0	10	20						

- 图像卷积
  - 掩模、卷积核 $h(x,y)$， 傅里叶变换 $H(u,v)$
  - 空域滤波的结果 $g(x,y) = h(x,y) * f(x,y)$
  - 结果的傅里叶变换 $G(u,v) = H(u,v)F(u,v)$

$$f(x,y) * h(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)H(u,v)$$

空域滤波和频域之间的联系

- 频域滤波
  - 与视觉效果的对应关系比较直观
  - 可以用FFT加速
- 从频域滤波器设计空域滤波器
  - 做傅里叶反变换
  - 对应的空域滤波函数
  - 由此设计空间滤波的小核
  - 在空域中卷积
  - 适合资源受限场景



作业

- 实验3：
  - 灰度变换
  - 直方图技术
  - 空间滤波器（均值、高斯、中值；拉普拉斯算子、梯度算子）
- 实验4：
  - 频率滤波器