Erwan ALLOT

20 Boulevard Tristan Corbière 22 410 Saint-Quay-Portrieux erwanallot@gmail.com

Allotion Tricarré Géométrie atomique carrée

Allotion ϕ (se prononce « lot ») : opérateur arithmétique permettant de calculer l'aire d'un tricarré.

Tricarré : figure géométrique composée de l'ensemble des carrés unitaires entiers au sein d'un triangle rectangle.

Géométrie atomique carrée : concept initial de cette étude qui définit le carré unitaire comme insécable.

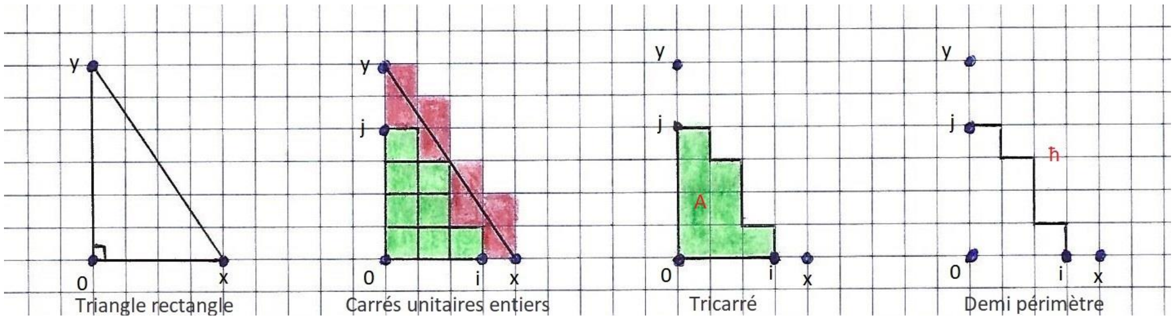

Figure 1 : présentation du **Tricarré**

À partir d'un triangle rectangle 0xy, on dénombre les carrés unitaires entiers (en vert) qu'il contient. Les carrés rouges sont coupés par l'hypoténuse du triangle rectangle et sont donc éliminées. On obtient un **tricarré** 0ij de demi-périmètre **ħ** avec 3 sommet : O, i Ɛ [Ox] et j Ɛ [Oy].

Dans cet exemple [Ox] = 4 et [0y] = 6.

On obtient pour le **tricarré** : [Oi] = 3, [Oj] = 4, aire du **tricarré** A = 8 et demi-périmètre **ħ** = 7.

Formules générales du Tricarré :

¤	Aire du **tricarré** :	$A = x \, ϕ \, y$
¤	Périmètre du **tricarré** :	$P = 2 * ħ$
¤	[Oi] pour $y \geq x$:	$i = x - 1$
¤	[Oj] pour $y \geq x$:	$j = ħ - i$

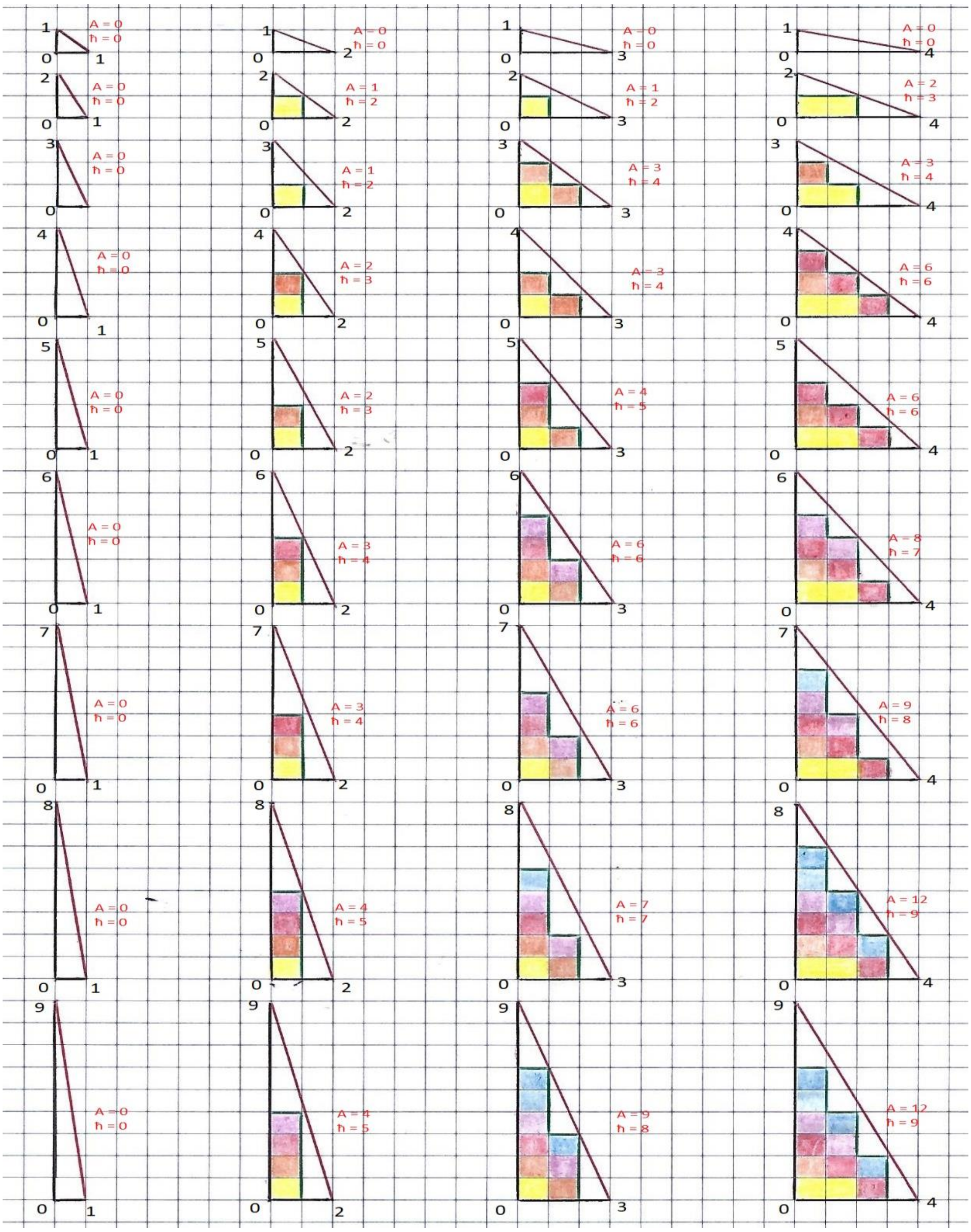

Figure 2 : présentation des premiers **tricarrés**

À partir des premiers **tricarrés** réalisés à la main, on obtient deux matrices : aire (A) et demi-périmètre (ħ).

Pour la lecture des couleurs, il faut lire en vertical. Chaque évolution est marquée par une nouvelle couleur. L'ordre des couleurs ici : jaune, orange, rouge, rose, bleu clair et bleu foncé.

La réalisation à la main a été faite jusqu'à 10 par 10. Nous nous contentons dans cet article de la Figure 2 pour illustrer l'étude.

Matrice élémentaire de l'allotion :

Φ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	2	2	3	3	4	4
3	0	1	3	3	4	6	6	7	9
4	0	2	3	6	6	8	9	12	12
5	0	2	4	6	10	10	12	14	16
6	0	3	6	8	10	15	15	18	21
7	0	3	6	9	12	15	21	21	24
8	0	4	7	12	14	18	21	28	28
9	0	4	9	12	16	21	24	28	36

Formules de l'allotion :

¤ **1 ɸ x = 0**

¤ **x ɸ x = x * (x - 1) / 2** (nombre triangulaire déjà connu)

¤ **(x + 1) ɸ x = x ɸ x**

¤ **si y ≥ x => y ɸ x = ((y – x) ɸ x) + (x ɸ x)**

Exemple : 9 ɸ 6 = ((9 - 6) ɸ 6) + (6 ɸ 6) = (3 ɸ 6) + (6 ɸ 6) = 6 + 15 = 21

Remarque sur la notation de la division euclidienne pour y le dividende, x le diviseur, q le quotient et r le reste ; avec y ≥ x.

*Exemple : 30 = 7 * 4 + 2*

30 est le dividende (y), 7 le diviseur (x), 4 le quotient (q) et 2 le reste (r).

Nous écrivons :

r = mod(y ; x)	*pour y ≥ x.*	*Exemple : 2 = mod(30 ; 7)*
q = (y – mod(y ; x)) / x	*pour y ≥ x.*	*Exemple : 4 = (30 - mod(30 ; 7)) / 7*

¤ **si y ≥ x => y ɸ x = ((y - mod(y ; x)) / x) * (x ɸ x) + (mod(y ; x) ɸ x)**

OU **si y ≥ x => y ɸ x = q * (x ɸ x) + (r ɸ x)**

Exemple : 8 ɸ 3 = ((8 - mod(8 ; 3)) / 3) * (3 ɸ 3) + (mod(8 ; 3) ɸ 3)
8 ɸ 3 = ((8 - 2) / 3) * (3 ɸ 3) + (2 ɸ 3)
8 ɸ 3 = (6 / 3) * 3 + 1 = 7

L'allotion est un opérateur commutatif et non associatif :

Commutativité : **x ɸ y = y ɸ x**

Non associativité : **(x ɸ y) ɸ z ≠ x ɸ (y ɸ z)**

Exemple : (3 ɸ 4) ɸ 5 = 3 ɸ 5 = 4
3 ɸ (4 ɸ 5) = 3 ɸ 6 = 6

Matrice élémentaire du demi-périmètre du tricarré

ɚ	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	2	3	3	4	4	5	5
3	0	2	4	4	5	6	6	7	8
4	0	3	4	6	6	7	8	9	9
5	0	3	5	6	8	8	9	10	11
6	0	4	6	7	8	10	10	11	12
7	0	4	6	8	9	10	12	12	13
8	0	5	7	9	10	11	12	14	14
9	0	5	8	9	11	12	13	14	16

Formules de la longueur de ħ : amas de segments verticaux et horizontaux ; n'appartenant ni à l'abscisse ni à l'ordonnée ; qui relient i à j et qui forment le demi-périmètre ħ du tricarré Oij.

¤ **ħ = x ɚ y**

¤ **1 ɚ x = 0**

¤ **x ɚ x = 2 (x - 1)**

¤ **x ɚ (x + 1) = x ɚ x**

¤ **Si y ≥ x ET Si mod(y ; x) = 0 => y ɚ x = 2 x – 2 + ((y / x) – 1) * (x – 1)**

Exemple : 8 ɚ 4 = 2 * 4 – 2 + ((8 / 4) – 1) * (4 – 1)
8 ɚ 4 = 8 – 2 + (2 - 1) * 3
8 ɚ 4 = 6 + 3 = 9

¤ **Si y > x ET Si mod(y ; x) ≠ 0 =>**
y ɚ x = 2 x - 2 + ((Arrondi.inf (y / x) - 1) * (x - 1)) + mod(y ; x) - 1

Note : Arrondi.inf est la fonction qui permet d'arrondir la fraction y / x à l'entier inférieur
Exemple : Arrondi.inf (5 / 2) = 2

Exemple : 8 ɚ 3 = 2 * 3 - 2 + ((Arrondi.inf (8 / 3) - 1) * (3 - 1)) + mod(8 ; 3) - 1
8 ɚ 3 = 6 - 2 + (2 - 1) * 2 + 2 - 1
8 ɚ 3 = 4 + 2 + 1 = 7