

# Об оценке точности аппроксимации прямой диадическим паттерном. Связь с моделью Изинга.

Е.И. Ершов, С.М. Карпенко

17 декабря 2015 г.

## Аннотация

### 1 Введение

Преобразование Хафа (ПХ) было изобретено Полом Хафом для анализа фотографий, полученных в пузырьковой камере, в 1959 году. Запатентовано же оно было автором в 1962 году [6]. Важнейшим частным случаем ПХ является преобразование Хафа для прямых; ниже рассматривается только этот случай. В том числе поэтому впоследствии алгоритм ПХ «дорабатывался» Р.О. Дудой и П.Е. Хартом. Основной претензией исследователей к исходной имплементации Хафа (с использованием «школьного» уравнения прямой) была потенциальная неограниченность вычисленности пространства Хафа. Следует заметить, что в исходном патенте были достаточно ясные указания о том, как преодолеть эту проблему, но вариант Дуды и Харта (с т.н. нормальным уравнением прямой), безусловно, выглядел более элегантно. Более подробно об этом направлении развития вопроса можно прочитать в [5]. И только гораздо позже стало ясным, что в исходной параметризации алгоритм Хафа имеет быстрый способ вычисления, а в элегантной нормальной параметризации - напрямую нет.

Стоит отметить, что история изобретений и переизобретений алгоритма быстрого преобразования Хафа заслуживает отдельного внимания. Потенциальная возможность применения ПХ в различных областях

Идея возможности быстрого подсчета преобразования Хафа получила популярность в конце 80-х, начале 90-х годов. Данный интерес вылился в образовании различных направлений

Преобразование Хафа - это популярный способ анализа в обработке изображений и компьютерном зрении. Можно указать множество применений ПХ, например, детектирование прямолинейных краев, определение ориентации документа, определение точек схождения [7] и др. Помимо прочего, преобразование Хафа успешно применяется в робастном регрессионном анализе [1, 4, 8].

Математически преобразование Хафа - это дискретная форма преобразования Радона  $\mathcal{R}$  (ПР):

$$\mathcal{R}f(L) = \int_L f(x)|dx|, \quad (1)$$

где  $f$  - скалярная функция,  $\Omega$  - область определения  $f$  (к примеру, пространство координат изображения),  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $L$  - прямая  $L \subset \Omega$ . Согласно уравнению (1). Преобразование Радона для дискретного множества  $\Omega$  - это преобразование Хафа. Стоит отметить, что в контексте практических задач прямая представляет собой линейный, кусочно-непрерывный отрезок, но, в угоду лаконичности, далее употребляется термин "прямая" или "паттерн".

Оценим вычислительную сложность преобразования Хафа для скалярного («серого») квадратного изображения  $\mathcal{I}$ , которое может интерпретироваться как двумерный массив размера  $n \cdot n$ . В таком случае, число всевозможных дискретных прямых пропорционально  $n^2$ , причем длина прямой пропорциональна  $n$ , откуда следует, что вычислительная сложность в целом составляет  $O(n^3)$ . Тем не менее, существует быстрая схема вычисления ПХ, так называемое быстрое преобразование Хафа (БПХ). БПХ было изобретено в 1998 году М.Л. Брейди [2], но широкой известности не получило, а потому позже неоднократно переизобреталось [3, 9]. Вычислительная сложность БПХ -  $O(n^2 \log n)$  для квадратного изображения с линейным размером  $n$ . Более того, вычисление БПХ не вовлекает комплексную арифметику и может быть проведено целочисленно. Однако на практике было замечено, что диадические паттерны, используемые в алгоритме БПХ, аппроксимируют идеальные прямые с некоторой неточностью, которая растет линейно с логарифмом от размера изображения.

В данной работе рассматривается ошибка аппроксимация геометрически идеальной прямой диадическими паттернами. Ввиду возрастающего интереса к БПХ проблема точности становится все более существенной, что и является мотивацией для исследования данного вопроса. В данной работе будет предложена новая аналитическая форма представления диадических паттернов, получены теоретические и эмпирические оценки ошибки аппроксимации идеальных прямых диадическими, а также показана взаимосвязь между структурой ошибки аппроксимации и последовательностью Якобшталя.

Статья состоит из трех глав. В первой главе приводится описание структуры диадических прямых и классический способ их построения. Во второй главе изложены результаты эмпирических исследований, приведена визуализация ошибки аппроксимации диадическими прямыми. В третьей главе предложены теоретические оценки ошибки аппроксимации в зависимости от размера изображения, а также показана связь структуры ошибки с числами Якобшталя.

## 2 Исследование проблемы

## 3 Постановки задачи

### 3.1 Быстрое преобразование Хафа

### 3.2 Модель Изинга

## 4 Оценка ошибки аппроксимации

## 5 Заключение

## Список литературы

- [1] P. Ballester. Hough transform for robust regression and automated detection. *Astronomy and Astrophysics*, 286:1011–1018, 1994.
- [2] M. Brady. A fast discrete approximation algorithm for the Radon transform. *SIAM J. Computing*, 27(1), 1998.

- [3] M. Frederick, N. VanderHorn, and A. Somani. Real-time H/W implementation of the approximate discrete radon transform. *IEEE International Conference on Application-Specific Systems, Architecture Processors (ASAP'05)*, 2:399–404, 2005.
- [4] A. Goldenshluger and A. Zeevi. The hough transform estimator. *The Annals of Statistics*, 32:1908–1932, 2004.
- [5] P. Hart. How the Hough transform was invented [DSP history]. *Signal Processing Magazine IEEE*, 26(6):18–22, 2009.
- [6] Paul V.C. Hough. and Ann Arbor. Method and means for recognizing complex patterns, 12 1962.
- [7] D. Nikolaev, S. Karpenko, I. Nikolaev, and P. Nikolayev. Hough transform: underestimated tool in the computer vision field. *Proceedings of the 22th European Conference on Modelling and Simulation*, pages 238–246, 2008.
- [8] Безматерных П. Ханипов Т.М. Николаев Д.П. Решение задачи линейной регрессии с помощью быстрого преобразования Хафа. *Материалы 35-й конференции молодых ученых и специалистов “Информационные технологии и системы (ИТuС’12)”, стр. 354-359*, 2012.
- [9] Николаев Д.П. Николаев П.П Постников В. В. Карпенко С. М. Быстрое преобразование Хафа с управляемой робастностью. *Искусственные интеллектуальные системы и Интеллектуальные САПР. Труды международной конференции IEEE AIS'04 и CAD-2004. М.: Изд-во Физматлит, т. 2, стр. 303-309*, 2004.