

Traitement du signal (tome2)

Éléments d'analyse et de transmission des signaux

Table des matières

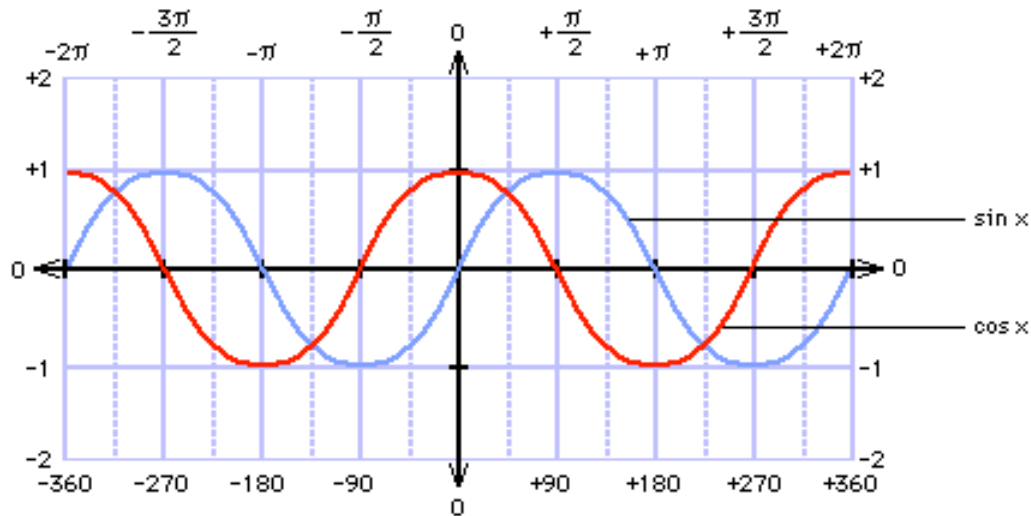
1	Introduction	1
1.1	Rappel de trigonométrie.	1
1.2	Fonction sinusoïdale. (onde).	3
2	Systèmes de communication typiques.	4
2.1	Schéma bloc général d'un système de communication.	4
2.2	Système de communication analogique.	5
2.3	Système de communication numérique.	6
2.3.1	Rappel :	7
2.3.2	Illustration de l'effet du bruit ($n(t)$) sur un signal analogique et numérique.	10
3	Classification des signaux.	11
3.1	Signaux déterministes et aléatoires.	11
3.2	Représentation complexe :	14
3.2.1	Remarque importante	15
4	Les méthodes d'analyse du signal de Fourier.	16
4.1	Quelques notions de bases.	16
4.1.1	Energie d'un signal.	16
4.1.2	Puissance d'un signal.	17
4.2	Quelques signaux utiles.	20
4.2.1	L'impulsion de Dirac.	20
4.2.2	La fonction échelon ou seuil de Heaviside.	20
4.2.3	L'impulsion rectangle.	20
4.2.4	L'impulsion triangle.	21
4.2.5	L'impulsion sinc.	21
4.3	Les séries de Fourier.	22
4.3.1	Cas de signaux paires et impaires :	23
4.3.2	Exemple de décomposition d'un signal numérique.	25
4.3.3	Décomposition en séries de Fourier d'un train d'impulsions rectangulaires	27
4.3.4	Théorème de Parseval.	29
4.3.5	La transformée de Fourier	30
4.3.6	Théorème de Rayleigh.	30
4.3.7	Propriétés de la transformée de Fourier.	31
4.3.8	Tableau résumé de quelques transformées de Fourier de fonctions paires.	36
4.3.9	Exemple d'ondes courantes et leur spectre.	37
4.3.10	Exemples de l'application de la transformée de Fourier.	38
4.4	La convolution.	53
4.4.1	Introduction :	53
4.4.2	Définition :	53

4.4.3	Illustration de la convolution.....	55
4.4.4	Propriétés importantes.....	57
4.4.5	Cas particuliers.....	58
4.4.6	Exemples :.....	58
4.5	Complément et classification des systèmes.	61
4.5.1	Les système linéaires ou non linéaires.	61
4.5.2	Systèmes permanents ou non permanents.	61
4.5.3	Systèmes causals (causaux) ou non causals.	61
4.5.4	Système avec mémoire ou sans mémoire.....	62
4.6	Densité spectrale de puissance et fonction d'auto-corrélation.	62
4.6.1	Transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance.	64
4.6.2	Cas particuliers :.....	65
4.6.3	Exemple de la fonction d'auto-corrélation et de la densité spectrale de puissance sur un train d'impulsions rectangulaires.	66
4.6.4	Exemple d'application :.....	67
4.7	Fonction de transfert idéal n'engendrant pas de distorsion :	71
4.8	Relation entre la durée d'une impulsion et la largeur minimale de la bande passante.	72
4.8.1	Cas d'un filtre RC du 1 ^{er} degré.....	72
4.8.2	Cas d'un filtre passe-bande.	75
5	<i>L'échantillonnage.</i>	78
5.1	Introduction.	78
5.2	Echantillonneur réel →circuit commutateur.	79
5.3	Echantillonneur réel → circuit « échantillonneur/bloqueur ».....	80
5.4	Récupération d'un signal échantillonné.	82
5.4.1	Dans le cas d'un échantillonnage avec un circuit commutateur.	82
5.4.2	Dans le cas d'un circuit échantillonneur/bloqueur.	83
5.5	Erreurs possibles lors de la reconstitution d'un signal échantillonné.	86
5.6	Echantillonnage d'un signal de type « band pass ».....	87
5.6.1	Exemple numérique.....	88

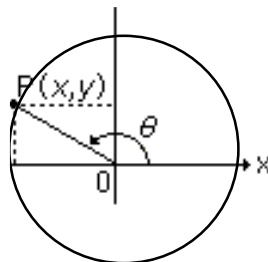
Traitement du signal

1 Introduction

1.1 Rappel de trigonométrie.



© Microsoft Corporation. Tous droits réservés.



Les quatre fonctions trigonométriques usuelles associées à l'angle θ sont :

sinus (sin)

de l'angle θ : $\sin \theta = \frac{y}{r}$

cosinus (cos)

de l'angle θ : $\cos \theta = \frac{x}{r}$

tangente (tan)

de l'angle θ : $\tan \theta = \frac{y}{x}$ si $x \neq 0$

cotangente (cotan)

de l'angle θ : $\cotan \theta = \frac{x}{y}$ si $y \neq 0$

Angles remarquables

angle	0°	30°	45°	60°	90°
cosinus	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
sinus	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	*
cotangente	*	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0
* non défini					

Identités trigonométriques

Les formules suivantes, appelées identités, donnent les relations existantes entre les différentes fonctions trigonométriques. Elles sont valables pour tout angle, dans la mesure où les fonctions employées sont définies.

$$\begin{aligned}
 \text{I. } \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} ; \\
 \cotan \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \text{ (définition)} \\
 \text{II. } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\
 \text{III. } \sin(-\theta) &= -\sin \theta ; \cos(-\theta) = \cos \theta \\
 \text{IV. } \sin(\theta + \pi) &= -\sin \theta ; \\
 \cos(\theta + \pi) &= -\cos \theta \\
 \text{V. } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos \theta ; \\
 \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin \theta \\
 \text{VI. } \sin(\theta \pm \phi) &= \sin \theta \cos \phi \pm \cos \theta \sin \phi \\
 \cos(\theta \pm \phi) &= \cos \theta \cos \phi \mp \sin \theta \sin \phi \\
 \tan(\theta \pm \phi) &= \frac{\tan \theta \pm \tan \phi}{1 \mp \tan \theta \tan \phi} \\
 \text{VII. } \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 = 1 - 2\sin^2 \theta \\
 &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\
 \sin 2\theta &= 2\sin \theta \cos \theta
 \end{aligned}$$

des équations VI :

$$\begin{aligned}
 \cos(\theta + \phi) &= \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\
 + \cos(\theta - \phi) &= \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi \\
 \hline
 \cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi) &= 2 \cdot \cos \theta \cos \phi \\
 \Rightarrow \cos \theta \cos \phi &= \frac{1}{2} [\cos(\theta + \phi) + \cos(\theta - \phi)]
 \end{aligned}$$

Cette dernière équation est fondamentale dans les modulations et démodulations.

1.2 Fonction sinusoïdale. (onde).

Equation d'une onde sinusoïdale :

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

où :

* ω est la pulsation en rad/s

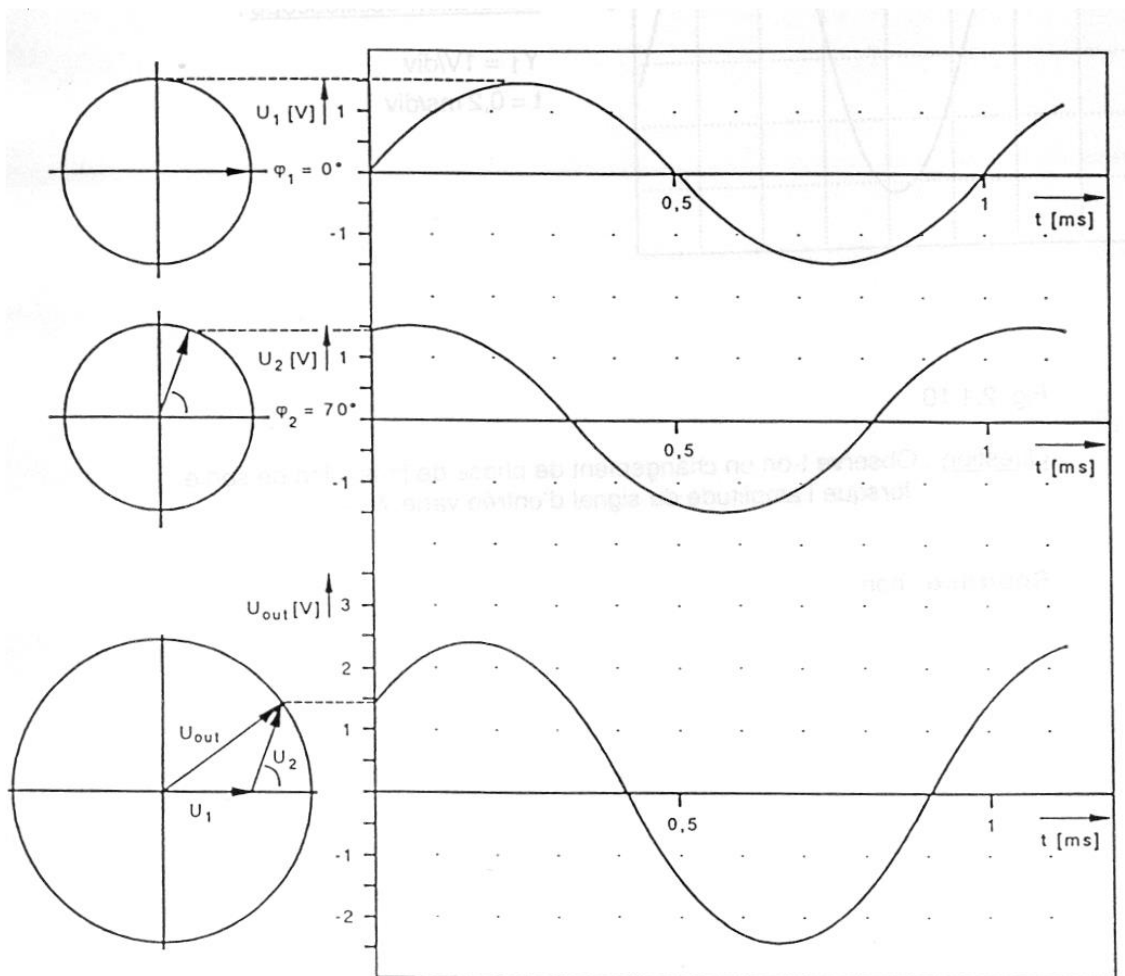
$$* \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad T \text{ est la période en sec}$$

f est la fréquence en Hz

$$f = \frac{1}{T}$$

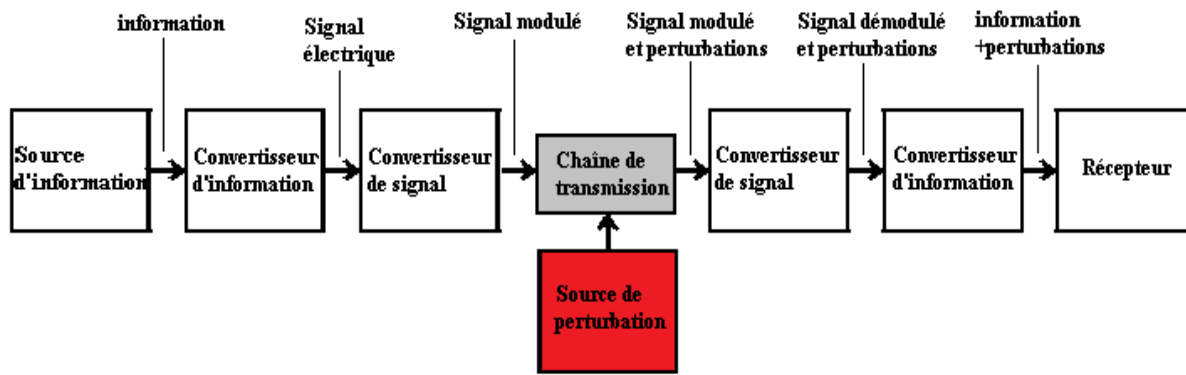
* A est la valeur maximale du signal

* φ est la phase en degré



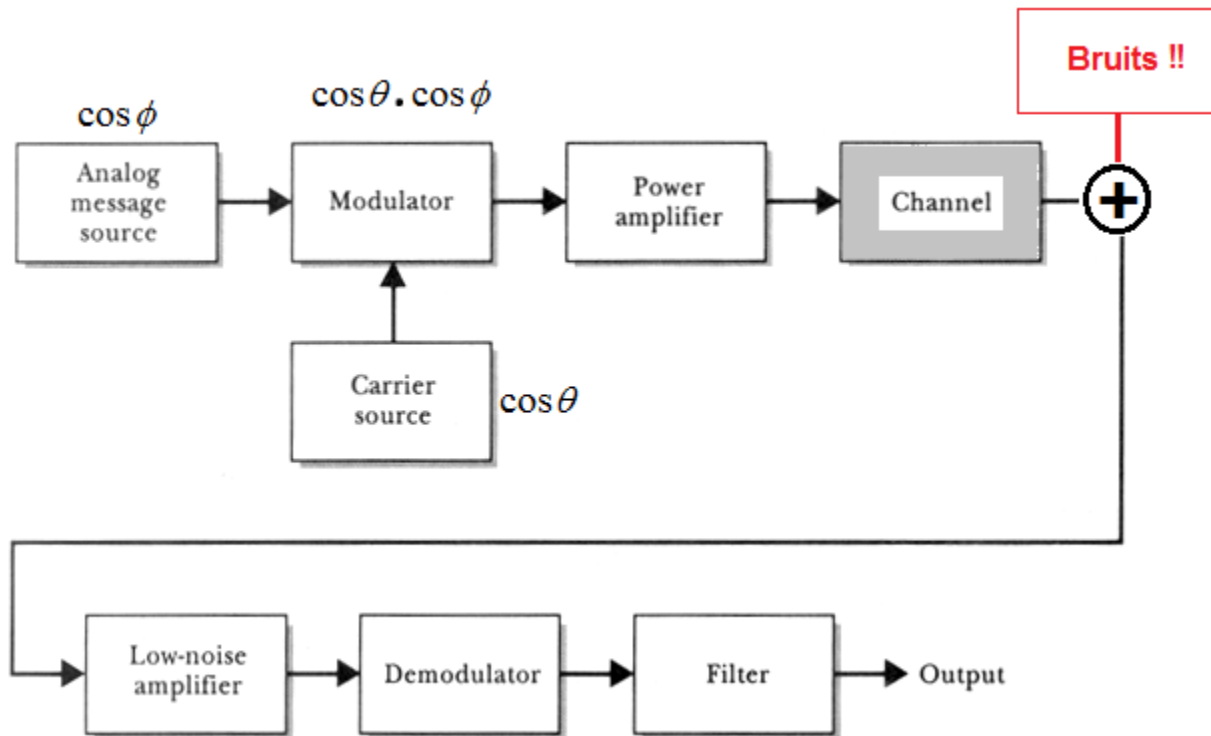
2 Systèmes de communication typiques.

2.1 Schéma bloc général d'un système de communication.



- Source d'information : tout type de messages transmissibles (voix, image, musique, texte,...)
- Convertisseur d'information : conversion de l'information en un signal électrique.
- Signal électrique : représentation du message sous forme de différents niveaux de tension ou courant.
- Conversion du signal (modulateur) : si le signal ne peut être transmis directement, il doit être modulé. Le message doit être transformé sous forme appropriée au type de transmission utilisée. Les signaux radio ne peuvent être diffusés qu'aux hautes fréquences.
- Signal modulé : en modulation un des paramètres de la porteuse (voir plus tard) est contrôlé par le signal message.
- Canal de transmission en ligne : le moyen de transmission comme les fibres optiques, les câbles, les ondes électromagnétiques (dans notre cas les ondes radios) est caractérisé par des propriétés telle que l'atténuation en bande passante (intervalle de fréquences utilisé pour la transmission).
- Source de perturbations : signaux perturbateurs pouvant intervenir en tout point des lignes de transmission.
- Conversion du signal (démodulation) : à partir du signal modulé transmis, le récepteur reconstruit le signal émis à l'origine(voix, image,...).
- Récepteur du signal : l'oreille, le système d'enregistrement,

2.2 Système de communication analogique.



Pour pouvoir être transmis le signal doit :

- Subir un filtrage afin d'éliminer les composants non souhaitables (comme le bruit au sens large, les signaux d'interférence).
- Être amplifié à un niveau suffisant qui dépend de la source du signal mais également du type de canal de transmission utilisé.
- Être souvent modulé.
- A la réception, subir une nouvelle amplification à bas niveau de bruit car ce dernier a subi de nombreuses atténuations et soumis à de nombreuses sources de bruit (random noise comme par exemple : l'agitation thermique).

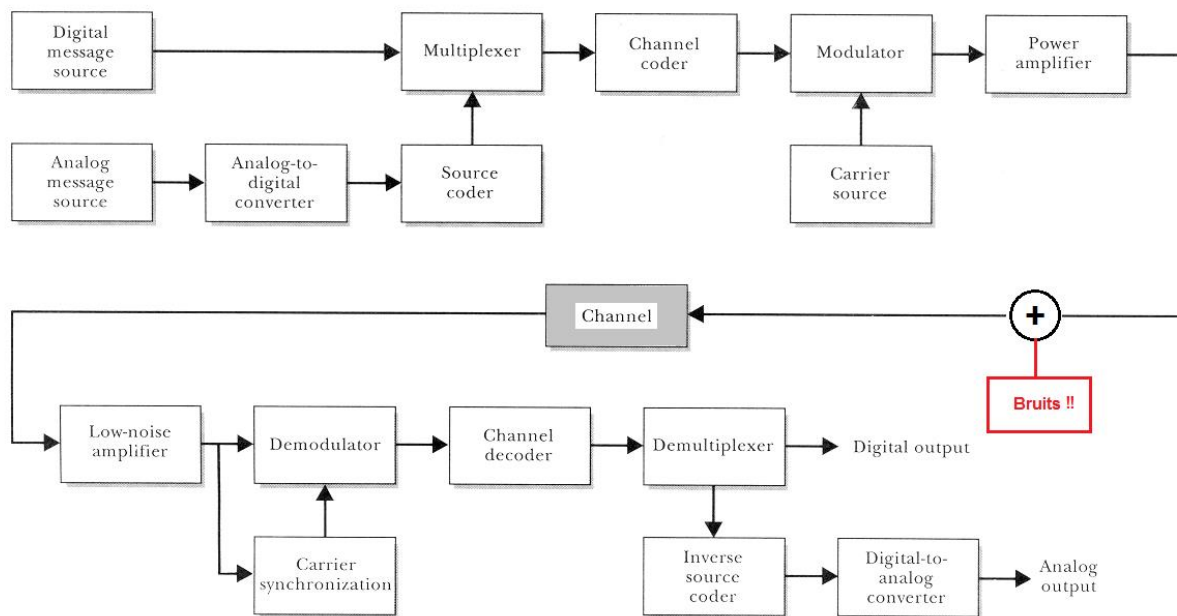
En réception, le signal est toujours bruité → on caractérise toujours les performances d'une chaîne de transmission par le :

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\text{puissance du signal utile}}{\text{puissance du « signal » bruit}} \right) \text{ (en dB)}$$

(signal noise ratio ou SNR).

Plus ce rapport est grand, meilleur est le système de transmission.

2.3 Système de communication numérique.



- Premièrement, le signal analogique est converti en un signal numérique (convertisseur ADC).
- Le « codage de la source » permet de réduire le nombre de symbole qui doivent être transmis (retirer tout ce qui est redondant par exemple).
- Le multiplexage permet de transmettre plusieurs signaux de sources différentes au travers du même canal de transmission en « même temps ». En fait, chaque source a accès au média de transport à intervalle de temps régulier et ce de façon alternée (TDM : time division multiple, utilisé notamment pour le téléphone).
- A la réception, toutes les différentes sources sont triées et envoyées vers leur destinataire.
- Le signal reçu est toujours bruité. Les processus de réduction de bruit utilisés dans les communications numériques sont appelés contrôle et correction d'erreur. Soit le « channel decoder » identifie et corrige l'erreur, soit il demande une retransmission des données corrompues.
- Les signaux sont souvent modulés au travers du canal de transmission.
- Afin d'obtenir de bonne performance, l'émetteur et le récepteur doivent être synchronisés par l'intermédiaire d'un « data clock ». Un « data clock » est une séquence de bits ou de symboles binaires permettant la synchronisation dans les transmissions numériques.

Remarques :

- Un des principaux critères de performance d'un système de transmission numérique est **la notion d'erreur de probabilité (error probability)**. Le but est d'obtenir une capacité maximale de transmission avec le minimum d'erreur de décision entre un 0 et un 1. Il faut toutefois être conscient une fois pour toute **que les 1 et les 0 en tant que tels n'existent pas**.
- Un autre critère de performance est l'erreur de quantification.

2.3.1 Rappel :

Au départ, nous avons un signal analogique. Or nous savons qu'il est impossible de représenter l'infinité de valeurs qui compose un signal analogique par un nombre fini de mots binaires = ensemble de valeurs discrètes (déterminées par la fréquence d'échantillonnage = nombre de points par seconde à quantifier). Le but est donc de se rapprocher au plus près du signal analogique. Les différences résiduelles entre le signal analogique et numérique sont appelées erreur de quantification. Cette erreur peut être assimilée à du bruit. Une seconde source de bruit à la réception peut également avoir comme origine une erreur dans le mot binaire reçu ==> une erreur par exemple d'amplitude sur le signal reçu.

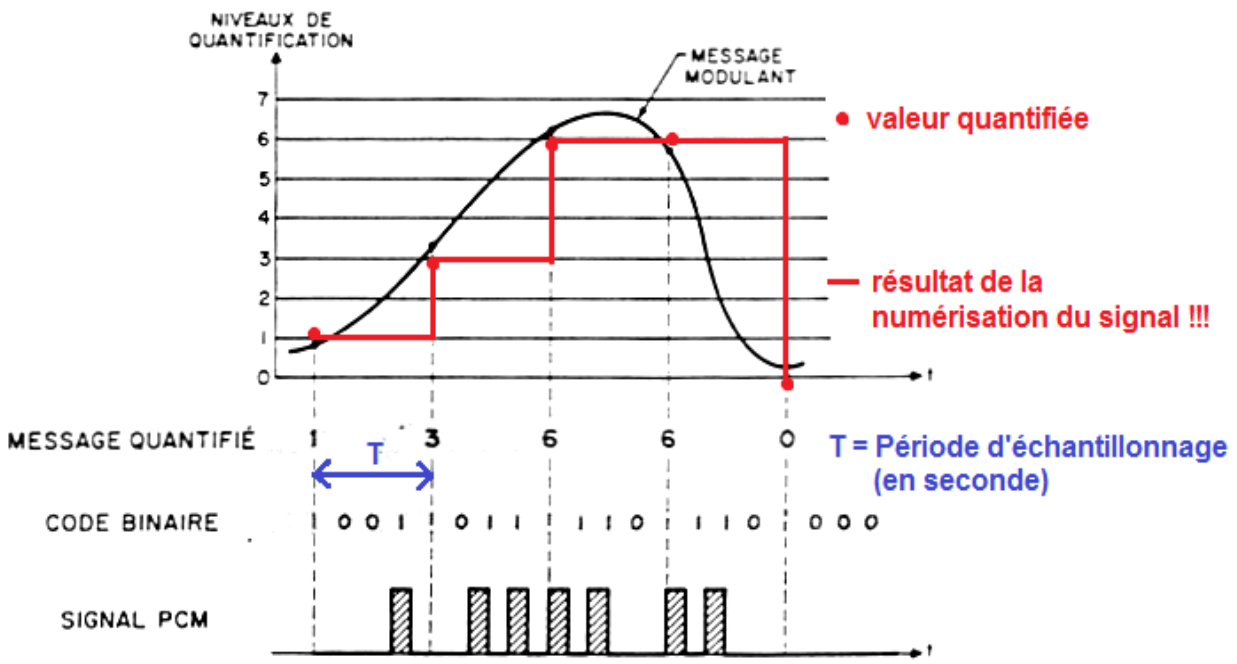
Exemple de niveau de quantification sur 8 bits (==> 256 combinaisons= 2^8) d'un signal pouvant varier de $-2,5V$ à $+2,5$.

mot binaire codé								U_{out} [V]	ΔU_{out} [mV]
MSB							LSB		
0	0	0	0	0	0	0	0	-2.469	21
0	0	0	0	0	0	0	1	-2.448	
0	0	0	0	0	0	1	0	-2.430	18
0	0	0	0	0	0	1	1	-2.410	20
0	0	0	0	0	1	0	0	-2.391	19
0	0	0	0	0	1	0	1	-2.371	20
0	0	0	0	0	1	1	0	-2.351	20
0	0	0	0	0	1	1	1	-2.332	19
0	0	0	0	1	0	0	0	-2.313	19
1	0	0	0	0	0	0	0	0.013	
1	1	1	1	1	1	1	1	2.482	

On constate que l'intervalle de quantification est de $19,5 \text{ mV} = 5/256$.

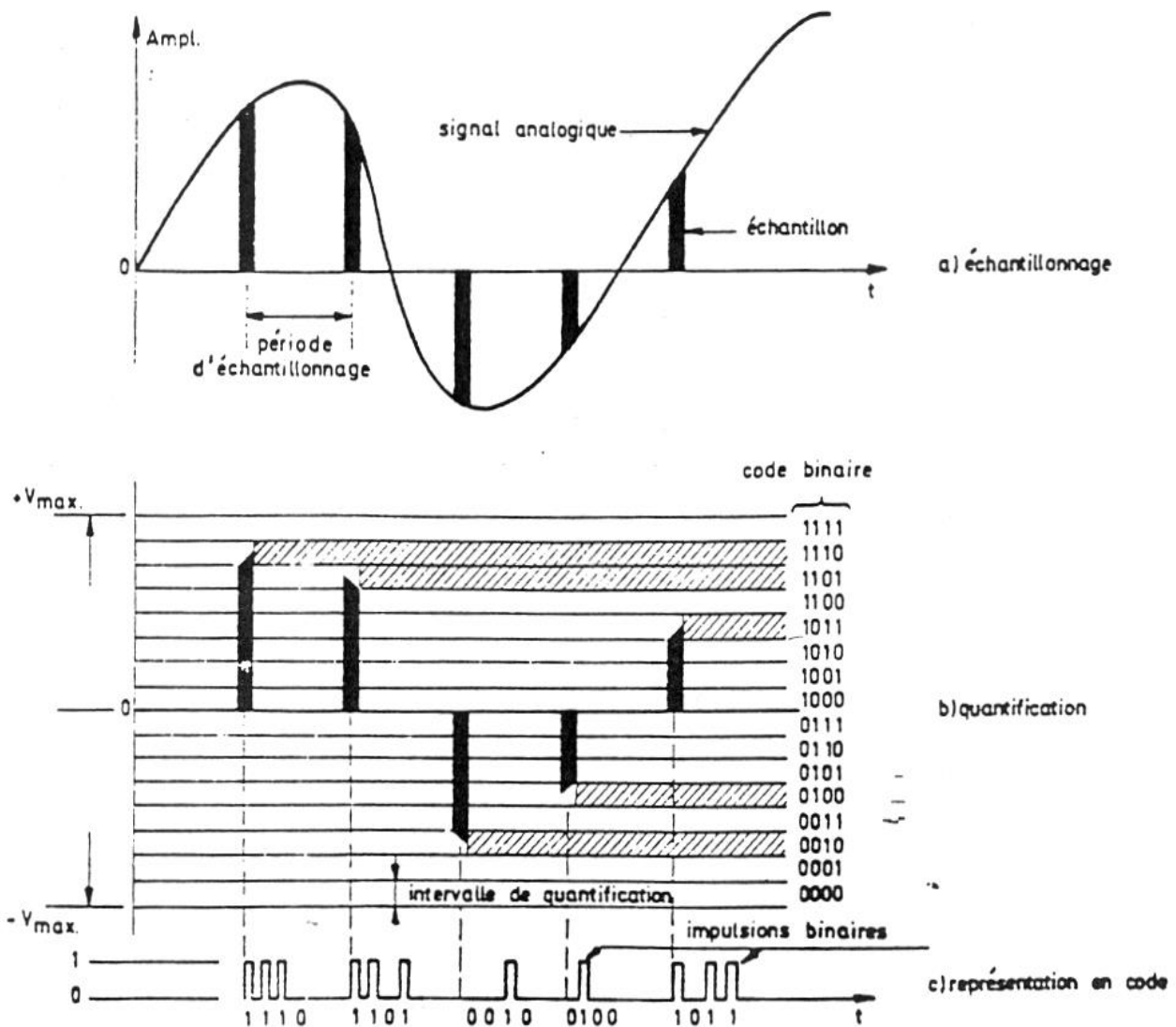
2.3.1.1 Exemple de quantification sur 3 bits = 8 niveaux (cas d'une modulation par impulsions codées PCM)

Code binaire:	0	000
	1	001
	2	010
	3	011
	4	100
	5	101
	6	110
	7	111



La modulation par impulsions codées: PCM.

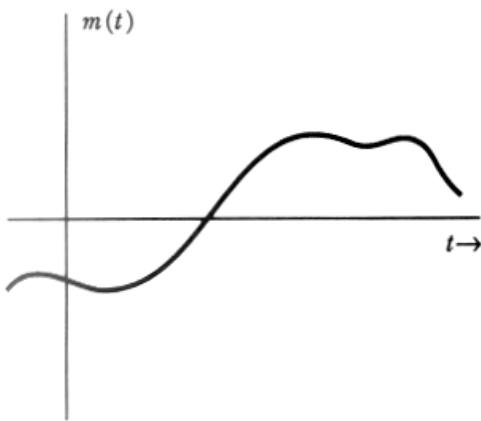
2.3.1.2 Exemple de quantification sur 4 bits =16 niveaux de quantifications



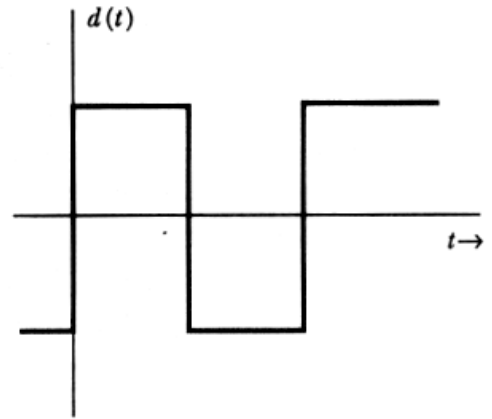
Remarques :

- Dans les communications numériques, le signal est régénéré et répété à intervalles réguliers. Ce dispositif permet de supprimer le bruit et les distorsions accumulés dans le canal de transmission.
- Dans le cas d'une communication de type analogique, le signal est réamplifié à intervalle régulier mais le bruit et les distorsions inhérents au canal de transmission ont tendance à s'accumuler (un filtrage n'est pas suffisant, car ce dernier agit à la fois sur la partie non désirée dans le signal ainsi que sur sa partie utile).
- Les communications actuelles tendent à devenir de plus en plus de type numérique : facilité de traitement, coût du matériel en baisse, facilité de cryptage, grandes possibilités de multiplexage et de compression.

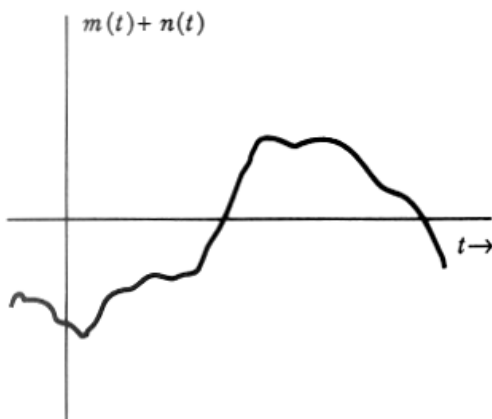
2.3.2 Illustration de l'effet du bruit ($n(t)$) sur un signal analogique et numérique.



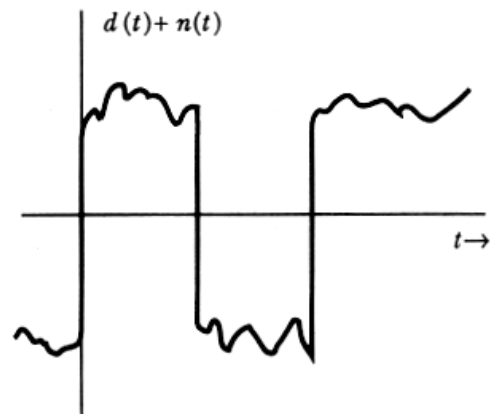
(a) Analog signal



(b) Binary digital signal



(c) Analog signal plus noise



(d) Digital signal plus noise

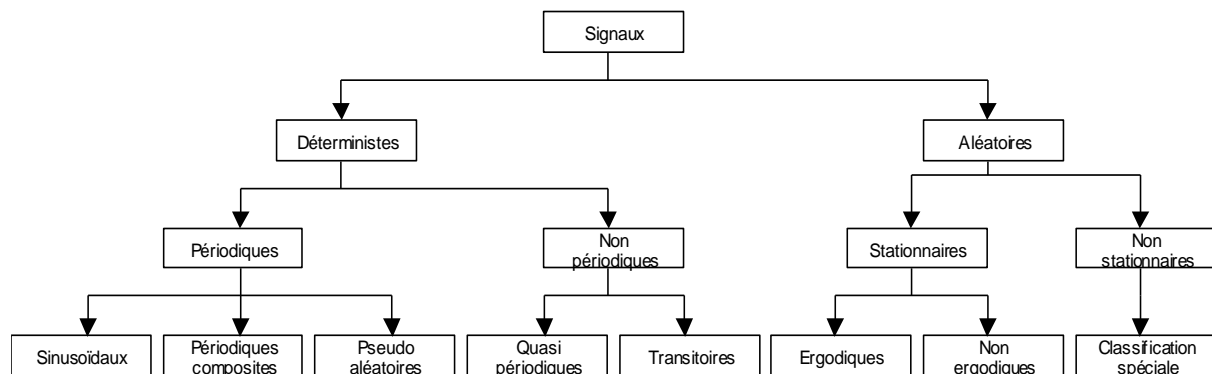
3 Classification des signaux.

Pour contenir ou véhiculer de l'information un signal doit répondre à certaines contraintes.

Il doit présenter :

- Une énergie finie.
- Une amplitude finie.
- Un spectre borné (qui n'existe que dans un intervalle de fréquences bien déterminé).
- Son amplitude doit être une fonction continue du temps.

3.1 Signaux déterministes et aléatoires.

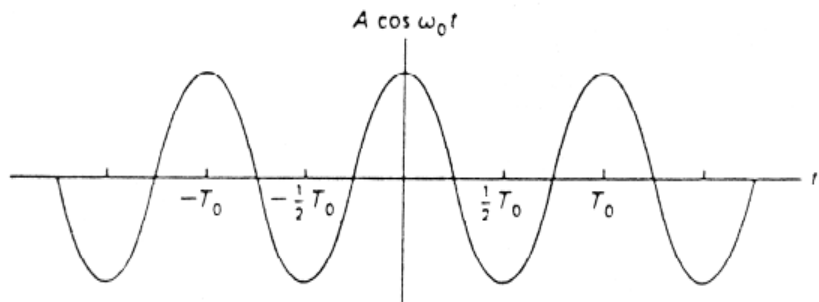


Un signal déterministe est un signal dont l'évolution, en fonction du temps, est prévisible à l'aide d'un modèle mathématique. Un tel signal ne présente aucun intérêt du point de vue information transmise, par contre il est fort intéressant pour tester les dispositifs de transmission.

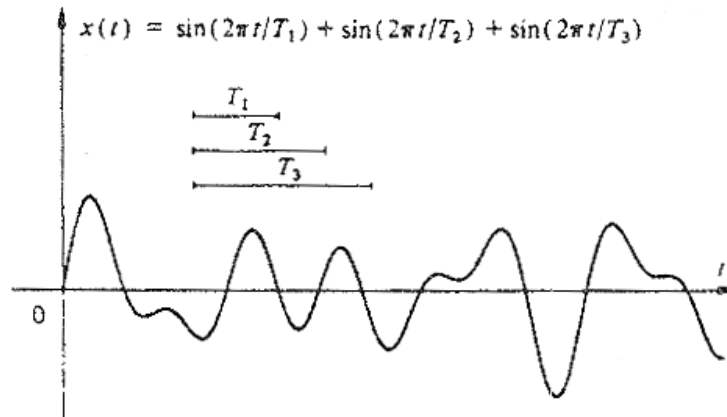
$$y(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi) \quad \text{pour} \quad -\infty < t < +\infty$$

On peut distinguer une sous classe composée de :

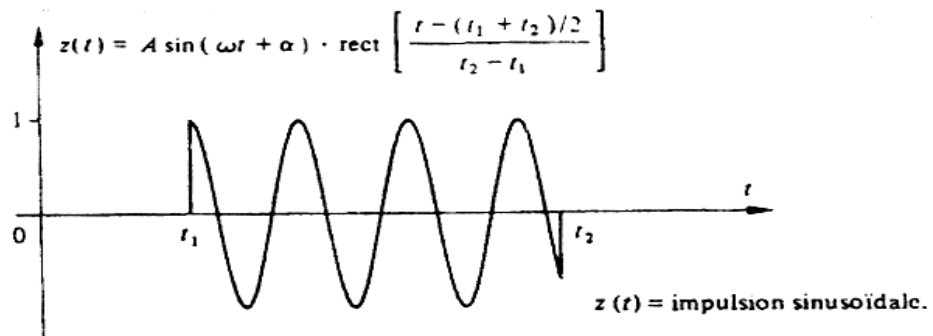
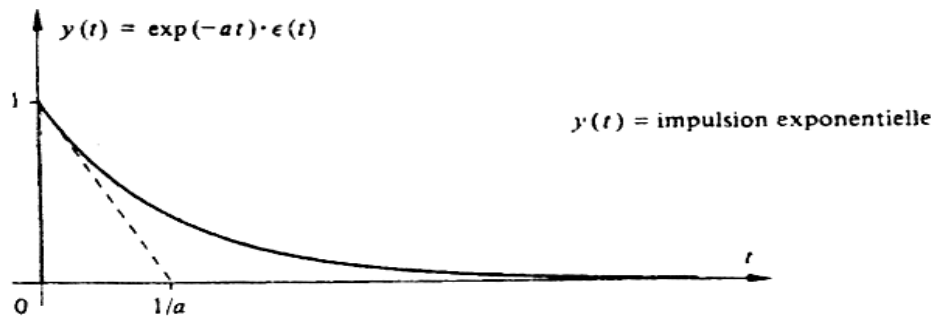
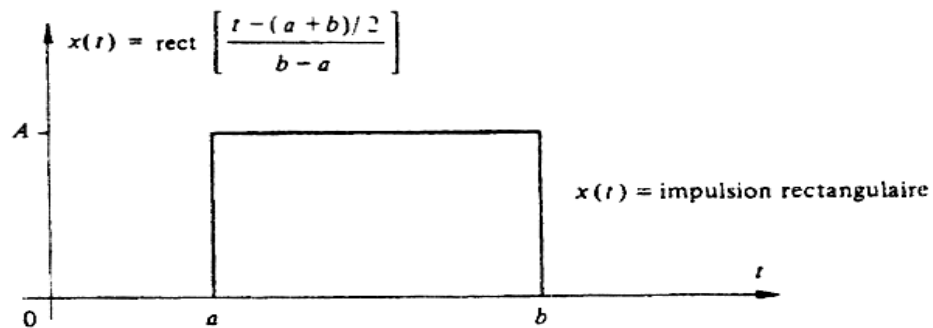
- Signaux périodique.
Répétition à l'infini
d'une séquence fixe où
T représente la période
de ces répétitions
($T=1/f$)



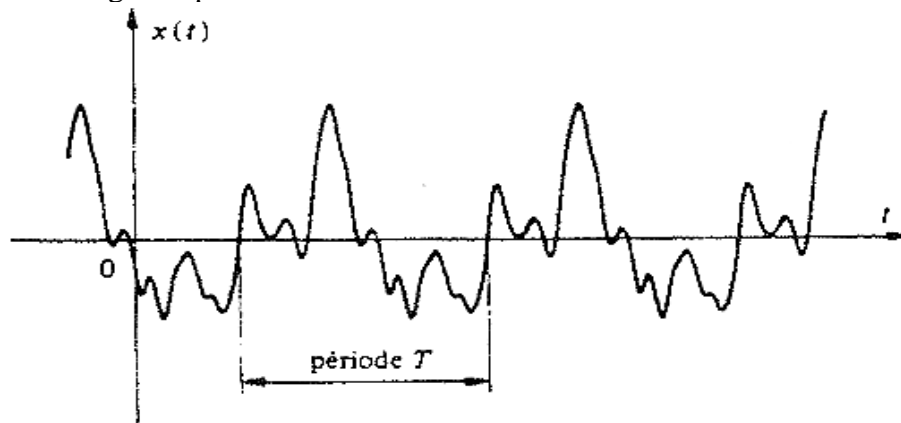
- Signaux apériodique c-à-d sans séquence de répétition fixe. On retrouve dans ce classement :
 - Les signaux pseudo périodique (= somme de sinusoïdes).



- Les signaux transitoires.



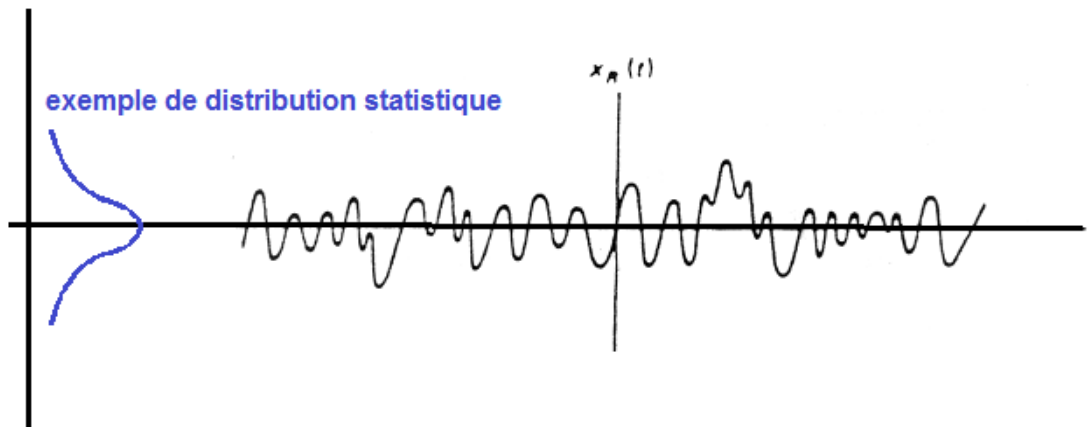
- Les signaux pseudo-aléatoires.



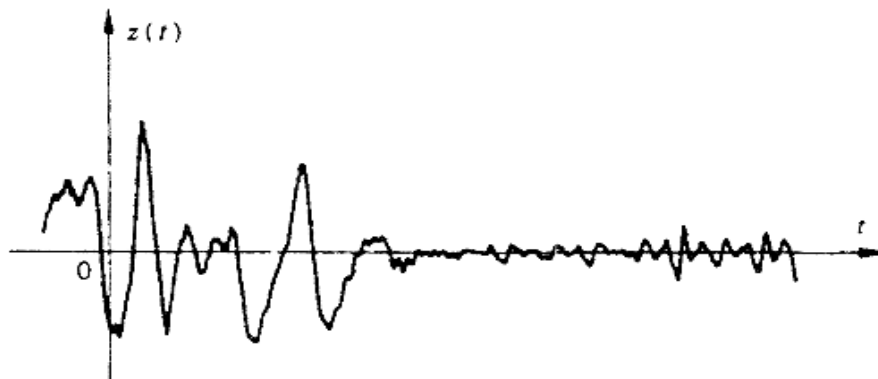
Un signal aléatoire présente un comportement temporel imprévisible. C'est le signal le plus utile et le plus utilisé (la voix humaine). **Les observations de ses fluctuations sont purement statistiques.**

On peut également distinguer deux types :

- Les signaux aléatoires stationnaires. Ces derniers possèdent des caractéristiques statistiques invariables dans le temps.



- Les signaux aléatoires non stationnaires dont les caractéristiques statistiques varient dans le temps. (ces derniers ne seront pas considérés dans ce cours).



3.2 Représentation complexe :

Un signal cosinusoidal et sinusoidal peuvent être représentés sous forme d'une équation complexe.

Formules d'Euler

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$

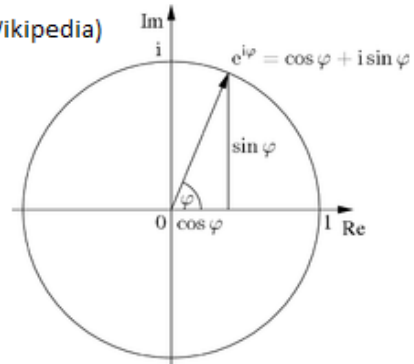
$$e^{-ix} = \cos(x) - i \sin(x)$$

On peut en déduire:

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Illustration (Wikipedia)



$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = 1/(2) \cdot [e^{ix} + e^{-ix}]$$

$$\cos(2\pi ft + \alpha) = \operatorname{Re}[e^{j(2\pi ft + \alpha)}] = \frac{1}{2} \cdot e^{j(2\pi(f)t + \alpha)} + \frac{1}{2} \cdot e^{-j(2\pi(f)t + \alpha)}$$

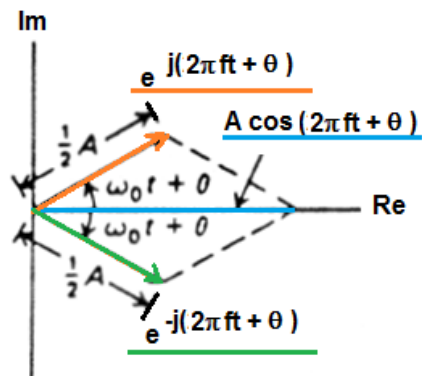
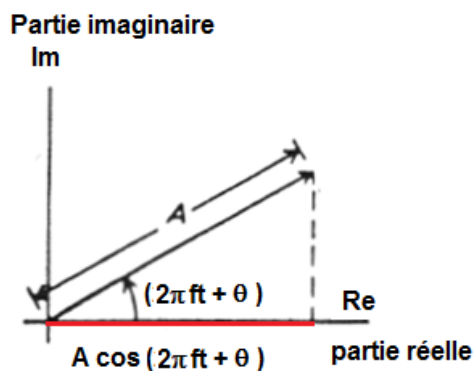
$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = 1/(2j) \cdot [e^{ix} - e^{-ix}]$$

$$\sin(2\pi ft + \alpha) = \operatorname{Im}[e^{j(2\pi ft + \alpha)}] = \frac{1}{2j} \cdot e^{j(2\pi(f)t + \alpha)} - \frac{1}{2j} \cdot e^{-j(2\pi(f)t + \alpha)}$$

Explication graphique.

La figure de gauche ci-dessous présente la rotation de phase d'un signal sinusoidal.

La figure de droite représente la même fonction de départ mais sous forme de l'addition des complexes conjugués.



$$A \cos(2\pi ft + \theta) = \frac{1}{2} A e^{j(2\pi ft + \theta)} + \frac{1}{2} A e^{-j(2\pi ft + \theta)}$$

3.2.1 Remarque importante

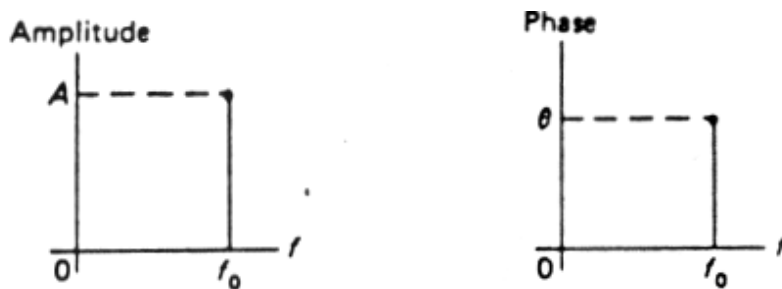
Si on analyse la représentation à l'aide des complexes conjugués, on constate qu'il existe deux parties dans l'équation. **L'une présente une fréquence positive et l'autre une fréquence négative.**

Cette constatation nous permet d'introduire le concept de spectre (représentation fréquentielle d'une fonction) bilatéral.

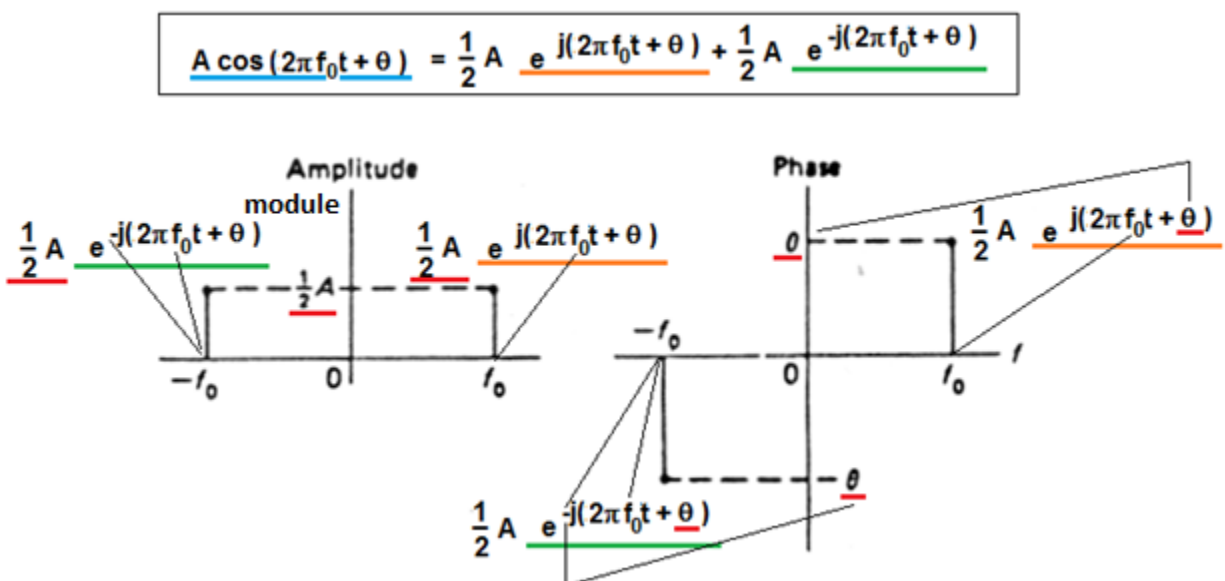
Illustration de la fonction précédente :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$

- Représentation de type « **bande latéral unique** » ou « **single-sided** » (partie positive).



- Représentation à la fois de la partie positive et négative : « **double bande latéral** » ou « **double-sided band** ».



4 Les méthodes d'analyse du signal de Fourier.

L'analyse de Fourier permet la représentation d'un signal non plus sous forme d'un graphique temporel mais sous la forme d'un graphique fréquentiel. Ce n'est donc plus **une analyse** d'un signal dans le domaine temporel mais **dans le domaine fréquentiel**.

Cette technique est très importante dans l'étude des signaux pour les raisons suivantes :

- Il est possible d'établir des conclusions dans le domaine fréquentiel qu'ils seraient très difficiles à déterminer voir impossible dans le domaine temporel.
- La localisation d'un signal dans une bande de fréquences peut être facilement déplacée grâce à cet outil.
- Les signaux peuvent être également séparés fréquemment grâce à des filtres et replacés dans un certain ordre afin d'être transmis en même temps au travers du même canal (FDM).
- La répartition des signaux dans le domaine fréquentiel est sévèrement régularisée (IBPT : Institut Belge des Poste et Télégraphe).

4.1 Quelques notions de bases.

4.1.1 Energie d'un signal.

Rappel :

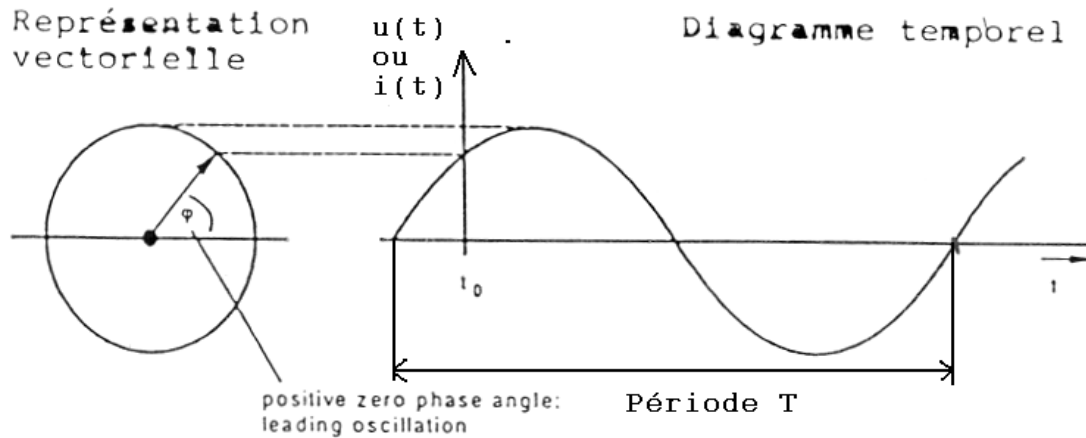
Energie a comme unité le **Joule**.

Le Joule est l'énergie consommée par une résistance de 1 Ohm soumis à une différence de potentielle de 1 Volt durant une période de 1 Seconde. La notion d'énergie est fonction du temps.

$$\begin{aligned} \text{Energie} &= RI^2t = \frac{U^2}{R}t = P.t \\ E &= R \int_t^{t+T} i^2(t) dt = \frac{1}{R} \int_t^{t+T} u^2(t) dt = \int_t^{t+T} p(t) dt \end{aligned}$$

L'unité de l'énergie est le Joule

La formule précédente représente l'énergie consommée durant une période T par une résistance R soit parcourue par un courant variable $i(t)$ soit soumis à une tension variable $u(t)$.



Si pour un signal réel $x(t)$ de type tension ou courant, les formules précédentes se résument :

$$E = \int_t^{t+T} x^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad \text{Joules}$$

L'énergie totale dissipée pour le signal $x(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad \text{Joules}$$

Tous les signaux réels transitoires, périodiques, aussi bien déterministes qu'aléatoires sont des signaux à énergie finie (c-à-d bornée).

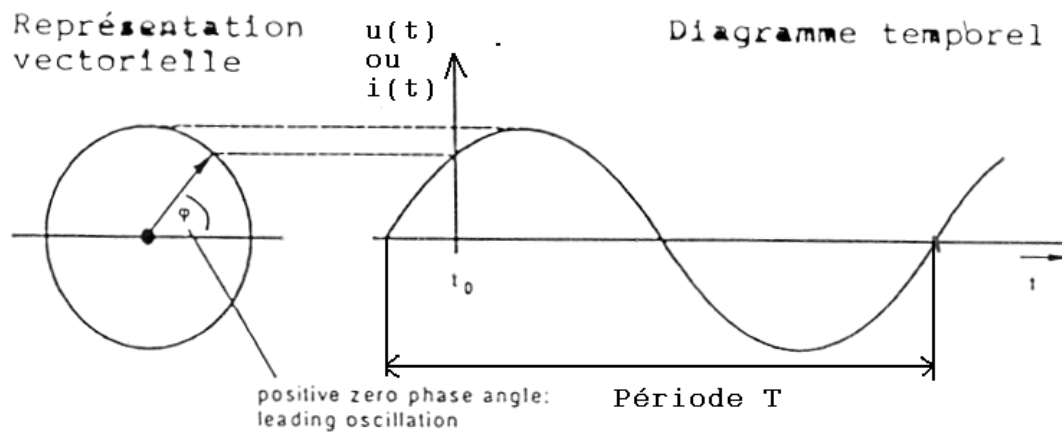
4.1.2 Puissance d'un signal.

Le Watt est une puissance instantanée délivrée par une résistance de 1 Ohm lorsqu'une différence de potentielle de 1Volt est appliquée à ses bornes :

$$\text{Puissance } P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

$$P = \frac{R}{T} \int_t^{t+T} i^2(t) dt = \frac{1}{RT} \int_t^{t+T} u^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(t) dt \quad \text{Watts}$$

La formule précédente représente la puissance moyenne déployée durant une période T par une résistance R soit parcourue par un courant variable $i(t)$ soit par une tension variable $u(t)$.



Si pour un signal réel $x(t)$ de type tension ou courant les formules précédentes se résument :

$$P_{\text{moyenne sur une période } T} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad \text{Watts}$$

Puissance moyenne totale d'un signal $x(t)$:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad \text{Watts}$$

Pour un signal périodique de période T_0 , la puissance peut être calculée sur une seule période :

$$P = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} x^2(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{+\frac{T_0}{2}} x^2(t) dt \quad \text{Watts}$$

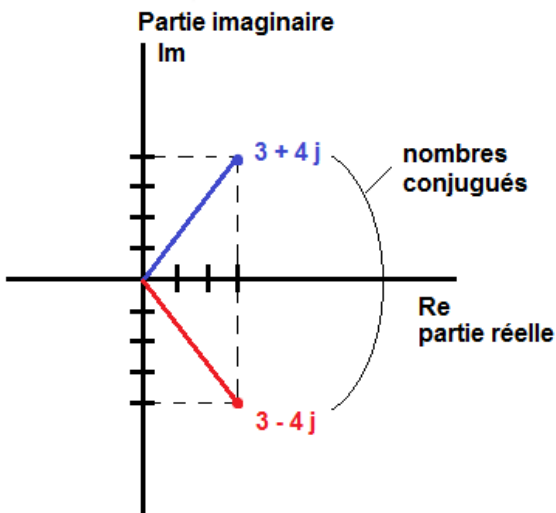
Remarque importante :

La fonction $x^2(t)$ n'est valable que pour des signaux réels. Pour des signaux complexes, on aura :

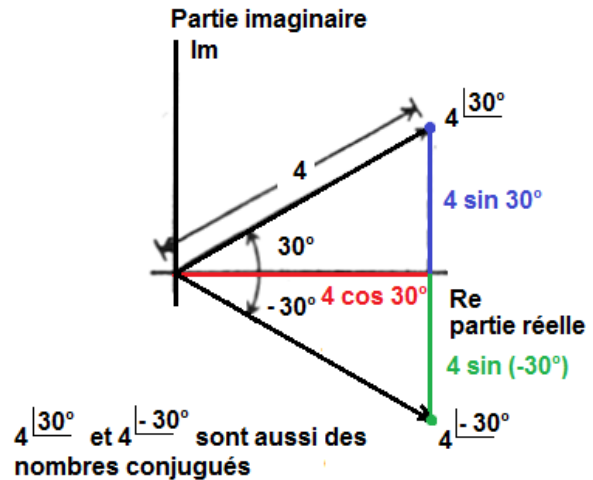
$$|x^2(t)| \text{ ou } x(t) \cdot x^*(t) \quad (x^*(t)) \text{ est le conjugué de } x(t))$$

Rappel : le conjugué en complexe

**Représentation
cartésienne / rectangulaire**



**Représentation
polaire**



En résumé :

Pour un signal d'énergie finie on aura :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt < \infty \quad \text{Joules}$$

$$P_{moyenne} = 0$$

Pour un signal à puissance moyenne finie non nulle, on aura :

$$P_{moyenne} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t) dt \quad \text{Watts}$$

$$E = \infty$$

4.2 Quelques signaux utiles.

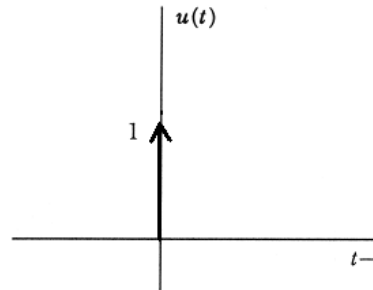
4.2.1 L'impulsion de Dirac.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t) \cdot dt = x(0)$$

où $x(t)$ est continue en $t=0$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1 \text{ avec } t_1 < 0 < t_2$$

$\rightarrow \delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$

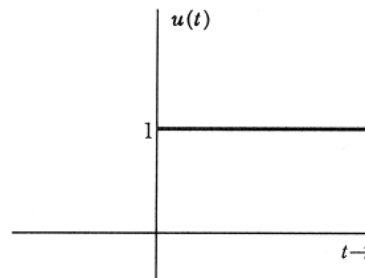


4.2.2 La fonction échelon ou seuil de Heaviside.

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$$

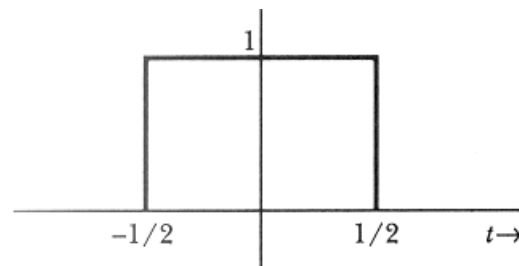
$$u(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$1 \text{ si } t \geq 0$$



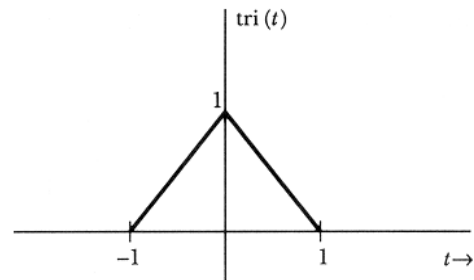
4.2.3 L'impulsion rectangle.

$$\begin{aligned} \text{Rect}(t) &= 1 \text{ pour } -1/2 < t < 1/2 \\ &= 0 \text{ pour le reste.} \end{aligned}$$



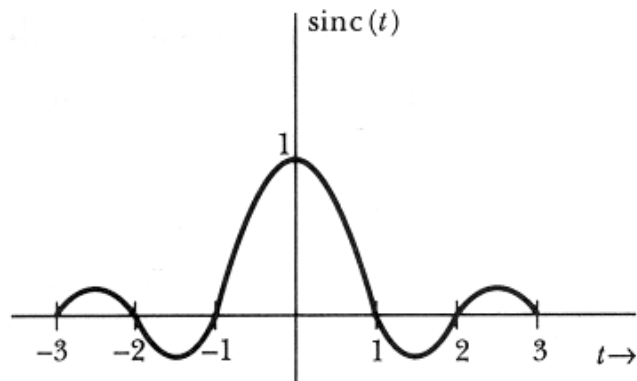
4.2.4 L'impulsion triangle.

$\text{Tri}(t) = 1 - |t|$ pour $-1 < t < 1$
 $= 0$ pour le reste.



4.2.5 L'impulsion sinc

$$\text{sinc } t = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$



4.3 Les séries de Fourier.

Les séries de Fourier sont des outils permettant l'analyse de signaux dans le domaine des fréquences.

Pour un signal périodique $x(t)$ d'énergie finie:

défini dans un intervalle t_0, t_0+T (autrement dit pour une période T du signal $x(t)$)

$$\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t} \text{ avec } n = 0, +1, -1, +2, -2, \dots \text{ et } \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \phi_m(t) \phi_n^*(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = T_0 \text{ si } m = n$$

$$= 0 \text{ si } m \neq n$$

\Rightarrow ce qui correspond à un ensemble orthogonal complet sur l'intervalle $t_0, t_0 + T_0$

On a :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn\omega_0 t} \text{ pour } t_0 < t < t_0 + T_0$$

$$X_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Remarques.

- La décomposition d'un signal en séries de Fourier est unique.
- Si $x(t)$ est un signal réel, on a que :

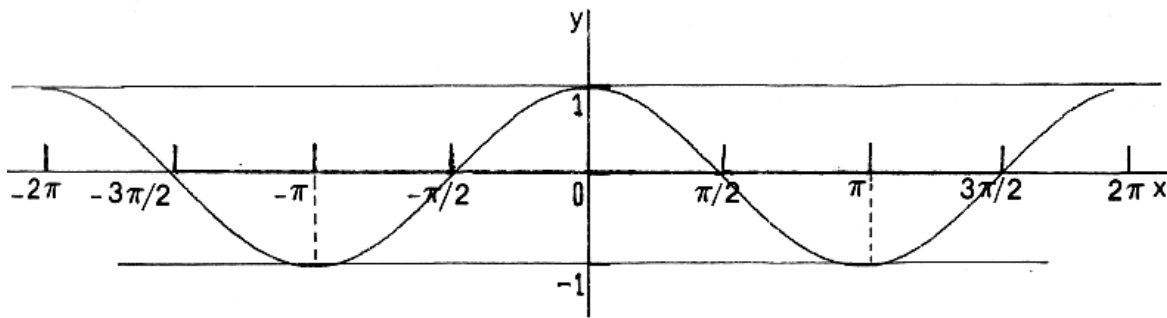
$$X_{-n} = X_n^* \Rightarrow |X_{-n}| = |X_n| \text{ et } \arg X_{-n} = -\arg X_n.$$

- Le coefficient d'indice $n=0$ est une constante car l'exponentiel vaut alors 1 ($e^0=1$). Ce coefficient représente donc la composante continue du signal ou sa valeur moyenne.

4.3.1 Cas de signaux paires et impaires :

*Un signal est pair si $x(t)=x(-t)$

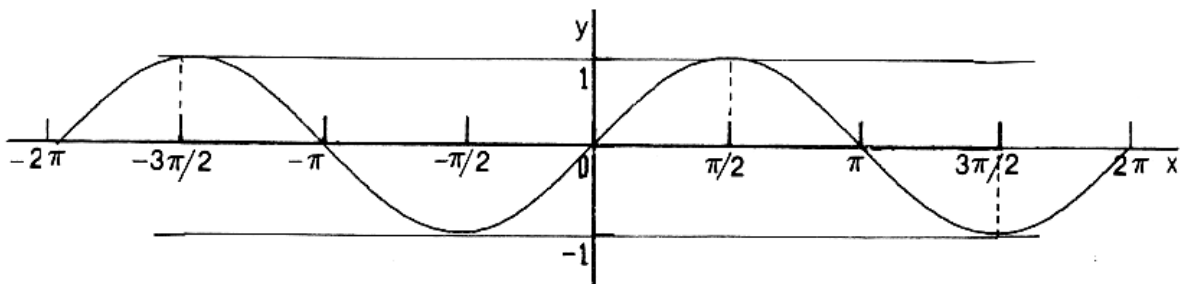
Exemple $y = \cos x$



→ si $x(t)$ est pair et réel, on a aussi $X_{-n}=X_n \rightarrow X_n$ est pair et réel

*Un signal est impair si $x(t)=-x(-t)$

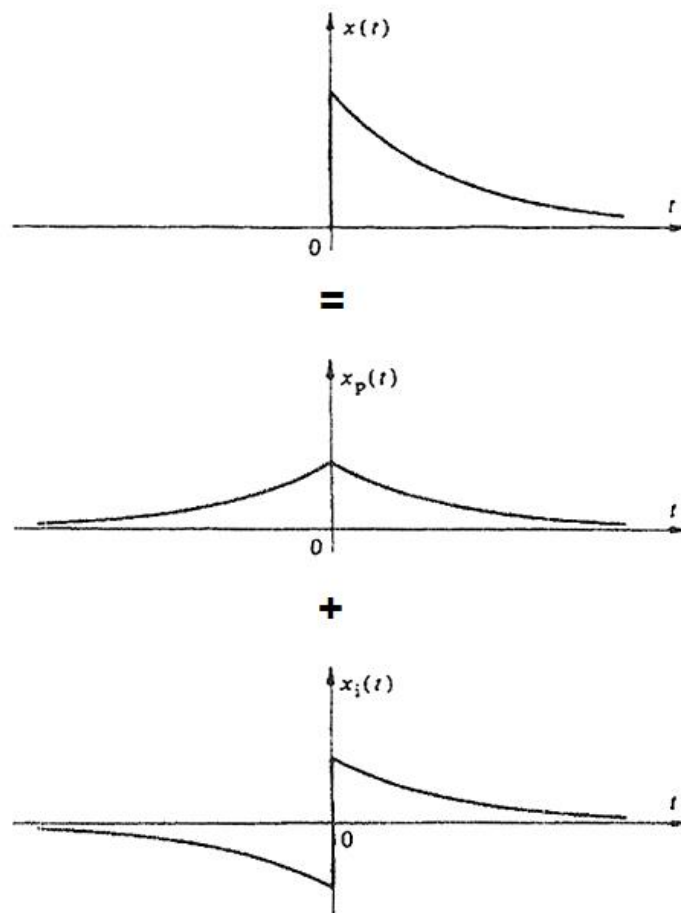
Exemple $y = \sin x$



→ si $x(t)$ est impair et réel, on a aussi $X_{-n}=-X_n \rightarrow X_n$ est impair et imaginaire

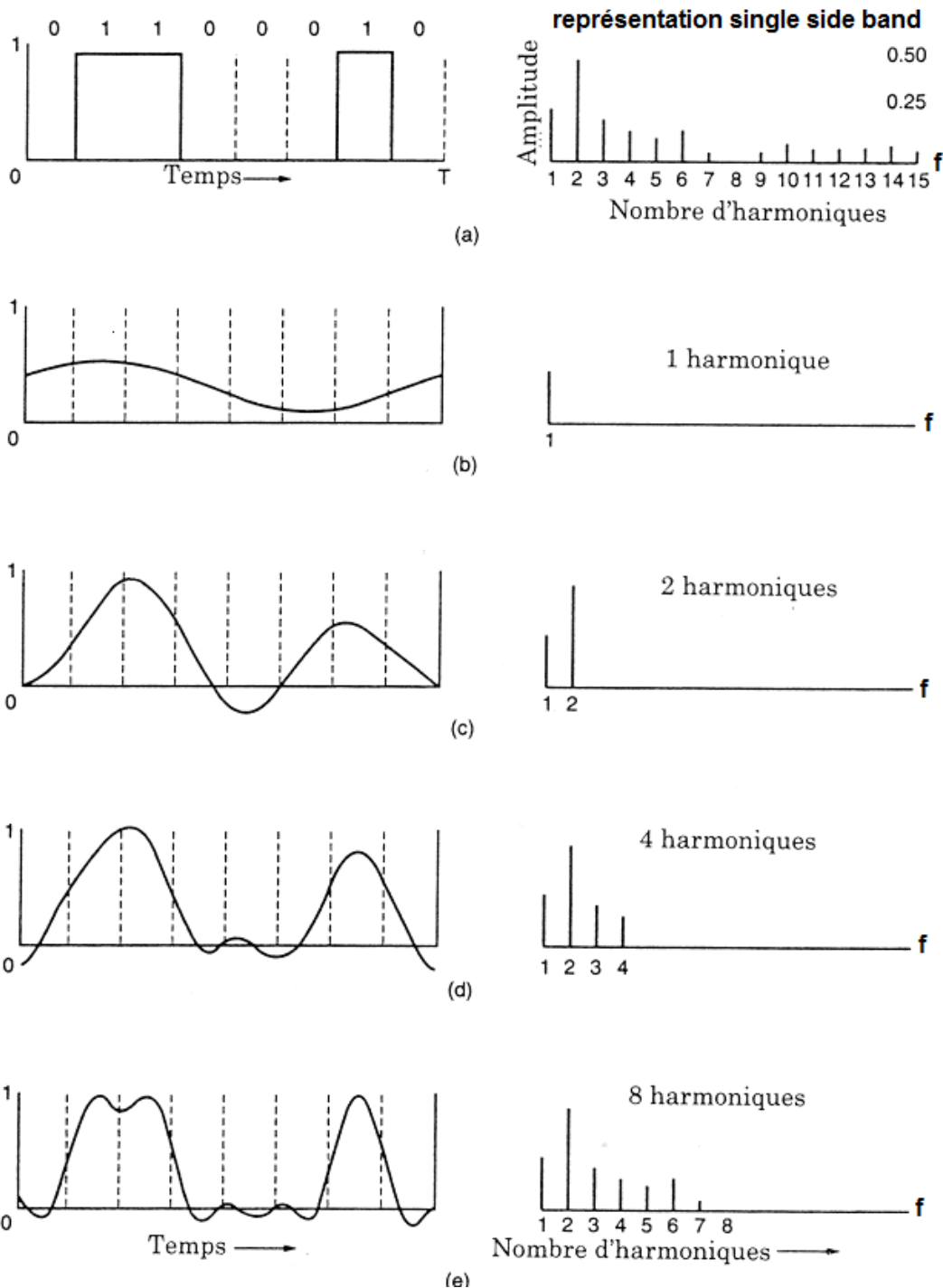
Propriété :

Tout signal $x(t)$ quelconques peut être décomposé en parties paire $x_p(t)$ et impaire $x_i(t)$.



4.3.2 Exemple de décomposition d'un signal numérique.

La figure suivante illustre la décomposition en série de Fourier d'un signal numérique.
 La figure a représente les composantes harmoniques du signal numérique.
 Les autres figures représentent une approximation du signal numérique en fonction du nombre d'harmoniques prises en considération pour sa restitution.



Traitement du signal - Analyse et transmission des signaux

Si toutes les harmoniques subissent un affaiblissement lors de la transmission, le signal à la réception serait réduit en amplitude sans pour autant être déformé.

Par contre si canal de transmission à une bande passante limitée (exemple la bande passante du téléphone: 300 à 3400Hz), toutes les harmoniques ne se retrouveront pas nécessairement du côté du récepteur ou certaines seront atténuées → déformation du signal utile d'autant plus importante que le nombre d'harmoniques restantes sera faible.

Le temps T nécessaire à la transmission d'un caractère sur le canal dépend de la :

- méthode de codage,
- rapidité de transmission des signaux, (du nombre de fois par seconde où le signal change de valeur : les bauds).

Rappel : le nombre de baud n'est pas toujours égale au nombre de bits par seconde car chaque valeur du signal peut regrouper plusieurs bits.

Pour un débit de b bits/s, le temps pour transmettre les 8 bits d'un caractère sera de $8/b$ → une fréquence de $b/8$ Hz pour la première harmonique.

Par conséquent, dans une ligne téléphonique limité volontairement à 3000Hz, le nombre d'harmonique possible lors de la transmission sera égale à $3000/b/8 = 24000/b$

Si on désire transmettre à 9600bit/s sur une ligne téléphonique, on recevrait un signal similaire au graphique c de la figure précédente.

Il paraît évident que pour un débit supérieur à 38400bits/s, nous n'obtiendrons aucun signal à la réception.

Le tableau suivant illustre la relation entre le débit binaire et les harmoniques.

Débit (bit/s)	Période (T, ms)	Première harmonique (f, Hz)	Nombre d'harmoniques transmises
300	26,67	37,5	80
600	13,33	75	40
1 200	6,67	150	20
2 400	3,33	300	10
4 800	1,67	600	5
9 600	0,83	1 200	2
19 200	0,42	2 400	1
38 400	0,21	4 800	0

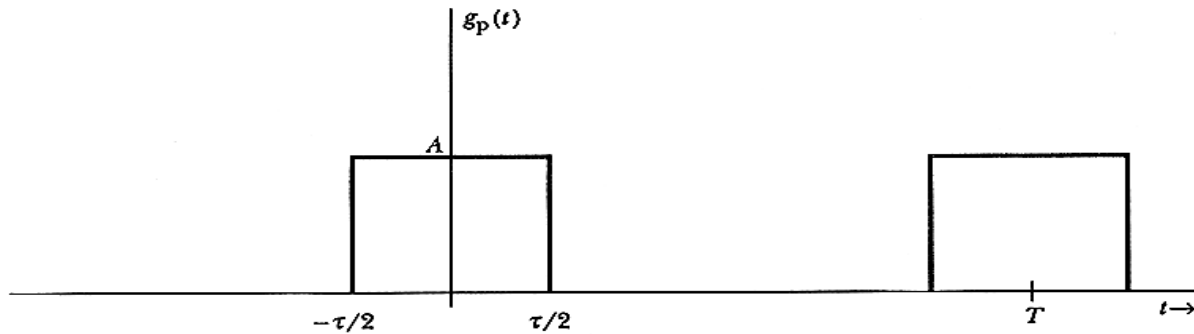
$$8/\text{débit}$$

$$\text{débit}/8$$

$$3000/\text{fréq. 1}^{\text{ère}} \text{ harmonique}$$

4.3.3 Décomposition en séries de Fourier d'un train d'impulsions rectangulaires

4.3.3.1 Exemple1 : impulsion rectangulaire centré sur l'axe des ordonnées :

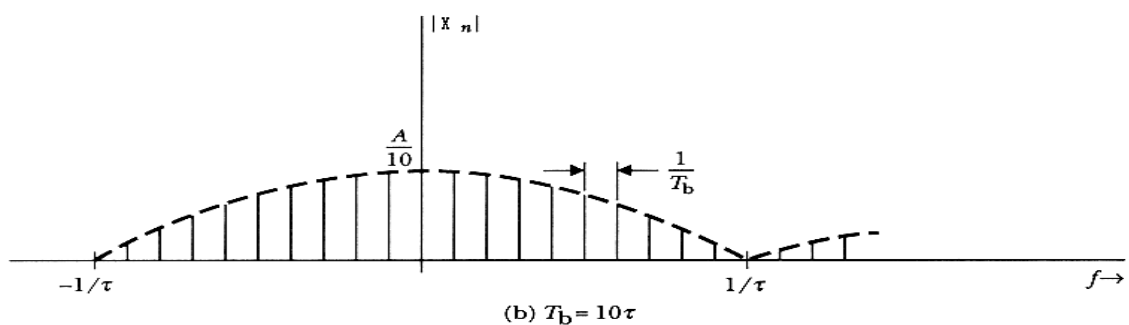
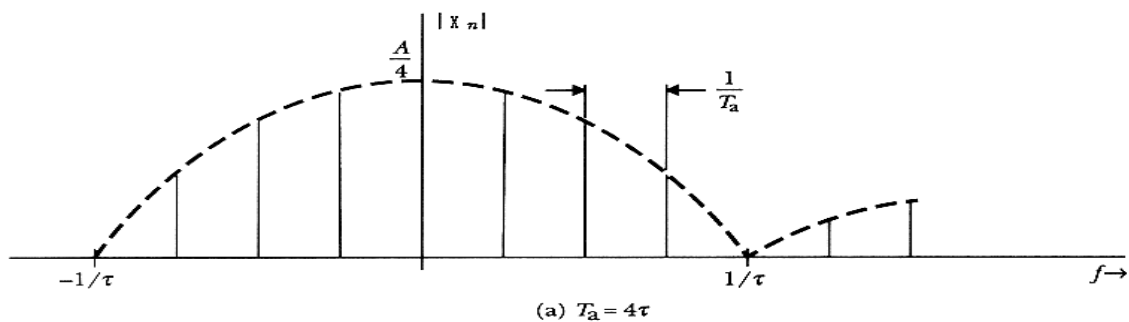


$$\text{soit } g_p(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t-kT}{\tau}\right)$$

$$\text{Après calculs, les coefficients } X_n = A \frac{\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau}{T}\right) e^{-j2\pi n \frac{\tau}{T}}$$

$$\text{Sachant que } T = \frac{1}{f} \text{ et } \tau = \frac{1}{f_1}$$

$$\text{On aura: } X_n = A \frac{f}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{nf}{f_1}\right) e^{-j2\pi n \frac{f}{f_1}}$$



Remarques :

- La représentation de la valeur de X_n pour $n=0$ s'appelle la fondamentale ou l'harmonique d'ordre zéro. C'est aussi la valeur de la composante DC du signal. Comme $\text{sinc}(0)=1$, l'expression de X_n devient :

$$X_n = A \frac{\tau_a}{T} \text{sinc}\left(\frac{n\tau_a}{T}\right)$$

$$\text{Comme } T = 4\tau_a \Rightarrow \tau_a = \frac{T}{4}$$

$$X_0 = A \frac{T}{4.T} = \frac{A}{4}$$

- Pour la figure a, on constate que la quatrième harmonique n'existe pas. En effet, l'exposant de l'exponentiel vaut alors 1 et comme $e^1 \neq 0 \rightarrow X_n$ pour $n=4$ vaut zéro.

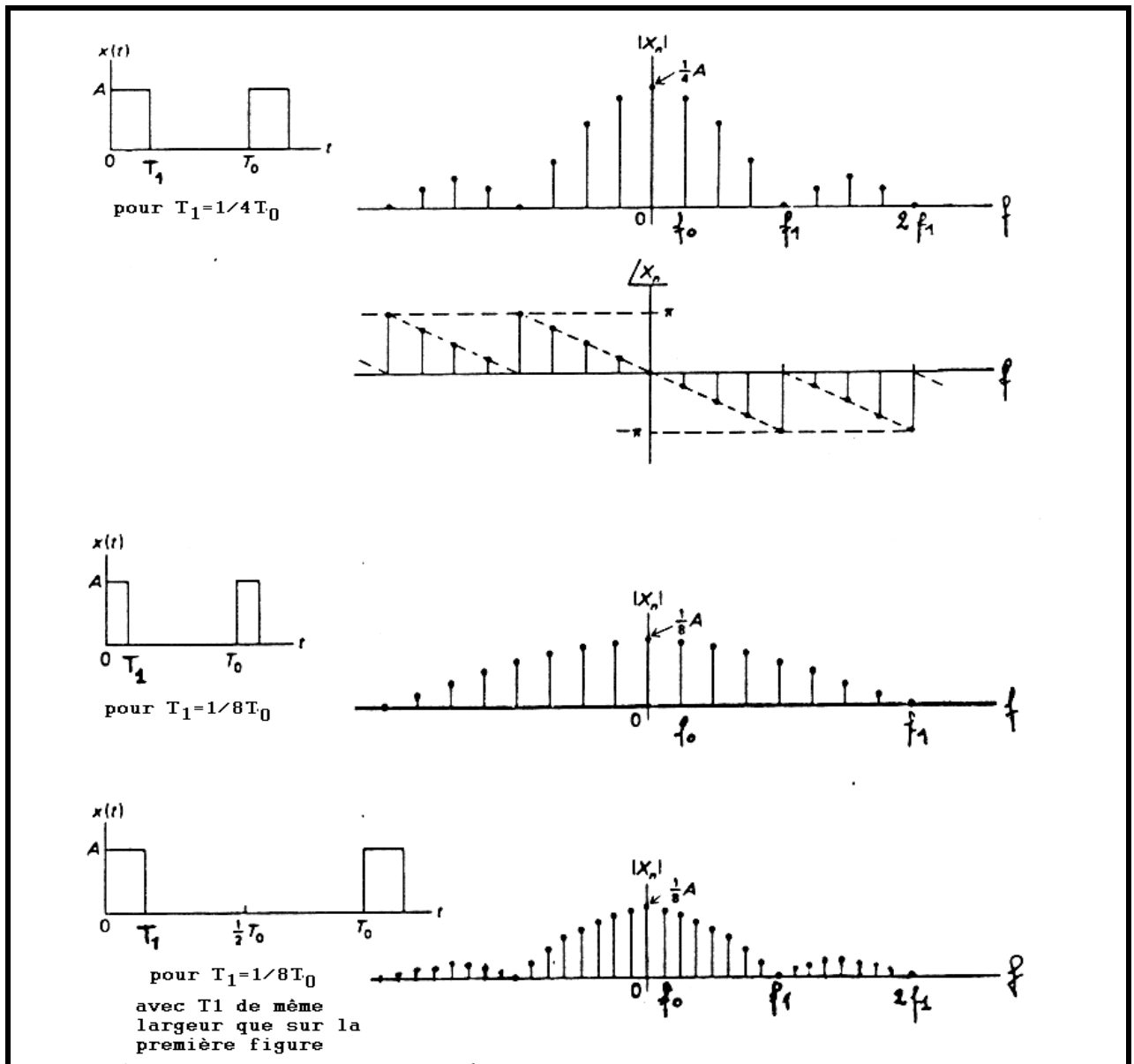
4.3.3.2 Exemple 2 : même signal que précédemment mais décentré (retard d'une demi largeur d'impulsion)

$$\text{soit } x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - kT_0}{T_1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Après calculs, les coefficients } X_n = A \frac{T_1}{T_0} \text{sinc}\left(\frac{nT_1}{T_0}\right) \cdot e^{-j\pi n \frac{T_1}{T_0}}$$

$$\text{Sachant que } T_0 = \frac{1}{f_0} \text{ et } T_1 = \frac{1}{f_1}$$

$$\text{On aura : } X_n = A \frac{f_0}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{nf_0}{f_1}\right) \cdot e^{-j\pi n \frac{f_0}{f_1}}$$



4.3.4 Théorème de Parseval.

La puissance moyenne d'un signal est égale à la somme des modules au carré de tous les coefficients des séries de Fourier:

$$P_{\text{moyenne}} = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |X_n|^2$$

Remarques :

Cas particulier pour $n=0$, $|X_0|$ est la puissance associée à la composante continue.

La somme $|X_{-n}|^2 + |X_n|^2$ est la puissance associée à l'harmonique d'indice n .

4.3.5 La transformée de Fourier .

- **La transformée de Fourier** peut être appliquée notamment à plusieurs signaux intéressants dans l'étude des systèmes de communication.

La transformée de Fourier appliquée à une fonction du temps $x(t)$ est définie comme suit :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad \text{en } V / Hz$$

si le signal $x(t)$ a comme unité des volts

Cette transformée permet donc de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel.

- **La transformée inverse.**

Comme on l'indique, elle effectue l'opération inverse de la précédente. **Elle permet donc de passer du domaine fréquentiel au domaine temporel.**

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df \quad \text{en } V$$

Si $x(t)$ est réel, on a :

- $|X(f)| = |X(-f)|$
- $\arg X(f) = -\arg X(-f)$.

Notation permettant d'illustrer la transformée directe et inverse de Fourier :

$$x(t) \leftrightarrow X(f)$$

4.3.6 Théorème de Rayleigh.

Permet de spécifier la densité spectrale d'énergie (Volt/Hertz)² ou Joule/Hertz :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

$$G(f) = |X(f)|^2$$

4.3.7 Propriétés de la transformée de Fourier.

Property	Time domain	Frequency domain
Linearity	$a_1 g_1(t) + a_2 g_2(t)$	$a_1 G_1(f) + a_2 G_2(f)$
Time shift	$g(t - t_0)$	$G(f) \exp(-j2\pi f t_0)$
Scaling	$g(at)$	$\frac{1}{ a } G(f/a)$
Duality	$G(t)$	$g(-f)$
Modulation	$g(t) \exp(j2\pi f_0 t)$ $g(t) \cos(2\pi f_0 t + \theta)$	$G(f - f_0)$ $\frac{1}{2} \exp(j\theta) G(f - f_0)$ $+ \frac{1}{2} \exp(-j\theta) G(f + f_0)$
Differentiation	$\frac{dg(t)}{dt}$	$(j2\pi f) G(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^t g(x) dx$	$\frac{G(f)}{(j2\pi f)} + \frac{1}{2} G(0) \delta(f)$
Convolution	$g_1(t) \otimes g_2(t)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) g_2(t - x) dx$ $= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) g_1(t - x) dx$	$G_1(f) G_2(f)$
Parseval's theorem	$E = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$	$E = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) ^2 df$
Multiplication	$g_1(t) g_2(t)$	$G_1(f) \otimes G_2(f)$ $= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda) G_2(f - \lambda) d\lambda$ $= \int_{-\infty}^{\infty} G_2(\lambda) G_1(f - \lambda) d\lambda$
Multiplication by t^n	$t^n g(t)$	$\left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \frac{d^n}{df^n} [G(f)]$

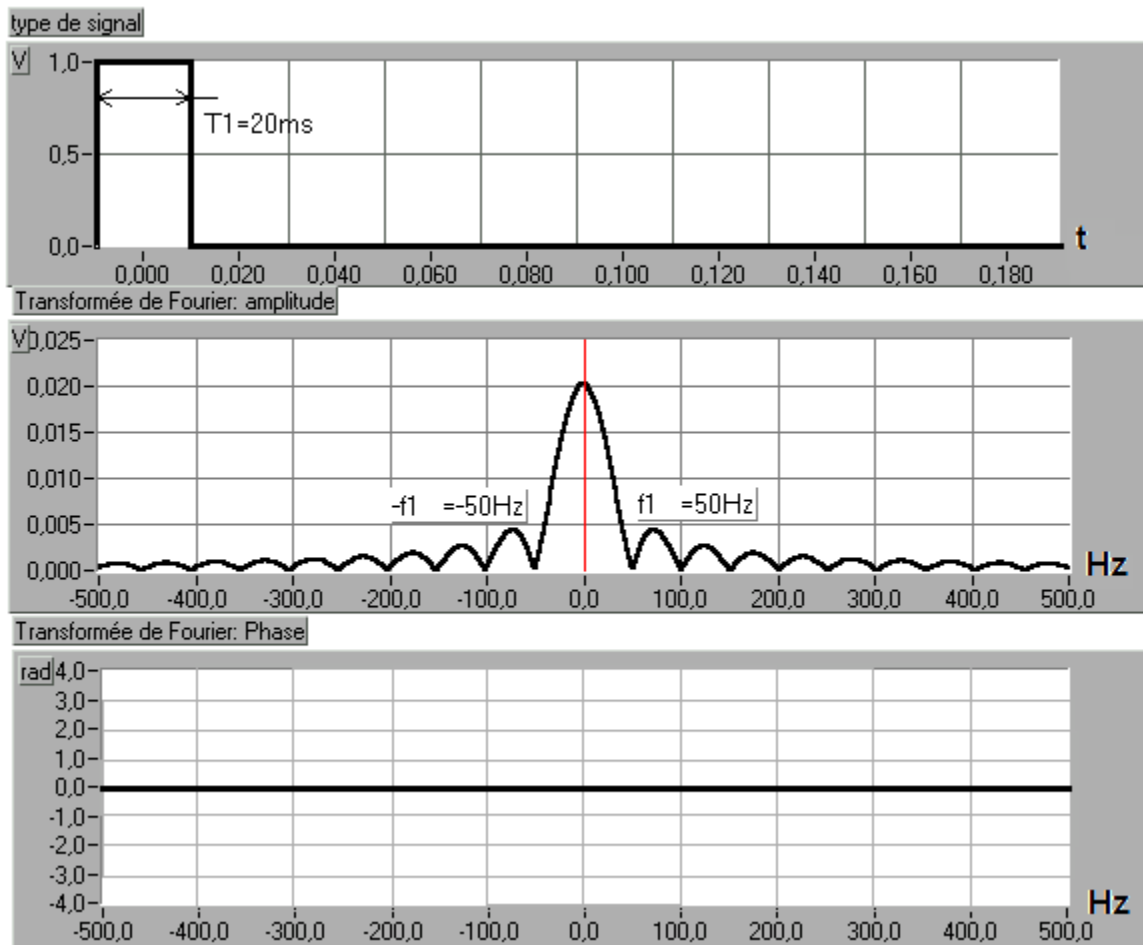
4.3.7.1 Exemple du principe de dualité.

$$X(t) \leftrightarrow x(-f)$$

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Amplitude de l'impulsion rectangulaire : 1V

Largeur de l'impulsion : $T_1=20\text{ms} \rightarrow f_1=50\text{Hz}$



L'amplitude de la fonction sinc : $\frac{A}{f_1} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ V}$

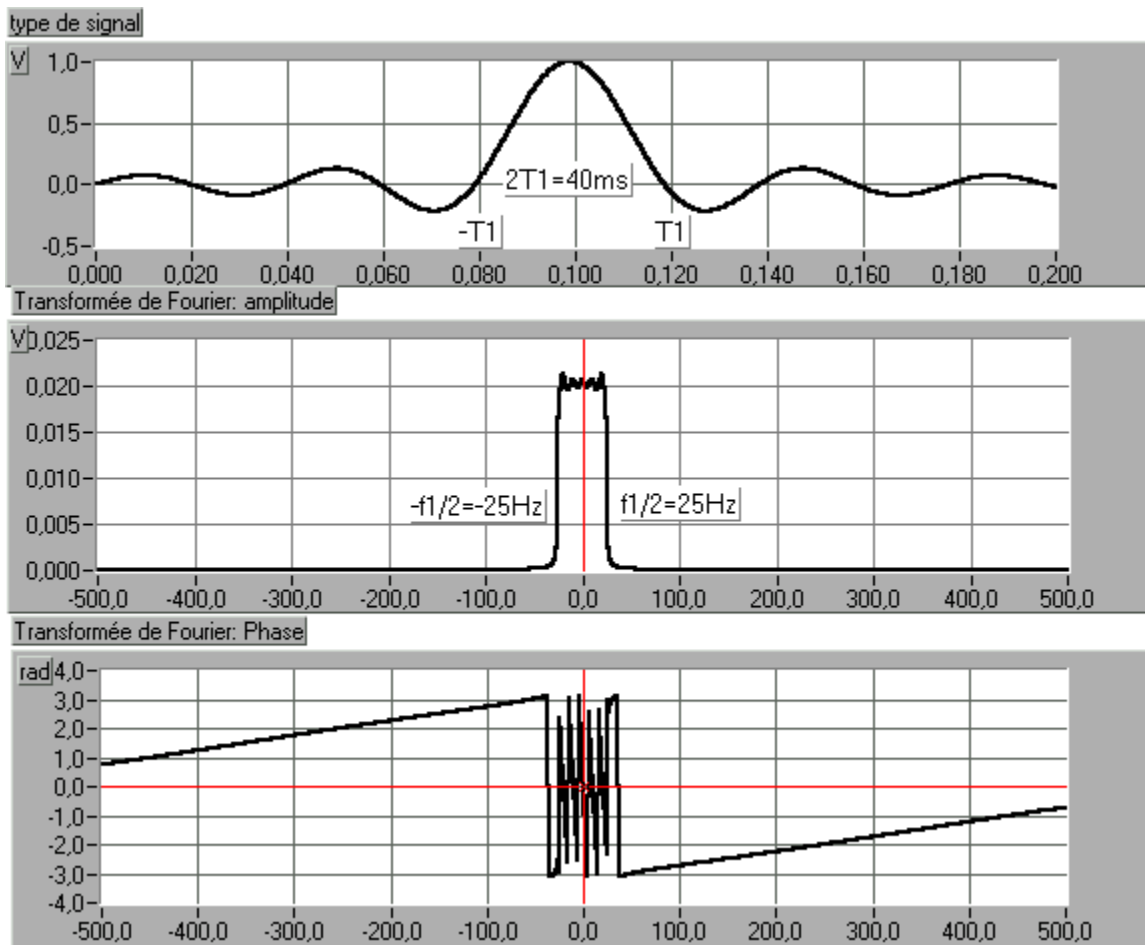
La largeur de la fonction sinc : $f_1=100\text{Hz}$

$$A \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \operatorname{rect}\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Amplitude de la fonction sinc : 1V

La largeur de la fonction sinc : $T_1=20\text{ms}$ (représente la demi largeur du lobe principal.)

→ $f_1=50\text{Hz}$.

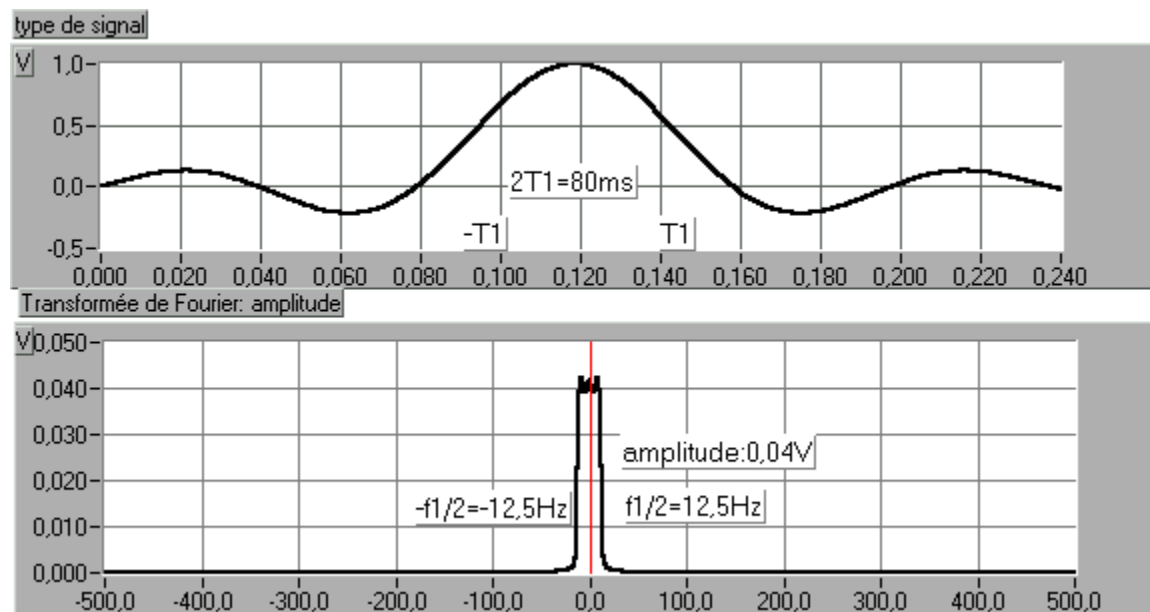
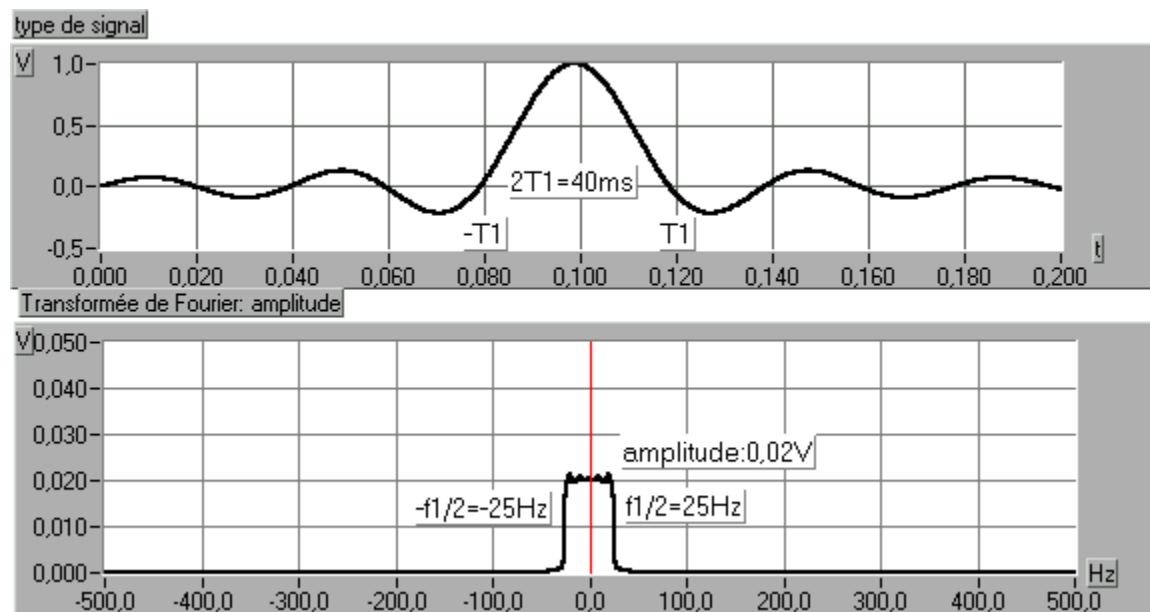


L'amplitude de l'impulsion rectangulaire : $\frac{A}{f_1} = \frac{1}{50} = 0,02 \text{ V}$

La largeur de l'impulsion rectangulaire : $25.2=50\text{Hz}$

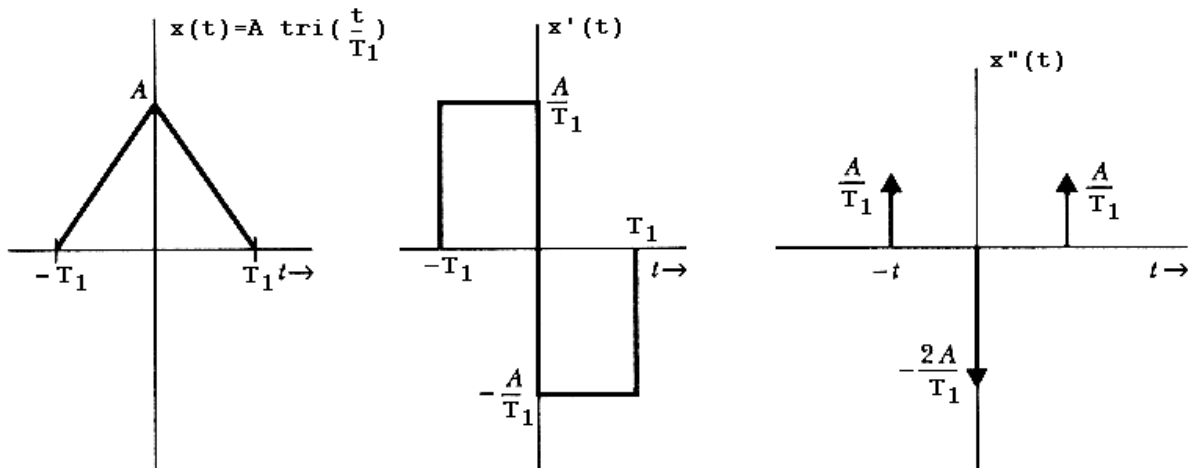
4.3.7.2 Exemple du changement d'échelle.

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$



4.3.7.3 Illustration de la dérivation d'un signal.

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = (j2\pi f)^n X(f)$$



$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow -4\pi^2 f^2 X(f)$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \leftrightarrow \frac{A}{T_1} (e^{j\omega T_1} - 2 + e^{-j\omega T_1})$$

$$\text{avec } X(f) = \frac{A}{T_1} \left(\frac{2 - 2\cos\omega T_1}{4\pi^2 f^2} \right) = \frac{A}{f_1} \text{sinc}^2\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

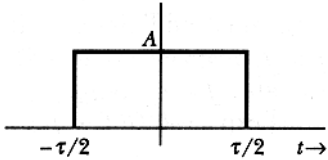
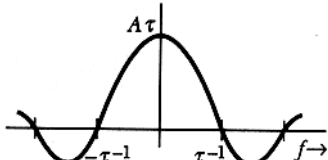
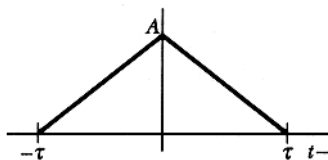
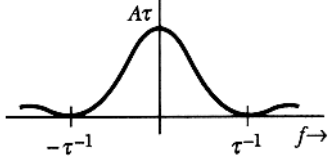
4.3.7.4 L'intégration de la transformée de Fourier.

$$\int_{-\infty}^t x(t') dt' \leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \text{constante}$$

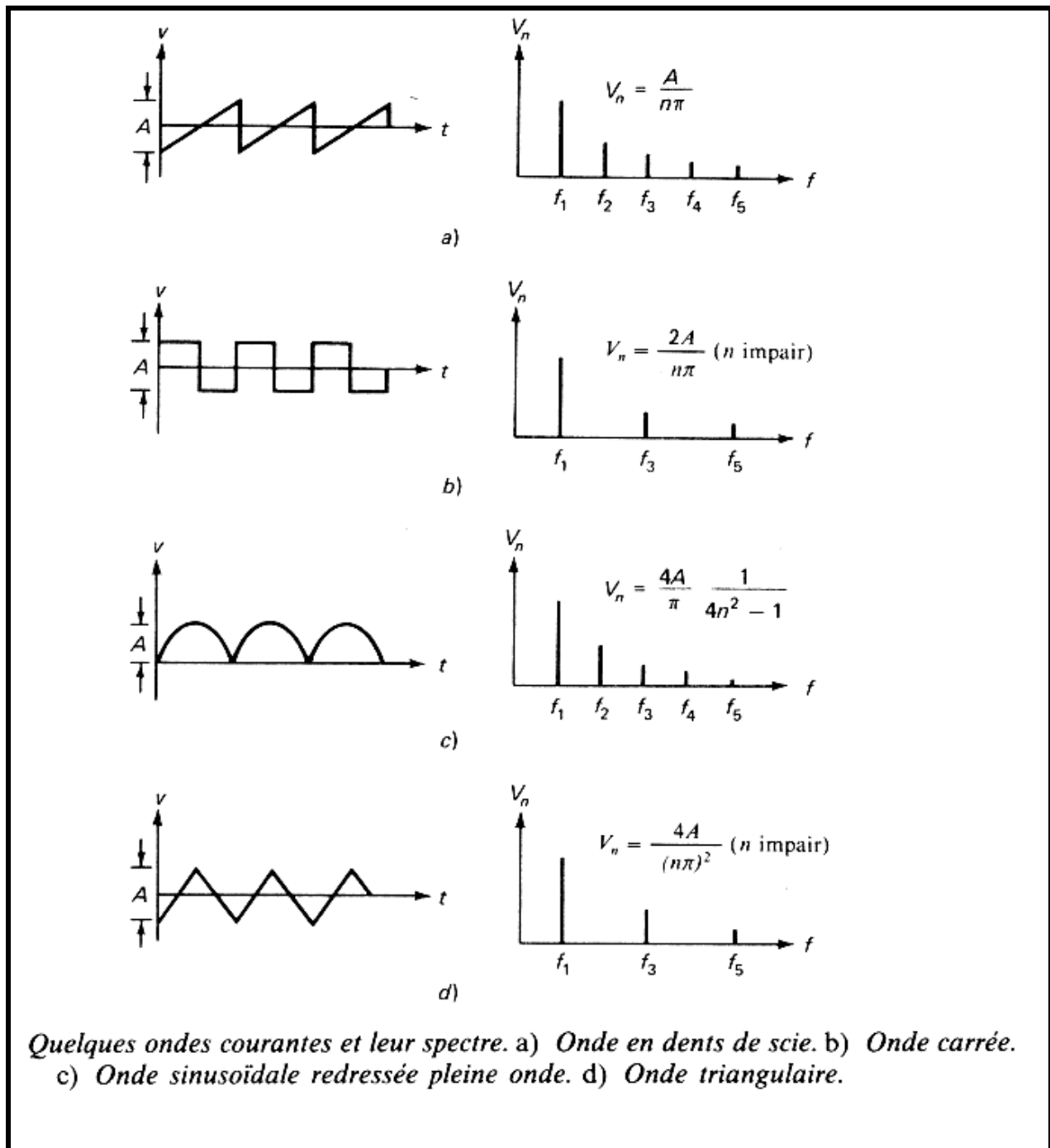
$$\int_{-\infty}^t x(t') dt' \leftrightarrow \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{X(0)}{2} \delta(f)$$

La constante = la composante continue du spectre.

4.3.8 Tableau résumé de quelques transformées de Fourier de fonctions paires.

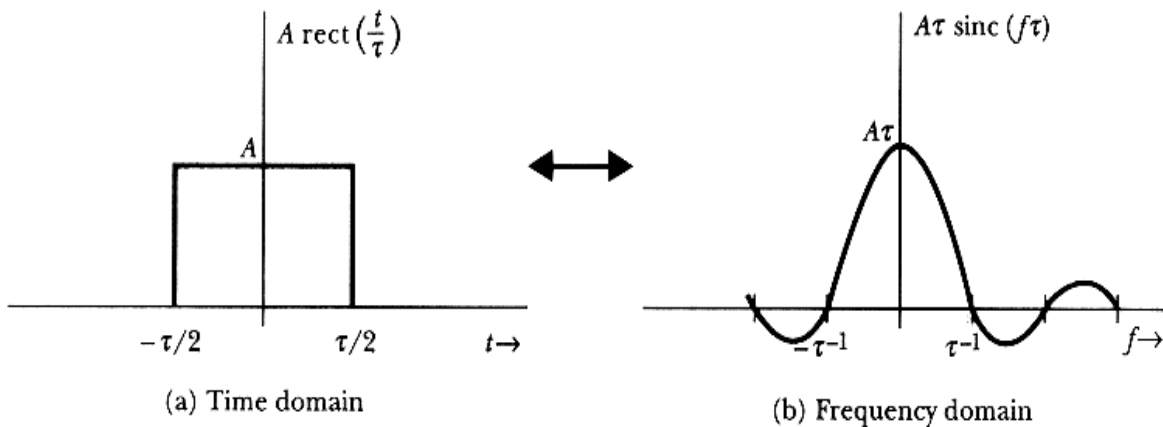
Time domain	Frequency domain
$A \text{ rect} \left(\frac{t}{\tau} \right)$  (a)	$A\tau \text{ sinc} (f\tau)$  (b)
$A \exp (-at)u(t) \quad a > 0$ $A \exp (-a t) \quad a > 0$ $A \text{ tri} \left(\frac{t}{\tau} \right)$	$\frac{A}{a + j2\pi f}$ $\frac{2Aa}{a^2 + (2\pi f)^2}$ $A\tau \text{ sinc}^2 (f\tau)$
 (c)	 (d)
$\exp (-a^2 t^2)$ 1 $u(t)$ $\delta(t)$ $\exp (j2\pi f_0 t)$ $\cos (2\pi f_0 t + \theta)$ $\text{sgn} (t) = -1 \quad \text{for } t < 0$ $\quad \quad \quad = +1 \quad \text{for } t > 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \left[-\left(\frac{\pi f}{a} \right)^2 \right]$ $\delta(f)$ $\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$ 1 $\delta(f - f_0)$ $\frac{1}{2} \exp (j\theta)\delta(f - f_0) + \frac{1}{2} \exp (-j\theta)\delta(f + f_0)$ $-j \frac{1}{\pi f}$

4.3.9 Exemple d'ondes courantes et leur spectre.



4.3.10 Exemples de l'application de la transformée de Fourier.

4.3.10.1 Une impulsion rectangulaire.



$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

$$X(f) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j2\pi f t} dt$$

$$X(f) = A \tau \operatorname{sinc}(f \tau)$$

$$X(f) = \frac{A}{f_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) \quad \text{pour } \tau = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{\tau^{-1}}$$

$$E = A^2 \cdot \tau = \frac{A^2}{f_1}$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow A \tau \operatorname{sinc}(f \tau)$$

$$A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) \quad \text{pour } \tau = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{\tau^{-1}}$$

4.3.10.2 Une impulsion rectangulaire retardée de $T_1/2$ (soit T_2).

Amplitude : 1V

Largeur de l'impulsion $T_1=20\text{ms} \rightarrow f_1=50\text{Hz}$.

Retard : $T_2=10\text{ms} \rightarrow f_2=100\text{Hz}$

$$\text{Arect}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi f T_2}$$

$$\text{or } T_2 = \frac{1}{f_2}$$

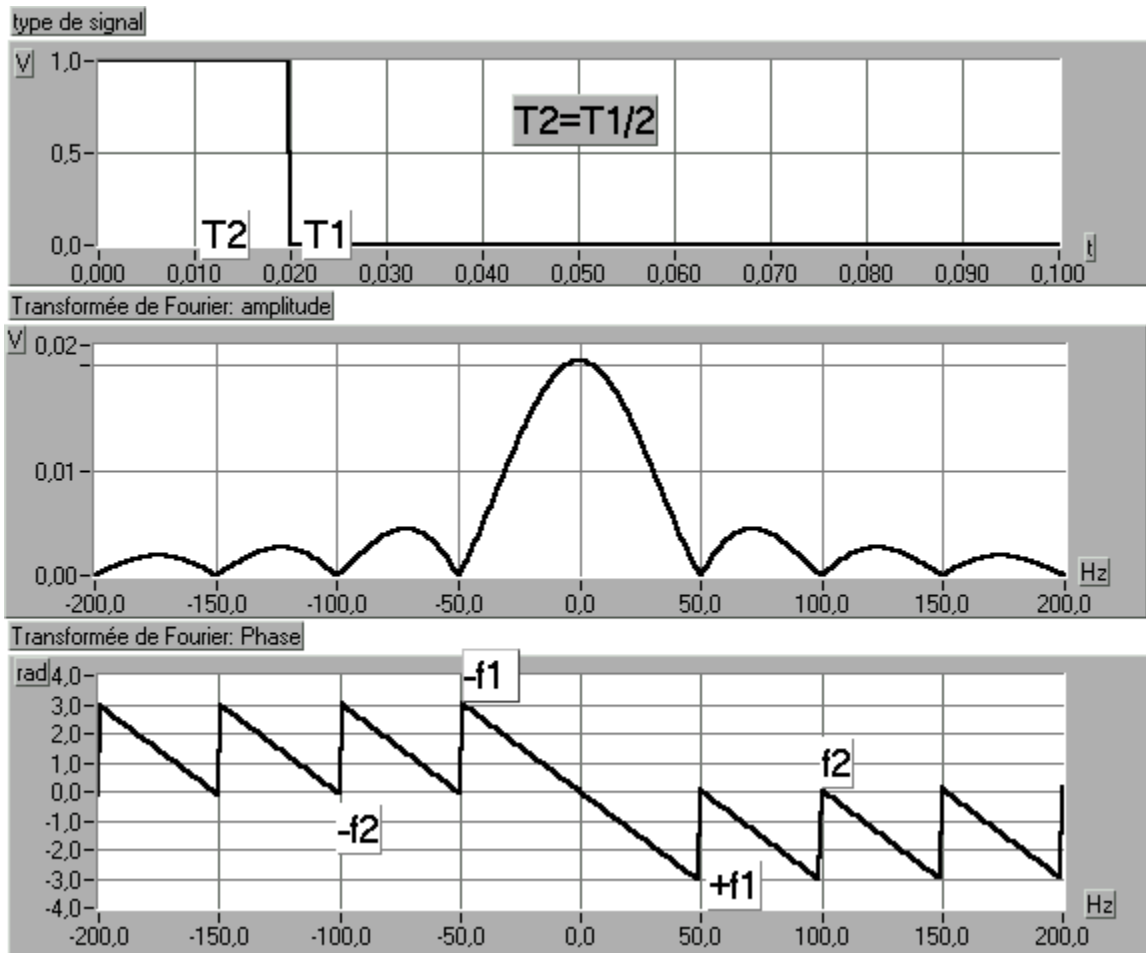
$$\text{Arect}\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{f_2}}$$

$$\text{or } T_2 = \frac{T_1}{2} \Rightarrow f_2 = 2 \cdot f_1$$

$$\text{Arect}\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{2f_1}}$$

$$\boxed{\text{Arect}\left(\frac{t-\frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j\pi \frac{f}{f_1}}}$$

L'amplitude du lobe principal du spectre est de : $\frac{A}{f_1} = \frac{1}{50} = 0,02\text{V}$



Exemple de calcul de la phase :

$$\text{Arect}\left(\frac{t - \frac{T_1}{2}}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j\pi \frac{f}{f_1}}$$

Partie permettant de calculer la phase: $e^{-j\pi \frac{f}{f_1}} = e^{-j\pi \frac{f}{50}} \quad (f_1 = 50\text{Hz}) \Rightarrow \varphi = -\pi \frac{f}{50} \text{ (en rad)}$

pour $f = 0 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{50}} = e^{-j\pi \frac{0}{50}} \Rightarrow \varphi = -\pi \frac{0}{50} = 0 \text{ rad}$

pour $f = 50 \text{ Hz} (= f_1) \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{50}} = e^{-j\pi \frac{50}{50}} = e^{-j\pi} \Rightarrow \varphi = -\pi \text{ rad}$

pour $f = -50 \text{ Hz} (= -f_1) \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{50}} = e^{-j\pi \frac{-50}{50}} = e^{j\pi} \Rightarrow \varphi = \pi \text{ rad}$

4.3.10.3 Une impulsion rectangulaire de largeur T_1 retardée de T_2 .

Amplitude : 1V

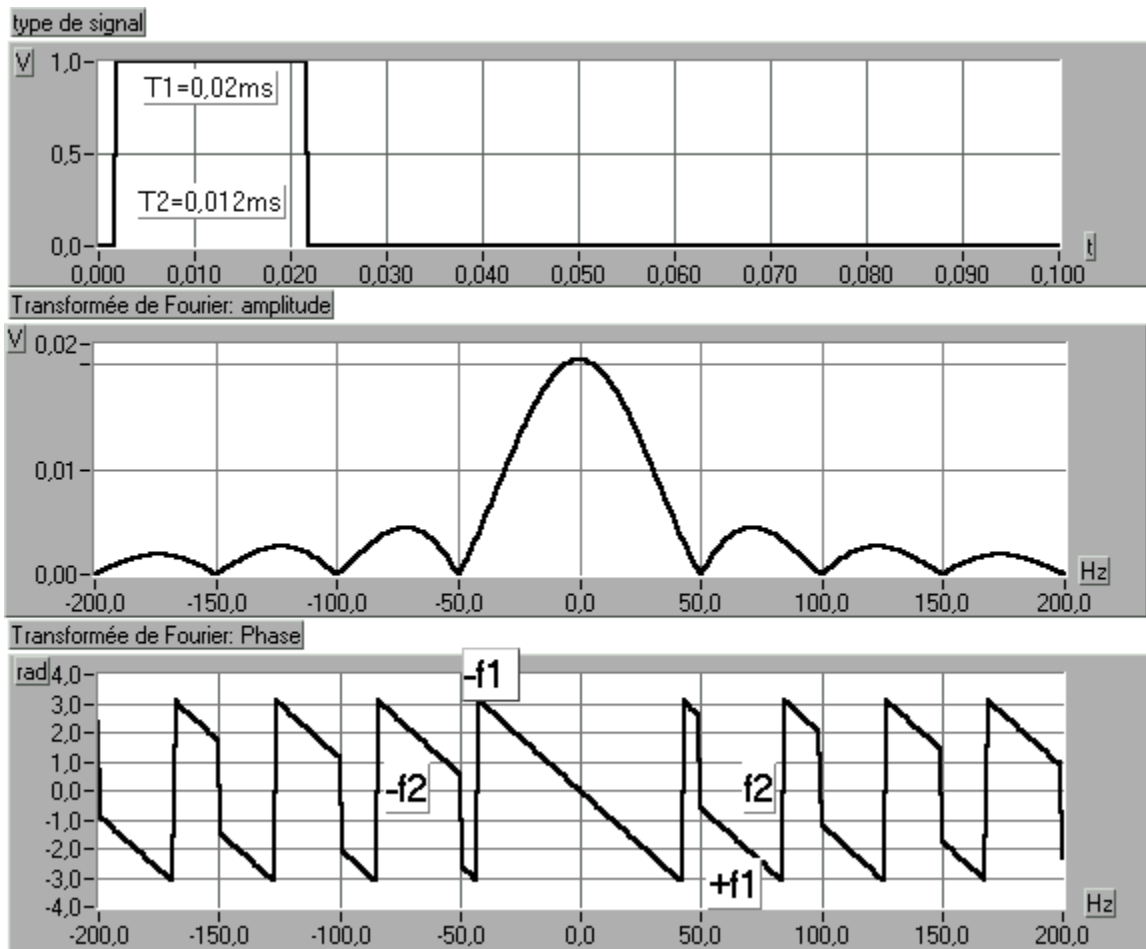
Largeur de l'impulsion $T_1=20\text{ms} \rightarrow f_1=50\text{Hz}$.

Retard : $T_2=12\text{ms} \rightarrow f_2=83,33\text{Hz}$

$$\text{Arect}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi f T_2}$$

$$\text{or } T_2 = \frac{1}{f_2}$$

$$\text{Arect}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{f_2}}$$



L'amplitude du lobe principal du spectre est de : $\frac{A}{f_1} = \frac{1}{50} = 0,02\text{V}$

Calcul de la phase :

$$\text{Arect}\left(\frac{t-T_2}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{f_2}}$$

Partie permettant de calculer la phase: $e^{-j2\pi \frac{f}{f_2}}$

$$= e^{-j2\pi \frac{f}{83,333}} \quad (\text{avec } f_2 = 83,333 \text{ Hz} = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,012})$$

$$\Rightarrow \varphi = -2\pi \frac{f}{83,333} \quad (\text{en rad})$$

$$\Rightarrow \varphi = -\pi \frac{f}{41,666} \quad (\text{en rad})$$

$$\text{pour } f = 0 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{0}{41,666}} \Rightarrow \varphi = -\pi \frac{0}{41,666} = 0 \text{ rad}$$

$$\text{pour } f = 41,666 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{41,666}{41,666}} = e^{-j\pi} \Rightarrow \varphi = -\pi \text{ rad}$$

$$\text{pour } f = -41,666 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{-41,666}{41,666}} = e^{j\pi} \Rightarrow \varphi = \pi \text{ rad}$$

$$\text{pour } f = 50 \text{ Hz} \quad (= f_1) \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{50}{41,666}} \Rightarrow \varphi = -1,2\pi \text{ rad soit } = -\pi \underline{\underline{-0,2\pi}}$$

$$\text{pour } f = -50 \text{ Hz} \quad (= -f_1) \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{-50}{41,666}} \Rightarrow \varphi = 1,2\pi \text{ rad soit } = \pi \underline{\underline{+0,2\pi}}$$

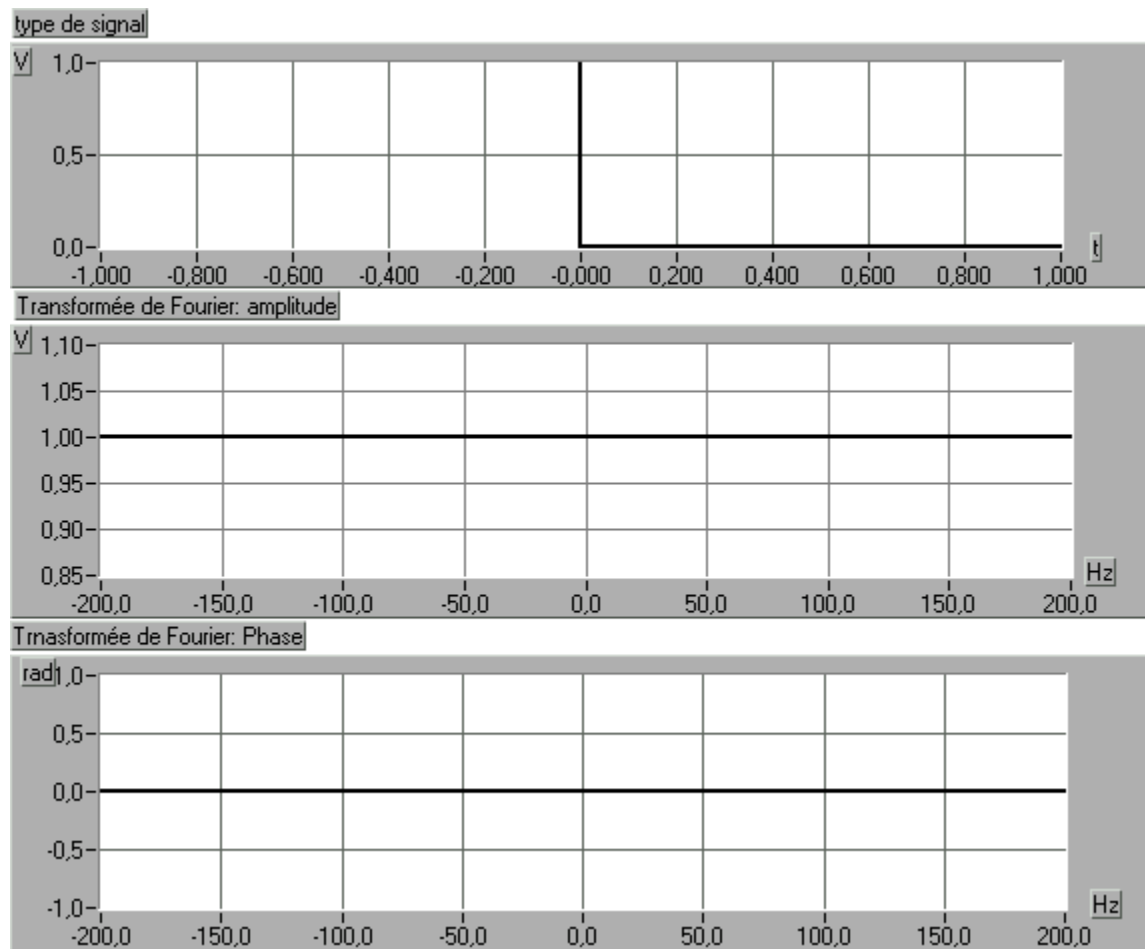
$$\text{pour } f = 83,333 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{83,333}{41,666}} \Rightarrow \varphi = -2\pi = 0 \text{ rad}$$

$$\text{pour } f = -83,333 \text{ Hz} \rightarrow e^{-j\pi \frac{f}{41,666}} = e^{-j\pi \frac{-83,333}{41,666}} \Rightarrow \varphi = 2\pi = 0 \text{ rad}$$

4.3.10.4 Une impulsion de Dirac.

Amplitude de l'impulsion : 1V

$$A\delta(t) \leftrightarrow A$$



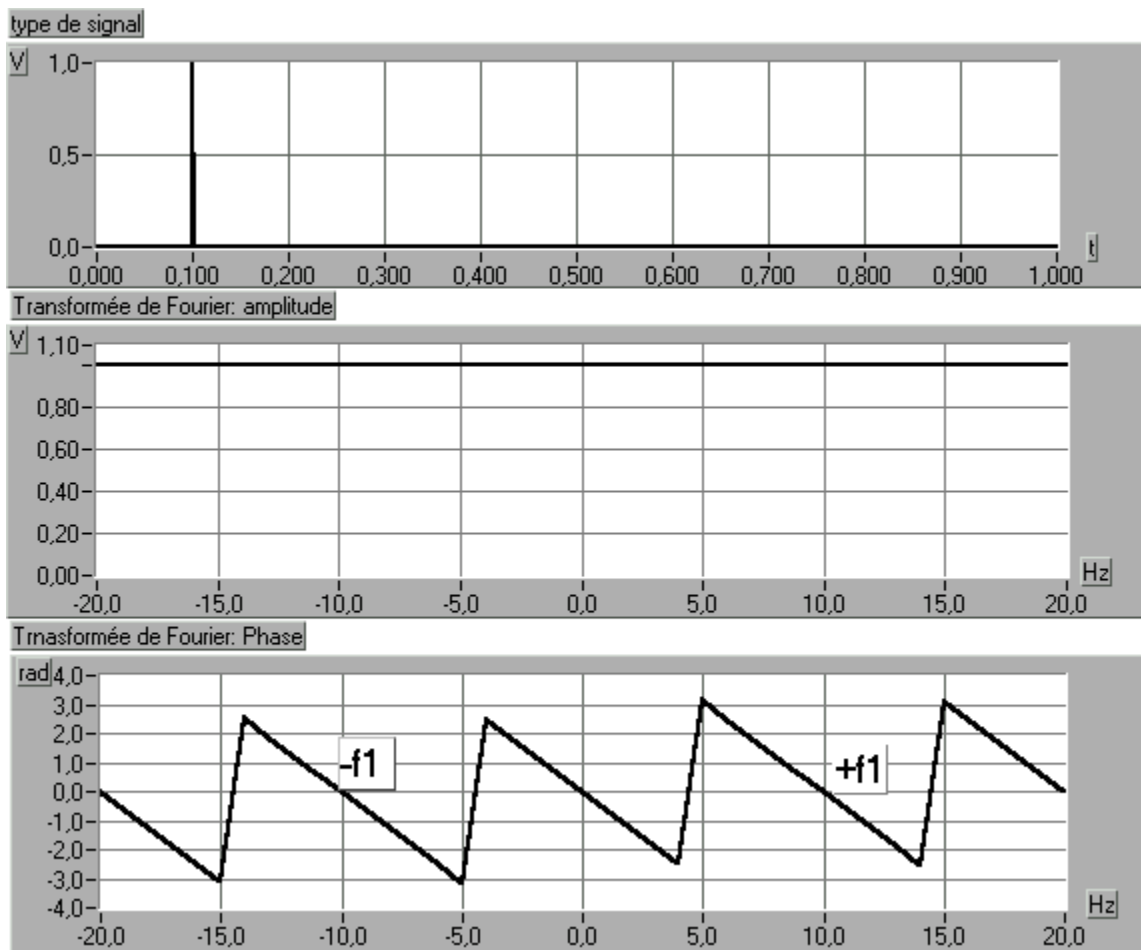
4.3.10.5 Une impulsion de Dirac retardée dans le temps de T_1 .

Amplitude de l'impulsion : 1V

Retard : $T_1=100\text{ms}$.

→ $f_1=1/T_1=10\text{Hz}$

$$\begin{aligned} A\delta(t - T_1) &\leftrightarrow Ae^{-j\omega T_1} \\ A\delta(t - T_1) &\leftrightarrow Ae^{-j2\pi f T_1} \\ A\delta(t - T_1) &\leftrightarrow Ae^{-j2\pi \frac{f}{f_1}} \end{aligned}$$



Calcul de la phase :

$$\text{On a: } A\delta(t - T_1) \leftrightarrow Ae^{-j2\pi\frac{f}{f_1}}$$

$$\text{Partie permettant de calculer la phase: } e^{-j2\pi\frac{f}{f_1}}$$

$$= e^{-j2\pi\frac{f}{10}} \quad (\text{avec } f_1 = 10\text{Hz})$$

$$\Rightarrow \varphi = -2\pi\frac{f}{10} \quad (\text{en rad})$$

$$\Rightarrow \varphi = -\pi\frac{f}{5} \quad (\text{en rad})$$

$$\text{pour } f = 0\text{Hz} \rightarrow e^{-j\pi\frac{f}{5}} = e^{-j\pi\frac{0}{5}} \Rightarrow \varphi = -\pi\frac{0}{5} = 0\text{rad}$$

$$\text{pour } f = 5\text{Hz} \rightarrow e^{-j\pi\frac{f}{5}} = e^{-j\pi\frac{5}{5}} = e^{-j\pi} \Rightarrow \varphi = -\pi\text{rad}$$

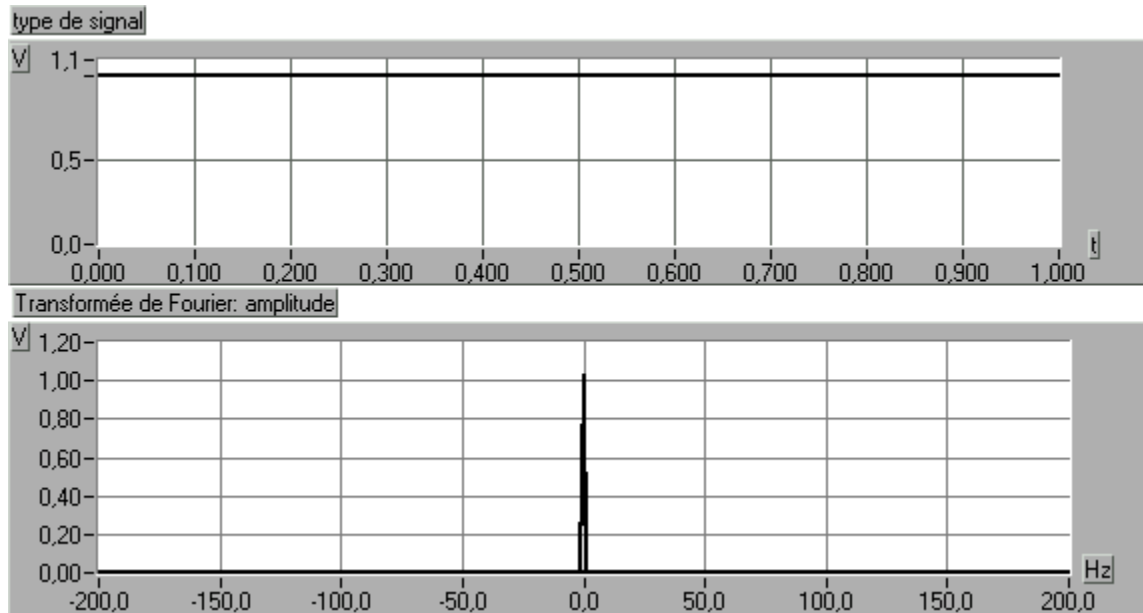
$$\text{pour } f = -5\text{Hz} \rightarrow e^{-j\pi\frac{f}{5}} = e^{-j\pi\frac{-5}{5}} = e^{j\pi} \Rightarrow \varphi = \pi\text{rad}$$

$$\text{pour } f = 10\text{Hz} \quad (= f_1) \rightarrow e^{-j\pi\frac{f}{5}} = e^{-j\pi\frac{10}{5}} = e^{-j2\pi} \Rightarrow \varphi = 0\text{rad}$$

$$\text{pour } f = -10\text{Hz} \quad (= -f_1) \rightarrow e^{-j\pi\frac{f}{5}} = e^{-j\pi\frac{-10}{5}} = e^{j2\pi} \Rightarrow \varphi = 0\text{rad}$$

4.3.10.6 un signal constant.

$$A \leftrightarrow \delta(f)$$



4.3.10.7 Un signal périodique (translation de fréquence).

Exemple d'un signal qui aurait une période T_0
soit une fréquence de répétition de f_0 .

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) e^{-j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_0 t}$$

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow \delta(f - f_0)$$

Rappel important :

$$\underline{e^{j2\pi f_0 t}} + \underline{e^{-j2\pi f_0 t}} = 2 \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\rightarrow 2 \cos(2\pi f_0 t) \Leftrightarrow \underline{\delta(f - f_0)} + \underline{\delta(f + f_0)}$$



4.3.10.8 Des signaux sinusoïdaux.

$$A \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$
$$A \sin \omega_0 t \leftrightarrow j \frac{A}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

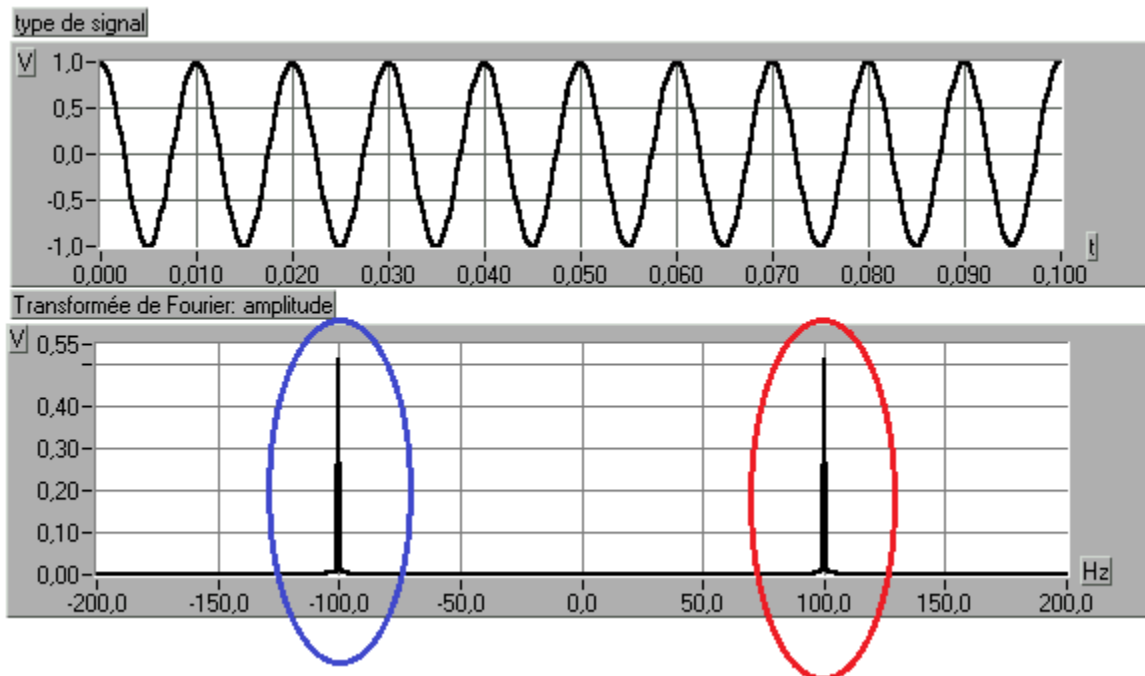
*Le cosinus

$$A \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A}{2} (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0))$$

Amplitude : 1V (pointe).

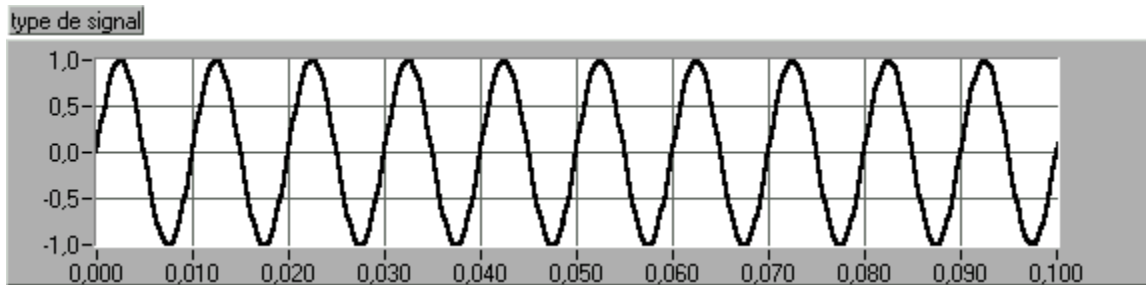
La période : $T_0=10\text{ms} \rightarrow f_0=100\text{Hz}$

La phase vaut 0° pour tout le spectre de fréquences.



L'amplitude des pics (les fondamentales) au niveau du spectre est égal : 0,5V

*Le sinus. (Rappel : $\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$)



Le spectre d'amplitude est identique au spectre du cosinus. Par contre, la phase vaut :

- 90° pour $f = -f_0$.
- -90° pour $f = f_0$.

Explication :

$$A \sin \omega_0 t \leftrightarrow j \frac{A}{2} (\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))$$

$$A \sin \omega_0 t \leftrightarrow j \frac{A}{2} \delta(f + f_0) - j \frac{A}{2} \delta(f - f_0)$$

Le fait d'avoir j (partie complexe) dans l'équation entraîne :

- Pour la partie $j \frac{A}{2} \delta(f + f_0)$, nous avons un angle de phase de 90° ou $\frac{\pi}{2} rad$ à la fréquence $-f_0$.
- Pour la partie $-j \frac{A}{2} \delta(f - f_0)$, nous avons un angle de phase de -90° ou $-\frac{\pi}{2} rad$ à la fréquence f_0 .

4.3.10.9 Une impulsion rectangulaire translatée en fréquence.

Amplitude de la sinusoïde : 1V

Fréquence de la sinusoïde : $f_0=200\text{Hz}$ soit $T_0=5\text{ms}$

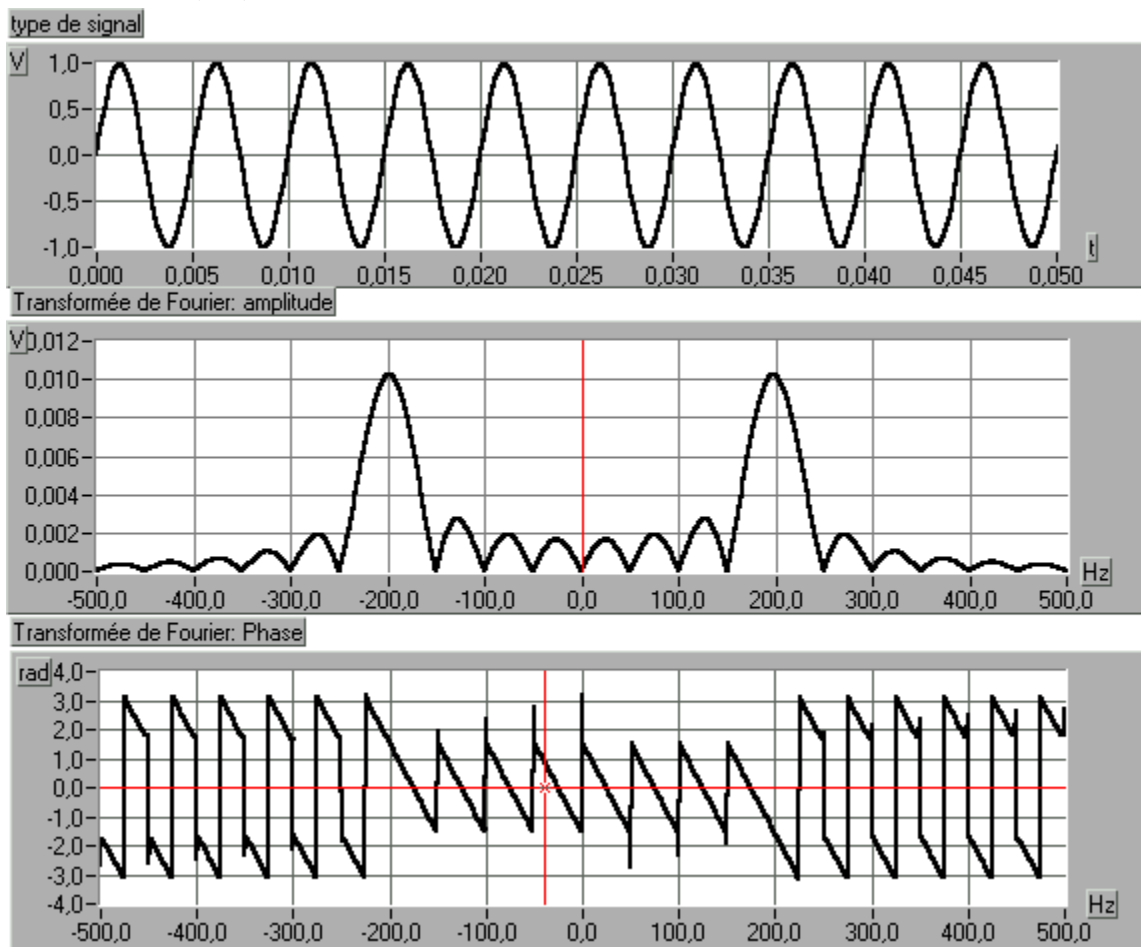
Amplitude de l'impulsion carrée : 1V

Largeur de l'impulsion : $T_1=20\text{ms} \rightarrow f_1=50\text{Hz}$

L'impulsion carrée est retardée de $T_1/2$ soit $10\text{ms} \rightarrow 100\text{Hz}$

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \text{sinc} \frac{f}{f_1} * \left(\frac{\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)}{2} \right)$$

$$\text{Arect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A}{2f_1} \left(\text{sinc}\left(\frac{f+f_0}{f_1}\right) + \text{sinc}\left(\frac{f-f_0}{f_1}\right) \right)$$



L'amplitude du spectre : $\frac{A}{2f_1} = \frac{1}{2.50} = 0,01 \text{ V}$

La fonction sinc a été translatée à la fréquence f_0 et $-f_0$ respectivement 200 et -200Hz .

4.3.10.10 Train d'impulsions de Dirac ou peigne de Dirac.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y_n e^{-jn\omega_s t}$$

$$\text{avec } Y_n = \frac{1}{T_s} \int_{T_s} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T_s}$$

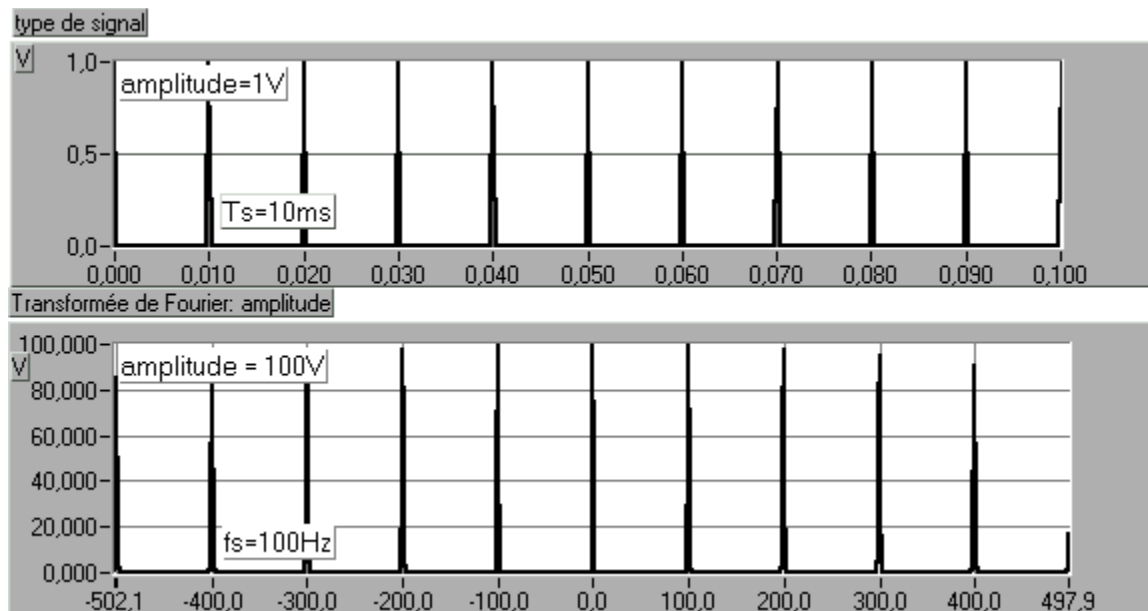
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jn\omega_s t} \leftrightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s) \leftrightarrow \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - nf_s)$$

$$\delta_{T_s}(t) \leftrightarrow f_s \delta_{f_s}(f)$$

Amplitude des impulsions de Dirac : 1V

Période des impulsions de Dirac : $T_s=10\text{ms} \rightarrow f_s=100\text{Hz}$



Amplitude des raies : 100V ($=f_s'$)

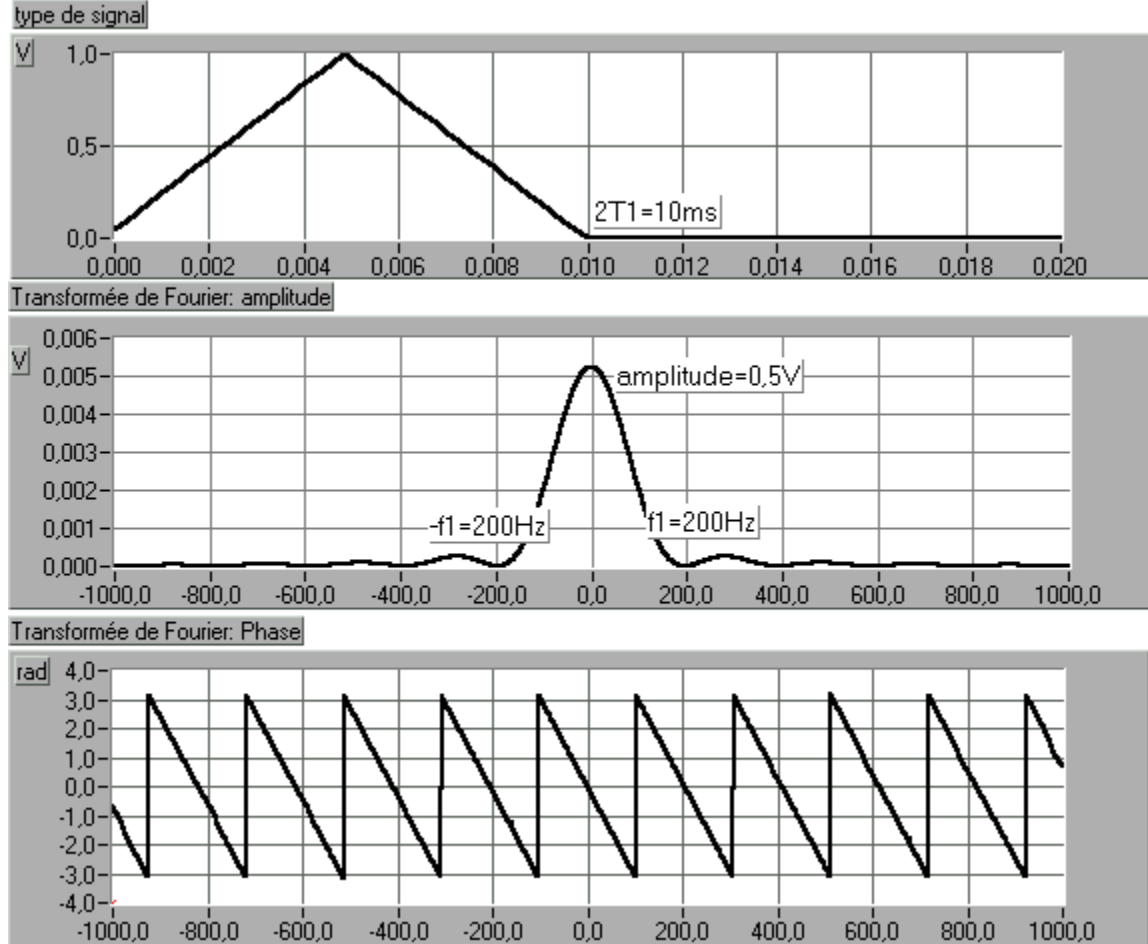
Fréquence des raies : $f_s=100\text{Hz}$

4.3.10.11 Une impulsion triangulaire.

$$A \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{f_1}\right)$$

Amplitude de l'impulsion triangulaire : 1V

Largeur de l'impulsion triangulaire : $2T_1=10\text{ms} \rightarrow T_1=5\text{ms} \rightarrow f_1=200\text{Hz}$



Amplitude du lobe principal : $0,005\text{V} = A/f_1 = 1/200$

Pour la phase, l'impulsion triangulaire a été déphasée de $T_1 \rightarrow 5\text{ms} \rightarrow 200\text{Hz}$

L'impulsion a pour équation en fait :

$$A \operatorname{tri}\left(\frac{t - T_1}{T_1}\right) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j2\pi \frac{f}{f_1}}$$

$$\text{Pour } f = f_1 (200\text{Hz}) : \text{la phase vaut } -2\pi \cdot \frac{f}{f_1} = -2\pi \text{ rad} = 0 \text{ rad}$$

$$\text{Pour } f = \frac{f_1}{2} (100\text{Hz}) : \text{la phase vaut } -2\pi \cdot \frac{1}{2} = -\pi \text{ rad}$$

4.3.10.12 Train d'impulsions triangulaire.

$$\text{soit } x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{tri}\left(\frac{t - kT_0}{T_1}\right)$$

$$\text{Après calculs, les coefficients } X_n = A \frac{T_1}{T_0} \text{sinc}^2\left(\frac{nT_1}{T_0}\right) e^{-j2\pi n \frac{T_1}{T_0}}$$

$$\text{Sachant que } T_0 = \frac{1}{f_0}, \quad T_1 = \frac{1}{f_1} \text{ et } T_0 = 2T_1$$

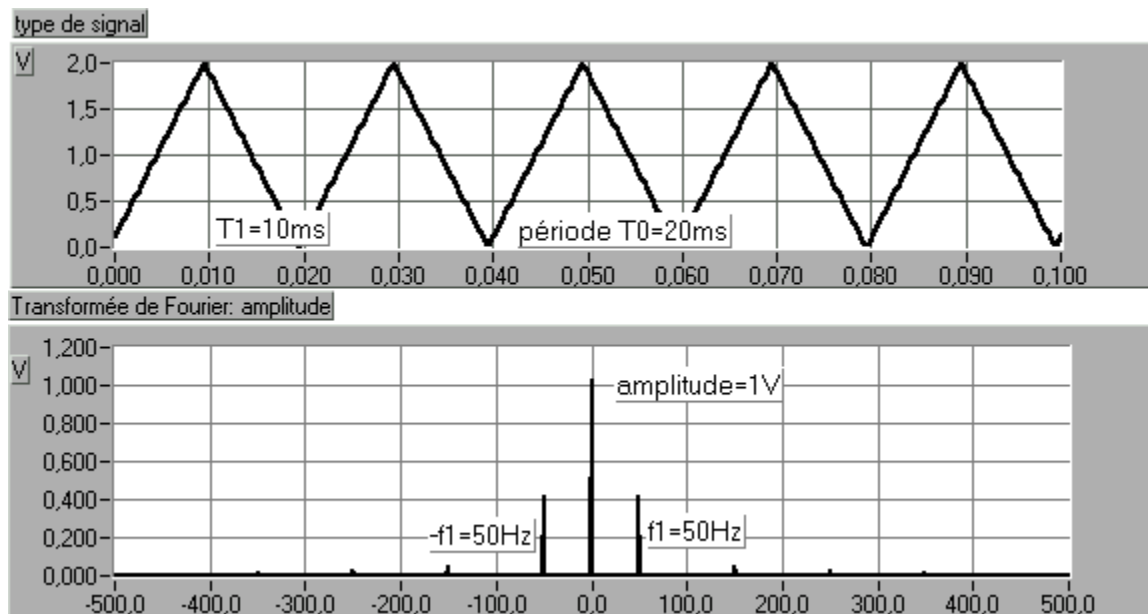
$$\text{On aura : } X_n = A \frac{f_0}{f_1} \text{sinc}^2\left(\frac{nf_0}{f_1}\right) e^{-j\pi n}$$

$$X_n = \frac{A}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j\pi n}$$

Amplitude des impulsions : 1V ;

Période des impulsions : $T_0 = 20\text{ms} \rightarrow f_0 = 50\text{Hz}$

Largeur des impulsions triangulaires : $2T_1 = 20\text{ms}$



Amplitude de la composante continue du spectre : 1V soit $A/2$.

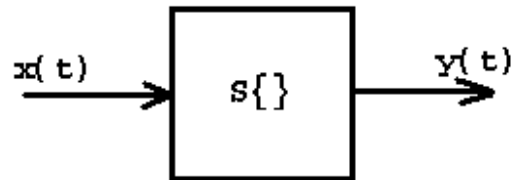
Les harmoniques sont d'ordres impairs.

4.4 La convolution.

4.4.1 Introduction :

La convolution est un concept très important dans l'analyse des signaux. En effet, le signal de sortie de tout système linéaire est le résultat de la **convolution** du signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle de ce système.

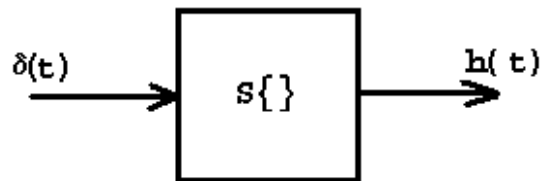
- Un système S est défini comme suit :



$x(t)$: signal d'entrée
 $y(t)$: signal de sortie
 $S\{\}$: le système

$$y(t) = S\{x(t)\}$$

- La réponse impulsionnelle d'un système, dans notre cas linéaire, représente le signal de sortie ($h(t)$) de ce système si le signal d'entrée est une impulsion de Dirac ($\delta(t)$) et système ne possède aucune énergie stockée (état initial nul).



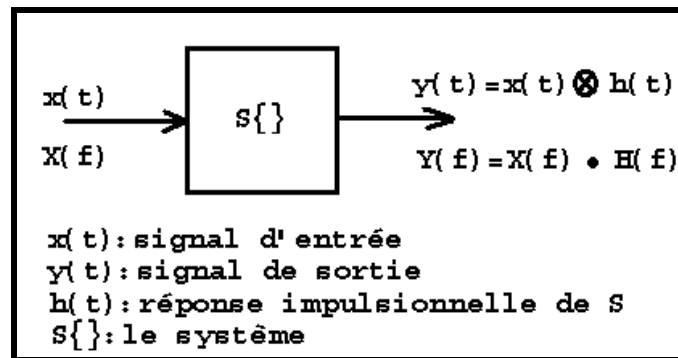
le

$\delta(t)$: signal d'entrée
 $h(t)$: signal de sortie
 $S\{\}$: le système

$$h(t) = S\{\delta(t)\}$$

4.4.2 Définition :

$$x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$



- $H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$
- $H(f)$ est généralement complexe
 \Rightarrow si $h(t)$ est réel: $|H(f)| = |H(-f)|$ fonction paire
 $\arg[H(f)] = -\arg[H(-f)]$ fonction impaire
- $|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|$ spectre d'amplitude
 $\arg[Y(f)] = \arg[X(f)] + \arg[H(f)]$ spectre de phase

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

4.4.2.1 Cas d'un système réel :

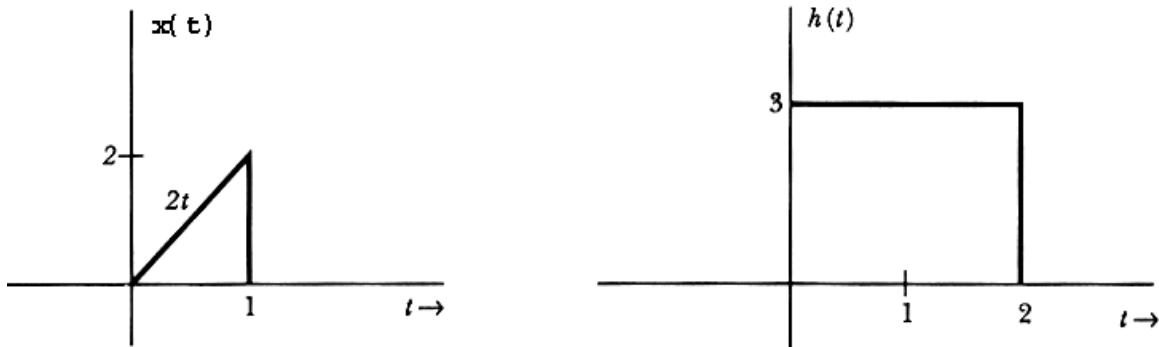
Convention :

- Le signal d'entrée $x(t)$ est supposé appliqué en $t = 0 \rightarrow$ pour $t < 0$, $x(t) = 0$.
- Le système est causal $\rightarrow h(t) = 0$ pour $t < 0$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow h(t - \tau) = 0 \text{ pour } (t - \tau) < 0 \\
 &\Rightarrow \text{pour } t < \tau \Rightarrow \tau > t \\
 &\Rightarrow y(t) = x(t) \otimes h(t) = \int_0^t h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-0}^t h(t - \tau) x(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

4.4.3 Illustration de la convolution.

Soit une impulsion en dent de scie sur lequel on applique la fonction de convolution à partir de la réponse impulsionnelle $h(t)$ définie ci-dessous.

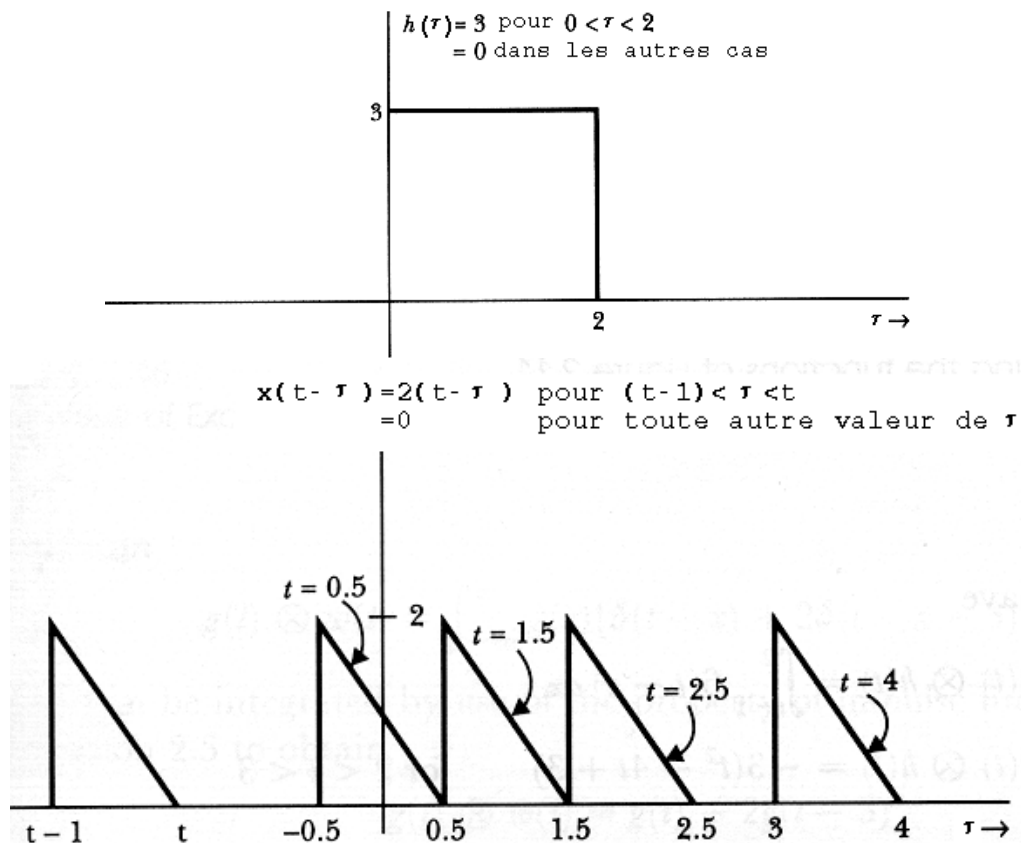


Rappel équation d'une droite :

$x(t) = (\text{la pente de la droite}) \cdot x + \text{la hauteur à l'origine}$. La pente = 2, la hauteur à l'origine = 0 \rightarrow

$x(t) = 2t$

$\rightarrow h(t) = \begin{cases} 3 & \text{pour } 0 < t < 2 \\ 0 & \text{pour toutes autres valeurs de } t \end{cases}$



$$x(t) \otimes h(t) = 0 \text{ si } t < 0$$

$$x(t - \tau) = x(-\tau) \text{ si } t = 0$$

Si $t > 0$ on a :

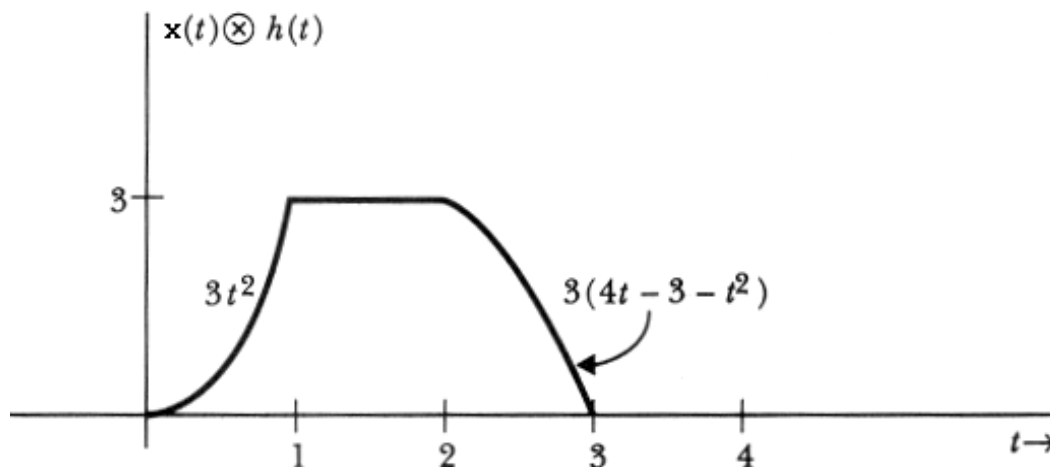
$$\begin{aligned} 1) \quad x(t) \otimes h(t) &= \int_0^t 6(t - \tau).d\tau = 6 \int_0^t t.d\tau - 6 \int_0^t \tau.d\tau = 6 \left(t.\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= (6t^2 - 3t^2) - (6t.0 - 3.0^2) = 3t^2 \text{ pour } 0 < t < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad x(t) \otimes h(t) &= \int_{t-1}^t 6(t - \tau).d\tau = 6 \int_{t-1}^t t.d\tau - 6 \int_{t-1}^t \tau.d\tau = 6 \left(t.\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Bigg|_{\tau=t-1}^{\tau=t} \\ &= (6t^2 - 3t^2) - (6t.(t-1) - 3.(t-1)^2) = 6t^2 - 3t^2 - 6t^2 + 6t + 3t^2 - 6t + 3 \\ &= 3 \text{ pour } 1 < t < 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x(t) \otimes h(t) &= \int_{t-1}^2 6(t - \tau).d\tau = 6 \int_{t-1}^2 t.d\tau - 6 \int_{t-1}^2 \tau.d\tau = 6 \left(t.\tau - \frac{\tau^2}{2} \right) \Bigg|_{\tau=t-1}^{\tau=2} \\ &= -3(t^2 - 4t + 3) \text{ pour } 2 < t < 3 \end{aligned}$$

$$4) \quad x(t) \otimes h(t) = 0 \text{ pour } 3 < t$$

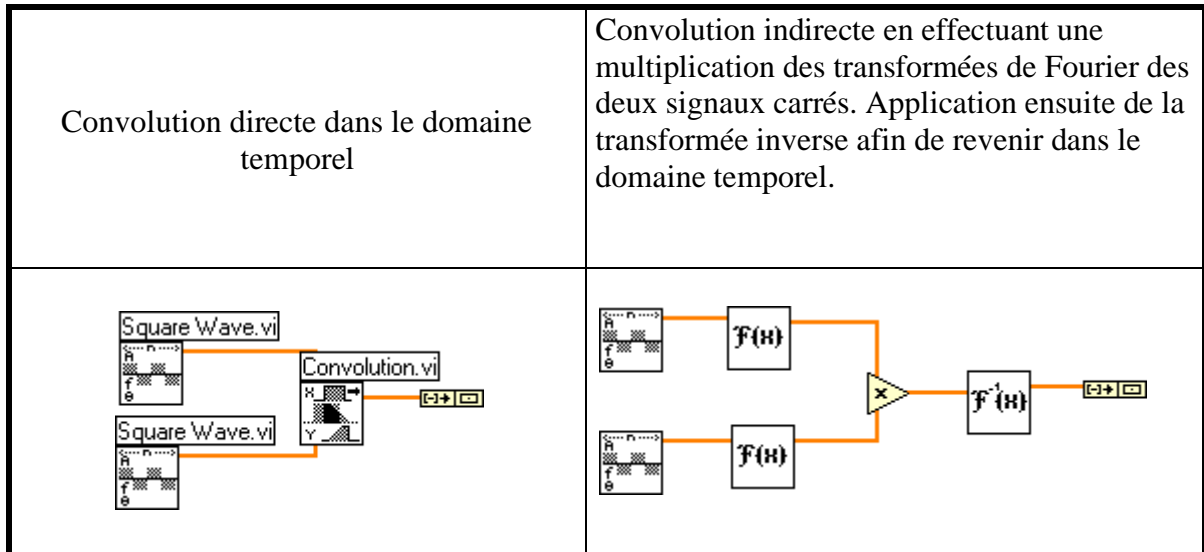
On obtient donc le résultat suivant.



4.4.4 Propriétés importantes

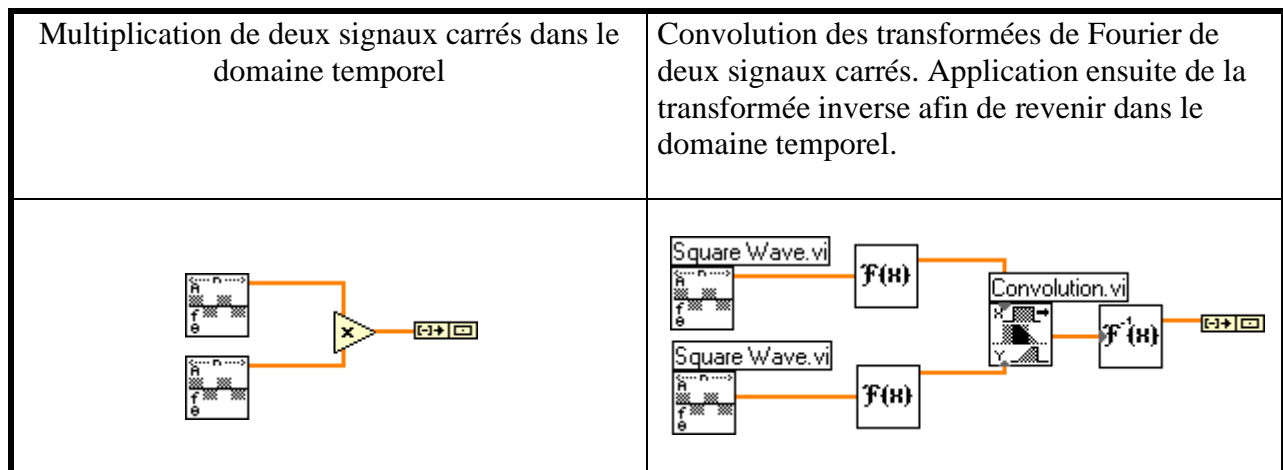
$$x_1(t) \otimes x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f)$$

- Les 2 figures suivantes illustrent l'application de la fonction de convolution sur deux signaux carrés.



$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow X_1(f) \otimes X_2(f)$$

- Les 2 figures suivantes illustrent l'application de la fonction de multiplication sur deux signaux carrés.



4.4.5 Cas particuliers.

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t) \quad \text{car} \quad \delta(t) \leftrightarrow 1$$

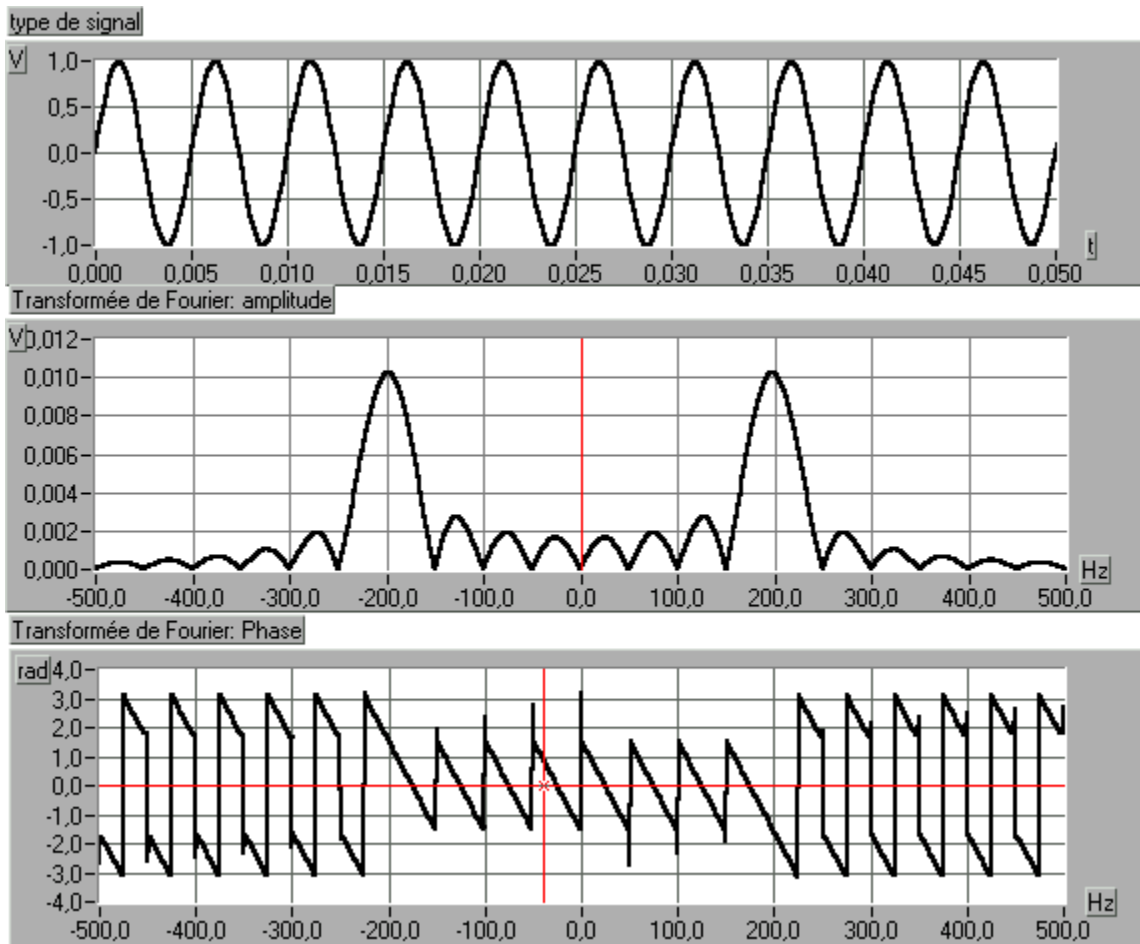
$$x(t) \otimes \delta(t - T_1) = x(t - T_1) \quad \text{car} \quad \delta(t - T_1) \leftrightarrow 1 \cdot e^{-j2\pi f T_1}$$

4.4.6 Exemples :

Exemple1 :

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{f_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) \otimes \left(\frac{\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)}{2}\right)$$

$$x(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \cdot \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \frac{A}{2f_1} \cdot \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{f + f_0}{f_1}\right) + \operatorname{sinc}\left(\frac{f - f_0}{f_1}\right) \right)$$



Exemple 2 : avec un signal périodique (cas d'un signal radar).

Pour $f_0 > f_1 > f_2$

$$x(t) = A \left[\text{rect} \left(\frac{t}{T_1} \right) \cdot \cos(\omega_0 t) \right] \otimes \delta_{T_2}(t)$$

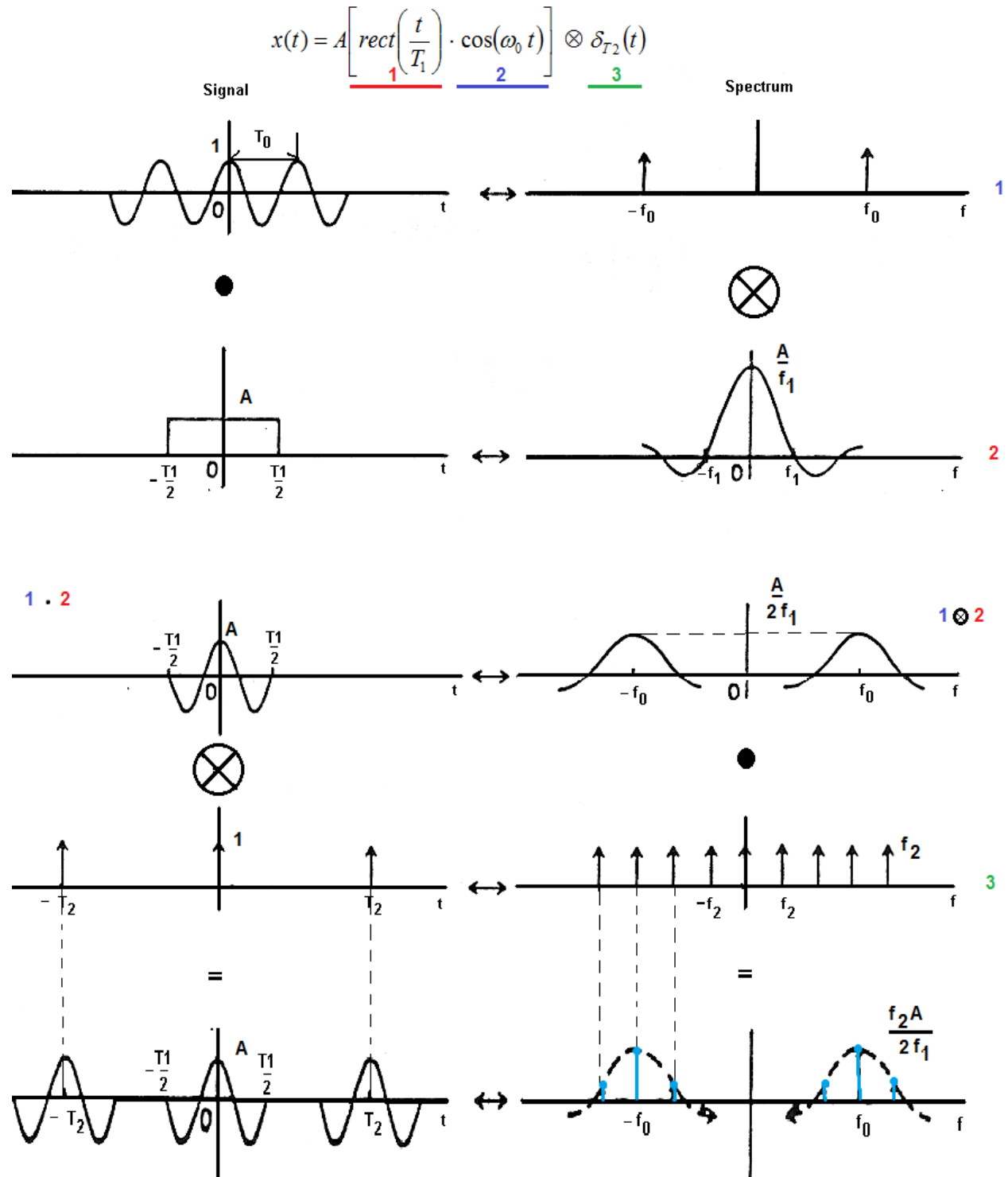
$$x(t) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t - kT_2}{T_1} \right) \cdot \cos(\omega_0 (t - kT_2))$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2f_1} \left[\text{sinc} \left(\frac{f + f_0}{f_1} \right) + \text{sinc} \left(\frac{f - f_0}{f_1} \right) \right] \cdot f_2 \cdot \delta(f - nf_2)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A}{2} \frac{f_2}{f_1} \left[\text{sinc} \left(\frac{nf_2 + f_0}{f_1} \right) + \text{sinc} \left(\frac{nf_2 - f_0}{f_1} \right) \right] \cdot f_2 \cdot \delta(f - nf_2)$$

$$x(t) = A \left[\underbrace{\text{rect} \left(\frac{t}{T_1} \right)}_{\text{1}} \cdot \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{2}} \right] \otimes \underbrace{\delta_{T_2}(t)}_{\text{3}}$$

Illustration des équations précédentes.



4.5 Complément et classification des systèmes.

4.5.1 Les systèmes linéaires ou non linéaires.

Soit :

$$y_1(t) = S\{x_1(t)\}$$

$$y_2(t) = S\{x_2(t)\}$$

Si on définit $x(t) = A.x_1(t) + B.x_2(t)$

Le système sera linéaire si :

$$y(t) = S\{x(t)\} = S\{A.x_1(t)\} + S\{B.x_2(t)\} = A.y_1(t) + B.y_2(t)$$

Le principe de superposition est d'application.

Exemple : circuits électroniques contenant des diodes.

4.5.2 Systèmes permanents ou non permanents.

Un système est permanent, si un décalage temporel (en retard ou en avance), appliqué au signal d'entrée $x(t)$, n'occasionne au signal de sortie $y(t)$ qu'un même décalage temporel.

$$\begin{aligned} \text{Si } y(t) = S\{x(t)\} \text{ alors } y(t - \tau) &= S\{x(t - \tau)\} \text{ pour un retard} \\ y(t + \tau) &= S\{x(t + \tau)\} \text{ pour une avance} \end{aligned}$$

Exemple : Vieillessement des différents composants des circuits électroniques.

4.5.3 Systèmes causals (causaux) ou non causals.

Il existe un rapport de causes à effets.

Un système est causal, si sa réponse $y(t)$ ne précède pas l'excitation $x(t)$.

$$\text{Si } x(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ alors } y(t) = S\{x(t)\} = 0 \text{ pour } t < 0$$

Exemple : décrocher le téléphone avant qu'il ne commence à sonner.

4.5.4 Système avec mémoire ou sans mémoire.

Tout système contenant des éléments de types condensateur, inductance, ... c-à-d des éléments capables de stocker de l'énergie, est un système à mémoire.

Exemple : mémorisation des conditions initiales d'un système.

Dans le cadre de ce cours, nous étudierons des systèmes linéaires, permanents, causals, avec ou sans mémoire

4.6 Densité spectrale de puissance et fonction d'auto-corrélation.

Rappel théorème de Rayleigh

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$
$$G(f) = |X(f)|^2 \quad (= \text{densité spectrale d'énergie}) \quad \text{J/Hz}$$

Afin de caractériser la distribution fréquentielle de la puissance d'un signal, nous devons définir la notion de densité spectrale de puissance (**PSD**). En effet, le calcul de la puissance d'un signal doit tenir compte de la durée T de ce signal. Ce qui n'est pas le cas pour le calcul de l'énergie contenue dans un signal → l'énergie totale associée à la puissance d'un signal est infinie.

Nous étudierons dans un premier temps uniquement dans le cas pour signaux déterministes. Les signaux aléatoires seront abordés plus tard.

Comme on doit tenir compte de la durée T d'un signal, nous allons pratiquer un « tronçonnement » de notre signal afin d'en prendre une partie de durée T fixe
«= truncated version signal en anglais»

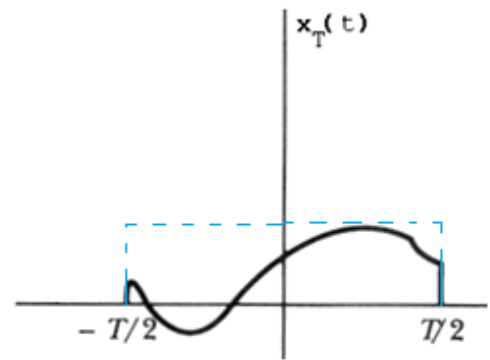
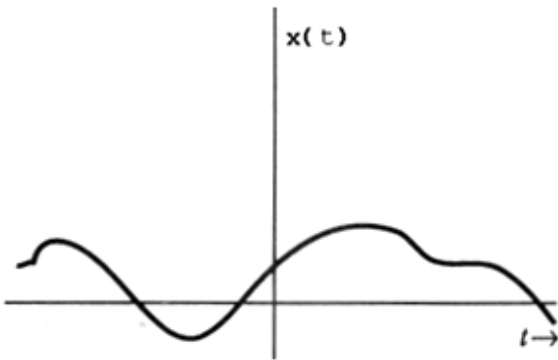
Soit un signal $x(t)$ sur lequel on applique un tronçonnement

Le "truncated version signal" est défini comme suit :

$$x_T(t) = x(t) \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

La transformée de Fourier :

$$X_T(f) = F[x_T(t)]$$



Si l'énergie du signal $x(t)$ est finie, la densité spectral d'énergie peut être déterminée comme suit :

$$|X(f)|^2 \quad (= \text{densité spectrale d'énergie}) \quad J / Hz$$

Pour calculer la densité spectrale de puissance ($S_x(f)$) de notre « fraction » de signal, nous allons utiliser la définition de la densité d'énergie spectrale et la diviser par la durée T de ce dernier:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right] \quad W / Hz$$

Appliquons le théorème de Rayleigh à notre « fragment » de signal :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

En limitant les bornes d'intégration à la durée T du signal :

$$\int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

Divisons les 2 membres par $1/T$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df$$

La puissance moyenne de notre signal :

$$P_{moyenne} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x_T(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S_x(f)|^2 df$$

4.6.1 Transformée de Fourier inverse de la densité spectrale de puissance.

Définition de la fonction d'auto-corrélation :

$$R_x(\tau) = F^{-1}[S_x(f)] = F^{-1} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{T} |X_T(f)|^2 \right] \right]$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F^{-1} \left[|X_T(f)|^2 \right]$$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F^{-1} [X_T(f) \cdot X_T^*(f)]$$

Rappel : $x_T(-t) \leftrightarrow X_T^*(f)$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [x_T(t) \otimes x_T(-t)]$$

Dans notre cas l'équation peut également s'écrire :

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) x(t + \tau) dt$$

Cette équation ressemble étrangement à l'équation de la fonction de convolution. La différence réside au niveau du facteur $x(t + \tau)$ qui devient $x(\tau - t)$.

4.6.2 Cas particuliers :

1. Si $x(t)$ est une fonction périodique l'équation de la fonction d'auto-corrélation se résume à appliquer cette dernière sur un seul cycle (de période T):

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} x(t)x(t+\tau)dt$$

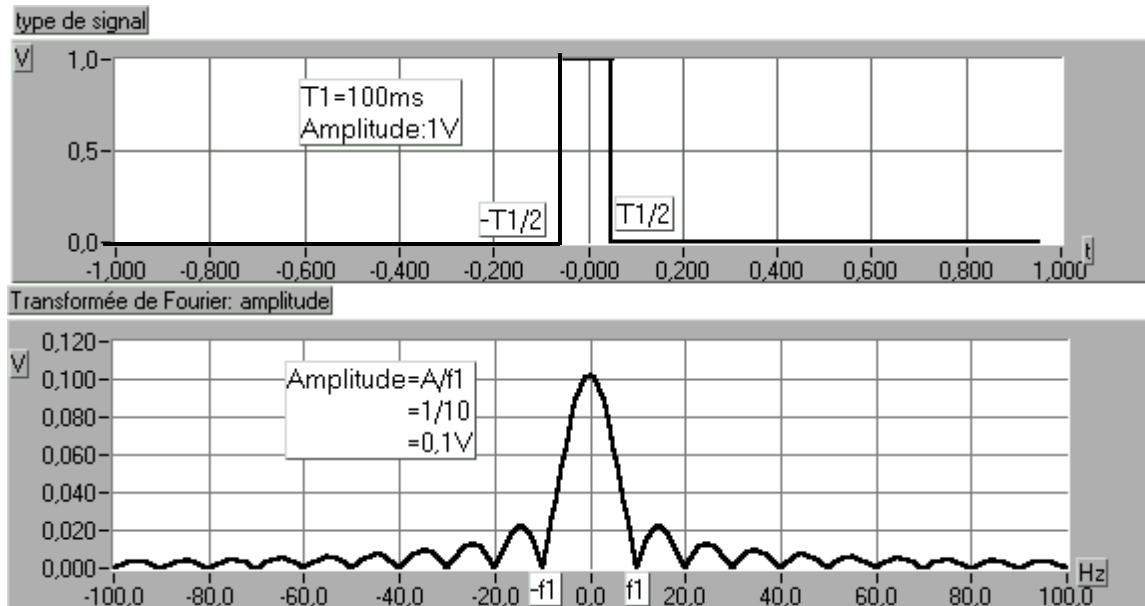
2. Rappel : $y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad \leftrightarrow \quad Y(f) = X(f).H(f)$

On peut écrire :

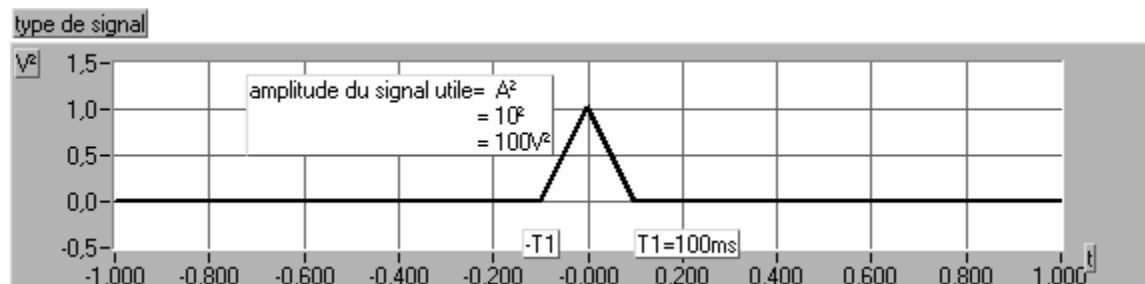
$$\boxed{S_y(f) = |H(f)|^2 \cdot S_x(f)} \text{ pour un système linéaire.}$$

4.6.3 Exemple de la fonction d'auto-corrélation et de la densité spectrale de puissance sur un train d'impulsions rectangulaires.

Soit l'impulsion rectangulaire suivant : (signal appliqué à une charge de 1ohm).



Application de la fonction d'auto-corrélation :



Calcul de la fonction d'auto-corrélation (dans le cas d'un train d'impulsions de période T:

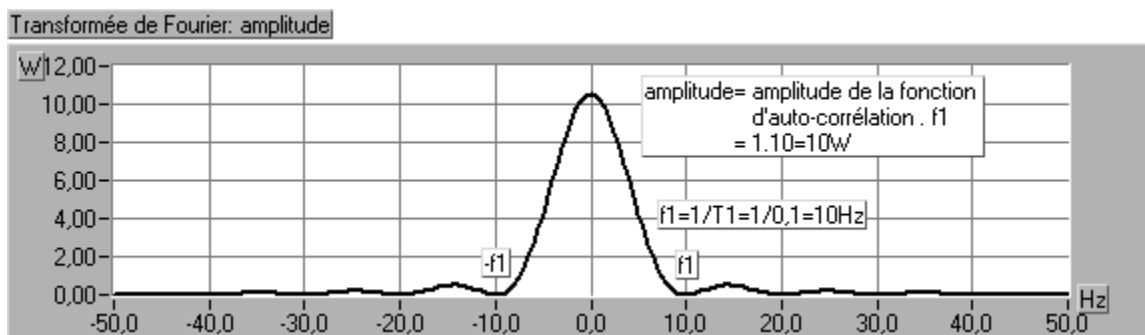
$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}-\tau} A^2 dt \quad \text{pour } 0 < \tau < T$$

$$R_x(\tau) = \left[\frac{A^2}{T} t \right]_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}-\tau} = \frac{A^2}{T} \left[\frac{T_1}{2} - \tau + \frac{T_1}{2} \right] = A^2 \left[1 - \frac{\tau}{T_1} \right]$$

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t + \tau) dt \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} A^2 dt \quad \text{pour } -T < \tau < 0$$

$$R_x(\tau) = \left[\frac{A^2}{T} t \right]_{-\frac{T}{2}-\tau}^{\frac{T}{2}} = \frac{A^2}{T} \left[\frac{T}{2} + \frac{T}{2} + \tau \right] = A^2 \left[1 + \frac{\tau}{T} \right]$$

Application de la transformée de Fourier à la fonction d'auto-corrélation afin d'obtenir la densité spectrale de puissance :



4.6.4 Exemple d'application :

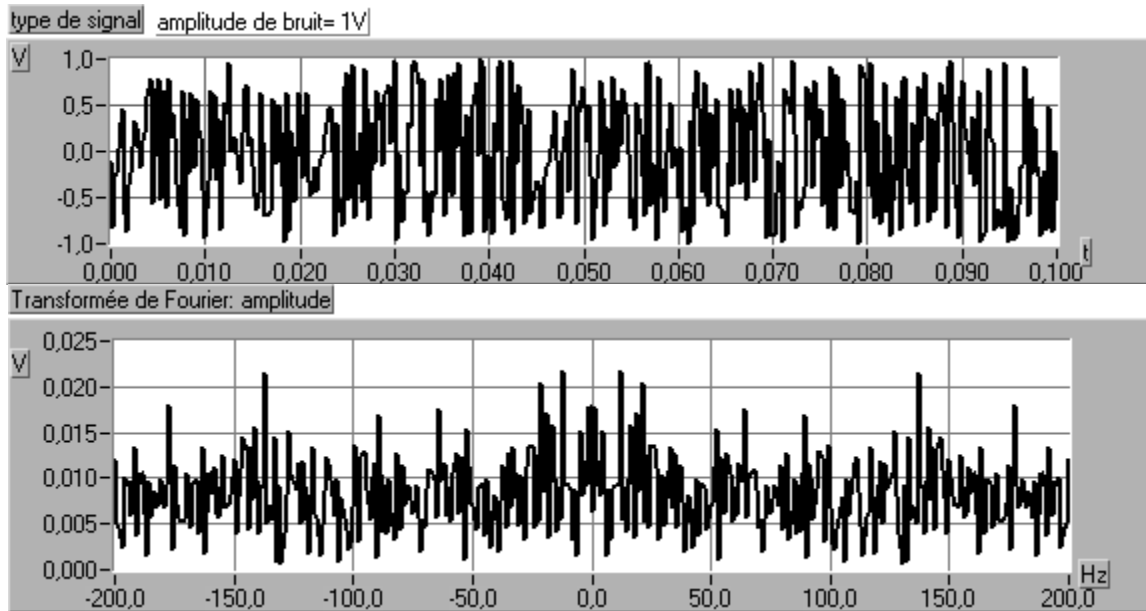
Cette fonction permet notamment de retrouver la forme d'un signal noyé dans du bruit (voir ci-dessous). Suite à l'application de la fonction, le niveau de bruit est très atténué car ce dernier n'est pas corrélé.

L'importance du niveau de bruit par rapport au signal est défini par le rapport signal sur bruit (SNR) :

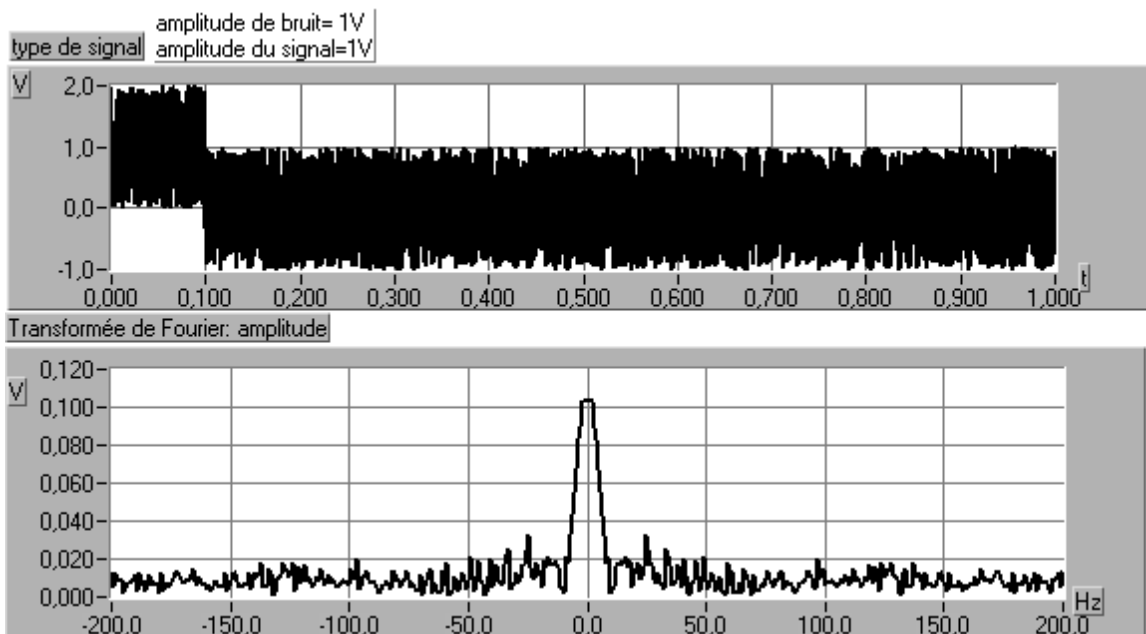
$$SNR = 10 \log \left(\frac{\text{niveausignalutile}}{\text{niveausignalbruit}} \right)$$

Signal identique au précédent mais avec présence de bruit blanc.

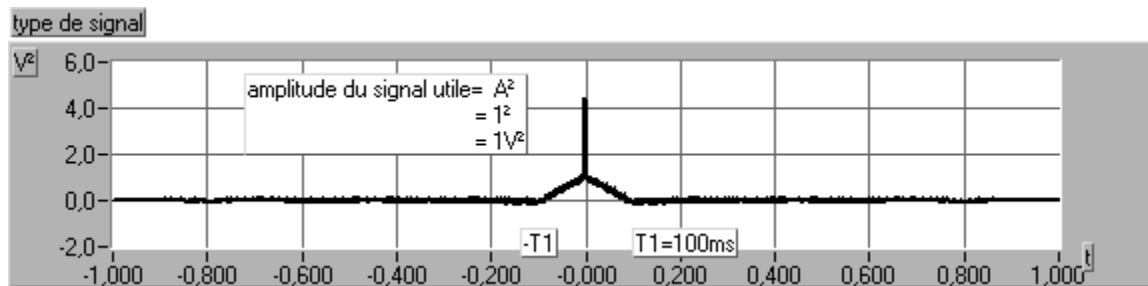
Bruit :



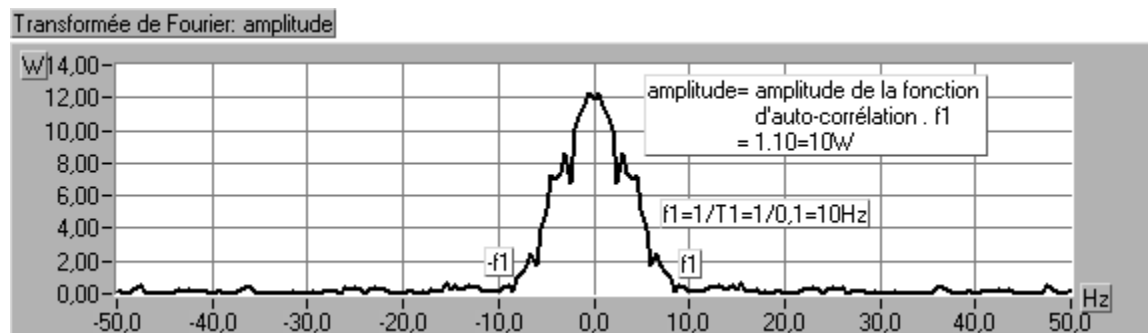
Signal utile avec le bruit :



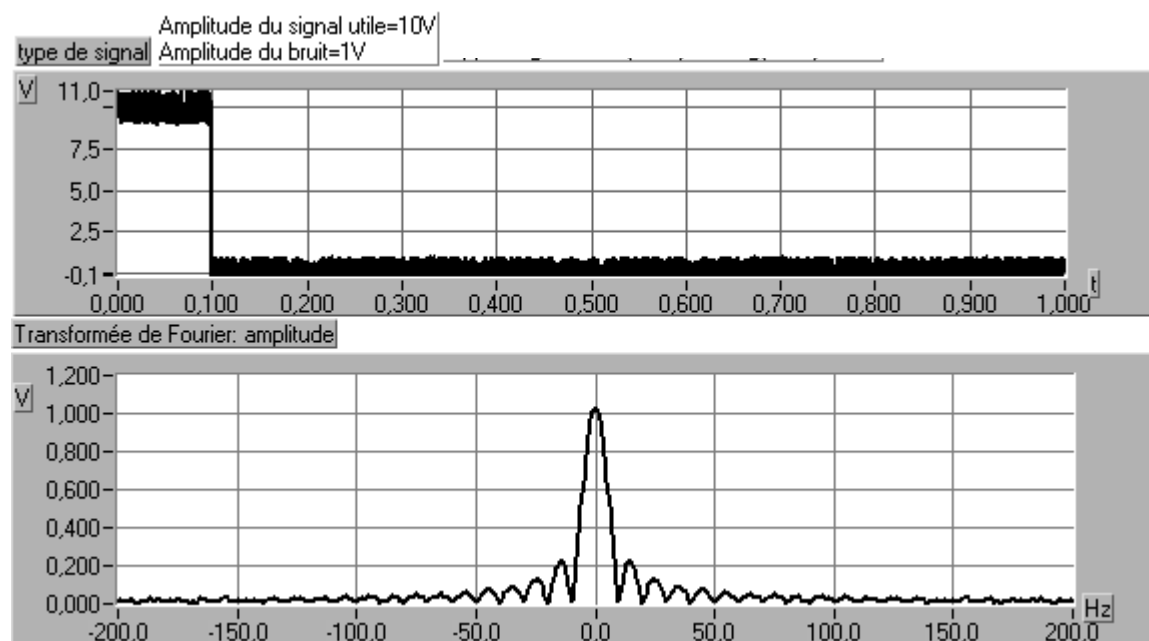
Application de la fonction d'auto-corrélation :



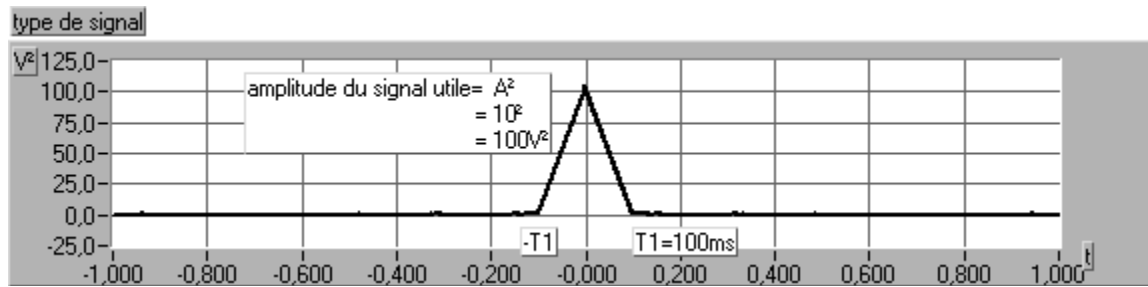
PSD



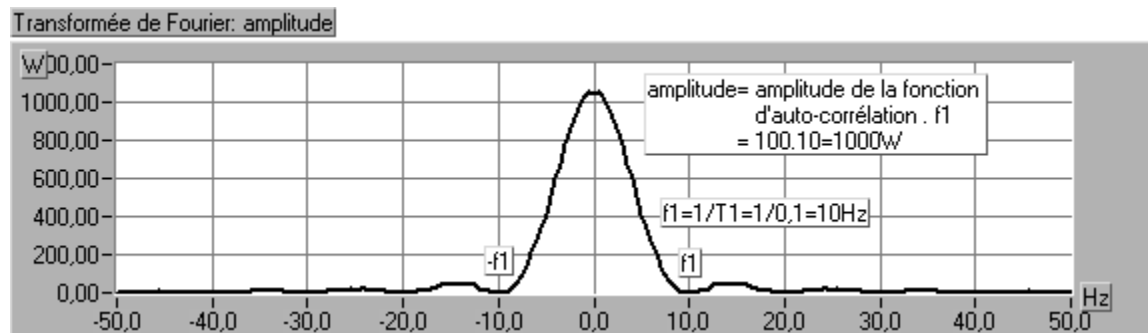
Même signal que précédemment mais avec un rapport signal amélioré.



Application de la fonction d'auto-corrélation :



PSD



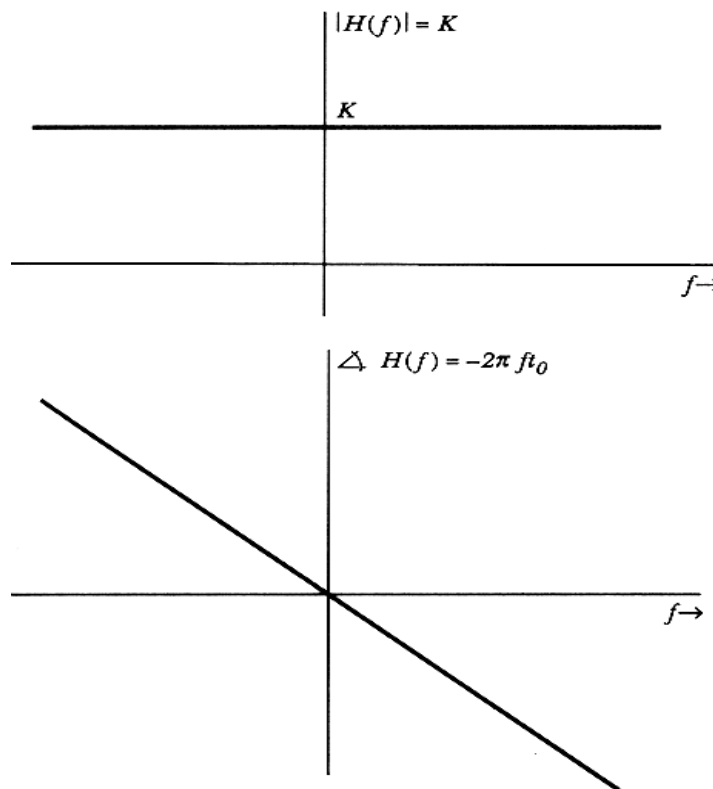
4.7 Fonction de transfert idéal n'engendrant pas de distorsion :

C'est le cas d'une communication de type analogique idéale :

$$y(t) = Kx(t - t_0) \leftrightarrow Y(f) = K.X(f)e^{-j2\pi ft_0} \Rightarrow H(f) = K.e^{-j2\pi ft_0}$$

Pas de distorsion d'amplitude : amplitude=constante (K)

Pas de distorsion de phase : la phase varie proportionnellement par rapport à la fréquence.



Si $|H(f)|$ n'est pas constant

→ distorsion linéaire d'amplitude

Si $\arg H(f)$ n'est pas proportionnel à la fréquence

→ distorsion linéaire de phase.

Remarque :

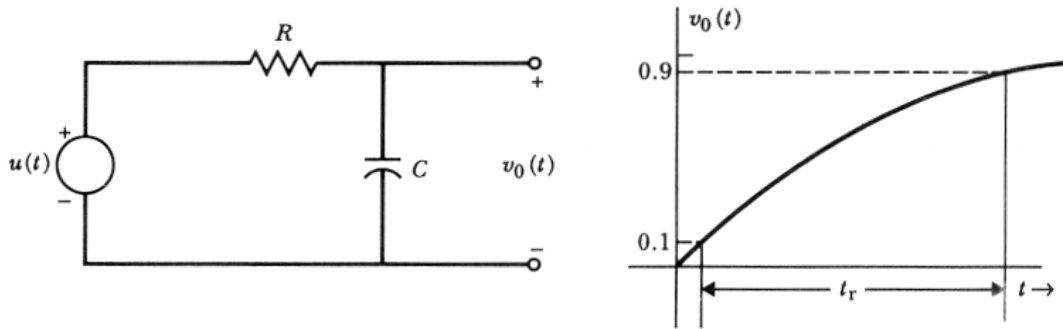
Si le système n'est pas linéaire, on obtient une distorsion non linéaire.

Cette dernière engendre de nouvelles composantes dans le spectre du signal → extension de la largeur du spectre.

4.8 Relation entre la durée d'une impulsion et la largeur minimale de la bande passante.

4.8.1 Cas d'un filtre RC du 1^{er} degré.

Soit le circuit RC (filtre passe-bas) suivant auquel on applique une impulsion rectangulaire :



La réponse de notre circuit est $v_0(t)$ (voir figure ci-dessus).

Conventionnellement, le temps de transition t_r (de montée dans notre cas) correspond à la durée pour que le signal de sortie (la réponse à l'impulsion en entrée) passe de 10% à 90% de la valeur finale de sortie.

Calcul de la réponse d'un filtre RC à une impulsion rectangulaire:

$$u(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_1} - \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow U(f) = \frac{A}{f_1} \left(\operatorname{sinc} \frac{f}{f_1}\right) e^{-j\omega \frac{T_1}{2}}$$

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} x(t) \leftrightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$v_0(t) = u(t) \otimes h(t) \leftrightarrow V_0(f) = U(f) \cdot H(f)$$

$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{f_1} \left(\operatorname{sinc} \frac{f}{f_1}\right) e^{-j\omega \frac{T_1}{2}} \cdot \frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot e^{j2\pi ft} df \quad (= F^{-1})$$

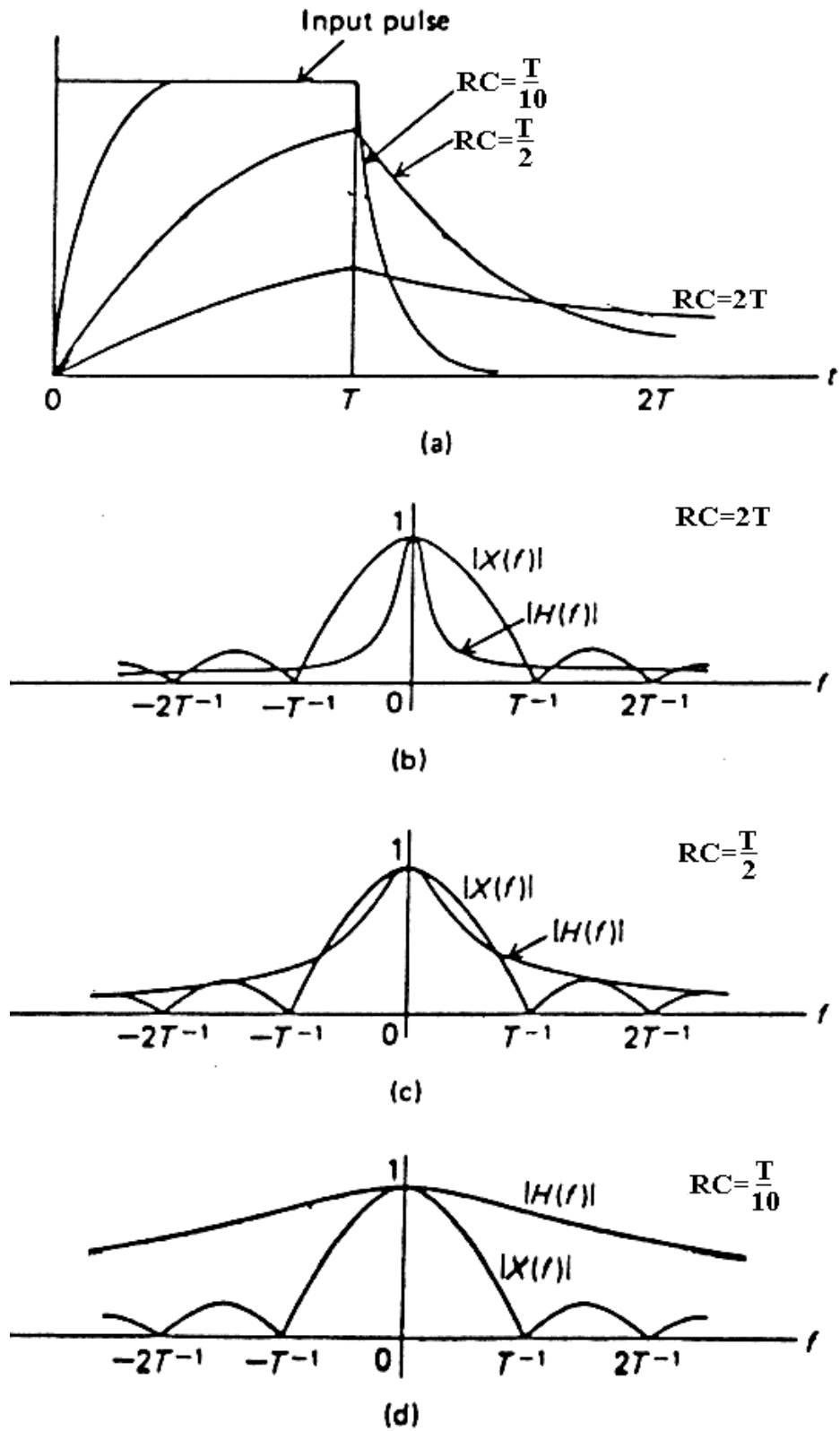
$$v_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \operatorname{rect}\left(\frac{t'}{T_1} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{RC} e^{-\frac{t-t'}{RC}} x(t-t') dt' \quad (\text{convolution})$$

$$\text{si } t < 0 \quad v_0(t) = 0$$

$$\text{si } 0 < t < T_1 \quad v_0(t) = \frac{A}{RC} \int_0^t e^{-\frac{t-t'}{RC}} dt' = A(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$\text{si } t > T_1 \quad v_0(t) = \frac{A}{RC} \int_0^{T_1} e^{-\frac{t-t'}{RC}} dt' = A(e^{-\frac{t-T_1}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Exemple de réponses pour différentes valeurs de RC :



Le temps de montée vaut donc : $t_r = RC \ln(9)$

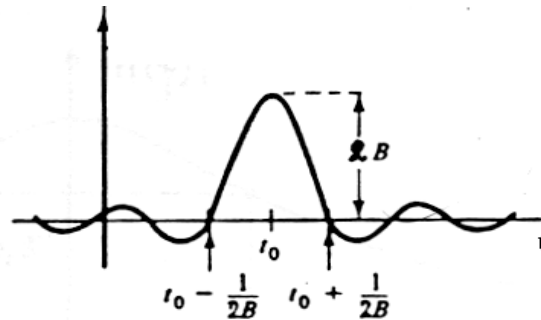
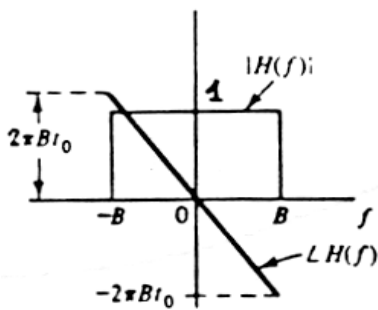
La bande passante à -3dB est défini comme suit : $B = \frac{1}{2\pi RC}$

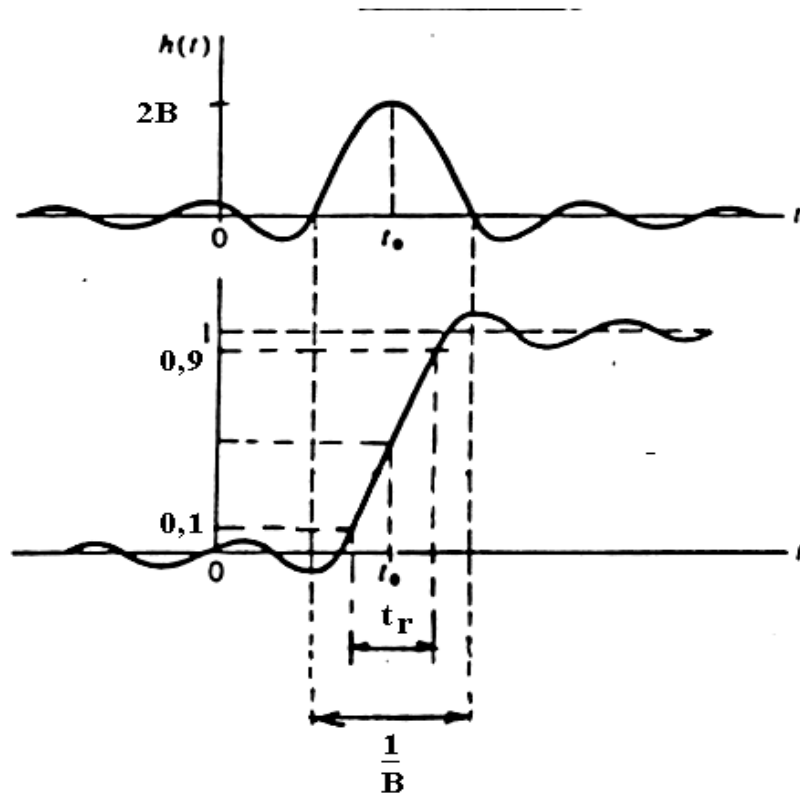
$$\Rightarrow t_r = \frac{\ln(9)}{2\pi B} \cong \frac{0,35}{B}$$

Valable uniquement dans le cas d'un filtre RC passe-bas.

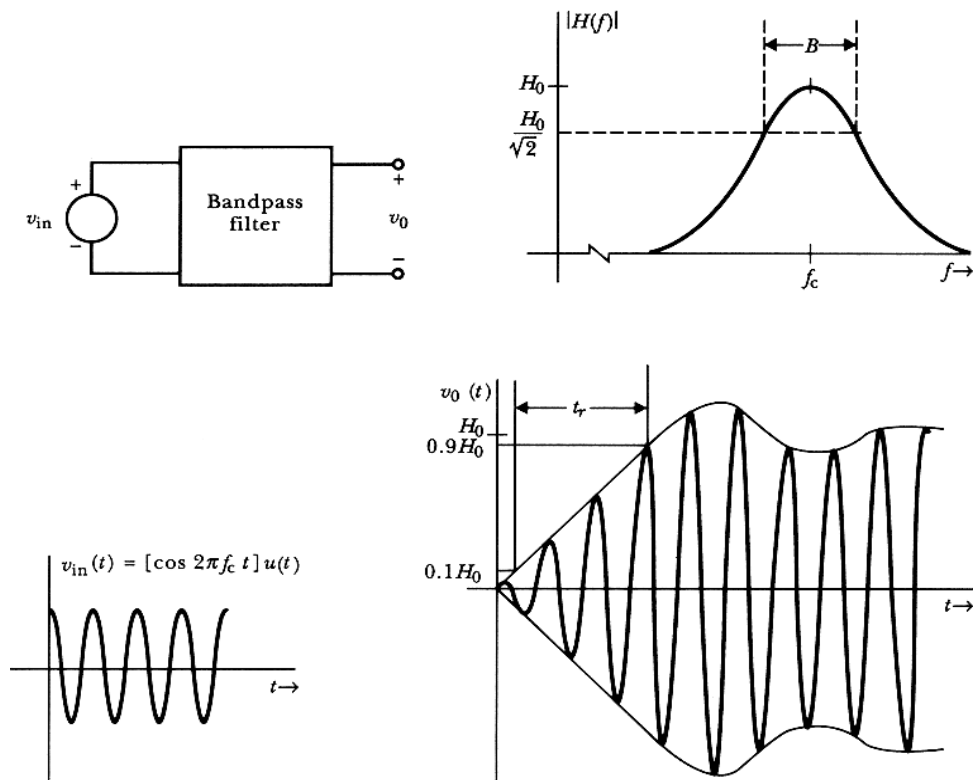
Filtre passe bas idéal : \Rightarrow pas distorsion de phase ni d'amplitude

$$H_{LP}(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2B}\right) e^{-j\omega t_0} \Leftrightarrow h_{LP}(t) = 2B \text{sinc}(2B(t - t_0))$$





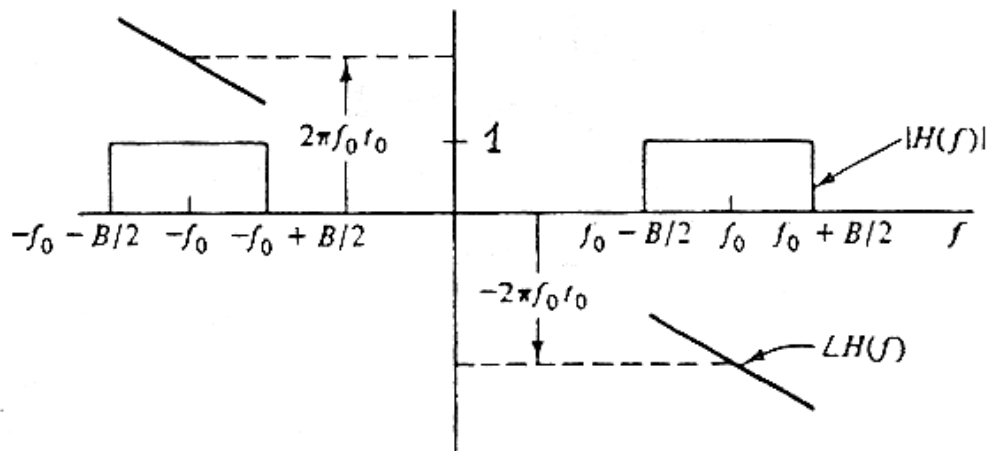
4.8.2 Cas d'un filtre passe-bande.

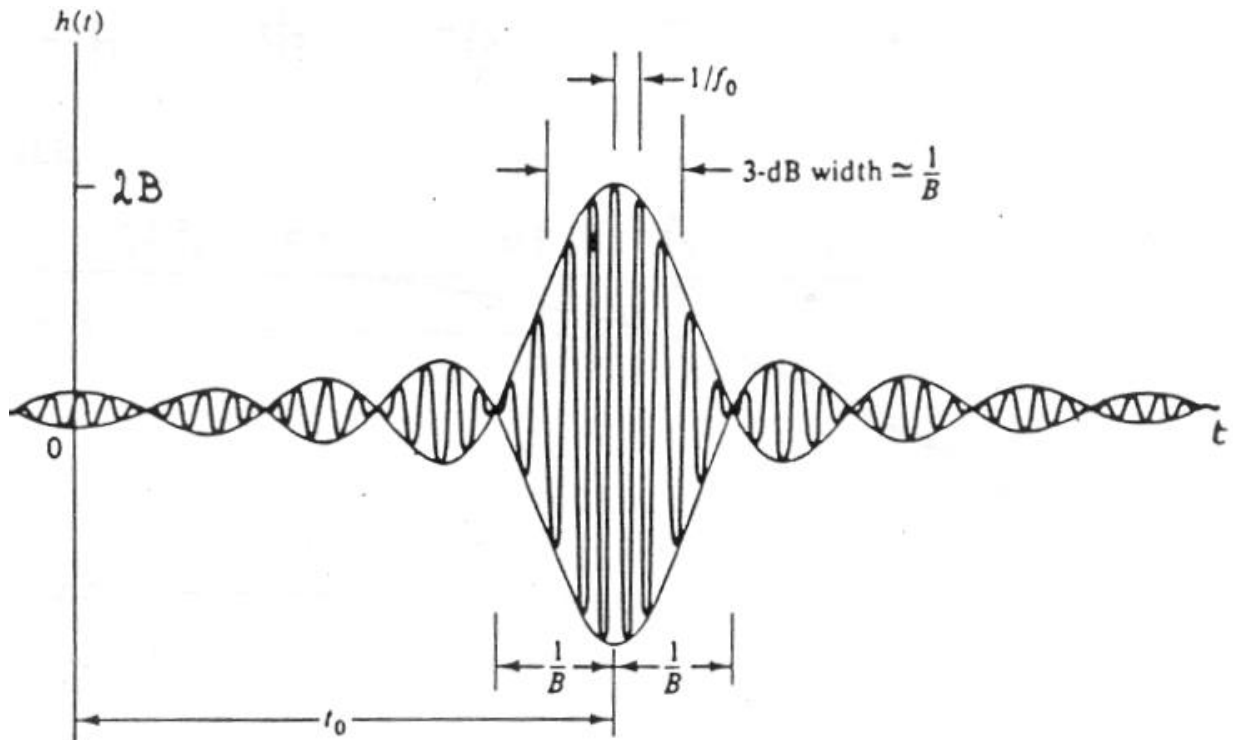


$$t_r = \frac{0,7}{B}$$

Filtre passe bande idéal : ➔ pas de distorsion de phase ni d'amplitude

$$HBP(f) = \left[\text{rect}\left(\frac{f+f_0}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-f_0}{B}\right) \right] e^{-j\omega t_0} \leftrightarrow hBP(t) = 2B \text{sinc}(t-t_0) \cdot \cos[\omega_0(t-t_0)]$$





5 L'échantillonnage.

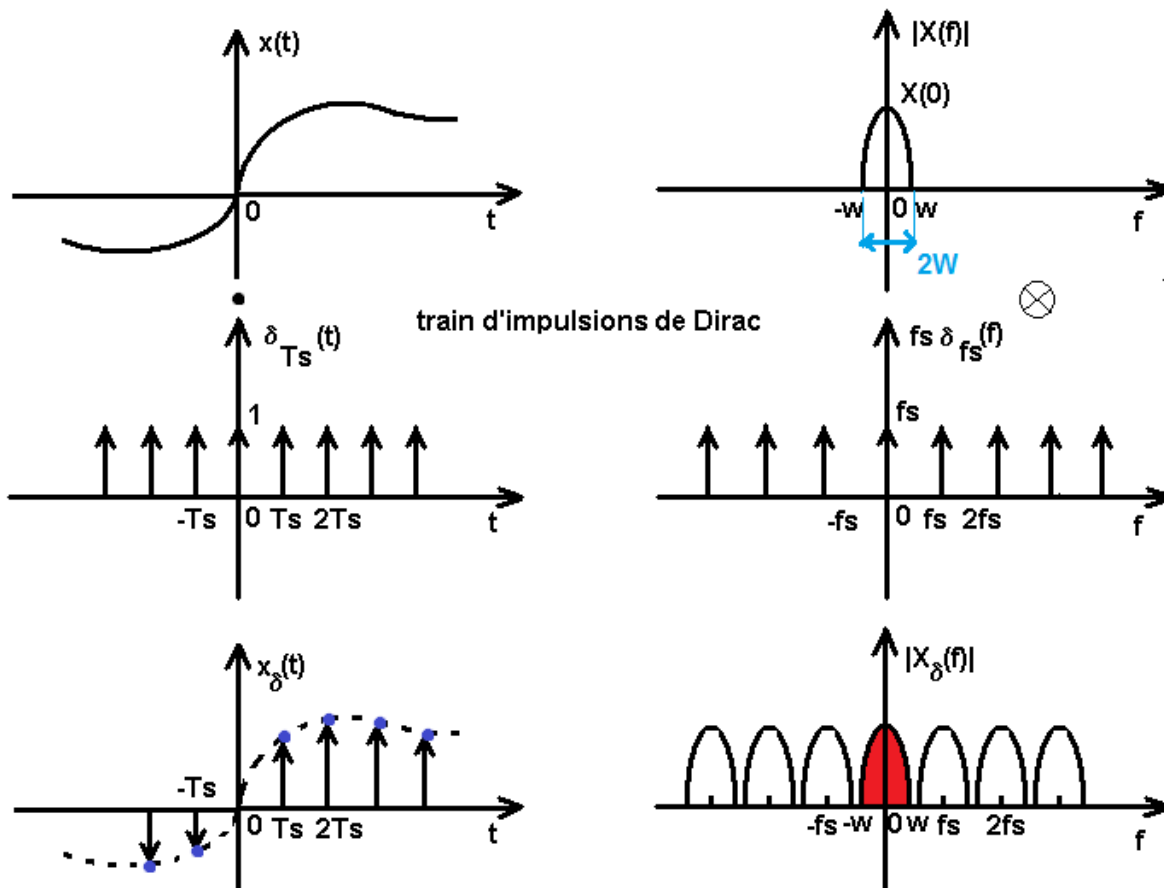
5.1 Introduction.

Jusqu'à présent, nous avons étudié des signaux de type continu. En technique numérique, les signaux doivent être échantillonnés c-à-d obtenir un certain nombre de valeurs discrètes du signal à traiter par unité de temps. Ce nombre de points par seconde permet d'obtenir un ensemble de valeurs fini se rapprochant au plus près du signal continu initial. Plus le nombre d'échantillons par seconde est grand, plus précis (moins faux) sera l'échantillonnage. Revers de la médaille, la bande passante devra être augmentée, ce qui n'est pas toujours possible.

$$x_{\delta}(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \cdot \delta(t - kT_s)$$

$$X_{\delta}(f) = X(f) \otimes f_s \delta_{f_s}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Si $X(f) = 0$ pour $|f| > w \rightarrow f_s \geq 2w$



Chaque bande passante de largeur $2w$, contienne exactement la même information → dans le cas d'une transmission seul un lobe $2w$ devra être utilisé. Extraction du lobe est obtenue grâce à dispositif de filtrage passe-bande.

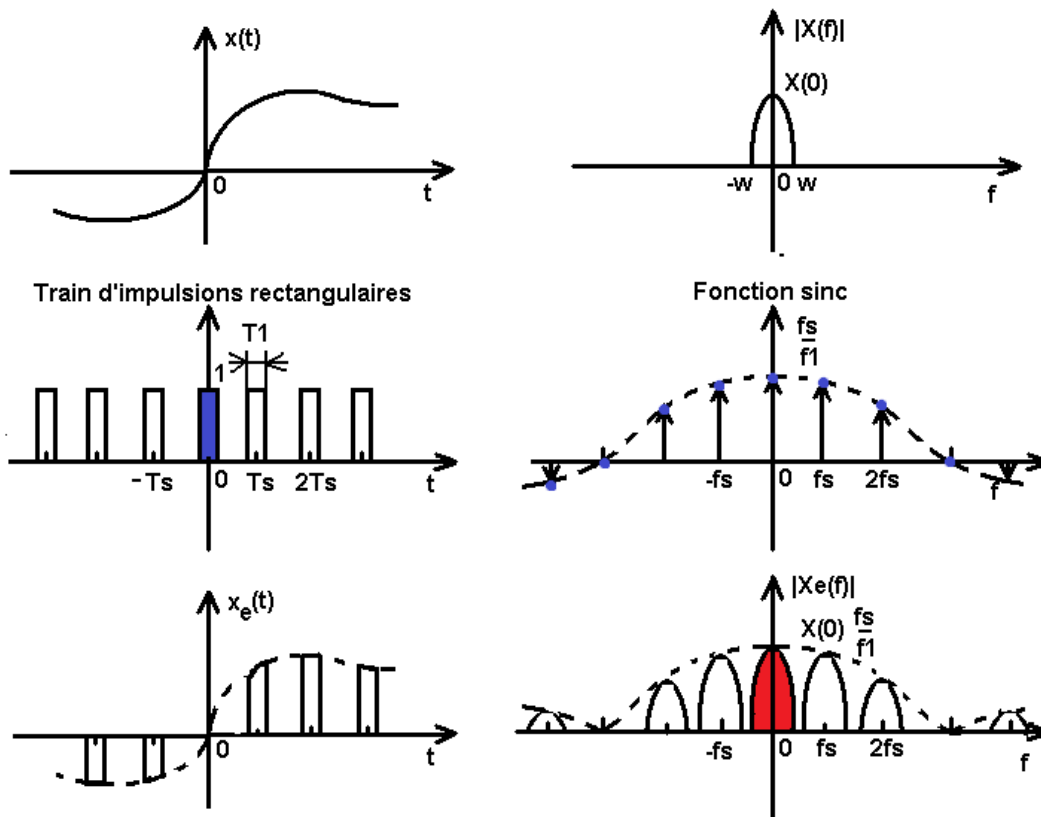
Afin d'éviter tout recoupement (erreur) entre les différents lobes de largeur $2w$, on constate que la fréquence d'échantillonnage (f_s) doit être \geq à deux fois la fréquence de la composante fréquentielle la plus élevée du signal (w). $f_s \geq 2w$ (loi de Shannon)

5.2 Echantillonneur réel → circuit commutateur.

$$x_e(t) = x(t) \cdot \left[\text{rect}\left(\frac{t}{T_1}\right) \otimes \delta_{T_s}(t) \right]$$

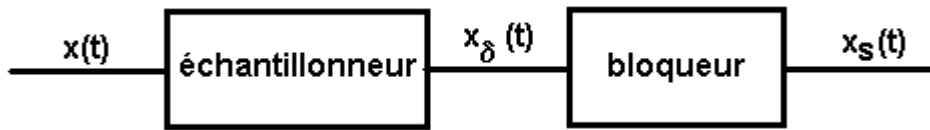
$$X_e(f) = X(f) \otimes \left[\frac{1}{f_1} \text{sinc}\left(\frac{f}{f_1}\right) \cdot f_s \delta_{f_s}(f) \right]$$

$$X_e(f) = \frac{f_s}{f_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\text{sinc}\left(n \frac{f_s}{f_1}\right) \cdot X(f - n f_s) \right]$$

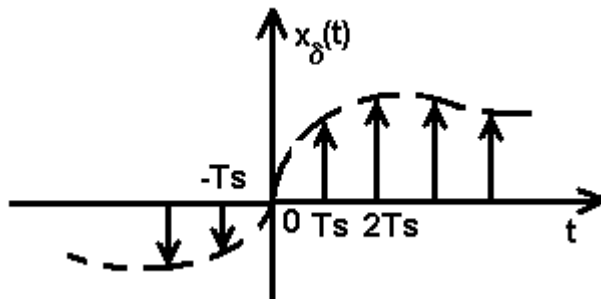


Par rapport au cas idéal précédent, on peut constater une atténuation (non linéaire) de l'amplitude dans le domaine fréquentiel des différentes bandes passantes créées par l'échantillonnage du signal. Pas de lobe en f_1 et $-f_1$

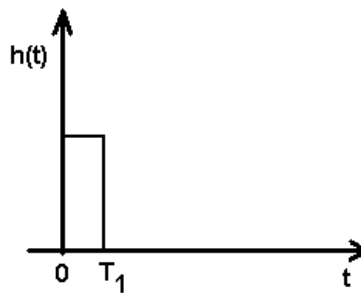
5.3 Echantillonneur réel → circuit « échantillonneur/bloqueur »



Echantillonneur : $x_{\delta}(t) = x(t) \cdot \delta T_s(t)$

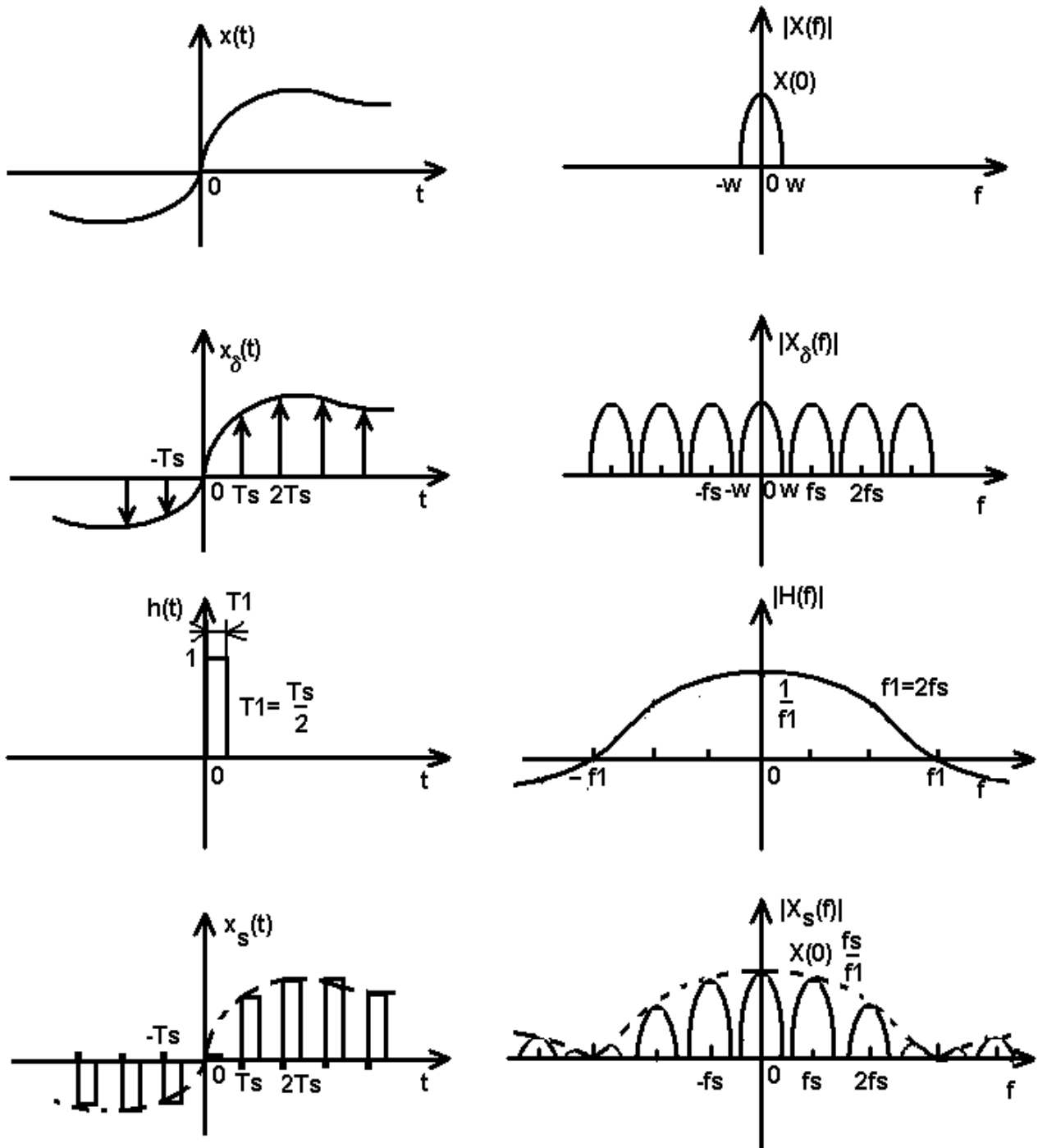


Bloqueur : $rect\left(\frac{t}{T_1} - \frac{1}{2}\right)$



$$x_s(t) = x\delta(t) \otimes rect\left(\frac{t}{T_1} - \frac{1}{2}\right)$$

$$X_s(f) = \frac{f_s}{f_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \cdot \sin c\left[\left(\frac{f}{f_1}\right) e^{-j\omega \frac{T_1}{2}}\right]$$

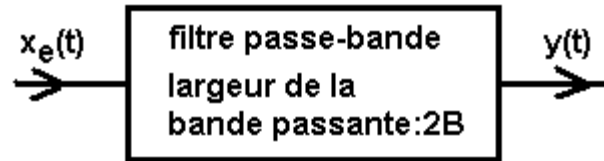


Dans le spectre, on constate également une modification de l'amplitude du lobe correspondant à la bande passante $2w$ du signal.

De plus contrairement à échantillonnage avec circuit commutateur, de part et d'autre de la fréquence $3f_s$ ou f_1 et $-3f_s$ ou $-f_1$, le lobe existe.

5.4 Récupération d'un signal échantillonné.

5.4.1 Dans le cas d'un échantillonnage avec un circuit commutateur.



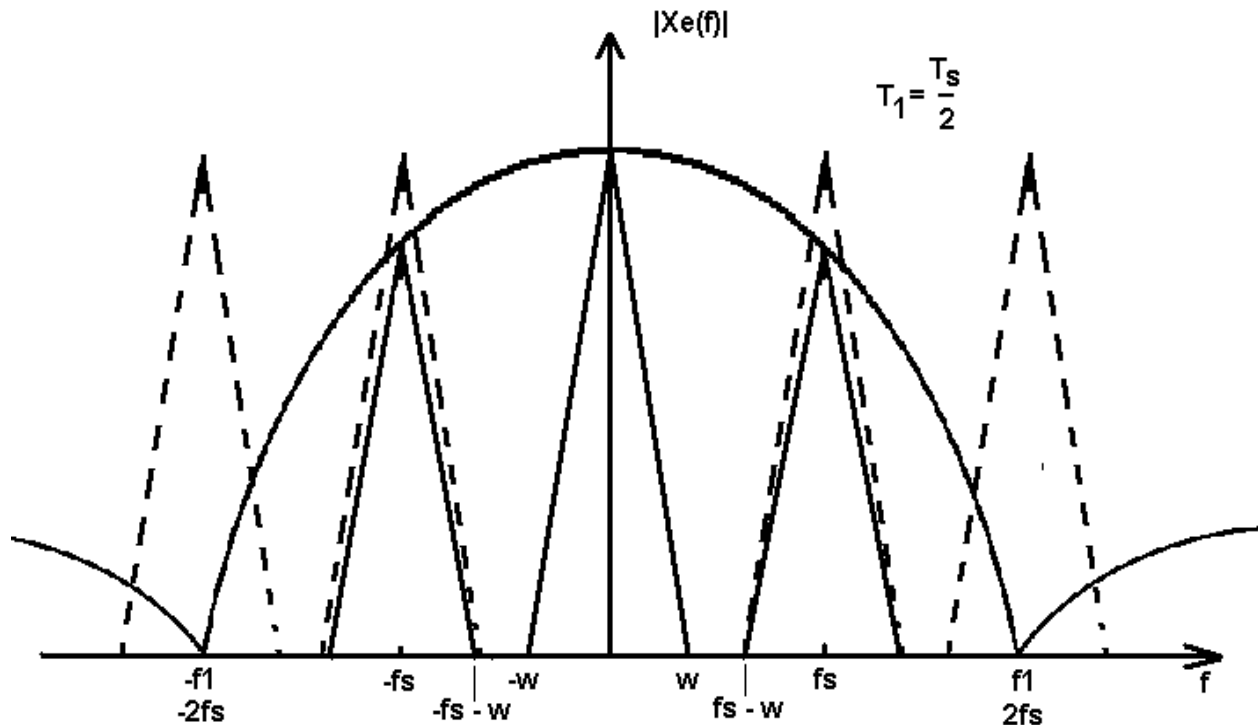
avec : $w < B < f_s - w$

$$X_e(f) = \frac{f_s}{f_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sin c \left(n \frac{f_s}{f_1} \right) \cdot X(f - n f_s) \right]$$

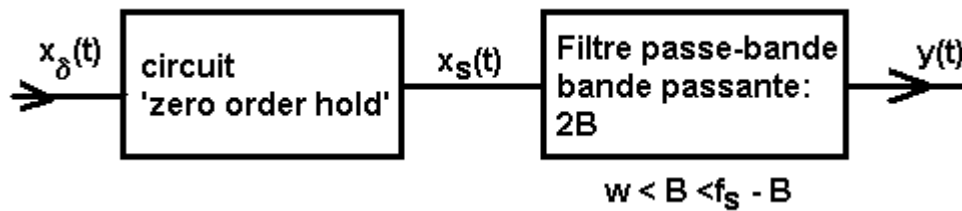
$$Y(f) = \frac{f_s}{f_1} X(f) e^{-j\omega t_0}$$

$$y(t) = \frac{T_1}{T_s} x(t - t_0)$$

Restitution d'un signal échantillonné par l'intermédiaire d'un circuit commutateur

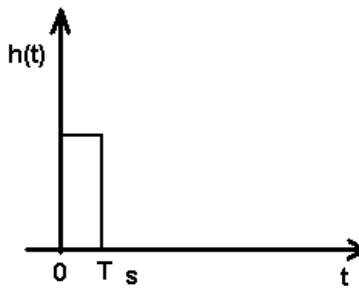


5.4.2 Dans le cas d'un circuit échantillonneur/bloqueur.



Circuit « Zero order hold »:

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T_s} - \frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \frac{1}{f_s} \text{sinc}\left[\left(\frac{f}{f_s}\right) \cdot e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}\right]$$

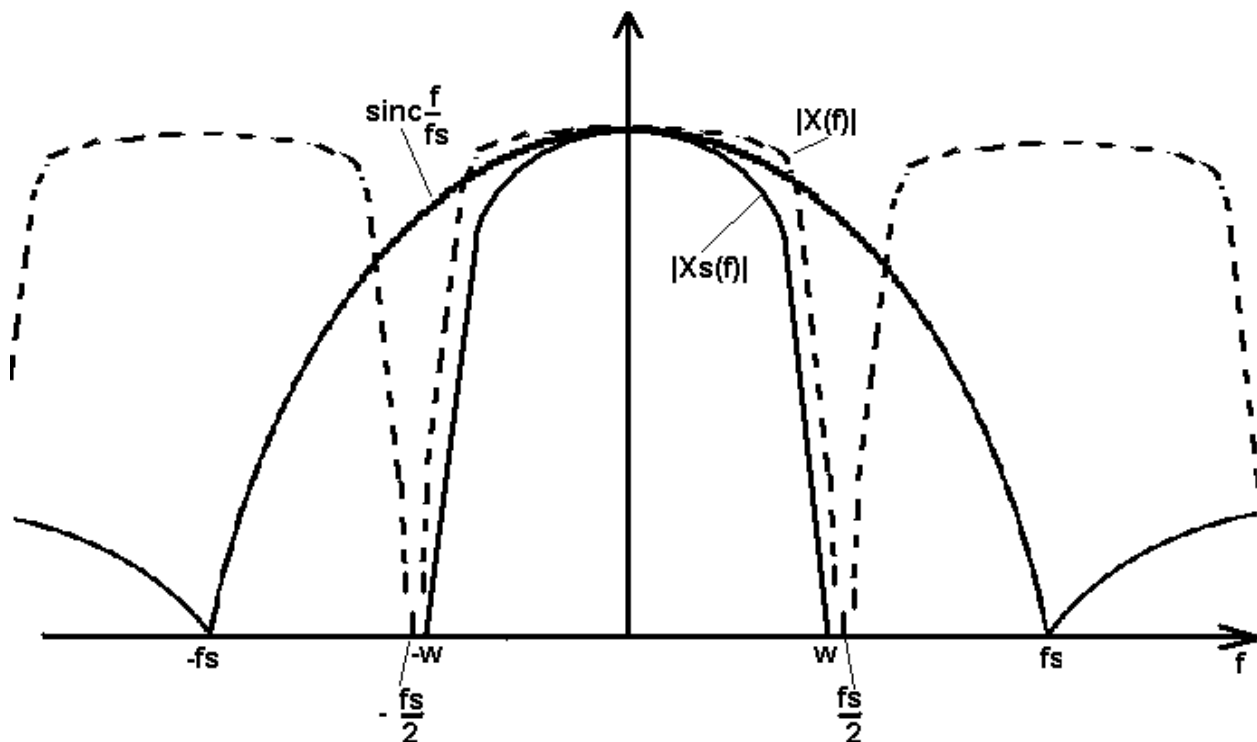


$$X_\delta(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

$$X_s(f) = \frac{f_s}{f_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \cdot \text{sinc}\left[\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}\right]$$

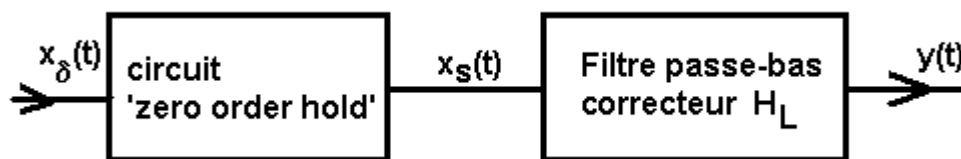
$$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s) \cdot \text{sinc}\left[\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}\right]$$

$$Y(f) = X(f) e^{-j\omega t_0} \cdot \text{sinc}\left[\left(\frac{f}{f_s}\right) e^{-j\omega \frac{T_s}{2}}\right]$$



On constate une déformation d'amplitude importante dans la bande passante ($-w$ à w) du lobe concernant le signal utile. Cette déformation est due à la forme de la fonction sinc associée au « zero order hold ».

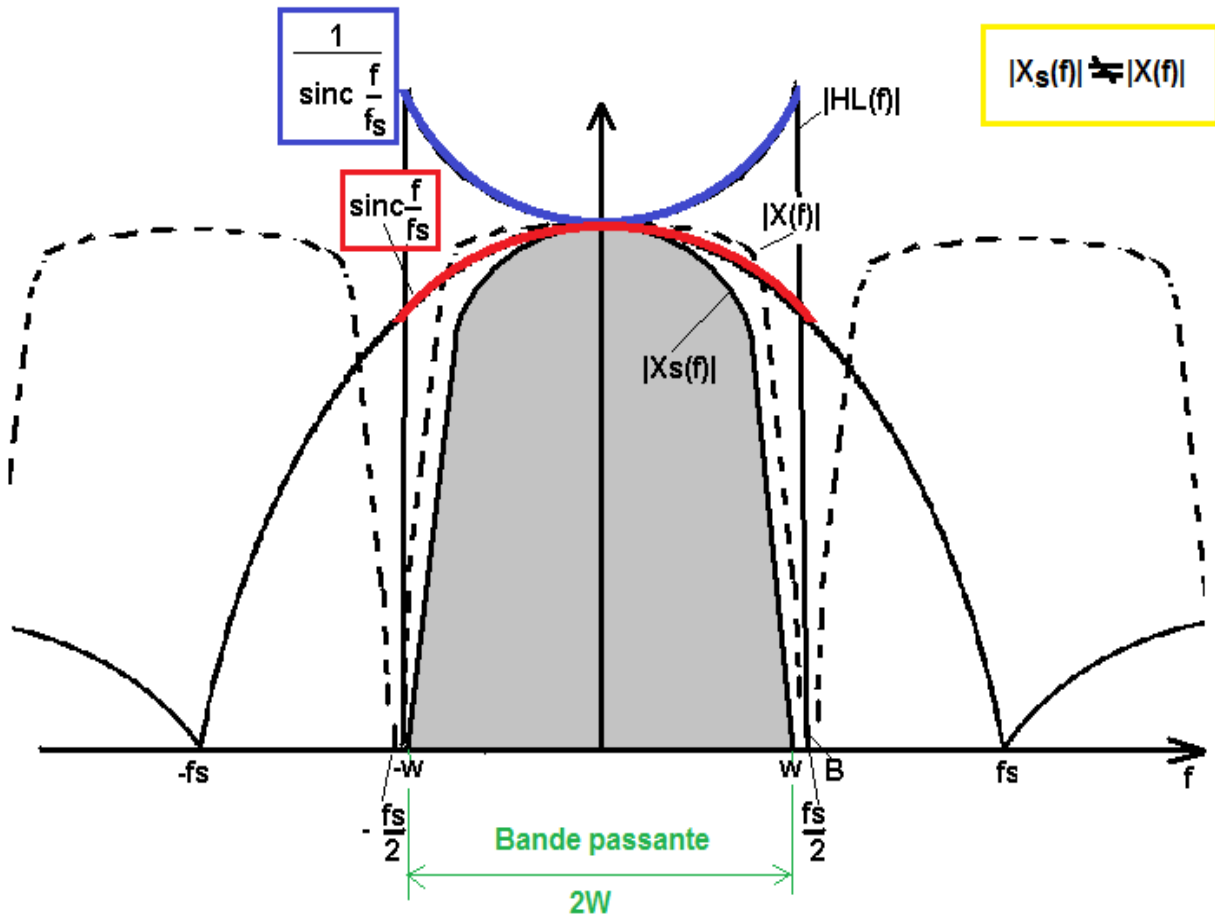
Remède : Application d'un filtre passe-bas correcteur.



$$H_L(f) = |H_L(f)| \cdot e^{-j\omega \frac{T_s}{2}} \quad \text{avec} \quad |H_L(f)| = \frac{1}{\sin c \frac{f}{f_s}} \quad \text{si } |f| < w$$

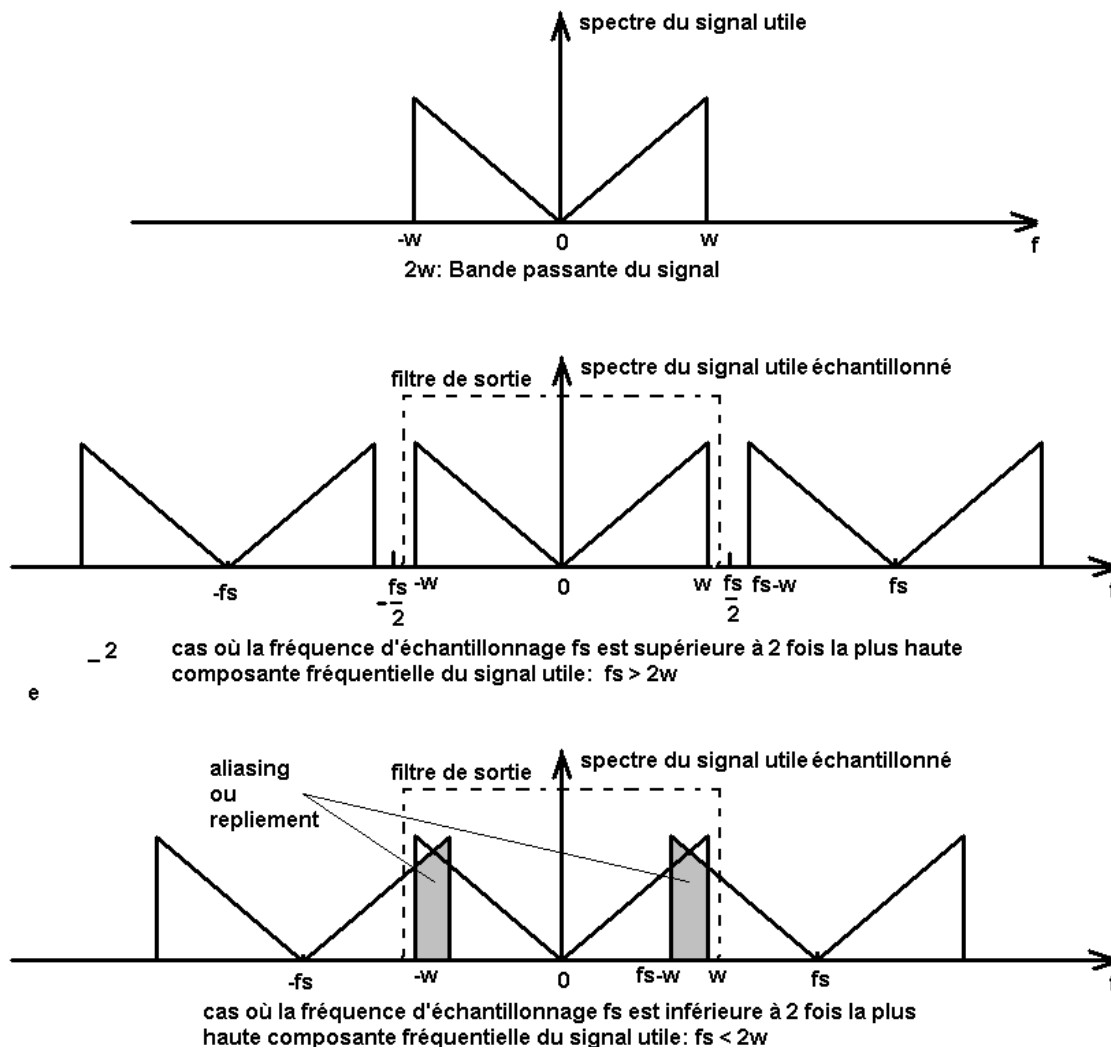
$$|H_L(f)| = 0 \quad \text{si } |f| > B$$

$$Y(f) = X(f) \sin c \left[\left(\frac{f}{f_s} \right) \cdot e^{-j\omega \frac{T_s}{2}} \cdot H_L(f) \right] = X(f) \cdot e^{-j\omega \left(\frac{T_s}{2} + t_0 \right)}$$



5.5 Erreurs possibles lors de la reconstitution d'un signal échantillonné.

Si on essaie de récupérer un signal échantillonné dont la fréquence d'échantillonnage est inférieure à 2 fois la plus haute composante fréquentielle du signal utile, on obtiendrait à la sortie du filtre de récupération du signal des composantes spectrales non désirées → distortion.

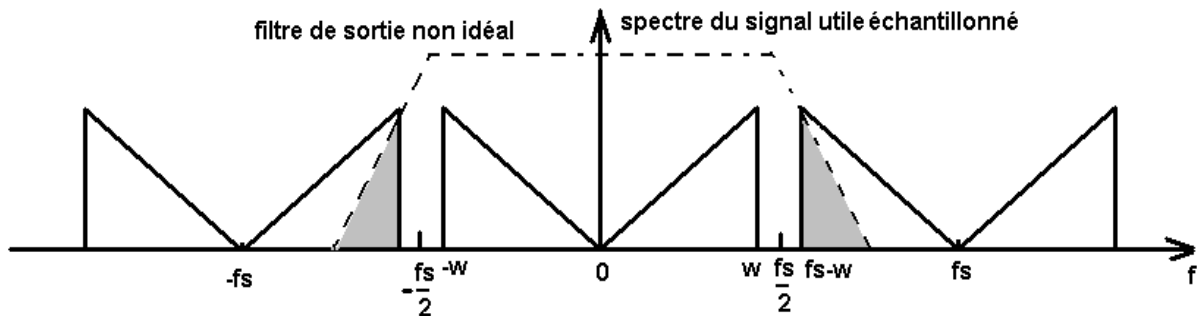


Ce phénomène est appelé erreur de repliement de spectre « aliasing » en anglais.

Remède :

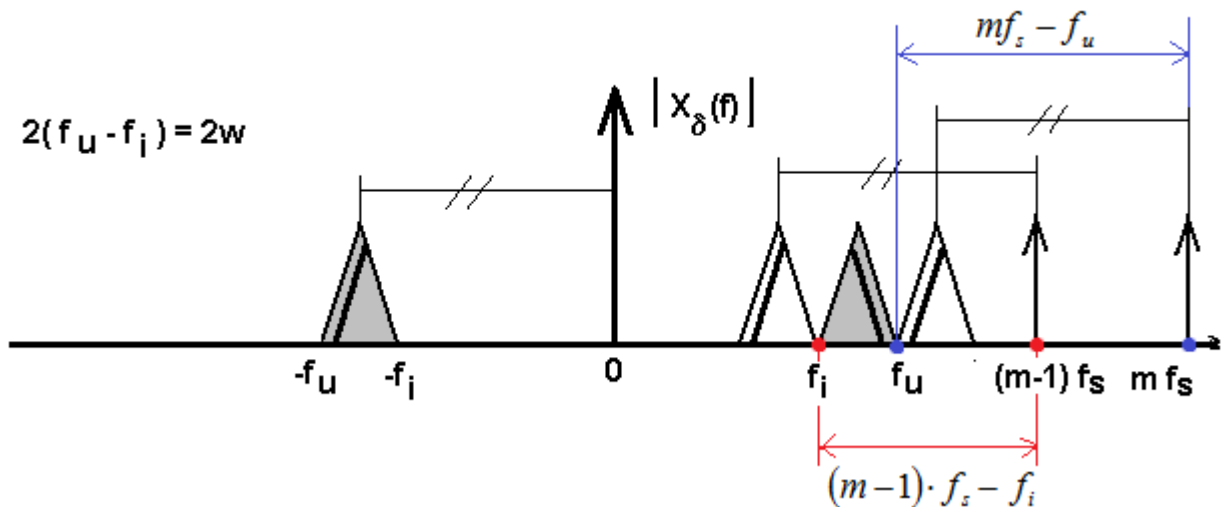
- Soit augmenter la fréquence d'échantillonnage du signal de telle manière que cette dernière soit au moins 2 fois plus importante que la fréquence de la plus haute composante fréquentielle du signal utile
- Soit placer un filtre « anti-aliasing » avant l'échantillonnage afin de supprimer toutes les composantes fréquentielles du signal utile supérieures à la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Si le filtre placé à la sortie n'est pas idéal des composantes spectrales non désirables risquent de parasiter la reconstitution du signal échantillonné.



5.6 Echantillonnage d'un signal de type « band pass »

Un signal « band pass » un signal dont le spectre est situé entre deux bornes de fréquences. Soit f_i la borne inférieure soit f_u la borne supérieure.



$$(m-1) \cdot f_s - f_i < f_i \rightarrow (m-1) \cdot f_s < 2f_i$$

$$\rightarrow f_s < \frac{2f_i}{m-1}$$

$$f_u < m f_s - f_u \rightarrow 2f_u < m f_s$$

$$\rightarrow \frac{2f_u}{m} < f_s$$

$$\boxed{\frac{2f_u}{m} < f_s < \frac{2f_i}{m-1}}$$

5.6.1 Exemple numérique.

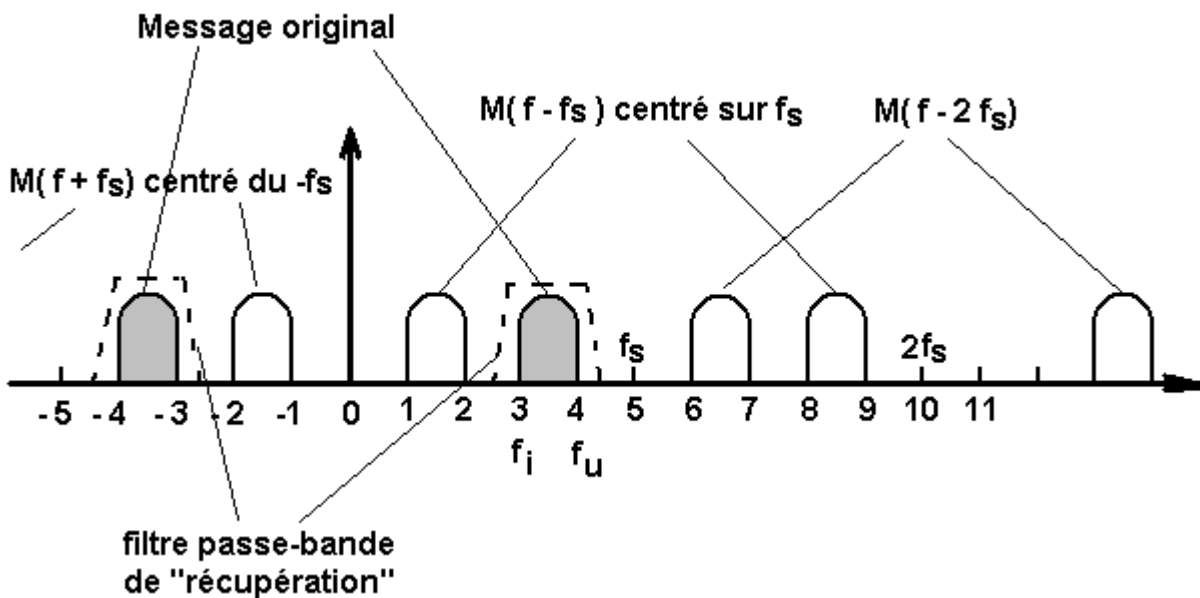
Soit $f_i = 3 \text{ kHz}$ et $f_u = 4 \text{ kHz}$, calculer les fréquences d'échantillonnages possibles sans « aliasing ».

On sait que

$$\frac{2f_u}{m} < f_s < \frac{2f_i}{m-1}$$

- Pour $m=1$: $\frac{2 \cdot 4}{1} < f_s < \frac{2 \cdot 3}{0} \Rightarrow 8 \text{ kHz} < f_s < \infty$
- Pour $m=2$: $\frac{2 \cdot 4}{2} < f_s < \frac{2 \cdot 3}{1} \Rightarrow 4 \text{ kHz} < f_s < 6 \text{ kHz}$
- Pour $m=3$: $\frac{2 \cdot 4}{3} < f_s < \frac{2 \cdot 3}{2} \Rightarrow 2,667 \text{ kHz} < f_s < 3 \text{ kHz}$
- Pour $m=4$: $\frac{2 \cdot 4}{4} < f_s < \frac{2 \cdot 3}{3} \Rightarrow 2 \text{ kHz} < f_s < 2 \text{ kHz}$

Exemple pour $f_s = 5 \text{ kHz}$.



Bibliographie.

- ♦ An introduction to communication systems Allan R. Hambley ed. Computer science press.
- ♦ Les réseaux A. Tannenbaum Ed. Prentice Hall
- ♦ Travaux pratiques sur les fibres optiques Pocatec LTEE, la Pocatière.
- ♦ Traité de l'électronique P. Horowitz & Hill Ed. Elector.
- ♦ Notes de cours de la section télécommunication (ISIL) :
 - technologie des télécommunications P.Camus.
 - théorie et de traitement du signal V.Brixko.
 - télécommunications V.brixko.
 - Analyse et traitement des signaux A. Dor.