



# ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

STUDIJSKI PROGRAMI:

SOFTVERSKO INŽENJERSTVO, RAČUNARSKA TEHNIKA, INFORMATIKA I MATEMATIKA

NASTAVNIK: DOC. DR ULFETA MAROVAC, [UMAROVAC@NP.AC.RS](mailto:UMAROVAC@NP.AC.RS)

ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA

# NELINEARNE STRUKTURE PODATAKA

# NELINEARNE STRUKTURE PODATAKA

- Sve prethodne specifične strukture podataka, izvedene iz opšteg koncepta linearne liste, koje odražavaju samo linearni poredak elemenata imaju *ograničeno korišćenje* jer su sposobne da modeliraju jedino objekte zasnovane na jednodimenzionalnim relacijama.
- U realnom svetu vrlo često se nailazi na objekte i procese sa mnogo složenijim unutrašnjim vezama, gde je jedan element povezan sa više elemenata koji se mogu proglasiti susednim.
- Broj suseda različitih elemenata, u opštem slučaju, čak ne mora da bude isti.
- Pored toga, veze mogu da budu različito numerički kvantifikovane.
- Ovakvi objekti i procesi se modeliraju ***nelinearnim strukturama podataka***.
- Kako kod ovih složenih struktura pojedinačni element može da bude u relaciji sa više od dva druga elementa, nelinearne strukture su sposobne da predstavljaju proizvoljne višedimenzionalne relacije na fleksibilan način.

# NELINEARNE STRUKTURE PODATAKA

- Tipične operacije koje se primenjuju na nelinearne strukture su slične onima kod linearnih struktura, a to su:
  - obilazak svih elemenata u nekom definisanom, nelinearnom poretku,
  - pretraživanje na zadatu vrednost,
  - pristup proizvoljnom elementu,
  - umetanje novog elementa,
  - brisanje postojećeg elementa, itd.
- Pored toga, postoje i specifične operacije kao što su nalaženje različitih puteva između elemenata, nalaženje najkraćih rastojanja, itd.

# NELINEARNE STRUKTURE PODATAKA

- S obzirom na nelinearnost veza u strukturi, za implementaciju ovih struktura nameće se ulančana reprezentacija kao najprirodniji način jer pokazivači eksplicitno odražavaju povezanost elemenata.
- Međutim, nelinearne strukture mogu da se predstavljaju i sekvencijalnom reprezentacijom u vidu niza.
- U zavisnosti od topologije strukture, broja elemenata i broja njihovih veza ovaj način predstavljanja ponekad može da bude i efikasniji.
- Dva glavna kriterijuma pri izboru načina reprezentacije su, kao i obično:
  - zauzeće memorije i
  - podrška efikasnom izvršavanju tipičnih operacija sa strukturom.



# STABLA

ALGORITMI I STRUKTURE PODATAKA



# UVOD

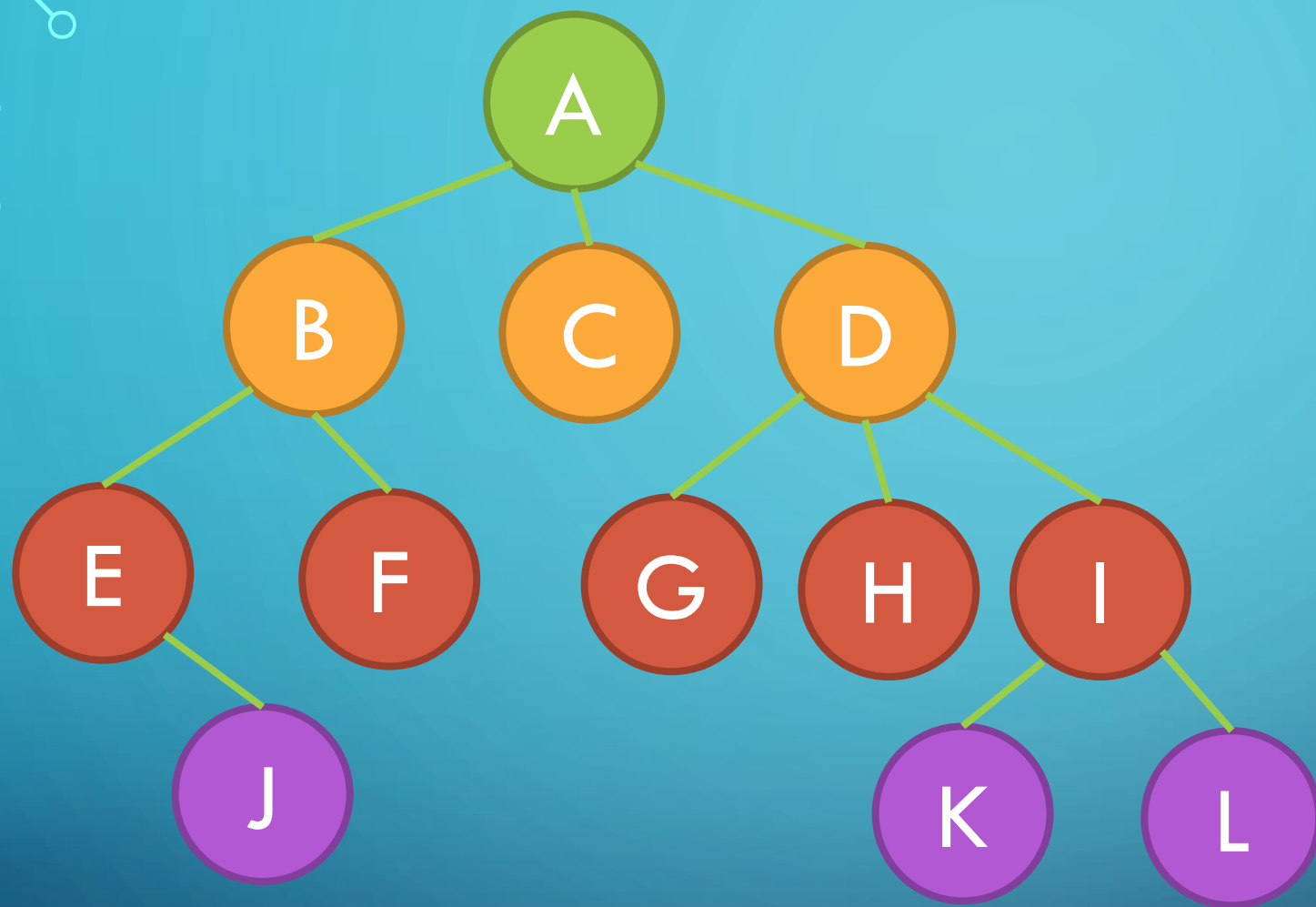
- Stablo predstavlja važnu strukturu podataka, veoma pogodnu za modelovanje objekata koji odslikavaju hijerarhijsku organizaciju.
- Tako se stablom mogu predstavljati:
  - rodbinski i nasledni odnosi u porodici (genealosko stablo),
  - položaj ljudi na funkcijama u nekoj kompaniji,
  - organizacija jedinica u vojsci,
  - složeni matematički izrazi,
  - skeletoni sportskih takmičenja, itd.
- Očigledno sve ove aplikacije pokazuju prirodu grananja ili širenja organizacije po nivoima od vrha ka dnu.



# DEFINICIJA STABLA

- Stablo  $T$  je konačan, neprazan skup elementa proizvoljnog tipa **čvorova** takav da:
  - Postoji jedan poseban čvor koji se naziva koren (root),
  - Ostali čvorovi se mogu razdvojiti u  $n \geq 0$  disjunktnih podskupova  $T_1 \dots, T_n$  koji su, takođe stabla. Ova stabla se nazivaju **podstablina** korena.





NULTI NIVO

PRVI NIVO

DRUGI NIVO

TRECI NIVO

# PRIMER KORENOG STABLA

- Stablo prikazano na slici ima 12 čvorova čiji je sadržaj predstavljen slovima, a koren je čvor A.
- Koren ima tri podstabla čiji su koreni B, C i D, itd.
- Definicija stabla je očigledno rekurzivna, jer se stablo definiše preko sebe samog, a u krajnjem slučaju stablo može da se svede samo na koren.
- Zbog toga se ovakav tip stabala naziva korenim stablom (rooted tree), za razliku od slobodnog stabla koje se definiše kao posebna vrsta grafa.

# GRANE, ULAZNI I IZLAZNI STEPEN

- Za **grane** koje spajaju čvorove stabla se pretpostavlja usmerenje u pravcu od korena ka podstablama, čak i kada to nije eksplicitno naznačeno.
- Tada je moguće razlikovati ulazni i izlazni stepen čvora:
  - **Ulazni stepen** je broj grana koji ulaze u čvor
  - **Izlazni stepen** je broj grana koje izlaze iz čvora.
- Ulazni stepen može da ima samo dve vrednosti:
  - 0 za koren i 1 za sve ostale čvorove.
- Ova osobina koja izdvaja koren od ostalih čvorova.
- Sumirajući ulazne stepene svih čvorova može da se zaključi da stablo sa  $n$  čvorova ima  $n - 1$  grana.
- Izlazni stepen čvora je jednak broju njegovih podstabala i on može biti različit za svaki čvor.
- Kada se kaže stepen čvora, obično se misli na izlazni stepen.

# STEPEN STABLA, LISTOVI

- Ako je  $m$  maksimalni izlazni stepen nekog čvora, za stablo se kaže da ima stepen  $m$  ili da je  $m$ -rno stablo.
- Stepenn stabla sa prethodne slike je određen najvećim stepenom grananja nekog čvora, a to je 3 za čvorove A i D.
- Za odnose između čvorova u stablu se uobičajeno koristi mešavina terminologije iz genealogije i botanike.
- Čvorovi sa nultim izlaznim stepenom nazivaju **listovima** ili **terminalnim čvorovima** (čvorovi J, F, C, G, H, K i L) sa prethodne slike, a ostali čvorovi stabla sa nenultim izlaznim stepenom su **neterminalni čvorovi** ili **čvorovi grananja**.
- Ako se uoči neki čvor od kojeg se dalje granaju podstabla, onda se on smatra **ocem** čvorova koji predstavljaju korene tih podstabala, a oni njegovim **sinovima** (na primer, čvorovi G, H i I su sinovi čvora D).

# PUT, DUŽINA PUTA, POTOMCI I PRECI

- Svaki sin ima samo jednog oca. Sinovi istog oca se nazivaju **braćom**
- (na primer, čvorovi  $E$  i  $F$ ).
- **Putem**  $(n_1, .., n_k)$  se naziva skup čvorova takav da je čvor  $n_i$  otac čvora  $n_{i+1}$  za  $1 \leq i < k$ .
- **Dužina puta** je za jedan manja od broja čvorova na putu i predstavlja broj grana na njemu. Put  $(A, D, I, K)$  je dužine 3.
- U stablu postoji samo po jedan put između korena i svakog drugog čvora.
- **Preci** nekog čvora su svi čvorovi na putu od korena do tog čvora.
- **Potomci** nekog čvora su svi čvorovi koji se nalaze u njegovim podstablama.
- Ako je čvor  $X$  predak čvora  $Y$ , onda je  $Y$  potomak od  $X$ . Koren je jedini čvor koji nema predaka, a listovi nemaju potomaka.

# NIVOI, DUBINA I ŠUMA

- Stablo je višenivoska struktura kod koje se **nivoom** čvora smatra broj grana na putu od korena do njega.
- Koren je obavezno na nivou 0, a zatim svaki sin na nivou za 1 većem od oca.
- **Visina** ili **dubina** stabla se određuje kao maksimalna vrednost nivoa listova u stablu i to je najveća udaljenost nekog lista u stablu od korena.
- Stablo na predhodnoj slici ima visinu 3.
- **Šuma** je skup nepovezanih stabala.
- Šuma se može dobiti od stabla uklanjanjem korena i grana koje izlaze iz njega.
- Od šume se može dobiti stablo uvođenjem novog korena i njegovim spajanjem sa korenima stabala iz šume.



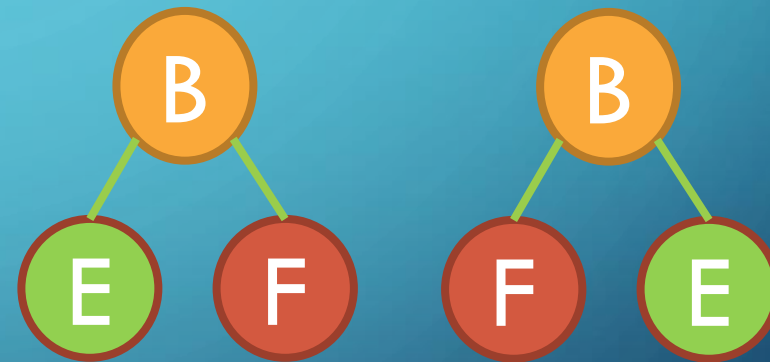
# SLIČNA I EKVIVALENTNA STABLA

- Za dva stabla se kaže da su **slična** ako imaju istu strukturu, što znači isti broj čvorova i grana, kao i istu topologiju.
- Sličnost formalno može da se definiše rekurzivno.
- Stabla su slična ako su oba prazna ili oba neprazna, a njihova leva i desna podstabla su respektivno slična.
- Za dva stabla se kaže da su **ekvivalentna** ako su slična, a odgovarajući čvorovi imaju isti sadržaj.
- **Uređeno stablo** (*ordered tree*) je stablo u kojem podstabla svakog čvora čine uređen skup (inače je neuređeno).
- Poredak u grafčkoj predstavi sleva udesno je bitan i implicira uređenost (prvi sin, drugi sin, ... ).



# PRIMER

- Stabla na slici su dva različita uređena stabla, dok bi kao neuređena bila ekvivalentna.
- Ako su  $X$  i  $Y$  braca i  $X$  je levo od  $Y$ , onda su i svi potomci od  $X$  levo od svih potomaka od  $Y$ .



# POZICIONA STABLA

- **Poziciona** stabla stepena  $m$  su ona stabla kod kojih je svakom podstablu nekog čvora pridružena jedinstvena pozicija označena rednim brojem od 1 do  $m$ .
- Ukoliko neki čvor ima manje od  $m$  sinova ( $n < m$ ) ne mora da znači da se oni uzastopno nalaze na pozicijama od 1 do  $n$ .
- Za nedostajuća stabla odgovarajuće pozicije su prazne.

# INTERNA DUŽINA STABLA

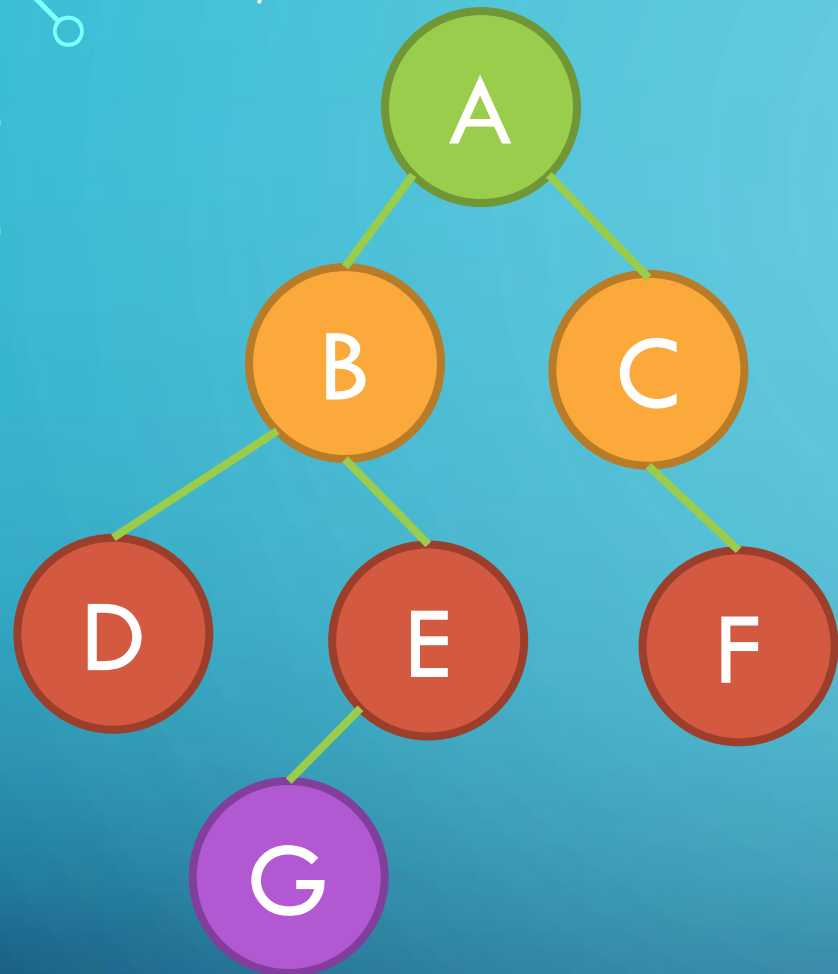
- ***Interna dužina puta*** stabla se definiše kao zbir dužina puteva od korena do svih čvorova u stablu kao

$$PI = \sum i n_i$$

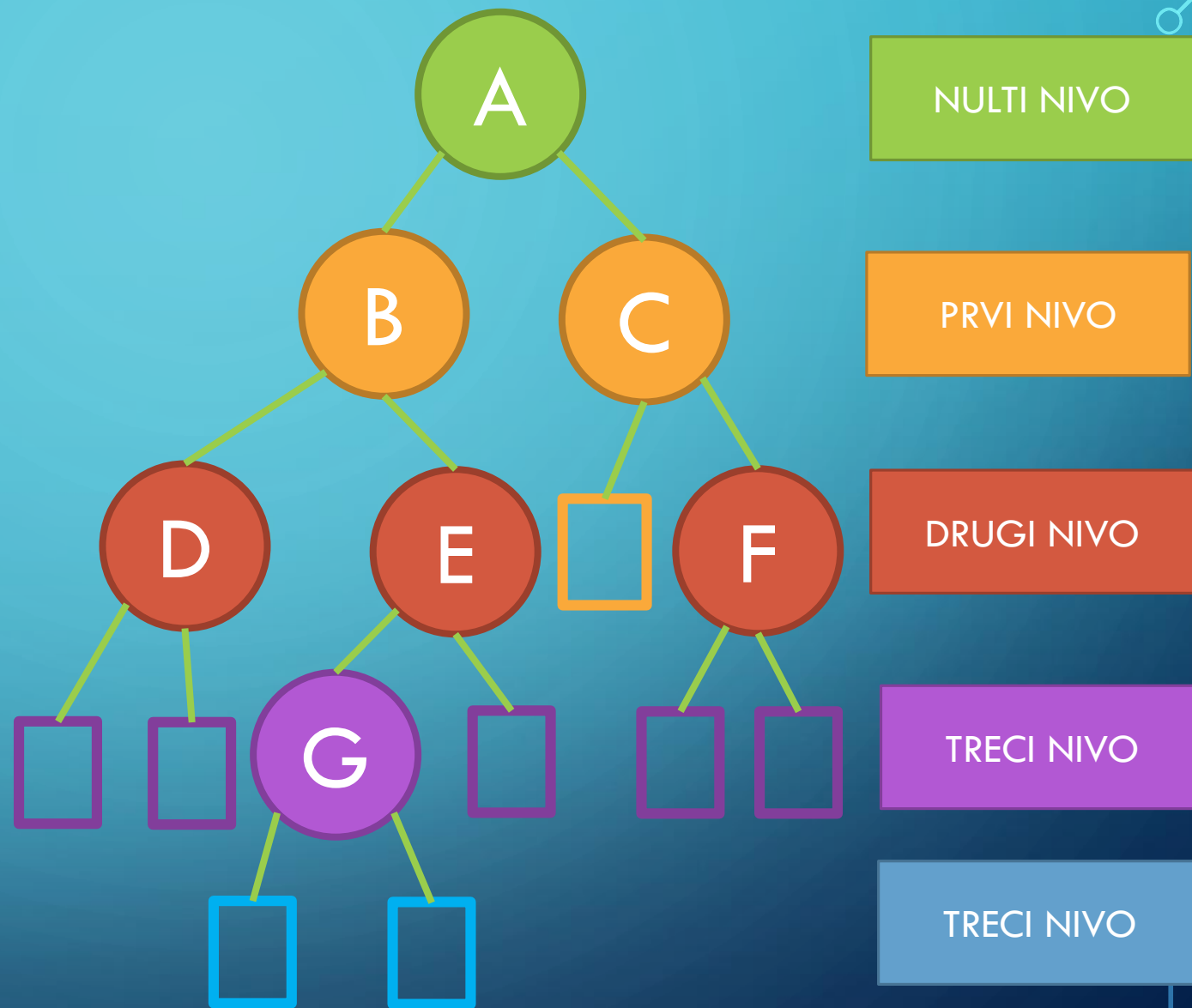
- gde je  $n_i$  broj čvorova stabla na nivou  $i$ .
- Za stablo na sledećoj slici interna dužina se izračunava kao

$$PI = 0 * 1 + 2 * 1 + 3 * 2 + 1 * 3 = 11$$

a) Primer stabla



b) Primer proširenog stabla



# EKSERNA DUŽINA PUTA

- Često se definiše i **eksterna dužina puta** stabla.
- Stablo se dopuni posebnim, **eksternim** čvorovima na svakom onom mestu gde nedostaju podstabla, tako da u ovako proširenom stablu svi čvorovi imaju isti, maksimalni stepen grananja.
- Eksterna dužina puta se tada definiše kao zbir puteva od korena do svih ekstrnih čvorova kao  $PE = \sum i e_i$  gde je  $e_i$  broj ekstrnih čvorova na nivou  $i$
- Za stablo sa predhodne slike a), prošireno stablo je prikazano na slici b) gde su eksterni čvorovi označeni kvadratićima, a eksterna dužina puta je

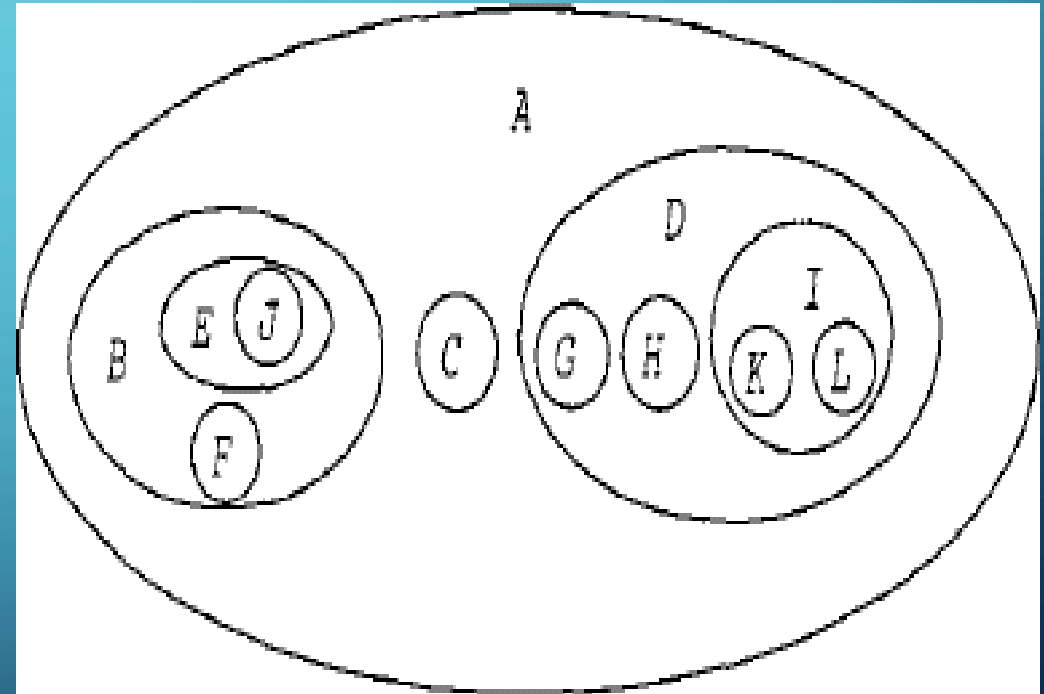
$$PE = 1 * 2 + 5 * 3 + 2 * 4 = 25$$

# GRAFIČKI PRIKAZ

- Grafički se stablo najčešće predstavlja kao graf sa korenom na vrhu, njegovim sinovima ispod njega i tako sve do listova na dnu (za razliku od stabala u prirodi)
- Ova predstava najprirodnije odgovara terminu "stablo". Pored toga, može da se koristi i predstavlja preko zagrada.
- Prvo se navodi koren, a onda, u zagradi, njegova podstabla, koja se, zatim, na isti način u ugnježenim zagradaama predstavljaju preko svojih podstabala.
- Redosled pojavljivanja zagrada može da određuje i poredak sinova u uređenim stablima. Stablo sa slajda 7 se može predstaviti ovom analitičkom notacijom na sledeći način:
- $(A (B(E(J)) (F)) (C) (D (G) (H) (J(K)(L))))$ .

# VENN-OVI DIJAGRAMI

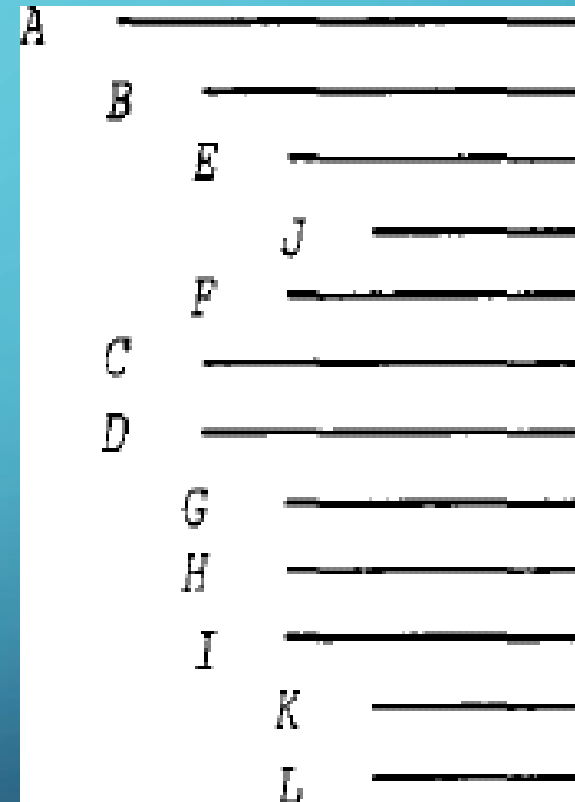
- Struktura stabla se može predstaviti i preko ugnježdenih skupova (Venn-ovi dijagrami), gde je svaki par skupova ili nepreklapajući ili sadrži jedan drugi





# GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE STABLA PREKO IDENTACIJE

- Postoji i identirana predstava, gde su čvorovi na istom nivou predstavljeni istim nivoom identacije (slično glavama i poglavljima u sadržaju knjige)

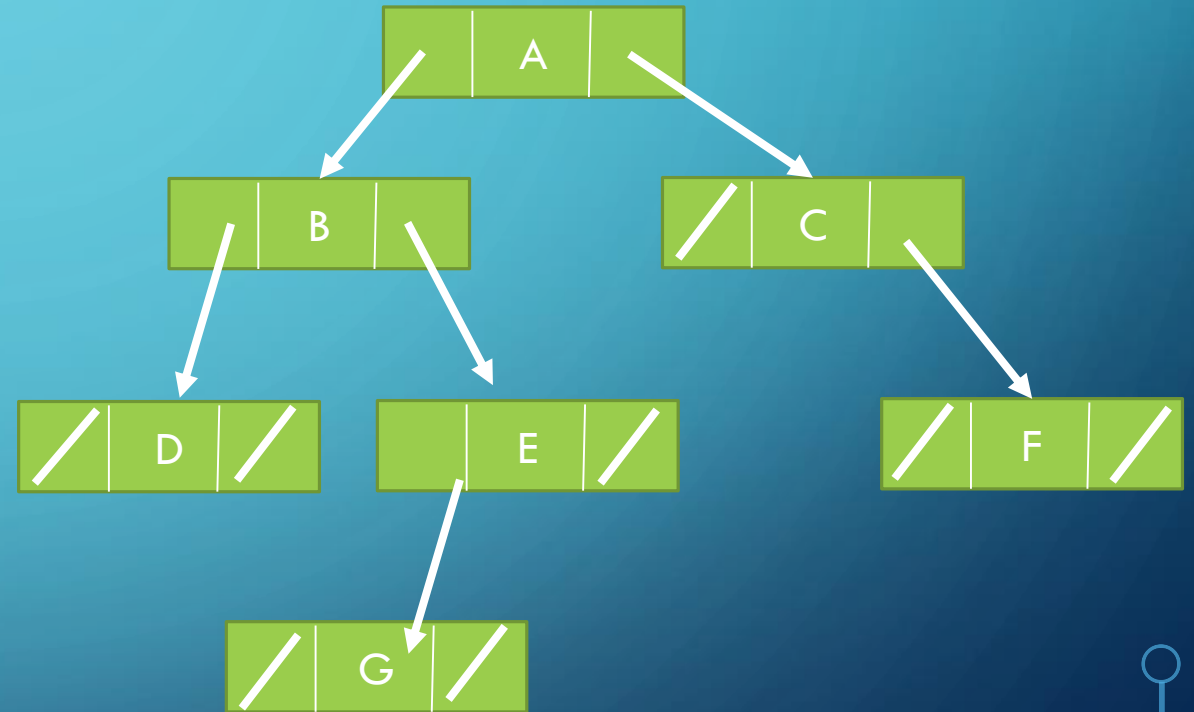


# MEMORIJSKA REPREZENTACIJA STABLA

- Za predstavljanje stabala u memoriji se najčešće koristi ulančana reprezentacija.
- U tom načinu, čvor se predstavlja elementom koji, pored informacionog dela (sadržaja), ima i pokazivače na sinove.
- Broj pokazivača može biti promenljiv, u zavisnosti od broja sinova.
- Mnogo pogodnije je, zbog alokacije i dealokacije prostora, da broj pokazivača po čvoru bude fiksni i jednak stepenu stabla, da se iniciraju samo pokazivači na postojeća podstabla, dok su ostali prazni.

# ULANČANA REPREZENTACIJA

- U ovom slučaju se dosta gubi na prostoru jer obično ima mnogo praznih pokazivača, pogotovo što listovi sadrže samo prazne pokazivače.



# ULANČANA REPREZENTACIJA

- Da bi se uštedelo, ponekad se usvaja drugačija struktura listova, samo sa sadržajem i bez pokazivača.
- Ulančana reprezentacija sa dinamičkom alokacijom čvorova je veoma fleksibilna jer olakšava održavanje stabla kod operacija ubacivanja i brisanja čvorova, pa je pogodna za stabla proizvoljne veličine i nepredvidljive topologije.
- Ponekad se, pored pokazivača na sinove, u čvoru nalazi i pokazivač na oca, kada je potrebno da se omogući prolazak od listova ka korenu.

# SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA

- S obzirom da svaki čvor sem korena ima samo jednog oca, stablo sa  $n$  čvorova se najprostije može predstaviti vektorom  $V[1:n]$  tako da svakom čvoru odgovara jedan element koji sadrži indeks oca toga čvora

	A	B	C	D	E	F	G
Vektor	0	1	1	2	2	3	5

# SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA

- Vrednost prvog elementa koji odgovara korenu je 0
- Grane stabla su date sa  $(V[i], i)$  za  $1 < i \leq n$ .
- Ova predstava zahteva najmanje prostora i veoma je pogodna za algoritme koji traže put od čvora ka korenu.
- Međutim, ona je vrlo nepogodna za traženje puta od korena ka čvorovima, a to je veoma česta operacija.
- Pored toga, poredak čvorova nije dobro definisan.

# SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA STABLA

- U jezicima koji nemaju pokazivače stablo može da se predstavi i vektorom u kojem svakom čvoru odgovara jedan element vektora,

ČVOR	ELEMENT VEKTORA		
R. BR	SADRŽAJ	Levi potomak	Desni potomak
1	A	2	3
2	B	4	5
3	C	0	6
4	D	0	0
5	E	7	0
6	F	0	0
7	G	0	0



# SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA STABLA

- Svaki element, pored korisnog sadržaja, umesto pokazivača na čvorove sinova, sadrži indekse elemenata koji odgovaraju sinovima datog čvora.
- Prazni pokazivači se označavaju vrednošću 0.
- Ovde, takode, element vektora mora da sadrži broj indeksa koji odgovara stepenu stabla.

# SEKVENCIJALNA REPREZENTACIJA STABLA

- Treća, najvažnija sekvencijalna reprezentacija, takođe, koristi vektor  $V[1:n]$  za smeštanje čvorova stabla.
- Na prvo mesto se smešta koren, a zatim njegovi sinovi po njihovom pozicionom poretku, tako što se za nedostajuća podstabla ostave prazna mesta.
- Zatim se nižu čvorovi iz drugog nivoa i tako redom.
- Ova predstava ima prednost što nisu potrebni pokazivači, jer se sinovi jednog oca mogu naći na tačno definisanim pozicijama u vektoru, pa je omogućen prolazak puta u oba smera(od korena i ka korenu).
- Za stablo stepena  $m$  sa  $n$  čvorova otac čvora  $k$  ima indeks  $\lfloor (k+m-2)/m \rfloor$ 
  - a sinovi čvora  $k$  imaju indekse
    - $m(k-1) + 2, m(k-1) + 3, \dots, mk + 1$

# PRIMER



0-NIVO

1-NIVO

2-NIVO

3-NIVO

$k=2$   $m=2$  (cvor B)

$[(k+m-2)/m]=[(2+2-2)/2]=1$  (otac cvora 2 (B) je cvor 1 (A) )

$k=5$

$[(5+2-2)/2]=[(5)/2]=2$  (otac cvora (5) E je cvor (2) B)

$k=10$

$[(10+2-2)/2]=[(10)/2]=5$  (otac cvora (10) F je cvor (5) E)

Sinovi čvora 7 F se nalaze na pozicijama

$m(k-1) + 2, m(k-1) + 3, \dots, mk + 1$

$2(7-1)+2=14, 2*7+1=15$  (to su poslednja dva prazna čvora)

# TEST PITANJA

1. Šta su to nelinearne strukture podataka i kakve su relacije na kojima su zasnovani njihovi objekti?
2. Dati definiciju stabla. Kada koristimo strukturu stabla? navedi primer stabla svoje sire porodice. Opiste vase stablo.
3. Koji ulazni a koji izlazni stepen cvorova koje ste dali u primeru.
4. U kakvoj su vezi ulazni stepen i broj grana stabla i koliko iznose u stablu  $T$  sa  $n$  cvorova?
5. Napisati put od korena do lista na najvećem nivou u stablu koje ste dali kao primer. Koliko je dužina tog puta

# TEST PITANJA

6. Šta je šuma stabla? Kako bi izgledala šuma stabla koje ste naveli kao preimer
7. Napraviti stablo koje slično vašem početnom stablu ali mu je sadržaj označen redom slovima abecede.
8. Koja je interna ako eksterna dužina puta dobijenog stabla
9. Prestaviti dobijeno stablo grafički pomoću zagrada i venovim dijagramom
10. Predstaviti dobijeno stablo svim mogućim ulančanim i sekvencijalnim reprezentacijama
11. Ako je stablo stepena 3 na kojoj se poziciji nalazi otac cvora koji se nalazi na poziciji 10 sekvencijalne reprezentacije stabla u obliku niza i na kojim pozicijama se nalaze braća ovog čvora