Unification des caractérisations de **P**

Mémoire de stage - M2 LMFI 2015-2016

Erwan BEURIER

1er septembre 2016

Introduction

Caractérisation fonctionnelle d'une classe qu'on comprend surtout en termes de machines.

Introduction

Caractérisation fonctionnelle d'une classe qu'on comprend surtout en termes de machines.
Plusieurs pistes :

- Contrainte explicite sur la longueur des valeurs des fonctions (Cobham)
- Distinctions entre arguments (Bellantoni-Cook, Leivant)

1. Une caractérisation de P
   - Approche de Leivant
   - Quel modèle de calcul ?
2. Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$
   - Adaptation d'un résultat existant
   - LSRS à arité multiple

Objets utilisés

- Algèbre = ensemble de termes clos basés sur une signature fonctionnelle, dont les symboles sont appelés constructeurs.

Objets utilisés

- Algèbre = ensemble de termes clos basés sur une signature fonctionnelle, dont les symboles sont appelés constructeurs.
- Algèbre binaire = $\mathbb{W}$, de signature $\sigma = \{\varepsilon, 1(-), 0(-)\}$.
- Algèbre unaire = $\mathbb{N}$, de signature $\sigma = \{0, s(-)\}$.

Distinction sur les arguments, à rapprocher de Bellantoni-Cook, mais résultat plus fin.

I. Caractérisations de **P**

Approche de Leivant

Distinction sur les arguments, à rapprocher de Bellantoni-Cook, mais résultat plus fin.

Les tiers

- $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_n, \ldots$
- $\mathbb{W}_m$ a une copie de chaque constructeur, noté c^m ;
- $\sim$ niveaux d'abstraction de $\mathbb{W}$.

I. Caractérisations de **P**

Approche de Leivant

Distinction sur les arguments, à rapprocher de Bellantoni-Cook, mais résultat plus fin.

Les tiers

- $\mathbb{W}_0, \mathbb{W}_1, \ldots, \mathbb{W}_n, \ldots$
- $\mathbb{W}_m$ a une copie de chaque constructeur, noté c^m ;
- $\sim$ niveaux d'abstraction de $\mathbb{W}$.

Définition (Récurrence ramifiée)

Une fonction $f : \mathbb{W}_m \times \mathcal{W} \to \mathbb{W}_n$ est définie par récurrence ramifiée à partir des fonctions $(g_c)_{c\in\{\varepsilon,0,1\}}$ lorsque :

- $\forall i \quad f(c^m(a), \bar{x}) = g_c\,(f(a, \bar{x}), a, \bar{x})$
- *$m > n$ (tiers de départ $>$ tiers d'arrivée)*

Définition

On note $TRec(\mathbb{W})$ le plus petit ensemble de fonctions récursives primitives sur $\mathbb{W}$ contenant les constructeurs, les projections et étant clos par composition ramifiée et récurrence ramifiée.

Définition

On note $TRec(\mathbb{W})$ le plus petit ensemble de fonctions récursives primitives sur $\mathbb{W}$ contenant les constructeurs, les projections et étant clos par composition ramifiée et récurrence ramifiée.

Théorème

$$TRec(\mathbb{W}) = \boldsymbol{P}$$

Définition (Degré d'imbrication de récurrence)

Soit $f \in TRec(\mathbb{W})$.
Le degré d'imbrication de récurrence de f, noté $\delta(f)$, est un entier défini par induction sur la définition de f :

- *Si f est un constructeur ou une projection, alors $\delta(f) = 0$.*
- *Si f est définie par composition, sans perte de généralité, $f(\bar{x}) = g(\bar{x}, h(\bar{x}))$, alors :*

  $$\begin{array}{l} \text{Si } tier(h) < tier(g) \text{ alors } \delta(f) = \delta(g)\,; \\ \text{Si } tier(h) = tier(g) \text{ alors } \delta(f) = \max(\delta(g), \delta(h))\,; \\ \text{Si } tier(h) > tier(g) \text{ alors } \delta(f) = \max(1, \delta(h)) \times \delta(g)\,; \end{array}$$

- *Si f est définie par récurrence ramifiée $f(c^j(a), \bar{x}) = g_c(f(a, \bar{x}), a, \bar{x})$, telles que $\left(g_{\alpha_j}\right)_{j \in p}$ aient un argument critique et $\left(g_{\beta_j}\right)_{j \in q}$ n'en aient pas, alors $\delta(f) = \max\left(1 + \delta\left(g_{\alpha_1}\right), \ldots, 1 + \delta\left(g_{\alpha_p}\right), \delta\left(g_{\beta_1}\right), \ldots, \delta\left(g_{\beta_q}\right)\right)$.*

Caractérisations de **P**
Approche de Leivant

Théorème

Une fonction f est calculable en temps $\mathcal{O}\left(n^k\right)$ ssi $\delta(f) \leqslant k$.
En particulier, f est calculable en temps $\mathcal{O}\left(n^{\delta(f)}\right)$.

Caractérisations de **P**

Quel modèle de calcul ?

Définition

Une $\mathbb{W}$-RAM est un modèle de calcul comprenant :

- *Un ensemble fini d'états $S = \{s_1, \ldots, s_l\}$, où s_1 est l'état initial et s_l est l'état final ;*
- *Un ensemble fini de registres $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$.*

Les registres contiennent des termes de l'algèbre $\mathbb{W}$. Par défaut, on leur assigne une valeur ε.
Un programme de $\mathbb{W}$-RAM est un ensemble fini d'instructions dont chacune est de l'une des formes suivantes :

- *(const) $s_a \pi_i C \pi_j s_b$*
- *(p-dest) $s_a \pi_i \pi_j s_b$*
- *(switch) $s_a \pi_j s_{b_\varepsilon} s_0 s_1$*

La machine de Leivant

- Spécifique à cette caractérisation
- Construit des termes
- Mémoire finie
- Pas de test d'égalité
- Plus puissante qu'une machine de Turing
- Moins puissante qu'une σ-RAM

Définition

Soit σ une signature fonctionnelle (typiquement $\sigma = \{+, -, \times\}$) Une σ-RAM est un modèle de calcul composé de :

- *Deux accumulateurs A, B ;*
- *Un registre spécial N ;*
- *Une infinité dénombrable de registres $(R_i)_{i \in \omega}$.*

Instructions :

- $A := c$ *pour n'importe quelle constante* $c \in \mathbb{N}$
- $A := op(A)$ *ou* $op(A, B)$, *où* $op \in \sigma$
- $A := N$
- $N := A$
- $A := R_A$
- $B := A$
- $R_A := B$
- $IF(A = B)\{I(i)\}\ ELSE\ \{I(j)\}$
- $HALT$

Comparaison entre les deux machines

- Travaille sur des termes VS travaille sur des entiers
- Mémoire finie VS infinie
- Test partiel VS test d'égalité

Machine $\mathbb{W}$-RAM est moins puissante que la σ-RAM, donc les classes fines définies sur l'une ne sont pas les mêmes sur l'autre machine.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Définition (RAM-structure)

Soit t un type (= une signature fonctionnelle ne contenant que des symboles de constantes ou de fonctions unaires).
Une RAM-structure s de type t est un uplet constitué de :

- $n \in \mathbb{N}$ *qui est la taille de la structure ;*
- $C \in \mathbb{N}$ *pour chaque symbole* $C \in t$ *;*
- $f : n \to \mathbb{N}$ *pour chaque symbole* $f \in t$.

On notera $s.n, s.C, s.f$ les composantes n, C, f de s.
On dira que s est c-bornée pour $c \in \mathbb{N}$ lorsque $s.C, s.f(i) < cs.n$ pour tous $C, f \in t$ et $i \in n$.

$\Rightarrow$ Une structure comme dans le langage C.

Exemple

Un graphe orienté $G = (V, E)$.
Type : $t = \{e, v, f^+(-), f^-(-)\}$.
Sommets numérotés de 1 *à* $\|V\|$ *; arcs numérotés de* $\|V\| + 1$ *à* $\|E\| + \|V\|$.

- $s.v = \|V\|$
- $s.e = \|E\|$
- $s.n = \|E\| + \|V\| + 1$
- $s.f^-(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ représente un sommet} \\ a_1 & \text{si } i \text{ représente l'arc } a_1 \to a_2 \end{cases}$
- $s.f^+(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ représente un sommet} \\ a_2 & \text{si } i \text{ représente l'arc } a_1 \to a_2 \end{cases}$

Définition (Fonction de RAM)

Soient t_1, t_2 des types.
Une (t_1, t_2)-fonction de RAM Γ est une fonction telle qu'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$, tels que Γ envoie les structures c_1-bornées de type t_1 sur des structures c_2-bornées de type t_2.
On dit que Γ est polynomiale lorsque $\Gamma(s).n = \mathcal{O}\left((s.n)^K\right)$.

Définition (Fonction de RAM)

Soient t_1, t_2 des types.
Une (t_1, t_2)-fonction de RAM Γ est une fonction telle qu'il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$, tels que Γ envoie les structures c_1-bornées de type t_1 sur des structures c_2-bornées de type t_2.
On dit que Γ est polynomiale lorsque $\Gamma(s).n = \mathcal{O}\left((s.n)^K\right)$.

Définition (Temps polynomial)

On définit $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$ comme étant l'ensemble des fonctions de RAM calculables sur $\{+\}$-RAM en temps $\mathcal{O}\left(n^K\right)$, telles que le nombre de registres utilisés, les valeurs entières manipulées (y compris les adresses de registres) soient bornés par $\mathcal{O}\left(n^K\right)$.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Adaptation d'un résultat existant

Définition (Opération de récursion)

Pour $g, g' : n \to \mathbb{N}$, on définit l'opération de récursion :

$$f(x) = g'\left[g^{\leftarrow}(x)\right]_x$$

C'est-à-dire : $f(x) = g'(y)$ où y est le plus grand z tel que $g(x) = g(z)$, ou $f(x) = x$ si un tel y n'existe pas.

Définition (LSRS)

Soit F un ensemble de symboles de fonctions unaires (dites fonctions de base), soient $f_1, \ldots, f_k$ des symboles de fonctions qui n'apparaissent pas dans F. Pour $i \leqslant k$, notons $F_i = F \cup \{f_1, \ldots, f_i\}$. Un LSRS (Linear Simultaneous Recursion Scheme) S sur $f_1, \ldots, f_k$ et F est une suite de k équations $(E_i)_{i \in k}$ dont chacune est de l'une des deux formes suivantes :

- *(opération)* $f_i(x) = g(x) * g'(x)$ *où* $g, g' \in F_{i-1}$ *et* $* \in \{+, -, \times\}$
- *(récursion)* $f_i(x) = g'\left[g^{\leftarrow}(x)\right]_x$ *où* $g' \in F_k$ *et* $g \in F_{i-1}$

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 0.

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 0+1 && (4)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (5)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (6)
\end{aligned}
$$

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 0.

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 1 && (4)\\
f_2(0) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(0)\right]_0 && (5)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (6)
\end{aligned}
$$

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Adaptation d'un résultat existant

Exemple

Système :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x+1 && (1)\\ f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\ f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3) \end{aligned}$$

Tour 0.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 && (4)\\ f_2(0) &= f_1(0) && (5)\\ f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (6) \end{aligned}$$

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Adaptation d'un résultat existant

Exemple

Système :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x+1 && (1)\\ f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\ f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3) \end{aligned}$$

Tour 0.

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 && (4)\\ f_2(0) &= 1 && (5)\\ f_3(0) &= f_1(0)+f_2(0) && (6) \end{aligned}$$

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 0.

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 1 && (4)\\
f_2(0) &= 1 && (5)\\
f_3(0) &= 2 && (6)
\end{aligned}
$$

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Adaptation d'un résultat existant

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 1.

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= 1+1 && (4)\\
f_2(0) &= 1 && (5)\\
f_3(0) &= 2 && (6)
\end{aligned}
$$

Exemple

Système :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x+1 && (1)\\ f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\ f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3) \end{aligned}$$

Tour 1.

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 2 && (4)\\ f_2(1) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(1)\right]_1 && (5)\\ f_3(0) &= 2 && (6) \end{aligned}$$

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x)+f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 1.

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= 2 && (4)\\
f_2(1) &= f_1(0) && (5)\\
f_3(0) &= 2 && (6)
\end{aligned}
$$

Exemple

Système :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x+1 && (1)\\
f_2(x) &= f_1\left[1^{\leftarrow}(x)\right]_x && (2)\\
f_3(x) &= f_1(x) + f_2(x) && (3)
\end{aligned}
$$

Tour 1.

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= 2 && (4)\\
f_2(1) &= 1 && (5)\\
f_3(0) &= 2 && (6)
\end{aligned}
$$

Soient t un type et S un LSRS qui définit $f_1, \ldots, f_k$ à partir de $t \cup \{1(-), \mathrm{id}(-), n(-)\}$.

Entrée d'un LSRS

Entrée d'un LSRS = RAM-structure s de type t
$\Rightarrow$ Les fonctions de base sont définies sur $[0, cn-1]$.
Fonctions de base = fonctions précalculées de la structure.
La sortie du LSRS = nouvelle structure $s' = S(s)$ de type $\{f_1, \ldots, f_k\}$.

Définition (RAM n^K-représentée par LSRS)

Soient t_1, t_2 des types. Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM.
Soit S un LSRS pour $f_1, \ldots, f_k$ sur F_{t_1}.
On dit que Γ est n^K-représentée par S lorsqu'il existe un entier c tel que le LSRS S définit des fonctions $f_1, \ldots, f_k : c(s.n)^K \to c(s.n)^K$ telles que $\Gamma(s) = S(s)$ où $S(s)$ est la structure définie par le LSRS.

$\Rightarrow$ Longueur du domaine de définition ?

Définition (RAM n^K-représentée par LSRS)

Soient t_1, t_2 des types. Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM.
Soit S un LSRS pour $f_1, \ldots, f_k$ sur F_{t_1}.
On dit que Γ est n^K-représentée par S lorsqu'il existe un entier c tel que le LSRS S définit des fonctions $f_1, \ldots, f_k : c(s.n)^K \to c(s.n)^K$ telles que $\Gamma(s) = S(s)$ où $S(s)$ est la structure définie par le LSRS.

$\Rightarrow$ Longueur du domaine de définition ? Implicite au LSRS.

Théorème (Grandjean-Schwentick)

$\Gamma \in DTIME_{RAM}(n) \Leftrightarrow \Gamma$ *est n-représentée par un LSRS.*

Théorème (Grandjean-Schwentick)

$\Gamma \in DTIME_{RAM}(n) \Leftrightarrow \Gamma$ est n-représentée par un LSRS.

Théorème

Pour tout $K \in \mathbb{N}$, $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^K\right) \Leftrightarrow \Gamma$ est n^K-représentée par un LSRS.

Remarques

- C'est une première caractérisation.

Remarques

- C'est une première caractérisation.
- Le degré du polynôme est forcé.

Remarques

- C'est une première caractérisation.
- Le degré du polynôme est forcé.
- Comment faire intervenir le degré du polynôme de manière plus naturelle ?

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

Adaptation d'un résultat existant

Remarques

- C'est une première caractérisation.
- Le degré du polynôme est forcé.
- Comment faire intervenir le degré du polynôme de manière plus naturelle ?

Solution

Généraliser à des arités supérieures à 1.

Cahier des charges

- Ne pas se contenter d'une seule arité.

Cahier des charges

- Ne pas se contenter d'une seule arité.
- Les fonctions devraient pouvoir s'appeler entre elles, peu importe leur arité.
- Bon ordre sur les tuples afin de reproduire l'exécution pas à pas ?

Notations

Soit $a \in \mathbb{N}$. On notera a-LSRS un LSRS utilisant et/ou calculant des fonctions d'arité a et inférieure, et on notera $(\leqslant a)$-uplet l'ensemble des n-uplets où $n \leqslant a$.

Notations

Soit $a \in \mathbb{N}$. On notera a-LSRS un LSRS utilisant et/ou calculant des fonctions d'arité a et inférieure, et on notera $(\leqslant a)$-uplet l'ensemble des n-uplets où $n \leqslant a$.

Choix naïf

L'ordre lexicographique naturel sur les $(\leqslant a)$-uplets pose problème.
$\Rightarrow$ Pas de projections.

Définition

On définit l'ordre $<$ sur les $(\leqslant a)$-uplets par :

$$\overline{x} < \overline{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \max(\overline{x}) < \max(\overline{y}) \\ \textit{ou} \;\; \max(\overline{x}) = \max(\overline{y}) \quad \textit{et} \;\; |\overline{x}| < |\overline{y}| \\ \textit{ou} \;\; \max(\overline{x}) = \max(\overline{y}) \quad \textit{et} \;\; |\overline{x}| = |\overline{y}| \quad \textit{et} \; \overline{x} <_{lex} \overline{y} \end{cases}$$

Définition

On définit l'ordre $<$ sur les ($\leqslant a$)-uplets par :

$$\bar{x} < \bar{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \max(\bar{x}) < \max(\bar{y}) & & \\ \textit{ou} \ \max(\bar{x}) = \max(\bar{y}) & \textit{et} \ |\bar{x}| < |\bar{y}| & \\ \textit{ou} \ \max(\bar{x}) = \max(\bar{y}) & \textit{et} \ |\bar{x}| = |\bar{y}| & \textit{et} \ \bar{x} <_{lex} \bar{y} \end{cases}$$

Exemple

Pour $a = 3$, *avec les arités* $1, 2, 3$: $(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < (0,1,0) < (0,1,1) < (1,0,0) < (1,0,1) < (1,1,0) < (1,1,1) < (2) < (0,2) < \dots$

Définition

On définit l'ordre $<$ sur les $(\leqslant a)$-uplets par :

$$\bar{x} < \bar{y} \Leftrightarrow \begin{cases} \quad \max(\bar{x}) < \max(\bar{y}) & & \\ \textit{ou} \;\; \max(\bar{x}) = \max(\bar{y}) & \textit{et} \;\; |\bar{x}| < |\bar{y}| & \\ \textit{ou} \;\; \max(\bar{x}) = \max(\bar{y}) & \textit{et} \;\; |\bar{x}| = |\bar{y}| & \textit{et} \; \bar{x} <_{lex} \bar{y} \end{cases}$$

Exemple

Pour $a = 3$, avec les arités $1, 2, 3$: $(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < (0,1,0) < (0,1,1) < (1,0,0) < (1,0,1) < (1,1,0) < (1,1,1) < (2) < (0,2) < \ldots$.

Avantages

Pas parfait non plus, MAIS...

Propriétés

- C'est un bon ordre.
- Permet de faire des mélanges et des projections.
- Propriétés intéressantes pour le calcul.
- Le rang d'un élément $\bar{x}$ est calculable à partir de ses coordonnées, de son maximum et de son arité.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Propriétés

- C'est un bon ordre.
- Permet de faire des mélanges et des projections.
- Propriétés intéressantes pour le calcul.
- Le rang d'un élément $\bar{x}$ est calculable à partir de ses coordonnées, de son maximum et de son arité.

Rang

$$\mathrm{rang}\left(\bar{x}\right) = \left(\left(\sum_{i=1}^{a} m^i\right) + \left(\sum_{i=1}^{r}\left(\left(m+1\right)^i - 1\right)\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} c_i\right)\right)$$

où $m = \max\left(\bar{x}\right)$, $r = \text{arité}(\bar{x})$ et $c_i = x_i \times \left(m+1\right)^{r-i}$ si $x_{i-1} = m$ ou $x_{i-2} = m$ ou $\ldots$ ou $x_1 = m$, et $c_i = \left(m+1\right)^{r-i} - m^{r-i}$ sinon.

Notation

$$\bar{x}' \ll \bar{x} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}' < \bar{x},\ |\bar{x}'| < |\bar{x}|\ \forall j\, \exists j'\ x'_j = x_{j'}$$

Exemple

Si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, alors les tuples (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_3, x_1) et (x_1) sont $\ll \bar{x}$.

Soit $a \in \mathbb{N}$.

Définition (a-LSRS)

Soit F un ensemble de symboles de fonctions de base. Soient $f_1, \ldots, f_k$ de nouveaux symboles de fonctions n'apparaissant pas dans F, d'arités respectives $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_k = a$.
On note $F_i = F \cup \{f_j | r_j = r_i \text{ et } j < i\}$, $F'_i = F \cup \{f_j | r_j = r_i\}$, et $G_i = F \cup \{f_j | r_j < r_i\}$.
Un a-LSRS S sur F et $f_1, \ldots, f_k$ est une suite d'équations $E_1, \ldots, E_k$ où chaque E_i est de l'une des formes suivantes :

- *(opération) $f_i\left(\overline{x}\right) = A * B$ où $* \in \{+, -, \times\}$ et A, B sont de la forme suivante :*

  $g\left(\overline{x}\right)$, *avec* $g \in F_i$;
  $g\left(\overline{x}'\right)$, *avec* $g \in G_i$, *c et* $\overline{x}' \ll \overline{x}'$.

Soit $a \in \mathbb{N}$.

Définition (a-LSRS)

Soit F un ensemble de symboles de fonctions de base. Soient $f_1, \ldots, f_k$ de nouveaux symboles de fonctions n'apparaissant pas dans F, d'arités respectives $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_k = a$.
On note $F_i = F \cup \{f_j | r_j = r_i \text{ et } j < i\}$, $F_i' = F \cup \{f_j | r_j = r_i\}$, et $G_i = F \cup \{f_j | r_j < r_i\}$.
Un a-LSRS S sur F et $f_1, \ldots, f_k$ est une suite d'équations $E_1, \ldots, E_k$ où chaque E_i est de l'une des formes suivantes :

- *(récursion) $f_i(\overline{x}) = g'\left[g^{\leftarrow}(\overline{x}')\right]_{\overline{x}'}$, où arité$(g)$ = arité(g') et l'un des deux cas suivants se réalise :*

  Soit $\overline{x}' = \overline{x}$, et dans ce cas $g \in F_i$ et $g' \in F_i'$;
  Soit $\overline{x}' \ll \overline{x}$ et dans ce cas $g, g' \in G_i$.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x + 1(x) && (7)\\
f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8)\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9)
\end{aligned}
$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \ldots$

Tour 1

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 1 && (10)\\
f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (11)\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (12)
\end{aligned}
$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 1(x) && (7) \\ f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9) \end{aligned}$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \ldots$

Tour 1

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 1 && (10) \\ f_2(0,0) &= f_1(0) + f_1(0) && (11) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (12) \end{aligned}$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$f_1(x) = x + 1(x) \tag{7}$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) \tag{8}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) \tag{9}$$

$(0) < {\color{red}(0,0)} < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) <$ ...

Tour 1

$$f_1(0) = 1 \tag{10}$$

$$f_2(0,0) = 2 \tag{11}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) \tag{12}$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x + 1(x) && (7)\\
f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8)\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9)
\end{aligned}
$$

$(0) < (0,0) < \color{red}{(0,0,0)} < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \ldots$

Tour 1

$$
\begin{aligned}
f_1(0) &= 1 && (10)\\
f_2(0,0) &= 2 && (11)\\
f_3(0,0,0) &= f_2(0,0) + f_1(0) && (12)
\end{aligned}
$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$f_1(x) = x + 1(x) \tag{7}$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) \tag{8}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) \tag{9}$$

$(0) < (0, 0) < (0, 0, 0) < (1) < (0, 1) < (1, 0) < (1, 1) < (0, 0, 1) < \dots$

Tour 1

$$f_1(0) = 1 \tag{10}$$

$$f_2(0, 0) = 2 \tag{11}$$

$$f_3(0, 0, 0) = 3 \tag{12}$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 1(x) && (7)\\ f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8)\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9) \end{aligned}$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < \color{red}{(1)} < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \ldots$

Tour 2

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 1 + 1 && (10)\\ f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (11)\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (12) \end{aligned}$$

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$f_1(x) = x + 1(x) \tag{7}$$

$$f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_1(x_2) \tag{8}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) \tag{9}$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \dots$

Tour 2

$$f_1(1) = 2 \tag{10}$$

$$f_2(0, 1) = f_1(0) + f_1(1) \tag{11}$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) \tag{12}$$

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x + 1(x) && (7)\\ f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8)\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9) \end{aligned}$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < {\color{red}(0,1)} < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \dots$

Tour 2

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 2 && (10)\\ f_2(0, 1) &= 3 && (11)\\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (12) \end{aligned}$$

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Exemple de fonctionnement

On choisit $a = 3$, et on considère le 3-LSRS suivant :

$$
\begin{aligned}
f_1(x) &= x + 1(x) && (7)\\
f_2(x_1, x_2) &= f_1(x_1) + f_1(x_2) && (8)\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (9)
\end{aligned}
$$

$(0) < (0,0) < (0,0,0) < (1) < (0,1) < (1,0) < (1,1) < (0,0,1) < \dots$

Tour 2

$$
\begin{aligned}
f_1(1) &= 2 && (10)\\
f_2(1, 0) &= f_1(1) + f_1(0) && (11)\\
f_3(x_1, x_2, x_3) &= f_2(x_2, x_1) + f_1(x_3) && (12)
\end{aligned}
$$

- Les fonctions de base vont de $[0, cn-1] \times \cdots \times [0, cn-1]$ vers $[0, cn-1]$.
- Les fonctions calculées et les fonctions de sortie sont définies de $[0, cn-1] \times \cdots \times [0, cn-1]$ vers $[0, cn-1]^?$.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

- Les fonctions de base vont de $[0, cn-1] \times \cdots \times [0, cn-1]$ vers $[0, cn-1]$.
- Les fonctions calculées et les fonctions de sortie sont définies de $[0, cn-1] \times \cdots \times [0, cn-1]$ vers $[0, cn-1]^?$.

$\Rightarrow$ On voudrait qu'elles soient définies de $[0, cn-1] \times \cdots \times [0, cn-1]$ vers $[0, cn^a - 1]$.

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^a\right)$

Démonstration.

- a-LSRS $\Rightarrow$ LSRS de longueur n^a :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\bar{x}$ à partir de $\mathrm{rang}\left(\bar{x}\right)$.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^a\right)$

Démonstration.

- a-LSRS $\Rightarrow$ LSRS de longueur n^a :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\bar{x}$ à partir de $\mathrm{rang}(\bar{x})$.

    Trouver le max m ($\bar{x}$ se situe entre (m) et $(m+1)$ pour un certain m) ;

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}(n^a)$

Démonstration.

- a-LSRS $\Rightarrow$ LSRS de longueur n^a :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\bar{x}$ à partir de $\mathrm{rang}(\bar{x})$.

    Trouver le max m ($\bar{x}$ se situe entre (m) et $(m+1)$ pour un certain m) ;
    Trouver l'arité r ($\bar{x}$ se situe entre $(0, \ldots, 0, m)$ et $(m, \ldots, m, m)$) ;

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}(n^a)$

Démonstration.

- a-LSRS $\Rightarrow$ LSRS de longueur n^a :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\bar{x}$ à partir de rang$(\bar{x})$.

    Trouver le max m ($\bar{x}$ se situe entre (m) et $(m+1)$ pour un certain m) ;
    Trouver l'arité r ($\bar{x}$ se situe entre $(0, \ldots, 0, m)$ et $(m, \ldots, m, m)$) ;
    Calculer les coordonnées de $\bar{x}$.

Vers une caractérisation de DTIME$_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$
LSRS à arité multiple

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^a\right)$

Démonstration.

- a-LSRS $\Rightarrow$ LSRS de longueur n^a :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\bar{x}$ à partir de rang$(\bar{x})$.

    Trouver le max m ($\bar{x}$ se situe entre (m) et $(m+1)$ pour un certain m) ;
    Trouver l'arité r ($\bar{x}$ se situe entre $(0, \ldots, 0, m)$ et $(m, \ldots, m, m)$) ;
    Calculer les coordonnées de $\bar{x}$.
  - Simuler les opérations du a-LSRS avec un LSRS en utilisant les coordonnées calculées précédemment.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^a\right)$

Démonstration.

- LSRS de longueur $n^a \Rightarrow a$-LSRS :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\mathrm{rang}\left(\bar{x}\right)$ à partir de $\bar{x}$.

$\Rightarrow$ Réécrire la formule donnée précédemment.

Vers une caractérisation de $\mathrm{DTIME}_{\mathrm{RAM}}\left(n^K\right)$

LSRS à arité multiple

Théorème

Soit Γ une (t_1, t_2)-fonction de RAM, où t_1 est un 1-type et t_2 est un a-type.
Γ est représentable par un a-LSRS $\Leftrightarrow$ Γ est n^a-représentable par un LSRS $\Leftrightarrow$ $\Gamma \in DTIME_{RAM}\left(n^a\right)$

Démonstration.

- LSRS de longueur $n^a \Rightarrow a$-LSRS :
  - Définir un LSRS qui permet de récupérer $\mathrm{rang}\left(\bar{x}\right)$ à partir de $\bar{x}$.
  - $\Rightarrow$ Réécrire la formule donnée précédemment.
  - Simuler les opérations du LSRS avec un a-LSRS.

$\square$

Conclusion

- Deux caractérisations fines de **P** ;

Conclusion

- Deux caractérisations fines de **P** ;
- Malheureusement peu utilisables

  $\Rightarrow$ Borne implicite et définie dès le départ ;

Conclusion

- Deux caractérisations fines de **P** ;
- Malheureusement peu utilisables
  - $\Rightarrow$ Borne implicite et définie dès le départ ;
  - $\Rightarrow$ L'ordre rend l'utilisation difficile.

Conclusion

- Deux caractérisations fines de **P** ;
- Malheureusement peu utilisables
  - $\Rightarrow$ Borne implicite et définie dès le départ ;
  - $\Rightarrow$ L'ordre rend l'utilisation difficile.
- Simplifier le système + utilisation plus intuitive.