1 La cohomologie naïve

Soit K un corps de caractéristique 0, complet pour une valeur non-archimédienne, $\mathcal{V}$ son anneau des entiers, k son corps résiduel, on le suppose parfait de caractéristique $p > 0$. Soit $D(0,1)^n = M(K\langle X_1, \dots X_n\rangle)$ le polydisque unité (fermé) associé à l'algèbre affinoide $K\langle \underline{X}\rangle$.

Soit X un schéma lisse sur k. Si on veut établir une cohomologie analogue à de Rham dans le cas p-adique, la chose naïve à faire est la suivante: similaire à la cohomologie rigide, on choisit und immersion fermée $X \hookrightarrow P_k$ où P est un $\mathcal{V}$-schéma, mais **on renonce à choisir une immersion ouverte avant** $X \to Y$. Si $]X[$ est le tube dépendent de P, on définit

$$\mathrm{H}^i_{\text{naïve}}(X/K) = \mathbb{H}^i(]X[_P, \mathrm{sp}_* \Omega^\bullet_{]X[}).$$

Bien sûr, si X est propre cela correspond à la cohomologie rigide. Si X est propre et lisse, la cohomologie naïve conserve donc les bonnes propriétés de la cohomlogie cristalline. Apparemment, la perte de lissitude n'est pas un trop grand problème – contrairement à la perte de propreté.

De la définition on voit par exemple que la cohomologie naïve de l'espace affine aA^n sur k est la cohomologie de deRham sur K du polydisque unité fermé $D(0,1)$. Quel est le problème ici?

Le complexe de deRham associé à l'algèbre $K\langle \underline{X}\rangle$ consiste d'espaces vectoriels de dimension infinie sur K et par conséquent la cohomologie de deRham est de dimension infinie sur K, ce qui faillit à une propriété fondamentale de cohomologie de Weil.

Berthelot à montré que l'on a toujours un morohisme naturel da la cohomologie naïve à la cohomologie cristalline (rationelle), et que c'est un isomorphisme si X est lisse. Il suit que la cohomologie cristalline n'est pas un model susceptible au cas où X n'est pas propre.

Le remède est alors de considérer les sous-algèbres surconvergentes!

2 Le complexe de deRham du disque unité

C'est le complexe de deRham à coefficients dans $K\langle \underline{X}\rangle$. Il consiste de K-espaces vectoriels de dimensin infinie. On veut voir pourqoi il donne de groupes de cohomologie qui sont des espaces vectoriel sur K de dimension infinie tandis que la dimension da la cohomologie de deRham surconvergente est finie.

Pour voir ça il faut un peu analyse fonctionelle p-adic. En bref, la raison est que l'intégration formelle conserve le rayon de convergence mais en revanche ne conserve pas la convergence au bord.

Cela fut montré en plus grande généralité par Grosse-Klönne, je y retournerai plus tard.

References

[1] Berthelot, P.: *Géométrie rigide et cohomologie des veriétés algébriques de charactéristique p.*

[2] Grosse-Klönne, E.: *DeRham cohomology of Rigid Spaces.* Mathematische Zeitschrift 247, 223–240, (2004).

[3] Grosse-Klönne, E.: *Finiteness of de Rham cohomology in rigid analysis.* Duke Mathematical Journal 113, no. 1, 57–91, (2002).

[4] Kedlaya, K.S.: *p-adic cohomology.* arXiv:math/0601507v2 [math.AG], (2008).

[5] Kedlaya, K.S.: *Topics in algebraic Geometry (rigid analytic geometry).* http://www-math.mit.edu/~kedlaya/18.727/notes.html, (2004).