
Algebra Examenskurs Übungsblatt 5

Thema: Körpertheorie I (§3.1 – §3.3)

1 Aufwärmübungen

Aufgabe 1.1. Zeigen Sie, dass $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ algebraisch über \mathbb{Q} ist. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über \mathbb{Q} .

Aufgabe 1.2. (a) Zeigen Sie, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.

(b) Zeigen Sie, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, i] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + i]$, wobei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$ ist.

2 Aufgaben

Aufgabe 2.1 (F16-T1-A5). Für eine primitive fünfte Einheitswurzel in \mathbb{C} gilt die Formel

$$\zeta_5 := e^{\frac{2\pi i}{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}};$$

diese Formel kann im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha := \sqrt{\frac{\sqrt{5}+5}{8}}$ über \mathbb{Q} .

(b) Zeigen Sie: $i \notin \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

Aufgabe 2.2 (F11-T3-A4). Sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \rightarrow L$ ein K -Endomorphismus von L , also $\sigma|_K = id_K$. Beweisen Sie, dass σ ein K -Automorphismus von L ist.

Viel Erfolg!