Yigeng Zhao
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg

WiSe 2016/17
02.11.2016

Algebra Examenskurs Übungsblatt 2

Thema: Gruppentheorie II (§1.3 – §1.6)

1 Aufwärmübungen

Aufgabe 1.1. Bestimmen Sie alle ganzzahligen Lösungen des folgenden Systems:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Aufgabe 1.2. Was ist die größt mögliche Ordnung einer Permutation in der symmetrischen Gruppe S_8?

Aufgabe 1.3. Bestimmen Sie alle 2- und 3-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_3.

2 Aufgaben

Aufgabe 2.1 (F16-T3-A3)**.** Sei p eine Primzahl, die die Ordnung der endlichen Gruppe G teilt. Weiter sei P eine zyklische p-Sylowgruppe von G. Man zeige:

a) P enthält genau eine Untergruppe der Ordnung p.

b) Es gelte $|P \cap x^{-1}Px| > 1$ für alle $x \in G$. Man zeige, dass G einen Normalteiler N hat mit $|N| = p^e$ mit $e \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.2 (F16-T2-A1)**.** a) Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Die Menge

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}_p) \mid a, b \in \mathbb{F}_p, a \neq 0 \right\}$$

ist eine Untergruppe der $GL_2(\mathbb{F}_p)$. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

b) Sei nun G eine beliebige Gruppe der Ordnung $p(p-1)$. Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe H von G der Ordnung p gibt. Zeigen Sie weiter, dass G genau dann auflösbar ist, wenn G/H auflösbar ist.

c) Sei $C := (\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) \times A_5$ das direkte Produkt der zyklischen Gruppe der Ordnung 61 und der alternierenden Gruppe A_5. Ist C auflösbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Viel Erfolg!