Yigeng Zhao
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg

WiSe 2016/17
30.11.2016

Algebra Examenskurs Übungsblatt 3

Thema: Ringtheorie I (§2.1 – §2.3) und Lineare Algebra

1 Aufwärmübungen

Aufgabe 1.1. Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Was ist das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ von A?

(b) Finden Sie eine Basis für diese Eigenraum, für jeden Eigenwert von A, .

(c) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 1.2. Sei $\mathbb{Z}[x]$ der Polynomring und sei I ein Ideal I von 7 und $x - 3$ erzeugt.

(a) Zeigen Sie, für jedes $r \in \mathbb{Z}[x]$, gibt es eine natürliche Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq 6$, sodass $r - a \in I$.

(b) Finden Sie dieses α für $r = x^{250} + 15x^{14} + x^2 + 5$.

2 Aufgaben

Aufgabe 2.1 (H16-T3-A4)**.** In einem assoziativen Ring R mit Einselement gelte fü jedes Element $x \in R$ entweder $x^2 = 1$ oder $x^n = 0$ füe ein $n \geq 1$.

(a) Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe von R kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass fü jedes Element $x \in R$ entweder x oder $1 - x$ eine Einheit ist.

(c) Beweisen Sie, dass R ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 2.2 (F16-T2-A2)**.** Sei

$$R = \mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, i^2 = -1,$$

der Ring der ganzen Gaußschen Zahlen. Sei

$$I := \mathbb{Z} \cdot 25 + \mathbb{Z}(7 + i) = \{25x + y(7 + i) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

Die Menge I ist ein Ideal in R.

(a) Zeigen Sie, dass $\phi : \mathbb{Z} \to R/I, a \mapsto a + I$, surjektiv ist und bestimmen Sie den Kern von ϕ.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $(R/I)^\times$ der Einheiten von R/I zyklisch von der Ordnung 20 ist.

(c) Wie viele verschiedene Erzeuger von $(R/I)^\times$ gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

Viel Erfolg!