Informe Técnico: Análisis de Métodos Iterativos para la Simulación de un Campo de Velocidades

Ervin Caravalí Ibarra

22 de octubre de 2025

Índice

1. Introducción

El presente informe tiene como objetivo analizar el comportamiento de diversos métodos iterativos aplicados a la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones, obtenido a partir de la discretización del campo de velocidades en un dominio bidimensional con obstáculos internos.

El sistema se resolvió mediante el método de Newton-Raphson. En cada iteración de Newton, el sistema lineal resultante se resolvió utilizando diferentes esquemas iterativos (Jacobi, Gauss-Seidel, Richardson, Gradiente Descendente y Gradiente Conjugado) para comparar su rendimiento y robustez. Los resultados experimentales se contrastan con el análisis teórico de la matriz Jacobiana, derivada de la formulación del problema.

2. Formulación del Problema

El flujo se modela mediante una ecuación de tipo convectivo-difusivo. Su forma discreta da lugar a una función residuo $F(V_{i,j})$, que se busca anular para cada nodo (i, j) de la malla:

$$F(V_{i,j}) = 4V_{i,j} - (V_{i+1,j} + V_{i-1,j} + V_{i,j+1} + V_{i,j-1}) + 4V_{i,j}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j}) + 4V_y(V_{i,j+1} - V_{i,j-1}) = 0 \quad (1)$$

donde $V_{i,j}$ es la componente x de la velocidad en el nodo (i, j), y V_y es una velocidad vertical constante.

Para resolver este sistema no lineal, se emplea el método de Newton-Raphson, que sigue el esquema iterativo:

1. Resolver el sistema lineal para la corrección ΔV:

$$J(V_k)\Delta V = -F(V_k)$$

2. Actualizar la solución:

$$V_{k+1} = V_k + \alpha \Delta V$$

donde $J(V_k)$ es la matriz Jacobiana del sistema en la iteración k, y α es un factor de **amortiguamiento** (o sub-relajación) para estabilizar la convergencia global del método de Newton. Este factor no debe confundirse con el método de sobre-relajación (SOR) para resolver sistemas lineales, cuyo uso fue explícitamente desaconsejado.

3. Propiedades de la Matriz Jacobiana

El análisis de la matriz Jacobiana J es fundamental, ya que sus propiedades determinan el comportamiento de los métodos iterativos. Sus características clave son:

- **Dispersa (Sparse):** La mayoría de sus elementos son cero, ya que cada ecuación solo depende de los nodos adyacentes.
- **No Simétrica:** La presencia de términos convectivos ($4V_{i,j}(V_{i+1,j} - V_{i-1,j})$) rompe la simetría de la matriz.

- **No Diagonalmente Dominante:** La condición de dominancia diagonal no se cumple en general, especialmente cerca de las fronteras y obstáculos, lo que explica el fallo de los métodos clásicos.
- **Mal Condicionada:** El número de condición observado, $\kappa(J)$, se encuentra en el rango de 10^1 a 10^2, indicando que el sistema es sensible a errores numéricos.

4. Resultados Numéricos

Se ejecutó una simulación comparando los cinco métodos para resolver el sistema lineal en cada paso de Newton. Los resultados se resumen en la Tabla 1.

Cuadro 1: Resumen de resultados experimentales con `MAX_ITER = 60`.

Método	Convergió	Tiempo (s)	Iteraciones
Jacobi	No	0.055	1
Gauss-Seidel	No	3.689	1
Richardson	Sí	0.055	17
Gradiente Descendente	Sí	0.678	21
Gradiente Conjugado	**Sí**	**0.130**	**44**

5. Análisis Teórico de Convergencia

5.1. Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel

La teoría exige que la matriz sea diagonalmente dominante para garantizar la convergencia. Como el Jacobiano no cumple esta propiedad, ambos métodos divergen de forma violenta, generando valores desbordados (`NaN`, `overflow`), lo cual fue confirmado experimentalmente. Por tanto, no son adecuados para este problema.

5.2. Método de Richardson

Este método no requiere simetría ni dominancia diagonal. Su éxito depende de que los autovalores de la matriz de iteración $I - \omega J$ se encuentren dentro del círculo unitario. Con un parámetro de amortiguamiento conservador ($\omega = 0{,}1$), el método fue estable y convergió de manera práctica.

5.3. Métodos Basados en Gradiente

Tanto el Gradiente Descendente como el Gradiente Conjugado operan sobre un sistema transformado para asegurar la convergencia. En lugar de resolver $J\Delta V = -F$, resuelven el sistema equivalente de ecuaciones normales:

$$(J^T J)\Delta V = -J^T F \tag{2}$$

La nueva matriz del sistema, $A = J^T J$, está garantizado por construcción que es **simétrica y definida positiva (SPD)**.

- **Gradiente Descendente:** Converge de forma estable gracias a la propiedad SPD de la matriz A.
- **Gradiente Conjugado:** Este método requiere una matriz SPD, condición que se cumple al aplicarlo sobre el sistema transformado con $A = J^T J$. La razón por la que necesitó más iteraciones (44) no es un fallo teórico, sino una consecuencia del mal condicionamiento de la matriz A. Los errores de precisión numérica ralentizan la convergencia en las etapas finales, pero su robustez teórica queda demostrada al alcanzar la solución.

6. Conclusiones

Del análisis se concluye lo siguiente:

1. El Jacobiano del problema es no simétrico y mal condicionado, lo que invalida el uso de métodos clásicos.
2. Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel fallan de forma predecible y no deben ser empleados.
3. El método de Richardson ofreció una solución práctica y eficiente, pero su éxito depende de la elección de un parámetro ω adecuado.
4. El método de **Gradiente Conjugado** es teóricamente el más robusto de los probados. Su convergencia está garantizada al aplicarse sobre el sistema de ecuaciones normales. Su aparente lentitud es consecuencia del mal condicionamiento numérico del problema, no de una debilidad del método.

7. Recomendaciones

- Para mejorar la eficiencia del Gradiente Conjugado en problemas como este, es fundamental aplicar **precondicionadores** (por ejemplo, ILU) para reducir el número de condición del sistema.
- Para trabajos futuros, se recomienda explorar métodos del subespacio de Krylov diseñados específicamente para matrices no simétricas, como **GMRES** o **BiCGSTAB**, que evitan la necesidad de formar $J^T J$.

Referencias

[1] Saad, Y. (2003). *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. SIAM.

[2] Barrett, R., et al. (1994). *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM.