Hipotez Testlerine Giriş (Hypothesis Testing)

Hipotez Testlerine Giriş

1) Hipotez Testinin Amacı Nedir?
2) Hipotez Testinde Temel Kavramlar
   - Sıfır Hipotezi (H_0) ve Alternatif Hipotez (H_1)
   - 1. ve 2. Tip Hata Kavramı
   - Test istatistiği, Kritik Bölge ve Kritik Değer
   - Testin Gücü
   - Hipotez Testinin Kurulması ve Test Edilmesi

3) Tek Populasyonda Hipotez Testleri
   - Ortalama için Hipotez Testi (μ)

(z tablosu) – populasyon varyansı bilinen
(z tablosu) – populasyon varyansı bilinmeyen fakat $n \geq 30$
(t tablosu) – populasyon " " fakat $n < 30$
***

(z tablosu) – Oran için Hipotez Testi (p)

(χ^2 tablosu) Varyans için Hipotez Testi (σ^2)

4) İki Populasyonda Hipotez Testleri
   - iki ortalamanın farkı için hipotez testi ($\mu_1 - \mu_2$)

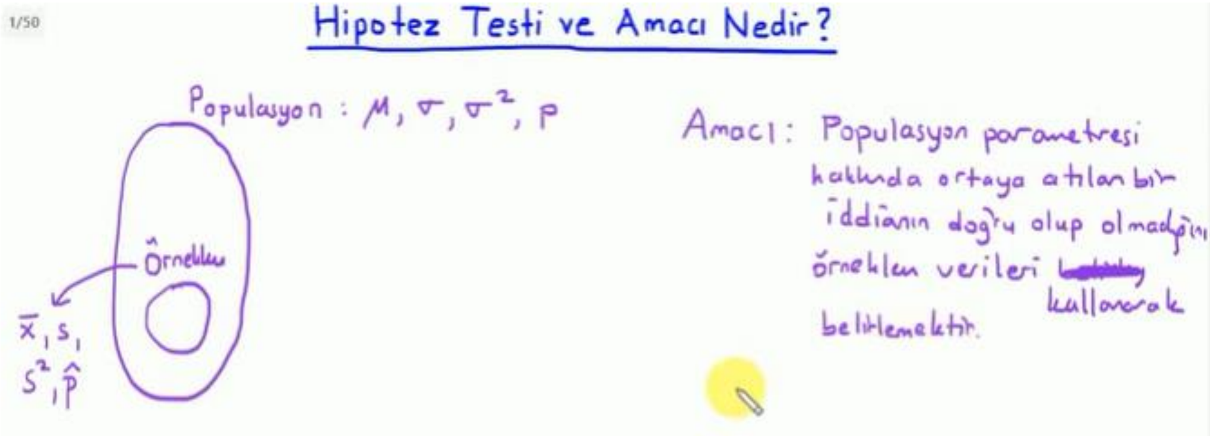
(z tablosu) – populasyon varyansları bilinen
(t tablosu) – populasyon varyansları bilinmeyen fakat eşit kabul edilen
(t tablosu) – " " " " eşit olmayan

(t tablosu) – eşleştirilmiş gözlemler için hipotez testi (μ_d)

(z tablosu) – iki oranın farkı için hipotez testi ($p_1 - p_2$)

(F tablosu) – iki varyansın oranı için hipotez testi ($\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$)

Hipotez Testi ve Amacı Nedir?



Şekilde ifade edilen popülasyon ile alakalı 4 parametreyle ilgili bir iddia söz konusuysa

(ortalama, standart sapma, varyans, oran) bu iddianın doğruluğunu hipotez testi ile kontrol edeceğiz.

Yani hipotez testinin amacı, popülasyon parametreleri ile ilgili ortaya atılmış bir iddianın doğru olup olmadığını örneklem verileri kullanarak belirlemektir.

İstatistiksel Hipotez: Popülasyon parametrelerine ilişkin olarak ileri sürülen ve geçerliliği olasılık kanunlarına göre araştırılabilen özel önermelerdir.

Örnek: Bir markaya ait akülerin ortalama ömrü 2,5 yıldan fazladır…(devamı vardır fakat şimdilik konunun anlaşılması açısından yeterlidir)

Hipotez Testi: <u>İDDİA => Hipotez üreterek => doğruluğu kontrol edilir</u>

Teorik tanımı: Örneklem istatistiklerinden yararlanarak bir hipotezin geçerli olup olmadığını ortaya koyma işlemine **hipotez testi** denir.

Sıfır Hipotezi ve Karşıt Hipotez (Null and Alternative Hypothesis)

Örneğin iddiamız(H1) "popülasyon 5'ten büyüktür" şeklindeyse yokluk hipotezimiz(H0) 5'e eşit olmalıdır. Ya da iddiamız "oran(p) %5'ten büyüktür" ise "H0: p = 5" şeklinde olmalıdır.

Not: **<u>Asla ve asla örneklem parametreleriyle hipotez oluşturulmaz.</u>**

Soruya başlarken öncelikle hipotezlerimizi kurmalıyız. Hipotez yanlış kurulursa sonuç komple yanlış olacaktır.

Hipotez testinde bir hipotezle onun karşıtı(H0 ve H1) olan hipotezden hangisinin örneklemden elde edilen sonuçla daha iyi bağdaştığı(uyduğu) araştırılmalıdır. Yani örneklemden çıkan sonuca göre H0'ı kabul veya reddedeceğiz.

H0'ın reddedilmesi demek, hipotezimizin kabul olduğu anlamına gelir.

H0 ve H1 hipotezi cümlesel olarak şu şekildedir:

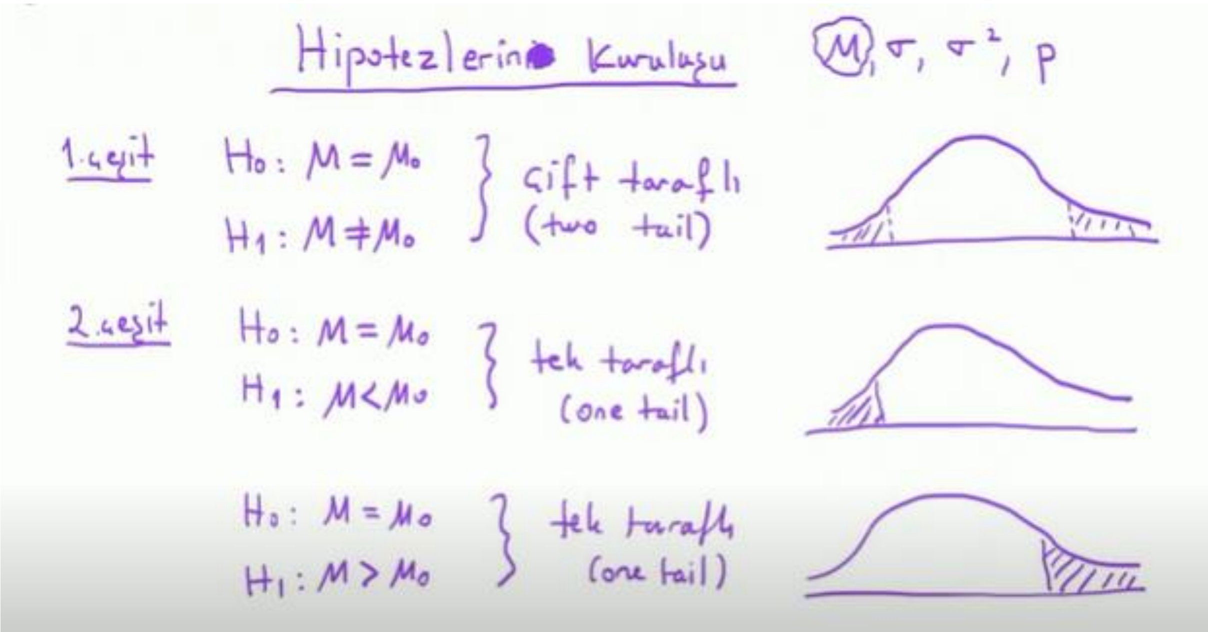
H_0: Örneklemden elde edilen değer ile popülasyonun bilinen değeri arasında fark yoktur.

H_1: Örneklemden elde edilen değer ile popülasyonun bilinen değeri arasında önemli bir fark vardır.

Bu hipotezler ile genel olarak hedeflenen H_0 hipotezini reddetmek, H_1 hipotezini kabul etmektir.

Sonraki aşamada H_0'ı reddedemiyorsak hipotezi değiştirip tekrar kurabiliriz. Fakat burada yapılan sadece H_0 kabul mü ret mi o kadarıyla yetinmektir.

Şimdi hipotez kurmaya başlayalım:



Burada µ yerine başka bir popülasyon parametresi de gelebilir.

Örnek: Bir hastalıktan ortalama iyileşme süresinin 10 günden az olduğu iddia ediliyor…(devamı vardır fakat şimdilik konunun anlaşılması açısından yeterlidir)

$$H_0: \mu = 10$$
$$H_1: \mu < 10$$

şeklinde kurulmalıdır.

Örnek: Belli bir ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu iddia ediliyor…

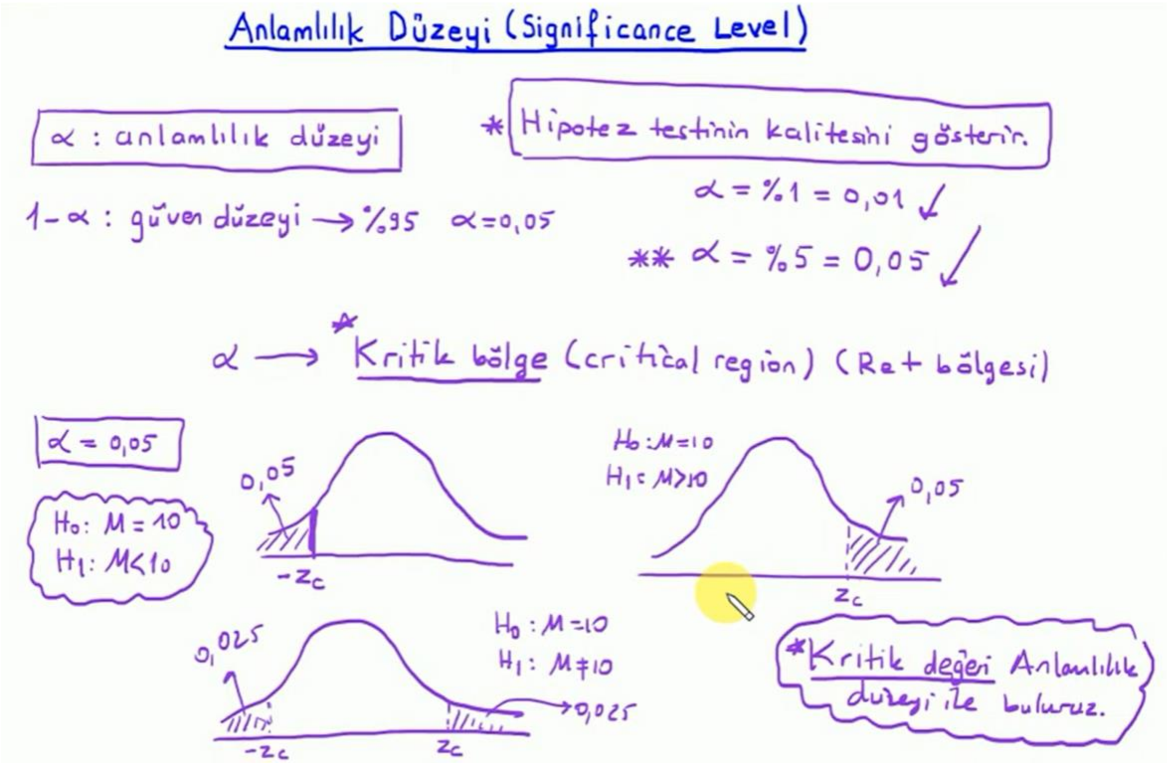
$$H_0: \mu = 5$$
$$H_1: \mu \neq 5$$

Örnek: Bir firma ürettiği çiplerde hatalı üretim oranının %5'ten fazla olduğunu iddia ediyor…

$$H_0: p = 0{,}05$$
$$H_1: p > 0{,}05$$

Hipotez Testlerinde Anlamlılık Düzeyi (Significance Level)

Anlamlılık düzeyi, hipotez testinin kalitesini gösterir.



Anlamlılık düzeyimiz %5(α=0,05) ise bu hipotezimize %95(güven düzeyi – confidence level) güvenebiliriz demektir. Yani H0 hipotezinin reddedilmesi durumunda araştırmamız %95 oranında doğrudur diyebiliriz.

Anlamlılık düzeyi(α) arttırılırsa hipotezin kalitesi düşer. Araştırmacı bunu arttırırsa hipotezini kabul ettirmek için çaba harcıyor demektir. Anlamlılık düzeyi, kritik bölge ve kritik değeri belirlemek için önemlidir.

α'mız bizim diğer yandan kritik bölgemizdir(yani H0 ret bölgemizdir). Araştırmacı bu sayıyı arttırdığında H0 ret bölgesini büyültüyor ve hipotezini kabul ettirmek için uğraşıyor demektir ki bu yanlıştır. Fakat genel olarak α=0,05'ten büyük olarak karar verildiğinde o araştırmaya önem verilmez.

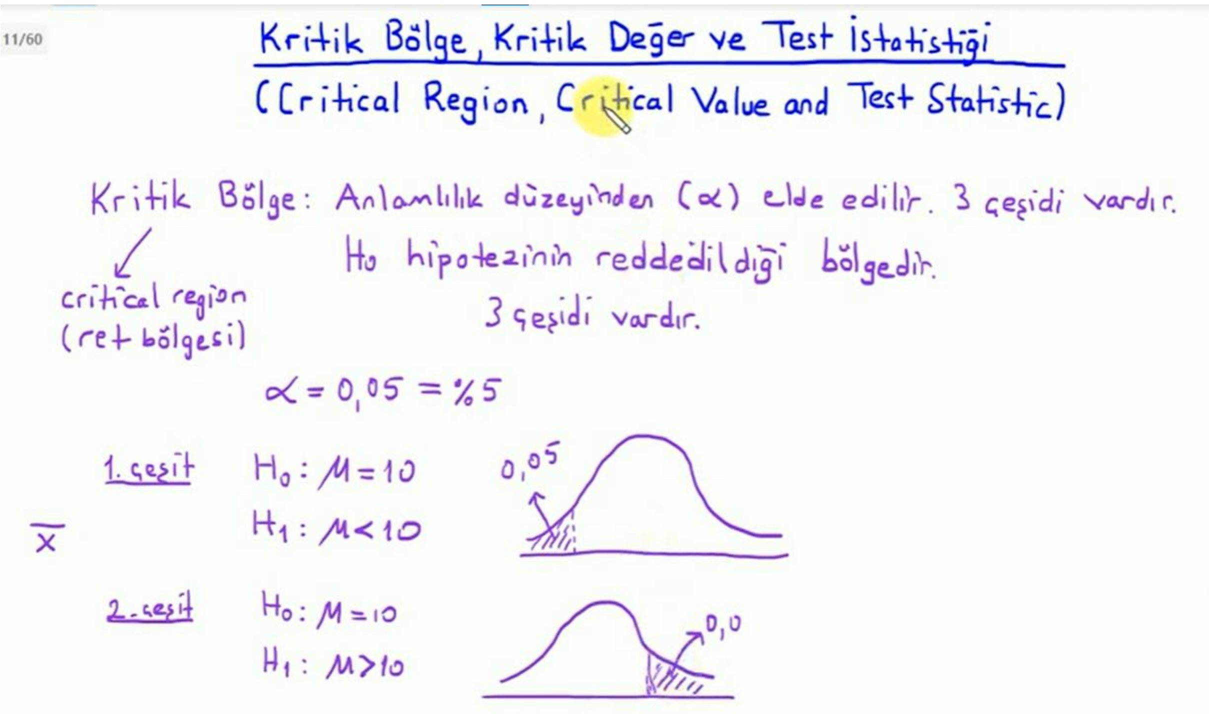
Çift yönlü hipotezde, anlamlılık düzeyi ikiye bölünür.

(Şekilde z tablosunun kullanıldığı varsayılmıştır.)

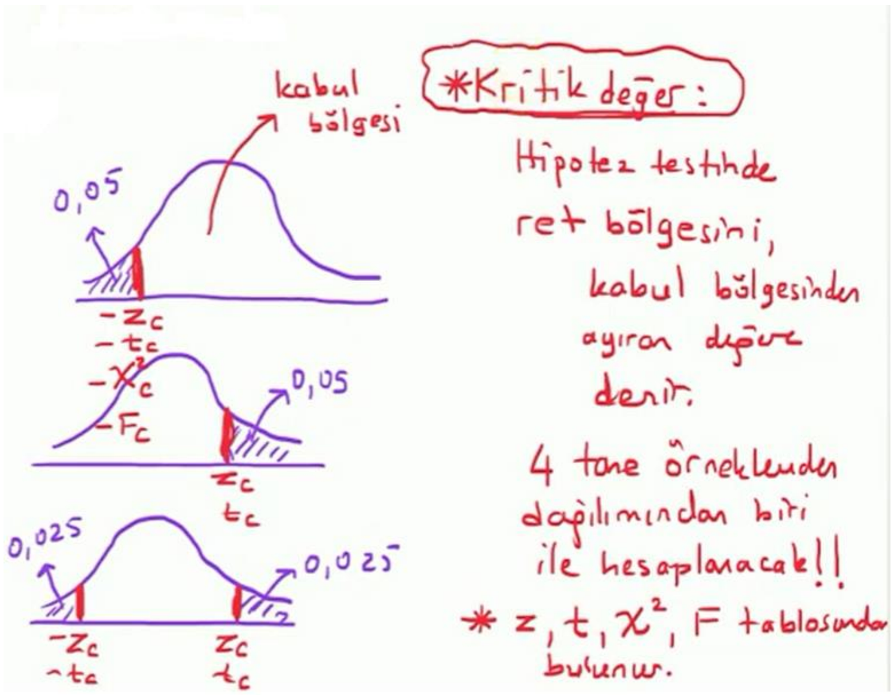
Kritik Bölge, Kritik Değer ve Test İstatistiği

(Critical Region, Critical Value and Test Statistics)

Kritik bölge, anlamlılık düzeyinin belirlenmesiyle veya soruda verilmesiyle ortaya çıkar. Eğer biz bir araştırma yapıyorsa anlamlılık düzeyini biz belirleriz; fakat bir soru çözüyorsak soruda verilecektir. İngilizcesi "**critical region**"dır. **H0 ret bölgesi(rejection region)** de denir. Kritik bölgenin elde edilmesiyle kritik değer bulunur, test istatistiği hesaplanır ve bu iki değer karşılaştırılarak hipotezin doğru olup olmadığına karar verilir. 3 çeşidi vardır:

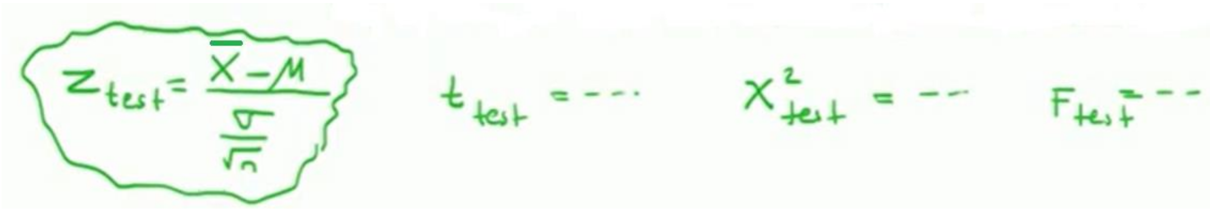


Kritik değer, hipotez testinde H0 ret bölgesini kabul bölgesinden ayıran değere denir. 4 tane örneklem dağılımından biri ile bulunacaktır. "**z, t, χ^2, F**" tablosundan bulunur. Sorudan hangisi ile bulunacağı tespit edilip o tablodan bulunmalıdır. Yani hangi örneklem dağılımını kullanacağımızı belirlemenin arkasından bulabileceğimiz bir değerdir.



Test istatistiği, hangi dağılım kullanılacağı belirlendikten sonra bulunur.

Bu 3 kavram hipotez testinin can damarıdır. Yani bunlar üzerinden hipotezin kabul edilip reddedilmesi gerçekleştirilir. "**z, t, χ^2, F"** için her birinde farklı formüle sahiptir. Hangi çeşit hipotezde hangi dağılım kullanılır ileride gösterilecektir.

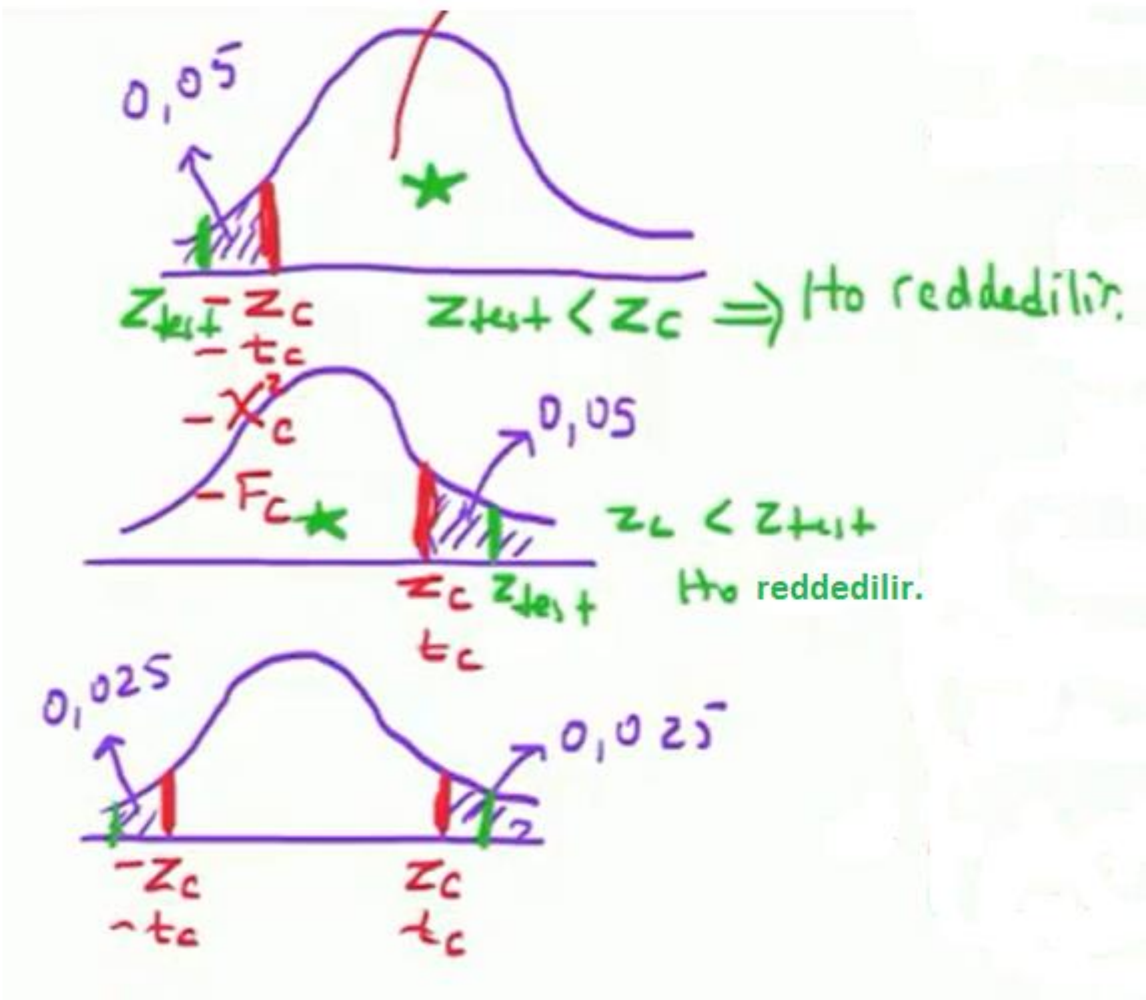


Test istatistiğimiz kritik değer ile karşılaştırılarak H0 ret bölgesinin içine düşerse araştırdığımız hipotezin kabul olduğu anlamına gelir.

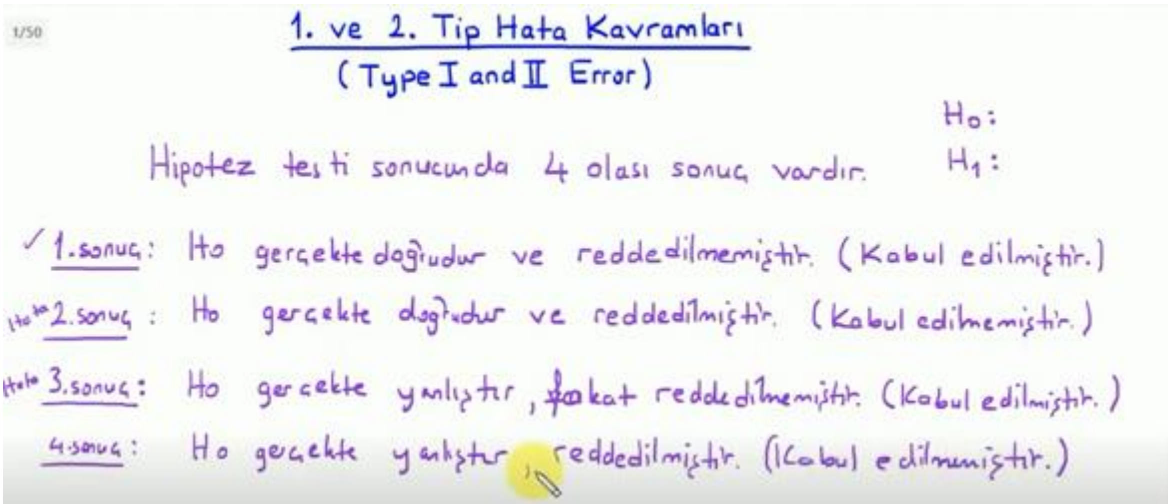
Not: H_0 kabul edilir yerine "H_0 *reddedilemez(can not to reject)*" denilmelidir. İleride nedeni açıklanacaktır.

H_0'ı reddedemiyorsak hipotezimiz hatalı, yani "en başa dön şartları değiştirerek hipotezi tekrar kur" demektir. Bizim hipotezdeki amacımız H_0'ı reddetmek, yani araştırdığımız hipotezin(H_1) doğru olmasını sağlamaktır.

Yani ortaya attığımız iddia yanlış ise hipotezimiz doğrudur diyemeyiz. Yanlış diyebilir miyiz o bilinmemektedir.



1. ve 2. Tip Hata Kavramları (Type-I and Type-II Error)



Hipotez testinde hesaplamalar sonucunda bir sonuç elde etsek de kesin doğrudur diyemeyiz. Orada 1. tip hata veya 2. tip hata meydana gelmiş olabilir.

Zaten belirlenen anlamlılık düzeyi, bizim yüzde kaç olasılıkla 1. tip hata veya 2. tip hata yaptığımız ile ilgili değerleri bize söylemektedir.

Hipotez testinde yapılan hatalar

Karar	**Doğal durum**	
	H_0 Doğru	H_0 Yanlış
H_0'ın red edilmemesi	**Doğru karar** *Olasılık* :**1 – α**	**II. Tip hata** *Olasılık* : **β**
H_0'ın reddi	**I. Tip hata** *Olasılık* : **α** (*anlamlılık düzeyi*)	**Doğru karar** *Olasılık* :**1 – β** (*testin gücü*)

14

$P(1.\ \text{Tip Hata}) = \alpha$ = anlam düzeyi

$P(2.\ \text{tip Hata}) = \beta$

Anlamlılık düzeyi, 1. tip hata olasılığıdır.

Örnek:

$H_0 : \mu = 0$, İlacın etkisi yoktur

$H_1 : \mu \neq 0$, ilaç etkilidir.

* Araştırma yapıldı bir örneklem!
* Veri ve istatistik testleri yapıldı
* Test sonucu elde edildi

$\}$ ***

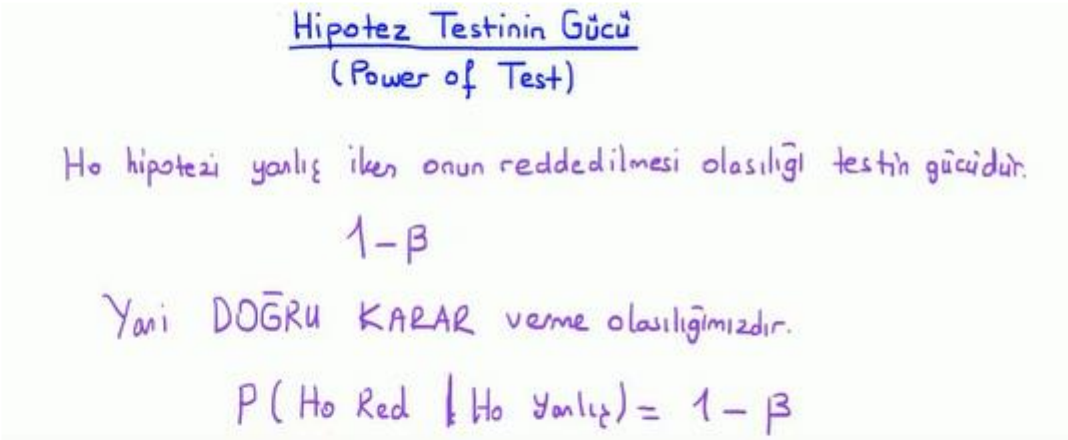
I. tip hata : Ho doğru iken reddedilir.

Yani ilaç gerçekte etkisiz iken delillere göre etkili bulundu

II. tip hata : Ho gerçekten yanlış iken bunun kabulü

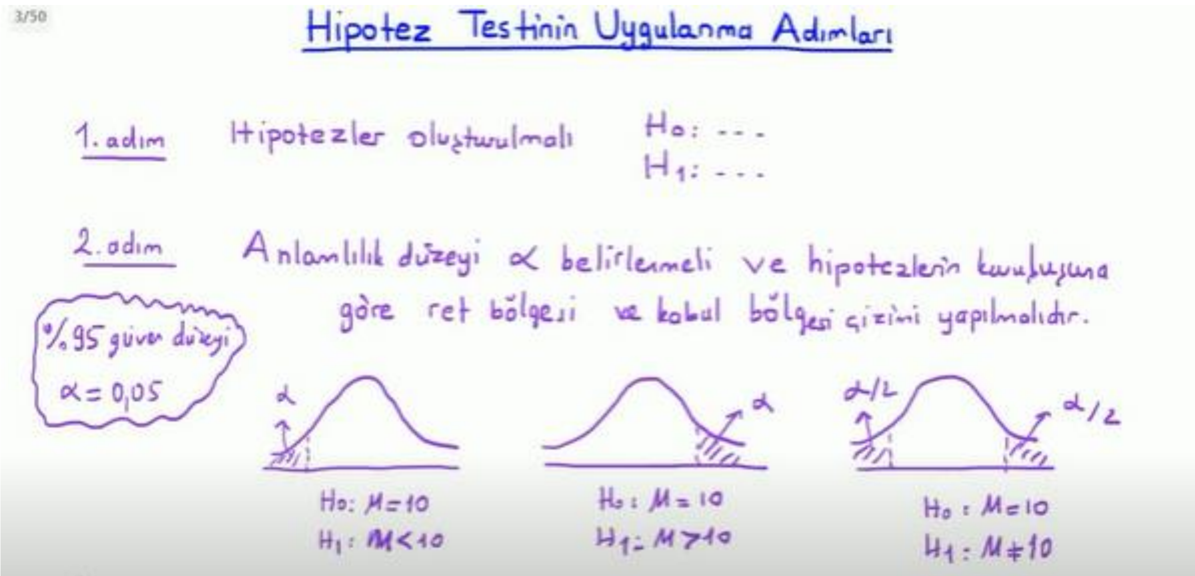
Yani ilaç gerçekten etkili iken deliller ile etkisiz bulundu.

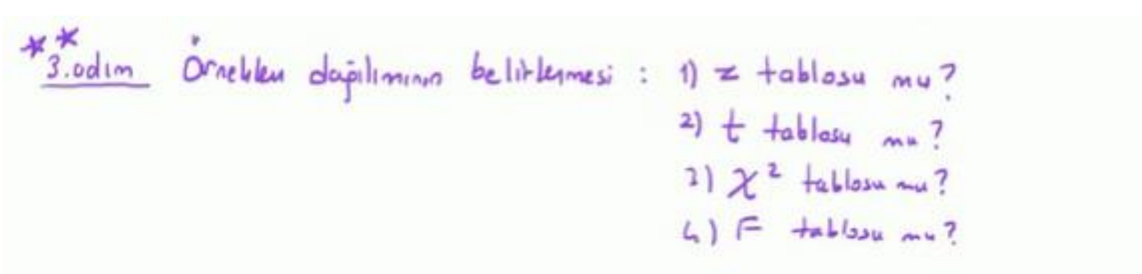
Hipotez Testinin Gücü (Power of Test)

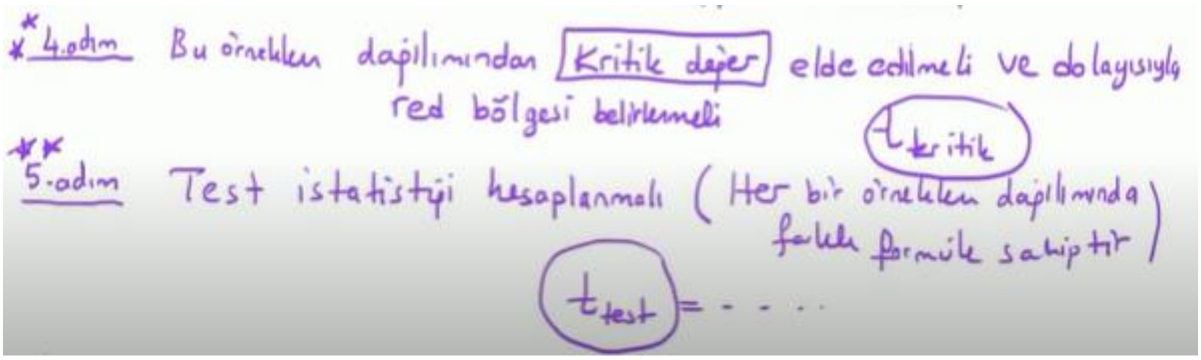


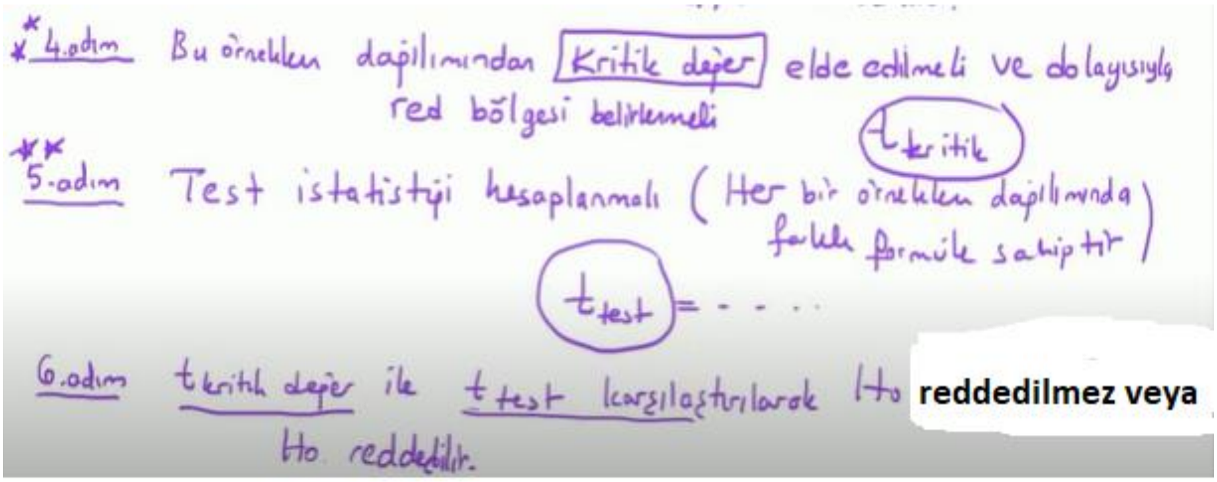
Diğer doğru karar verdiğimiz bir sonuç daha vardır. Yani H_0 gerçekte doğru iken test sonucunda H_0'ı reddedemediğimiz durumdur. Fakat bu sonuç işe yarar bir sonuç değildir. Çünkü bu bizi hipotez testini tekrar kurmaya götürür. Ancak H_0 hipotezi gerçekte yanlış iken test sonucunda onu reddetmemiz, testimizin ne kadar güçlü olduğunu yani doğru aşamalar sonucunda ortaya attığımız iddianın ne kadar etkili olduğunu gösterir.

Hipotez Testinin Uygulanma Adımları



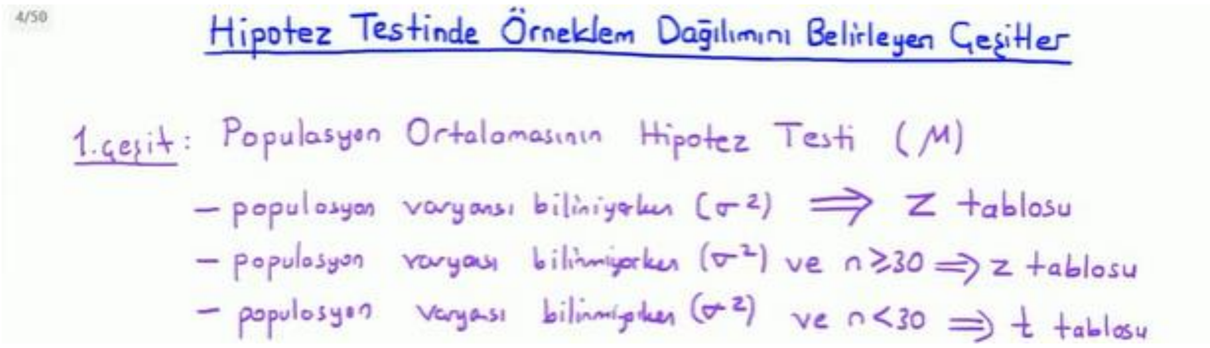


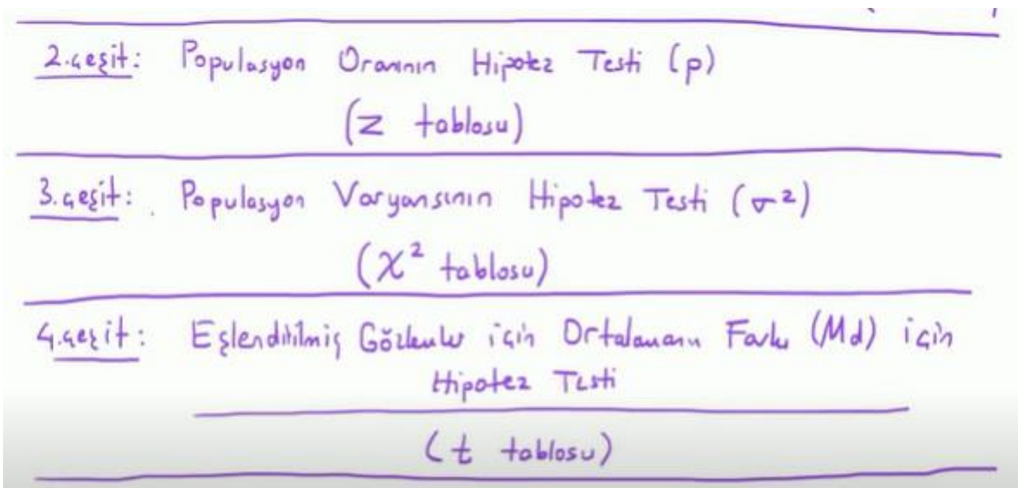




Hipotez Testinde Örneklem Dağılımını Belirleyen Çeşitler

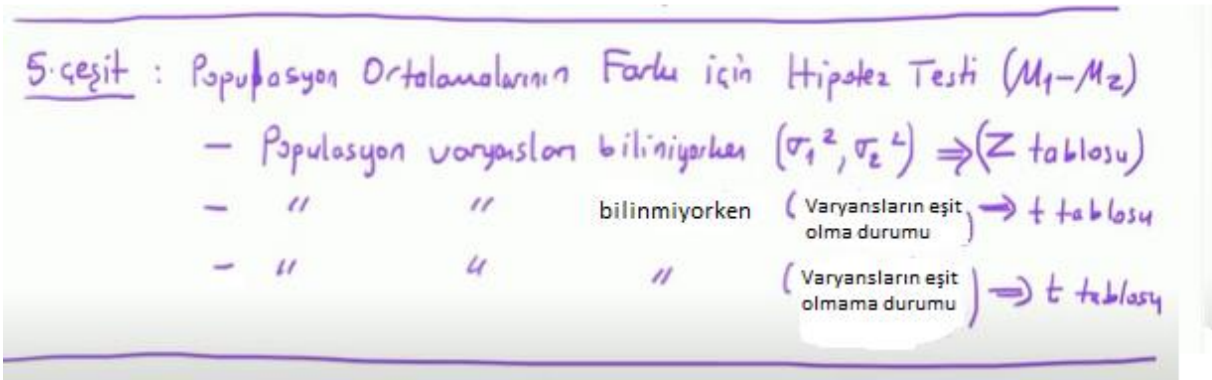
Bu çeşitler bilindiği ve sorudan iyi tespit edildiği takdirde hipotez testimiz bayağı basitleşmektedir.



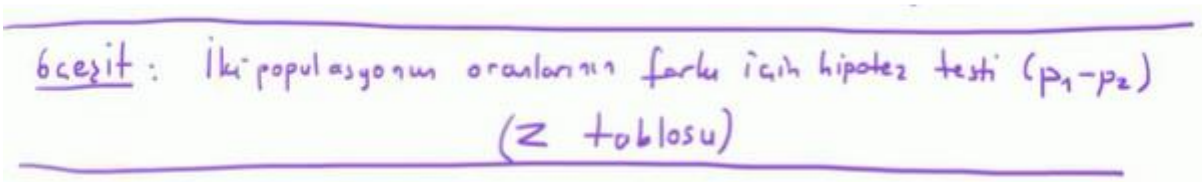


4. çeşit hipotezde genelde $n<30$ olur ve t tablosu kullanılır. Bu çeşitte z tablosunu kullanma ihtimalimiz çok çok düşüktür.

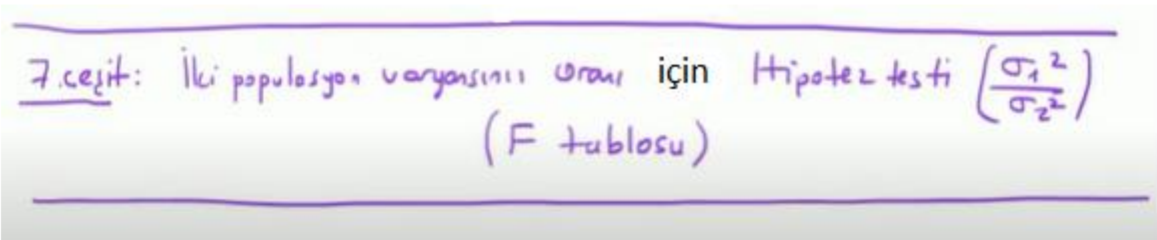
5., 6. ve 7. çeşit hipotezlerde 2 popülasyon söz konusudur.



Bu çeşitte **2 popülasyon ortalaması**,



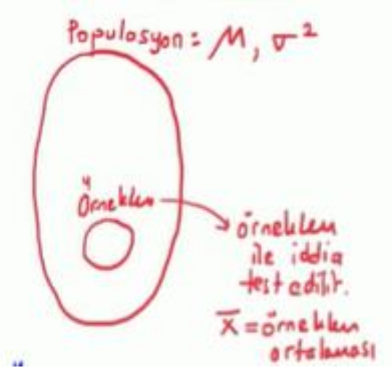
Bu çeşitte **2 popülasyon oranı** varken,



Bu çeşitte **2 popülasyon varyansı** söz konusudur.

Not: Bu çeşitlerin hepsinin alt başlığında aslında 1. tip hata ve 2. tip hata olasılıklarını hesaplama, testin gücünü hesaplama gibi konular vardır.

Popülasyon Varyansı Biliniyorken Ortalama İçin Hipotez Testi



Ör: Belirli bir hastalığın tedavisi için yeni bir tür ilaç geliştirilmiştir. Bu ilaçla tedavi edilen hastaların ortalama iyileşme süresinin 10 günden az olduğu iddia edilmektedir. Rastgele seçilen 7 hasta sözü edilen ilaçla tedavi edilmiş ve kaç günde iyileştikleri aşağıda verilmiştir.

2, 4, 11, 3, 4, 6, 8

$\sigma^2 = 4$ ve $\alpha = 0{,}01$ ise bu iddia için kararınız ne olur?

Kullanılacak Tablo : (z tablosu) z_c

① Kritik değer ⇒ z tablosundan elde edilir. $z_{kritik} = z_{tablo}$

② Test istatistiği ⇒ $z_{test} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ n = örneklem sayısı

Ek not:

---

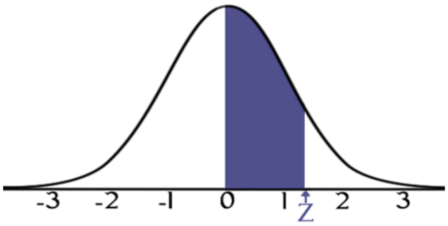
2. çeşit z tablosu vardır: **0'dan başlayan** ve **0,5'ten başlayan** tablolar(genelde bu kullanılır.)

Bu tablo standart normal dağılım grafiğinden elde edilmiştir.

Bu grafik genel olarak [-3, +3] sayı aralığındadır.

[-3.5, +3.5] aralığı da yapılabilir fakat bunların değerleri küçüktür.

1. çeşit: 0’dan başlayan



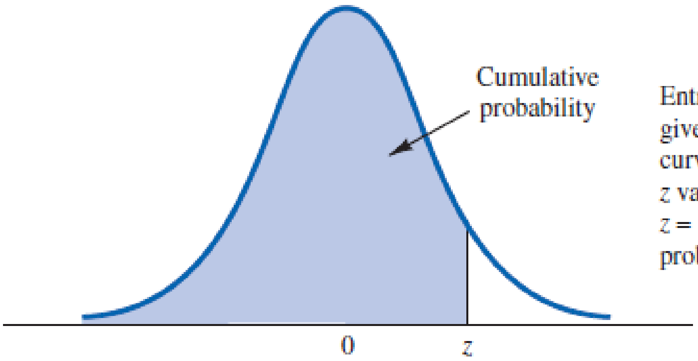
STANDARD NORMAL TABLE (Z)

Entries in the table give the area under the curve between the mean and z standard deviations above the mean. For example, for $z = 1.25$ the area under the curve between the mean (0) and z is 0.3944.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0190	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2969	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3513	0.3554	0.3577	0.3529	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998

2. çeşit: 0.5'ten başlayan

TABLE 1 CUMULATIVE PROBABILITIES FOR THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION (*Continued*)



Entries in the table give the area under the curve to the left of the z value. For example, for $z = 1.25$, the cumulative probability is .8944.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	$\boxed{.5000}$	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

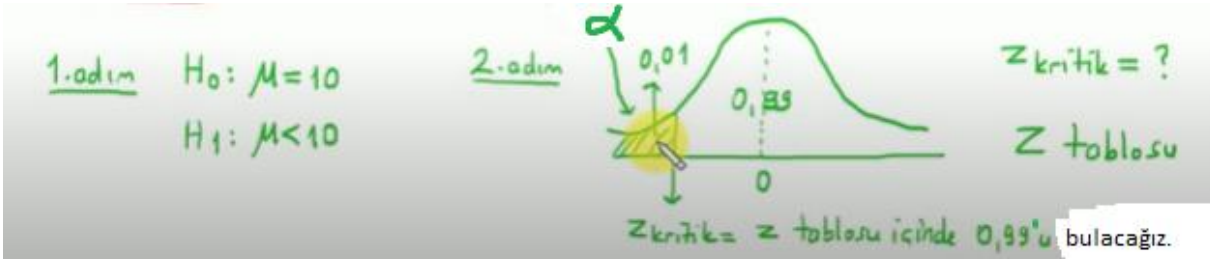
Grafiğin tam ortası 0'dır. Bu şekilde ikiye böldüğümüzde her iki tarafın değeri de 0,5'tir. Yani toplam 1'dir. Grafiğin altında kalan alan aslında bir olasılıktır.

Sorumuza dönecek olursak:

Ör: Belirli bir hastalığın tedavisi için yeni bir tür ilaç geliştirilmiştir. Bu ilaçla tedavi edilen hastaların ortalama iyileşme süresinin 10 günden az olduğu iddia edilmektedir. Rastgele seçilen 7 hasta sözü edilen ilaçla tedavi edilmiş ve kaç günde iyileştikleri aşağıda verilmiştir.

2, 4, 11, 3, 4, 6, 8

$\sigma^2 = 4$ ve $\alpha = 0,01$ ise bu iddia için kararınız ne olur?



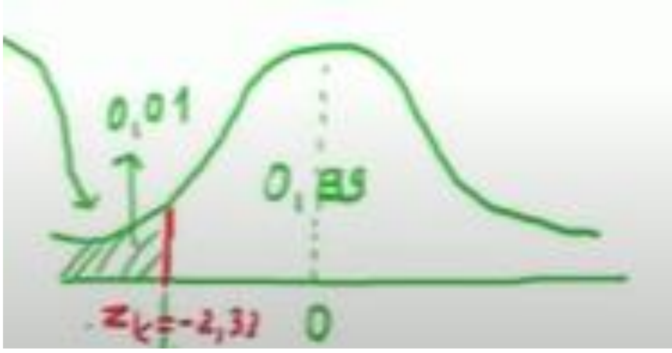
İddia 10'dan az dediği için hipotezimiz tek taraflıdır ve H_0 ret bölgesi grafikte sol tarafta olacaktır.

Şimdi z_{kritik} değerimizi bulalım. Bunun için α=0,01 old. z tablosunun **içinden** 0,99 değerini bulmalıyız.

Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

0,99 değerini bulduk(0,99'dan sonraki sayılar ihmal edilebilir, tam bulmaya gerek yok yakın bulmamız yeterli). Ona karşılık gelen **kritik değerimiz** ise (satır ve sütun toplamından) 2,33 olur. Fakat bizim H_0 ret bölgemiz sol tarafta olduğundan yani 0'dan küçük olduğundan kritik değerimiz (simetriklikten dolayı) **-2,33** olur.



z_{kritik} değerimizi bulduk. Şimdi test istatistiğimizi bulalım.

Eğer test istatistiğimiz taralı alana düşerse H_0'ı reddedeceğiz yani iddiamız doğrudur diyeceğiz. Diğer tarafa düşerse H_0'ı reddedemeyeceğiz yani iddiamız doğru değildir diyeceğiz.

Soruda örneklem ortalaması verilmediği için bize verilen 7 örneklemden kendimiz bulacağız.

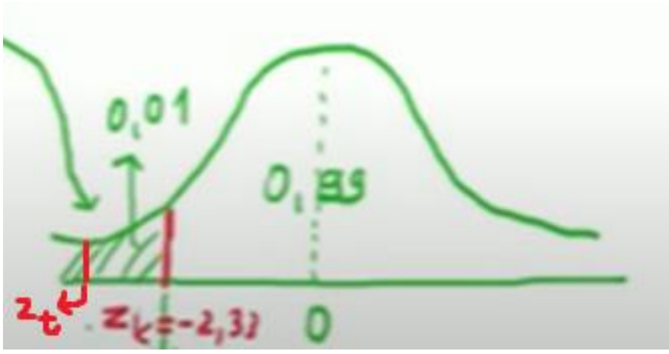
3.adım $\quad z_{test} = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ $\qquad \bar{X} = \dfrac{2+4+11+3+4+6+8}{7} = \dfrac{38}{7} = 5,43$

$\boxed{\sigma = 2}$

$$= \frac{5,43 - 10}{\frac{2}{\sqrt{7}}} \cong -6,046 \qquad z_{test} = -6,046$$

Bu formülde popülasyonun standart sapmasını istediği için popülasyon varyansının karekökü olacaktır.

O yüzden $\sigma^2 = 4$ $olduğundan$ $\sigma = \sqrt{4} = 2$ olacaktır.



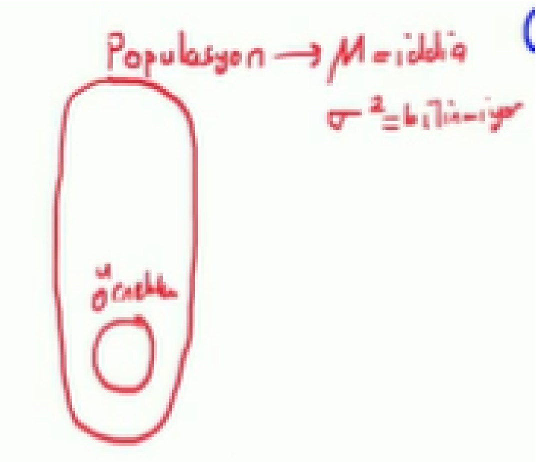
$z_{test} = -6,046 < z_{kritik} = -2,33$ $\quad$ Bu yüzden H_0'ı reddediyoruz

Görüldüğü üzere z_{test} yani test istatistiğimiz -6,046 olarak bulundu. Bu değer taralı alana düştüğü için H_0'ı reddediyoruz. Yani ortaya attığımız iddia doğrudur.

Yorum olarak ise, %99 olasılıkla/güvenilirlikle bu ilaçla tedavi edilen hastaların ortalama iyileşme süresi 10 günden azdır.

Popülasyon Varyansı Bilinmiyorken Ortalama İçin Hipotez Testi

(n $\geq$ 30 Durumu)



Kullanılacak Tablo : z tablosu

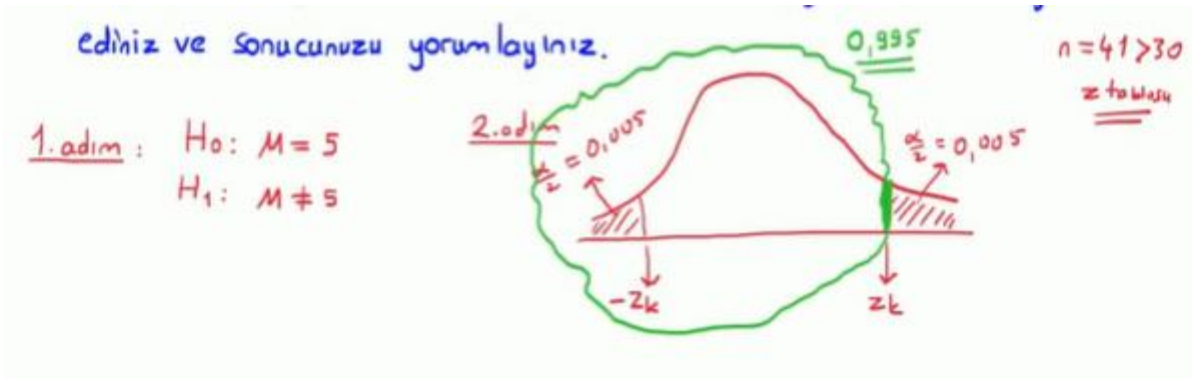
$$z_{kritik} = z_{tablo}$$

Test istatistiği $\Rightarrow$ $$z_{test} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Popülasyon varyansı bilinmediği için formülde popülasyon standart sapması yerine örneklem standart sapması kullanacağız.

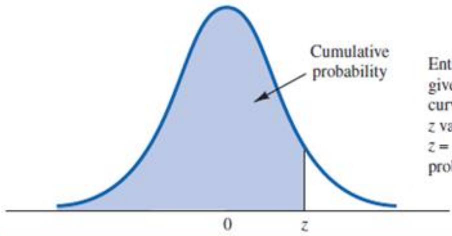
Ör: Belli bir ilaç kullanılarak diş dolgularının ortalama dayanma süresinin 5 yıldan farklı olduğu iddia edilmektedir. İlgili ilaç kullanılarak yapılan diş dolgularından rastgele olarak 41 tanesi seçilmiş ve örnek ortalaması 5,9 yıl, standart sapması 1,74 yıl olarak hesaplanmıştır. Bu bilgilere dayanarak $\alpha = 0{,}01$ anlamlılık düzeyinde bu iddiayı test ediniz ve sonucunuzu yorumlayınız.

İddiada 5 yıldan farklıdır dediği için çift yönlü hipotez olacak ve H_0 ret bölgesi grafiğin her iki tarafında olacaktır.



H_0 ret bölgesi her iki tarafta olduğu için alfamızı 2'ye bölmemiz gerekiyor. O da 0,005 olur. Bir tane kritik değer bulmak yeterli olacaktır çünkü diğer taraf onun simetrilisi olur. Taralı alan 0,005 olduğundan biz z tablosunun **içinden** 0,995 değerini bulmalıyız.

TABLE 1 CUMULATIVE PROBABILITIES FOR THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION (*Continued*)

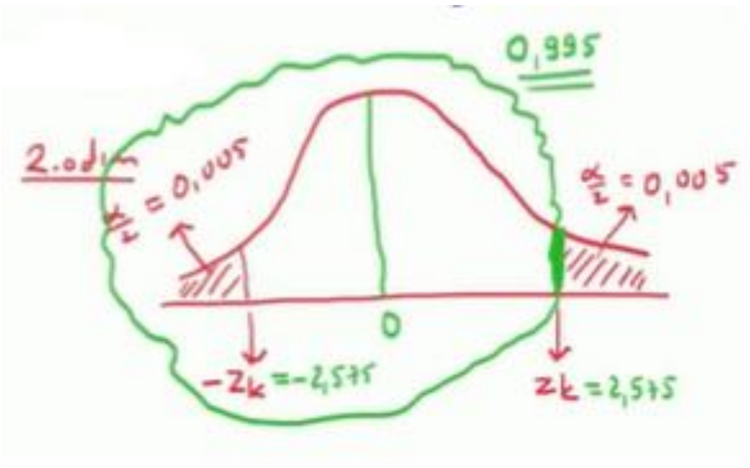


Entries in the table give the area under the curve to the left of the z value. For example, for z = 1.25, the cumulative probability is .8944.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\frac{2{,}57 + 2{,}58}{2} = 2{,}575 \text{ olacaktır.}$$

Görüldüğü üzere 0,995'e yakın 2 değer var. Böyle durumlarda onların ortalamasını alarak kritik değeri elde edebiliriz.

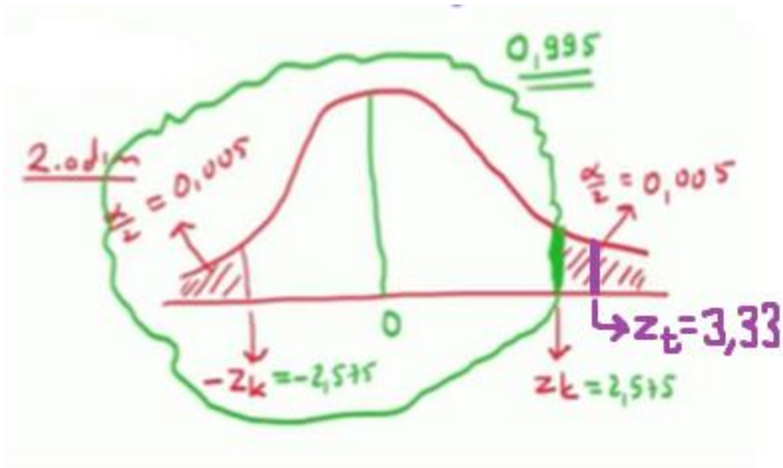


Kritik değerlerden birini elde ettik. Çift yönlü hipotez olduğundan H_0 ret bölgelerimiz 2 tane olduğu için biri diğerinin eksilisi olacaktır. O halde sol taraftaki H_0 ret bölgesinin kritik değeri **-2,575** olacaktır.

Şimdi test istatistiğimizi hesaplayalım:

3.adım

$$z_{test} = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{5{,}9 - 5}{\frac{1{,}74}{\sqrt{41}}} \cong 3{,}33$$



4.adım $z_{test} = 3{,}33 > z_k = 2{,}575$

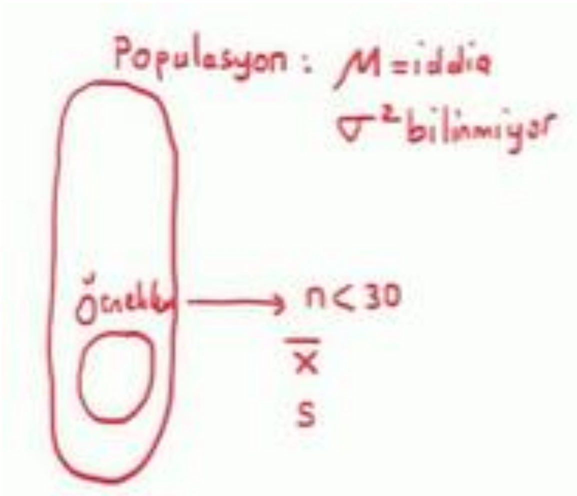
Bunedele H_0'ı
redderiz.

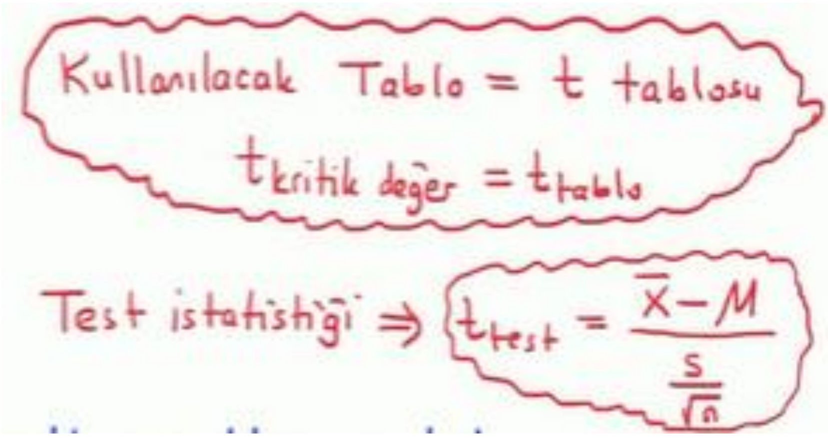
Görüldüğü üzere test istatistiğimiz H_0 ret bölgesine düştüğünden (birinin düşmesi yeterli, zaten diğer taraf -3,33 olduğundan yine içine düşecektir) H_0'ı reddederiz. Yani ortaya attığımız iddia doğrudur.

Yorum olarak ise, %99 olasılıkla/güvenilirlikle belli bir ilaç kullanılarak diş dolgularının ortalama dayanma süresi 5 yıldan farklıdır.

Popülasyon Varyansı Bilinmiyorken Ortalama İçin Hipotez Testi

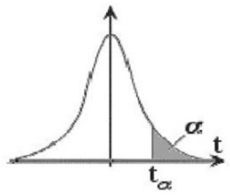
(n < 30 Durumu)





Kullanılacak tablo t tablosudur. t tablosu aşağıdaki gibidir:

t TABLOSU



	TEK YÖNLÜ (BİR YANLI) TEST İÇİN α											
	0.25	**0.20**	**0.15**	**0.10**	**0.05**	**0.025**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.0025**	**0.001**	**0.0005**
	İKİ YÖNLÜ (İKİ YANLI) TEST İÇİN α											
	0.50	**0.40**	**0.30**	**0.20**	**0.10**	**0.05**	**0.04**	**0.02**	**0.01**	**0.005**	**0.002**	**0.001**
sd												
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	15.890	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.663	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.150	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.614
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.631	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.295	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
∞	0.674	0.841	1.036	1.282	1.640	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

Örnek:

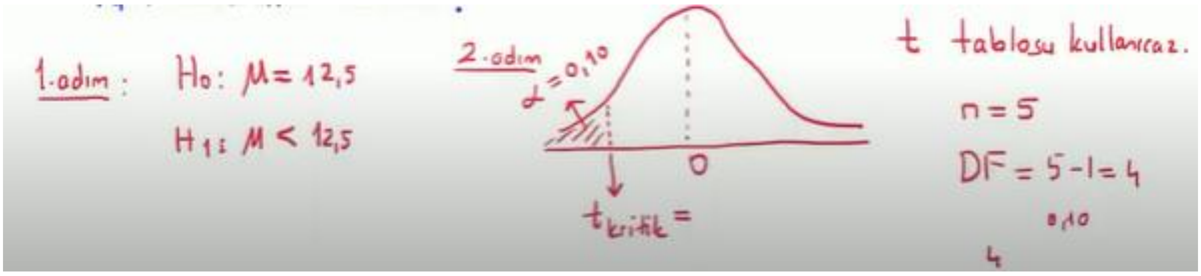
Ör: Belirli bir şehirdeki 24 aylık çocukların ortalama ağırlığının 12,5 kg dan küçük olduğu öne sürülmektedir. Rastgele olarak seçilen 5 tane 24 aylık çocuğun ağırlıkları aşağıda verilmiştir.

13, 11, 10, 10.5, 10.5

Verilen bilgilere göre, $\alpha = 0,10$ anlamlılık düzeyinde bu iddia için kararınız ne olur?

Görüldüğü üzere popülasyon varyansı ile ilgili bir bilgi verilmemiştir ve n<30 olduğu için t tablosu kullanılacaktır. İddiada 12,5'ten küçük dediği için tek yönlü bir hipotezdir ve H_0 ret bölgesi grafiğin sol tarafında olacaktır.

Çözüme gelecek olursak:



t tablosundan n-1 = 5-1 = 4 serbestlik derecesi ile α = 0,10 değerine bakacağız.

H_0 ret bölgemiz de sol tarafta olduğu için o değerin eksilisini alacağız. Çünkü tablomuz sağ taraf için değerleri gösteriyor.

	Area in right tail = 0.25	Area in right tail = 0.20	Area in right tail = 0.15	Area in right tail = 0.10	Area in right tail = 0.05	Area in right tail = 0.025	Area in right tail = 0.02	Area in right tail = 0.01	Area in right tail = 0.005	Area in right tail = 0.0025	Area in right tail = 0.001	Area in right tail = 0.0005	α
DF	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	t-score	
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	15.895	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619	
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599	
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924	
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610	
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869	
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959	
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408	
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041	
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781	
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587	

1,533 olarak bulduk. Dolayısıyla taralı alan sol tarafta olduğu için kritik değerimiz **-1,533** oluyor.

Test istatistiğimizi bulalım:

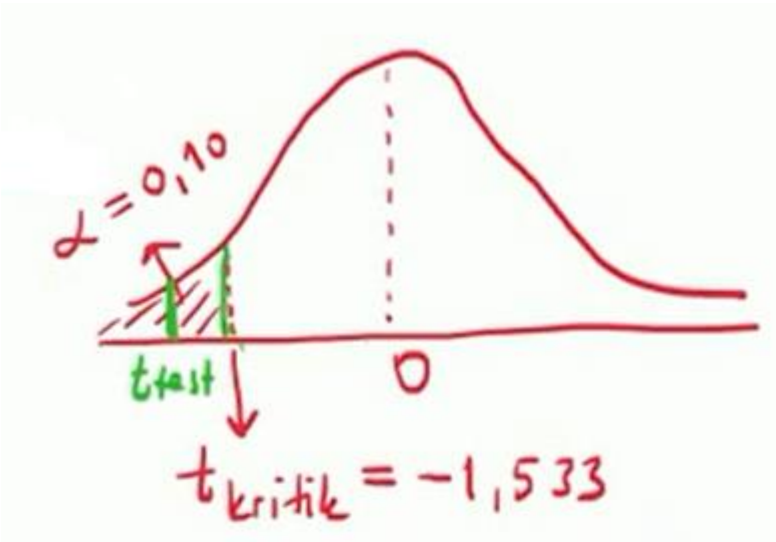
3.adım

$$t_{test} = \frac{\overset{11}{\bar{X}} - \overset{12,5}{\mu}}{\frac{s}{\sqrt{n}_{\to 5}}} = \frac{11 - 12,5}{\frac{1,173}{\sqrt{5}}} = -2,86$$

$$\bar{X} = \frac{13+11+10+10,5+10,5}{5} = 11$$

$$s = \sqrt{\frac{(13-11)^2+(11-11)^2+(10-11)^2+(10,5-11)^2 \cdot 2}{5-1}} = 1,173$$

$$t_{test} = -2,86$$



Görüldüğü üzere test istatistiğimiz H_0 ret bölgesine düştüğünden H_0 reddedilir yani iddiamız doğru olmuş olur.

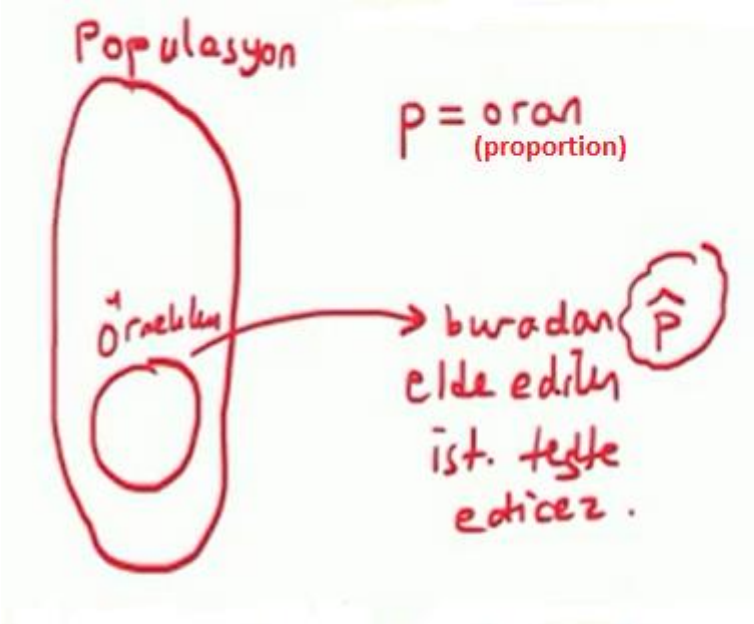
4.adım

$t_{test} < t_{kritik} \Rightarrow -2,86 < -1,533$ H_0 Reddedilir.

Yorum: % 90 olasılıkla bu şehirde 24 aylık çocuklar 12,5 kg dan küçüktür.

Yorum olarak ise, %90 olasılıkla/güvenilirlikle belli bir şehirdeki 24 aylık çocukların ortalama ağırlıkları 12,5 kg'den küçüktür.

Popülasyon Oranı İçin Hipotez Testi



Kullanılacak Tablo = z tablosu

Z_{kritik} değer = Z_{tablo}

Test istatistiği ⇒ $z_{test} = \dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p.(1-p)}{n}}}$ ★

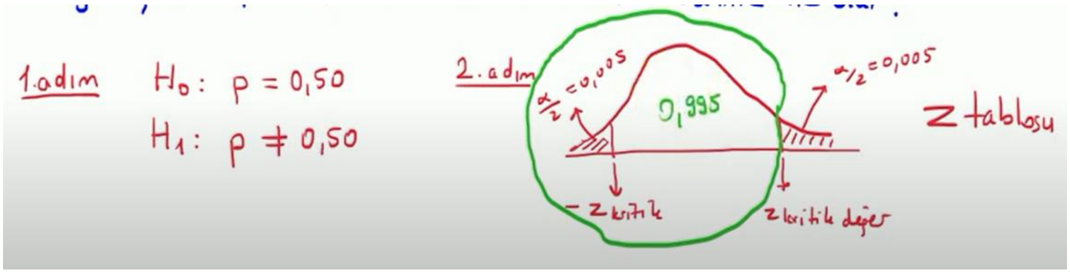
Bu tip sorularda her halükarda z tablosunu kullanacağız.

Örnek:

Ör: Türkiye'deki üniversitelerde bulundukları bölüme isteyerek gelen öğrencilerin oranı 0,50 den farklıdır iddiasında bulunulmaktadır. Bu iddiayı test etmek için rastgele seçilen 100 öğrenciden 35 inin kayıtlı olduğu bölüme isteyerek geldikleri saptanmıştır. Bu bilgilere göre, $\alpha = 0,01$ için bu iddia hakkında kararınız ne olur?

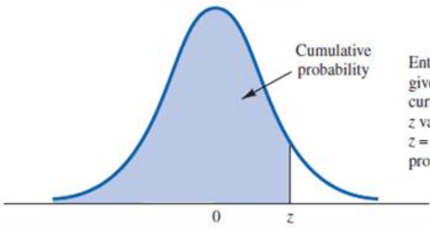
İddia 0,50’den farklıdır dediği için çift yönlü bir hipotezdir ve ret bölgeleri grafiğin her iki yanında da olacaktır.

Çözüme geçecek olursak:



Çift yönlü hipotez olduğundan ve H_0 ret bölgesi her iki tarafta olduğu için alfamızı 2’ye bölmemiz gerekiyor. O da 0,005 olur. Bir tane kritik değer bulmak yeterli olacaktır çünkü diğer taraf onun simetrilisi olur. Taralı alan 0,005 olduğundan Geriye kalan alan 0,995 olduğu için(sanki tek yönlü hipotez gibi) z tablosundan o değeri bulmalıyız.

TABLE 1 CUMULATIVE PROBABILITIES FOR THE STANDARD NORMAL DISTRIBUTION (*Continued*)

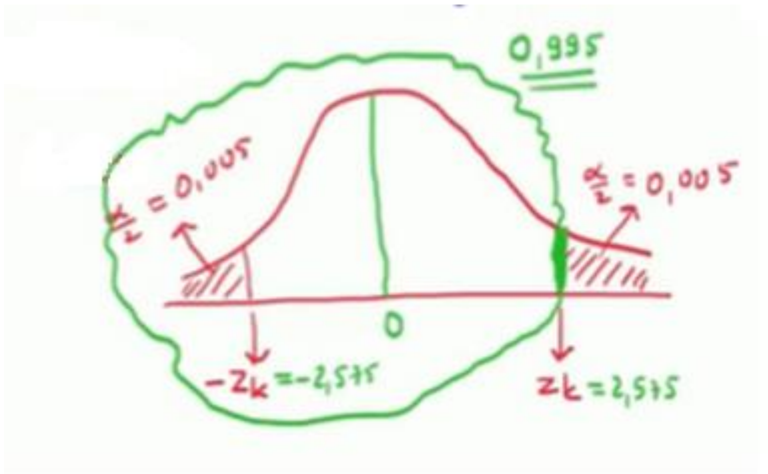


Entries in the table give the area under the curve to the left of the z value. For example, for z = 1.25, the cumulative probability is .8944.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

$$\frac{2{,}57 + 2{,}58}{2} = 2{,}575 \text{ olacaktır.}$$

Görüldüğü üzere 0,995’e yakın 2 değer var. Böyle durumlarda onların ortalamasını alarak kritik değeri elde edebiliriz.



Kritik değerlerden birini elde ettik. Çift yönlü hipotez olduğundan H_0 ret bölgelerimiz 2 tane olduğu için biri diğerinin eksilisi olacaktır. O halde sol taraftaki H_0 ret bölgesinin kritik değeri **-2,575** olacaktır.

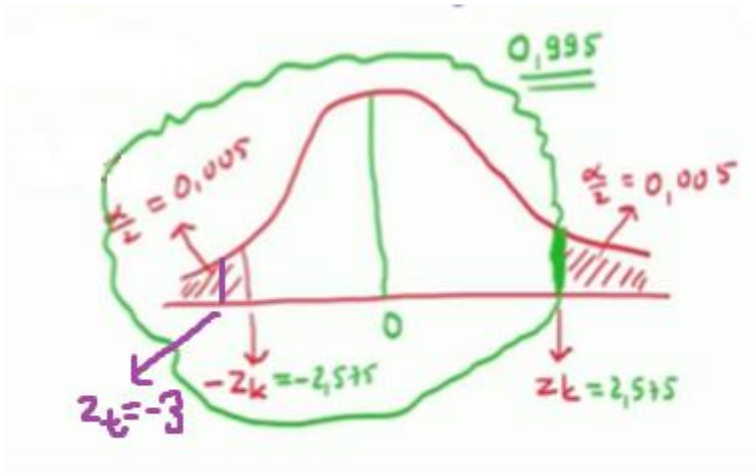
Test istatistiğimizi bulalım:

3.adım

$$Z_{test} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p.(1-p)}{n}}} = \frac{0,35 - 0,50}{\sqrt{\frac{0,5 . 0,5}{100}}} \qquad \hat{p} = \frac{35}{100} = 0,35$$

$$= \frac{-0,15}{\sqrt{\frac{25}{10000}}} = \frac{-0,15}{\frac{5}{100}} = -\frac{15}{100} \cdot \frac{100}{5} = -3$$

$$Z_{test} = -3$$



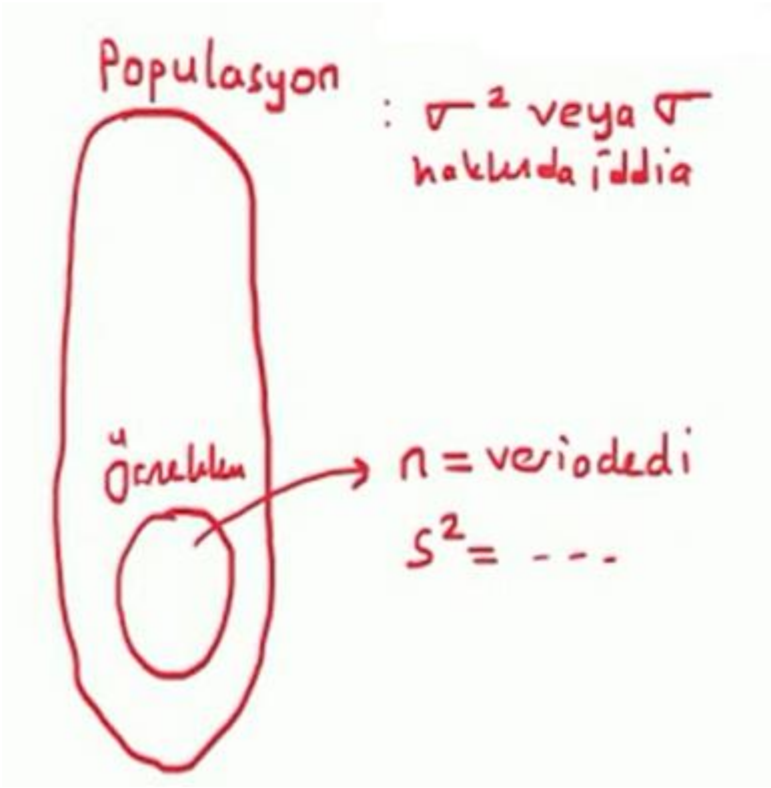
4.adım $Z_{test} < -Z_{kritik} \Rightarrow -3 < -2,575$ Bunedenle H_0 reddedilir.

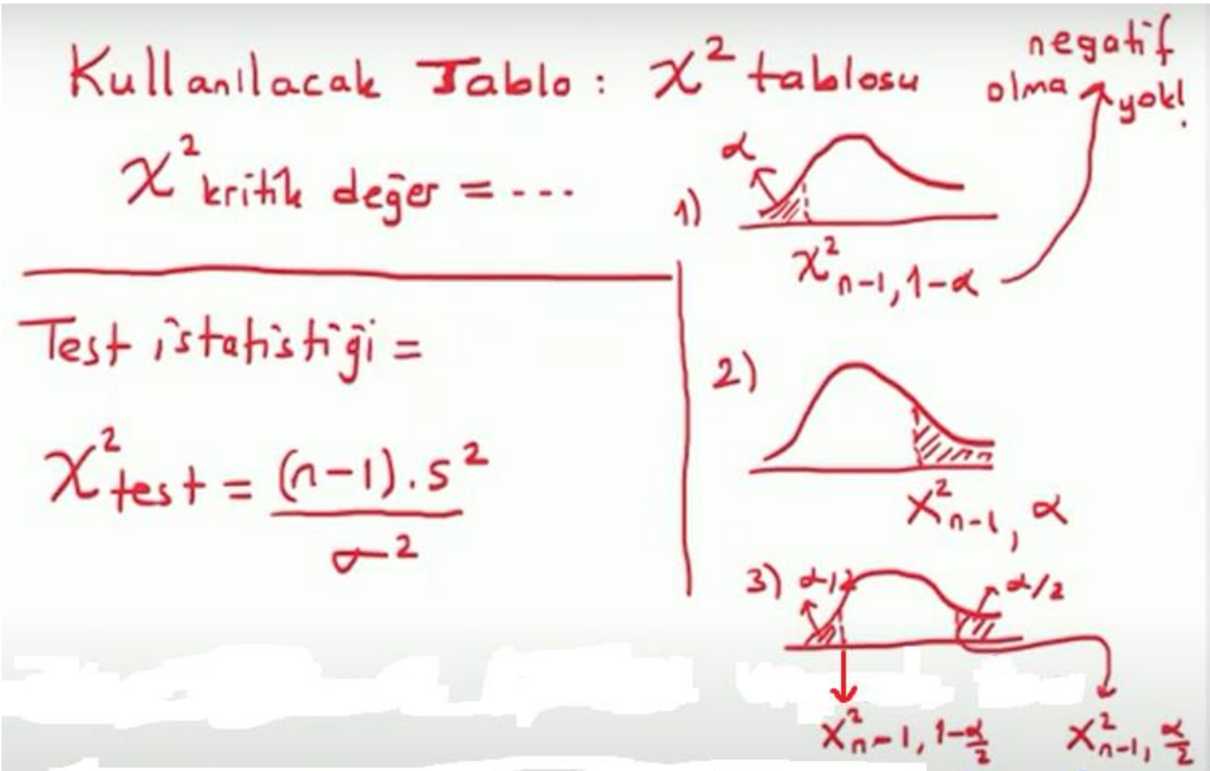
Yorum: %99 olasılıkla Türkiyede üni. öğrencileri istedikleri bölüme girme oranları 0,50 den farklıdır.

Görüldüğü üzere test istatistiğimiz taralı alana düştüğü için H_0'ı reddederiz yani ortaya attığımız iddia doğrudur.

Yorum olarak ise, %99 olasılıkla/güvenilirlikle Türkiye'deki üniversitelerde bulundukları bölüme isteyerek gelen öğrencilerin oranı %50'den farklıdır.

Popülasyon Varyansı İçin Hipotez Testi





Böyle durumda Ki-Kare tablosu kullanılacaktır. Ki-Kare tablosu diğer tablolardan farklı olarak şu şekilde bakılır:

- Negatif olma durumu yoktur.

- Grafik sağ tarafa doğru büyüyerek gider.

- H_0 ret bölgesi sol tarafta/tek yönlü hipotez yani soruda küçüktür, azdır(≤) ifadesi varsa;

$\boldsymbol{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha}}$ **şeklinde bakılır.**

- H_0 ret bölgesi sağ tarafta/tek yönlü hipotez yani soruda büyüktür, çoktur(≥) ifadesi varsa;

$\boldsymbol{\chi^2_{n-1,\ \alpha}}$ **şeklinde bakılır.**

- H_0 ret bölgesi her iki tarafta/çift yönlü hipotez yani soruda farklıdır(≠) ifadesi varsa;

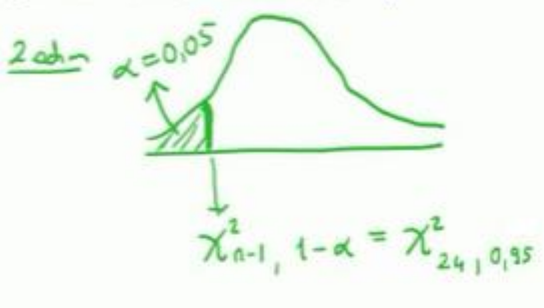
sol taraf için $\boldsymbol{\chi^2_{n-1,\ 1-\frac{\alpha}{2}}}$**, sağ taraf için** $\boldsymbol{\chi^2_{n-1,\ \frac{\alpha}{2}}}$ **şeklinde bakılır.**

Örnek:

Ör: Bir şirket eski model makine kullanarak 0,00042 varyansla 1cm çaplı civata üretmektedir. Şirket 25 tane yeni makineyi satın almak amacıyla denediğinde aynı tip civatalar için 0,00028 varyans hesaplıyor. $\alpha = 0,05$ anlamlılık düzeyinde yeni model makinelerle aynı tip civatanın daha küçük varyansla üretilebildiğini söyleyebilirsek yeni makine satın alınacaktır. Bu örneklemle ne karar verilebilir?

1.adım $H_0: \sigma^2 = 0,00042$

$H_1: \sigma^2 < 0,00042$



İddia daha küçüktür dediği için taralı alan sol tarafta olacak ve Ki-Kare tablosundan

$\boldsymbol{\chi^2_{n-1,\ 1-\alpha} = \chi^2_{25-1,\ 1-0,05} = \chi^2_{24,\ 0,95}}$ kriterlerini sağlayan değeri bulacağız.

df\p	0.010	0.025	0.050	0.100	0.200	0.300	0.500	0.700	0.800	0.900	0.950	0.975	0.990
1	6.63	5.02	3.84	2.71	1.64	1.07	0.45	0.15	0.06	0.02	0.00	0.00	0.00
2	9.21	7.38	5.99	4.61	3.22	2.41	1.39	0.71	0.45	0.21	0.10	0.05	0.02
3	11.34	9.35	7.81	6.25	4.64	3.66	2.37	1.42	1.01	0.58	0.35	0.22	0.11
4	13.28	11.14	9.49	7.78	5.99	4.88	3.36	2.19	1.65	1.06	0.71	0.48	0.30
5	15.09	12.83	11.07	9.24	7.29	6.06	4.35	3.00	2.34	1.61	1.15	0.83	0.55
6	16.81	14.45	12.59	10.64	8.56	7.23	5.35	3.83	3.07	2.20	1.64	1.24	0.87
7	18.48	16.01	14.07	12.02	9.80	8.38	6.35	4.67	3.82	2.83	2.17	1.69	1.24
8	20.09	17.53	15.51	13.36	11.03	9.52	7.34	5.53	4.59	3.49	2.73	2.18	1.65
9	21.67	19.02	16.92	14.68	12.24	10.66	8.34	6.39	5.38	4.17	3.33	2.70	2.09
10	23.21	20.48	18.31	15.99	13.44	11.78	9.34	7.27	6.18	4.87	3.94	3.25	2.56
16	32.00	28.85	26.30	23.54	20.47	18.42	15.34	12.62	11.15	9.31	7.96	6.91	5.81
17	33.41	30.19	27.59	24.77	21.61	19.51	16.34	13.53	12.00	10.09	8.67	7.56	6.41
18	34.81	31.53	28.87	25.99	22.76	20.60	17.34	14.44	12.86	10.86	9.39	8.23	7.01
19	36.19	32.85	30.14	27.20	23.90	21.69	18.34	15.35	13.72	11.65	10.12	8.91	7.63
20	37.57	34.17	31.41	28.41	25.04	22.77	19.34	16.27	14.58	12.44	10.85	9.59	8.26
21	38.93	35.48	32.67	29.62	26.17	23.86	20.34	17.18	15.44	13.24	11.59	10.28	8.90
22	40.29	36.78	33.92	30.81	27.30	24.94	21.34	18.10	16.31	14.04	12.34	10.98	9.54
23	41.64	38.08	35.17	32.01	28.43	26.02	22.34	19.02	17.19	14.85	13.09	11.69	10.20
24	42.98	39.36	36.42	33.20	29.55	27.10	23.34	19.94	18.06	15.66	13.85	12.40	10.86
25	44.31	40.65	37.65	34.38	30.68	28.17	24.34	20.87	18.94	16.47	14.61	13.12	11.52

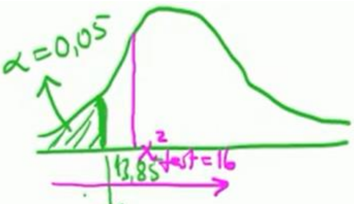
Kritik değeri **13,85** olarak elde ettik.

Test istatistiğimizi hesaplayalım:

1.adım $H_0: \sigma^2 = 0,00042$

$H_1: \sigma^2 < 0,00042$

2.adım



3.adım $\chi^2_{test} = \frac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = \frac{24.\ 0,00028}{0,00042} = 16$ $\quad \chi^2_{n-1,\ 1-\alpha} = \chi^2_{24,\ 0,95} = 13,85$

4.adım $\chi^2_{test} > \chi^2_{kritik} \Rightarrow 16 > 13,85$ Bu nedenle Ho reddedilemez

Bu örneklemde yeni makine alınmama kararı verilir.

Test istatistiğimiz 16 çıktı. Bu değer taralı alanın dışında olduğundan yani H_0 ret bölgesinin dışında olduğundan H_0'ı reddedemiyoruz. Yani ortaya atılan iddia doğru değildir.

Yorum olarak ise, %95 olasılıkla/güvenilirlikle yeni model makineler alınmamalıdır.

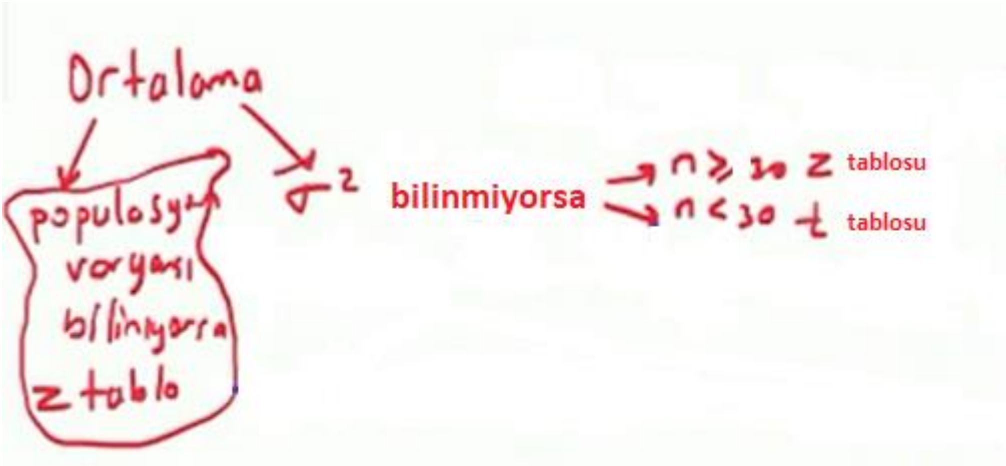
Hipotez Testleri Örnek Soru-1

Hipotez Testleri Örnek Soru-1

İstanbul'daki üniversitelerde okuyan öğrencilerin okula gidiş-dönüşte harcadığı toplam sürenin ortalamasının 80 dakikadan fazla olduğu iddia edilmektedir. Populasyon varyansı 441 olarak bilinmektedir. Rastgele olarak seçilen 9 öğrencinin okula gidiş-dönüş sürelerinin toplamı aşağıda verilmiştir.

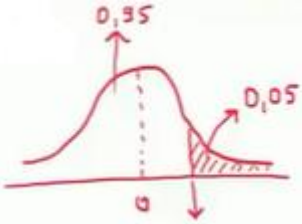
95, 70, 120, 65, 130, 38, 110, 90, 60

Verilen bu bilgilere göre, $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde bu iddiayı test ediniz ve sonucu yorumlayınız.



1. adım $H_0: \mu = 80$
$H_1: \mu > 80$

2. adım

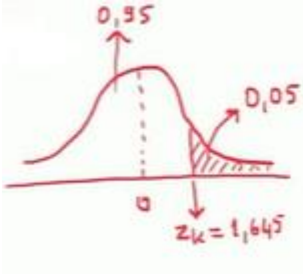


3. adım z tablo

$z_{kritik} =$

0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

1,64 1,65 1,645 0,95



3.adım z tablo

$z_{kritik} = 1,645$

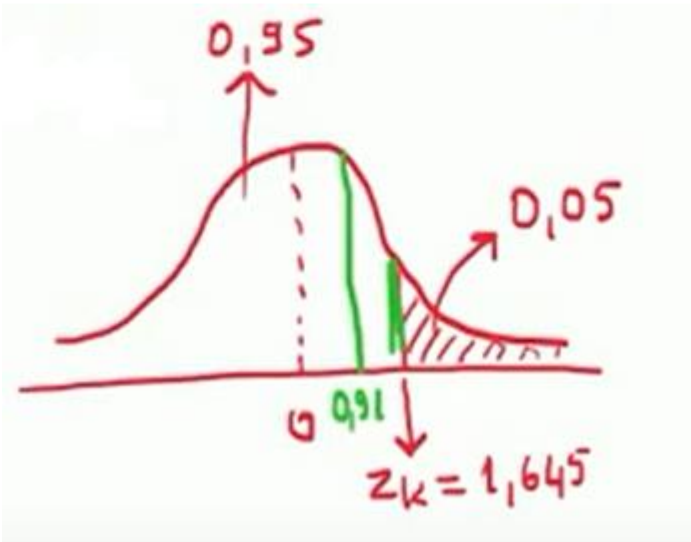
4.adım $z_{test} = \dfrac{\overline{X} - M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} =$ $\overline{X} = \dfrac{95+70+120+65+130+38+110+90+60}{9}$

$= 86,4$

$\sigma^2 = 441$

$\sigma = 21$ $= \dfrac{86,4 - 80}{\frac{21}{\sqrt{9}}} = \dfrac{6,4}{7} = 0,91$

$z_{test} = 0,91$



5.adım: Ho reddedilemiyor. Yani %95 güven düzeyinde bu iddia doğrudur diyemeyiz.//

Yorum olarak ise, %95 olasılıkla/güvenilirlikle öğrencilerin okula gidiş/dönüş için harcadığı ortalama süre 80 dk'tan fazla olduğu söylenemez.

Hipotez Testleri Örnek Soru-2

Hipotez Testleri Örnek Soru-2

İstanbul'da Beşiktaş ilçesinde ikamet eden öğrencilerin haftalık ortalama kültürel amaçlı harcamalarının 60 TL den farklı olduğu iddia edilmektedir. Rastgele olarak seçilen 9 öğrencinin oluşturduğu örneklemin değerleri aşağıda verilmiştir.

35, 60, 70, 95, 30, 110, 80, 95, 130

$\sigma^2 = 900$ ve $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde verilen bilgiler ile bu iddia hakkında kararınız ne olur?

1) σ^2 biliniyorsa

σ^2 bilinmiyorsa

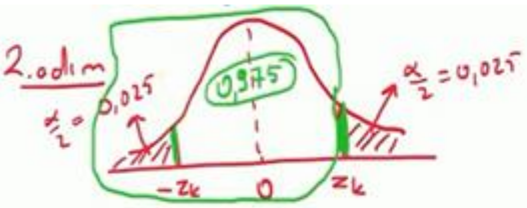
2) $n \geq 30$ z tablo

3) $n < 30$ t tablo

1.adım $H_0: M = 60$

$H_1: M \neq 60$

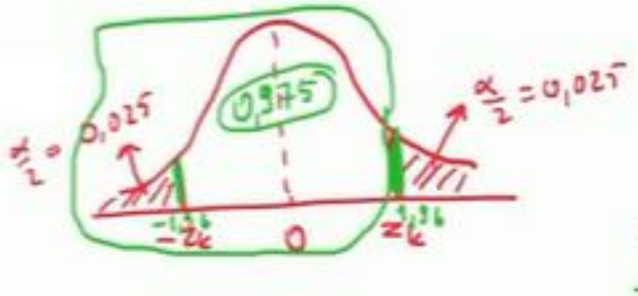
2.adım



3.adım

z tablosu

z tablosunda 0,975'e bakmamız gerekiyor. Onun değeri de meşhur **1,96'dır.**

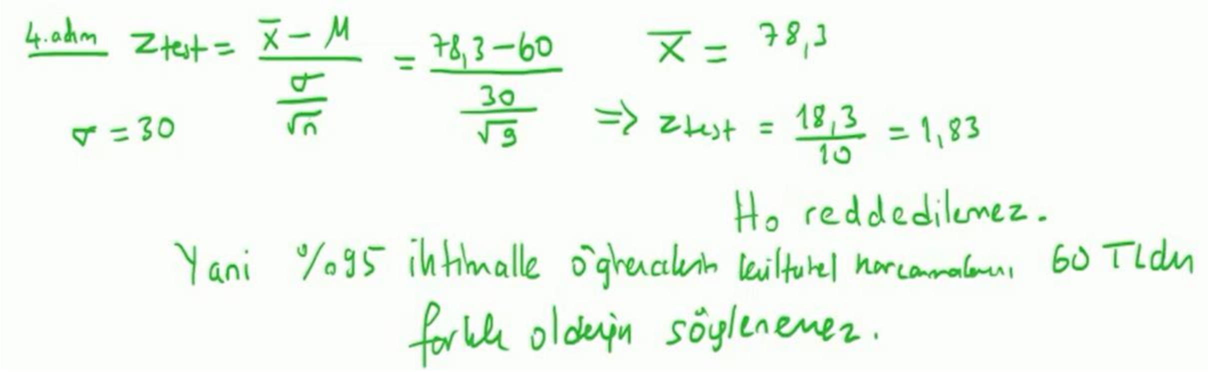


3.adım

z tablosu

$z_k = 1{,}96$

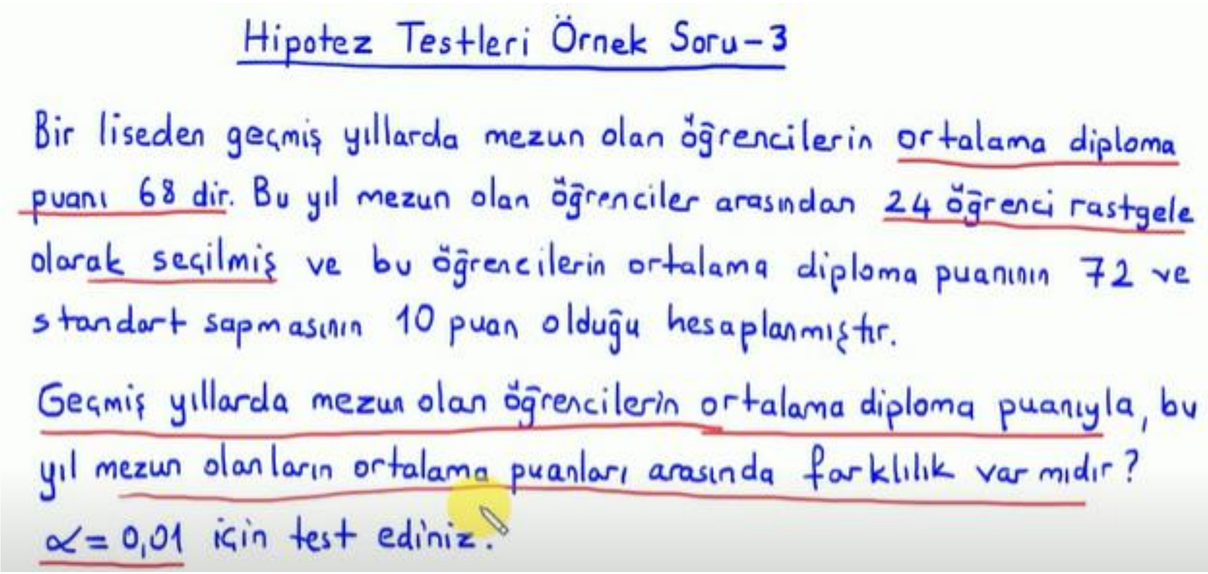
$-z_k = -1{,}96$

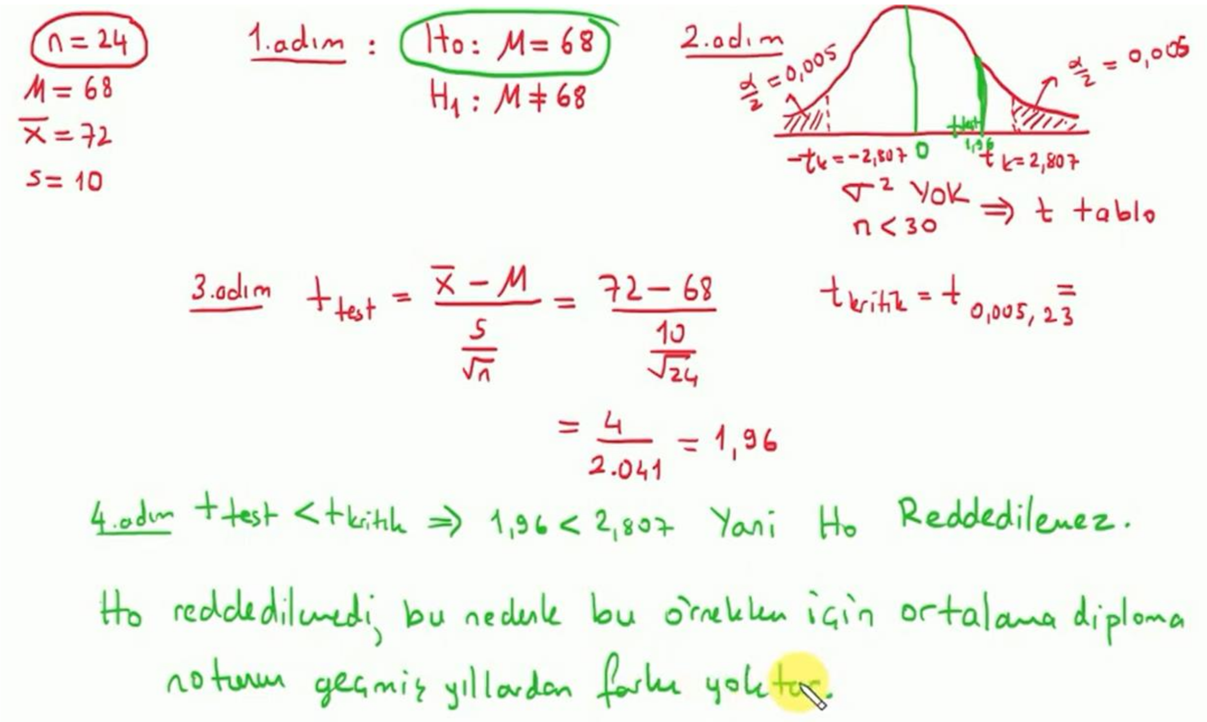


Taralı alana düşmediği için H0 reddedilemez.

Yorum olarak ise, %95 olasılıkla/güvenilirlikle öğrencilerin kültürel harcamaları 60 TL'den farklı olduğu söylenemez.

Hipotez Testleri Örnek Soru-3





$n = 24$

$\mu = 68$

$\bar{x} = 72$

$s = 10$

1.adım : $H_0 : \mu = 68$

$H_1 : \mu \neq 68$

2.adım

σ^2 YOK, $n < 30$ $\Rightarrow$ t tablo

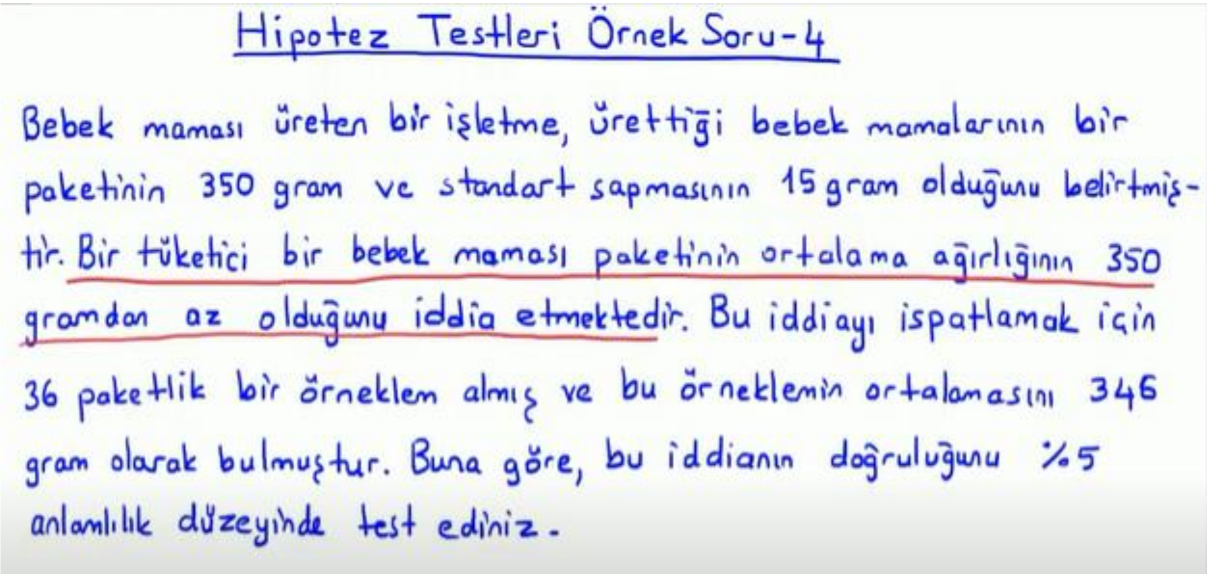
3.adım $t_{test} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{72 - 68}{\frac{10}{\sqrt{24}}} = \dfrac{4}{2.041} = 1{,}96$ $t_{kritik} = t_{0{,}005,\,23} =$

4.adım $t_{test} < t_{kritik} \Rightarrow 1{,}96 < 2{,}807$ Yani H_0 Reddedilemez.

H_0 reddedilmedi, bu nedenle bu örneklem için ortalama diploma notunun geçmiş yıllardan farkı yoktur.

H0 reddedilemedi. Yani sanki örneklem bilinçli seçilmiş gibi görünüyor. Böyle durumlarda yani H0'ın reddedilemediği durumlarda örneklem sayısı arttırılıp ya da başka örneklemler seçilip hipotez yeniden kurulabilir.

Hipotez Testleri Örnek Soru-4



Hipotez Testleri Örnek Soru-4

Bebek maması üreten bir işletme, ürettiği bebek mamalarının bir paketinin 350 gram ve standart sapmasının 15 gram olduğunu belirtmiştir. Bir tüketici bir bebek maması paketinin ortalama ağırlığının 350 gramdan az olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı ispatlamak için 36 paketlik bir örneklem almış ve bu örneklemin ortalamasını 346 gram olarak bulmuştur. Buna göre, bu iddianın doğruluğunu %5 anlamlılık düzeyinde test ediniz.

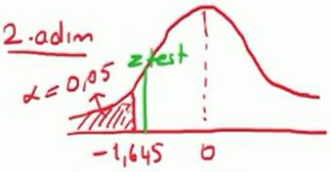
$\mu \rightarrow \sigma^2$ biliniyor ✓

$\quad \searrow \sigma^2$ bilinmiyor $\rightarrow n \geq 30$, $n < 30$

1.adım: $H_0: \mu = 350$

$H_1: \mu < 350$

2.adım



$\alpha = 0{,}05$

$\sigma = 15 \longrightarrow$ z tablosu

z tablosu

$Z_{kritik} = -1{,}645$

$\bar{x} = 346$

$n = 36$

3.adım $\quad Z_{test} = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$$Z_{test} = \frac{346 - 350}{\dfrac{15}{\sqrt{36}}} = \frac{-4}{\dfrac{15}{6}} = \frac{-24}{15} = \frac{-8}{5} = -1{,}6$$

4.adım $\quad Z_{test} > Z_{kritik} \Rightarrow -1{,}6 > -1{,}645$

Ho reddedilemez. Yani bu tüketicinin iddiası hata sınırları içindedir.

H0 reddedilemedi. Burada önyargılı bir örneklem seçilmiş olabilir. Böyle durumlarda yani H0'ın reddedilemediği durumlarda örneklem sayısı arttırılıp ya da başka örneklemler seçilip hipotez yeniden kurulabilir.

Hipotez Testleri Örnek Soru-5

Hipotez Testleri Örnek Soru-5

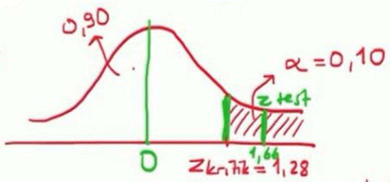
oran

Bir şehirde belli yaş grubundaki çocukların %10 undan fazlasının beslenme sorunu olduğu öne sürülmektedir. Bu şehirdeki bu belli yaş grubunda olan çocukların rastgele seçilen 400 ünden 50 tanesinin beslenme problemi olduğu tespit edilmiştir. $\alpha = 0{,}10$ için bu iddiayı test ediniz.

1.adım $\quad H_0: p = 0{,}10$

$H_1: p > 0{,}10$

2.adım



z tablosu

3.adım $\quad Z_{test} = \dfrac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{p\cdot(1-p)}{n}}} = \dfrac{0{,}125 - 0{,}10}{\sqrt{\dfrac{0{,}10 \cdot 0{,}90}{400}}} = \dfrac{0{,}025}{\dfrac{0{,}3}{20}} = \dfrac{0{,}025 \cdot 20}{0{,}3} \cong 1{,}66$

$\hat{p} = \dfrac{50}{400} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

4.adım $\quad Z_{test} > Z_{kritik} \Rightarrow 1{,}66 > 1{,}28$

Ho reddedilir.

%10 fazlasının %90 güven düzeyi ile beslenme sorunu vardır.

Hipotez Testleri Örnek Soru-6

Hipotez Testleri Örnek Soru-6

Bir ülkede yaşayan ailelerin aylık ortalama gelirlerine ilişkin varyansın 400 den büyük olduğu iddia ediliyor. Rastgele seçilen 9 birimlik bir örnekleme ilişkin ailelerin aylık ortalama gelirleri şöyle belirlenmiştir:

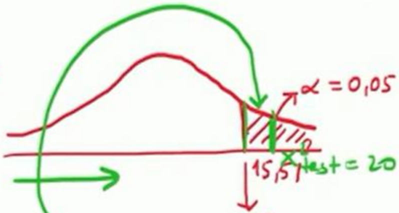
100, 60, 40, 40, 30, 30, 50, 70, 120

Buna göre, $\alpha = 0{,}05$ anlamlılık düzeyinde bu iddianın doğruluğu hakkında ne söylenebilir?

1.adım $H_0: \sigma^2 = 400$

$\boxed{H_1: \sigma^2 > 400}$

2.adım



$\chi^2_{tablosu}$

$\chi^2_{n-1,\alpha} = \chi^2_{8,\,0,05} = 15{,}51$

3.adım $\chi^2_{test} = \dfrac{(n-1).s^2}{\sigma^2} = \dfrac{8.1000}{400} = 20$

$\bar{X} = 60 \qquad s^2 = \dfrac{(100-60)^2 + 0 + (40-60)^2 + (40-60)^2 \ldots}{9-1} = 1000$

4.adım $\chi^2_{test} > \chi^2_{kritik} \Rightarrow 20 > 15{,}51$ Yani Ho reddedilir.

Ortalama gelirlere ait varyansın 400 den büyük olduğu %95 güven düzeyi doğrudur.