# Об оценке точности аппроксимации прямой диадическим паттерном. Связь с моделью Изинга.

Е.И. Ершов, С.М. Карпенко

18 декабря 2015 г.

## Аннотация

## 1 Введение

Преобразование Хафа (ПХ) было изобретено Полом Хафом для анализа фотографий, полученных в пузырьковой камере, в 1959 году. Запатентовано же оно было автором в 1962 году [7]. Важнейшим частным случаем ПХ является преобразование Хафа для прямых; ниже рассматривается только этот случай. В том числе поэтому впоследствии алгоритм ПХ «дорабатывался» Р.О. Дудой и П.Е. Хартом. Основной претензией исследователей к исходной имплементации Хафа (с использованием «школьного» уравнения прямой) была потенциальная неограниченность вычисленность пространства Хафа. Следует заметить, что в исходном патенте были достаточно ясные указания о том, как преодолеть эту проблему, но вариант Дуды и Харта (с т.н. нормальным уравнением прямой), безусловно, выглядел более элегантным. Более подробно об этом направлении развития вопроса можно прочитать в [6]. И только гораздо позже стало ясным, что в исходной параметризации алгоритм Хафа имеет быстрый способ вычисления, а в элегантной нормальной параметризации - напрямую нет.

История изобретений и переизобретений алгоритма быстрого преобразования Хафа заслуживает отдельного внимания. Потенциальая возможность применения ПХ в различных областях одновременно с высокой вычислительной сложностью не раз подталкивали изобретателей в попытках ускорить данный алгоритм. Впервые алгормтм был предложен австрийскими учеными Готсом и Дрюкмюллером [5] в 1995 году. Затем, в 1998 и в 2004 годах алгоритм был переоткрыт в работах [2], [8].

Преобразование Хафа - это популярный способ анализа в обработке изображений и компьютерном зрении. Можно указать множество применений ПХ, например, детектирование прямолинейных краев, определение ориентации документа, определение точек схождения [9] и др. Помимо прочего, преобразование Хафа успешно применяется в робастном регрессионном анализе [1, 4, 10].

Математически преобразование Хафа - это дискретная форма преобразования Радона $\mathcal{R}$ (ПР):

$$\mathcal{R}f(L) = \int\limits_{L} f(x)|dx|, \tag{1}$$

где $f$ - скалярная функция, $\Omega$ - область определения $f$ (к примеру, пространство координат изображения), $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $L$ - прямая $L \subset \Omega$. Преобразование Радона для дискретного множества $\Omega$ - это преобразование Хафа. Стоит отметить, что в контексте практических задач прямая представляет собой линейный, кусочно-непрерывный отрезок, но, в угоду лаконичности, далее употребляется термин "прямая"или "паттерн".

Оценим вычислительную сложность преобразования Хафа для скалярного («серого») квадратного изображения $\mathcal{I}$, которое может интерпретироваться как двумерный массив размера $n{\cdot}n$. В таком случае, число всевозможных дискретных прямых пропорционально $n^2$, причем длина прямой пропорциональна $n$, откуда следует, что вычислительная сложность в целом составляет $O(n^3)$. Тем не менее, существует быстрая схема вычисления ПХ, так называемое быстрое преобразование Хафа (БПХ). БПХ было изобретено в 1998 году М.Л. Брейди [2], но широкой известности не получило, а потому позже неоднократно переизобреталось [3, 11]. Вычислительная сложность БПХ - $O(n^2 \log n)$ для квадратного изображения с линейным размером $n$. Более того, вычисление БПХ не вовлекает комплексную арифметику и может быть проведено целочисленно. Однако на практике было замечено, что диадические паттерны, используемые в алгоритме БПХ, аппроксимируют идеальные прямые с некоторой неточностью, которая растет линейно с логарифмом от размера изображения.

Ввиду возрастающего интереса к БПХ проблема точности становится все более существенной, что и является мотивацией для исследования данного вопроса. Основным результатом является доказательство теоремы об оценке верхней границы ошибки аппроксимации идеальной прямой диадическим паттерном. Показано, что данная ошибка прямо пропорциональна $O(k/6)$, где $k = \log(n)$. Показана связь между моделью максимальной ошибки аппроксимации диадическим паттерном и моделью Изинга одномерного антиферомагнетика с нелокальным взаимодействием. Предложена новая аналитическая форма представления диадических паттернов, показана взаимосвязь между структурой ошибки аппроксимации и последовательностью Якобшталя. Приведены эмпирические оценки дисперсии ошибки аппроксимации в зависимости от размера изображения. С целью исследовать возможность увеличить точность преобразования изучена ошибка аппроксимации для других типов разбиения пространства: на три части, а так же последовательностью Фибоначчи.

Статья состоит из трех глав. В первой главе приводятся эмпирические исследования точностьи БПХ, а так же исследование альтернативных схем разделения пространства. Во второй главе приводится исследование В третьей главе предложены теоретические оценки ошибки аппроксимации в зависимости от размера изображения, а также показана связь структуры ошибки с числами Якобшталя.

# 2 Исследование проблемы

# 3 Постановки задачи

## 3.1 Быстрое преобразование Хафа

## 3.2 Модель Изинга

# 4 Оценка ошибки аппроксимации

# 5 Заключение

# Список литературы


[1] P. Ballester. Hough transform for robust regression and automated detection. *Astronomy and Astrophysics*, 286:1011–1018, 1994.

[2] M. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM J. Computing*, 27(1), 1998.

[3] M. Frederick, N. VanderHorn, and A. Somani. Real-time H/W implementation of the approximate discrete radon transform. *IEEE International Conference on Application-Specific Systems, Architecture Processors (ASAP'05)*, 2:399–404, 2005.

[4] A. Goldenshluger and A. Zeevi. The hough transform estimator. *The Annals of Statistics*, 32:1908–1932, 2004.

[5] H. J. Druckmüller Götz, W. A. A fast digital radon transform—an efficient means for evaluating the hough transform. *Pattern Recognition*, 28.12.

[6] P. Hart. How the Hough transform was invented [DSP history]. *Signal Processing Magazine IEEE*, 26(6):18–22, 2009.

[7] Paul V.C. Hough. and Ann Arbor. Method and means for recognizing complex patterns, 12 1962.

[8] S. Karpenko, D. Nikolaev, P. Nikolayev, and V. Postnikov. Fast Hough transform with controllable robustness (in Russian). *In Proc. of IEEE AIS'04 and CAD-2004*, 2:303–309, 2004.

[9] D. Nikolaev, S. Karpenko, I. Nikolaev, and P. Nikolayev. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field. *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, pages 238–246, 2008.

[10] Безматерных П. Ханипов Т.М. Николаев Д.П. Решение задачи линейной регрессии с помощью быстрого преобразования Хафа. *Материалы 35-й конференции молодых ученых и специалистов "Информационные технологии и системы (ИТиС'12), стр. 354-359*, 2012.

[11] Николаев Д.П. Николаев П.П Постников В. В. Карпенко С. М. Быстрое преобразование Хафа с управляемой робастностью. *Искусственные интеллектуальные системы и Интеллектуальные САПР. Труды международной конференции IEEE AIS"04 и CAD-2004. М.: Изд-во Физматлит, т. 2, стр. 303-309*, 2004.