Calcul quantique et méthodes de Monte Carlo en finance

Garreau Erwan et Koneswaran Danusan

1 Motivation générale

De nombreux problèmes en finance quantitative reposent sur le calcul d'espérances ou sur la résolution de problèmes d'optimisation stochastique. Ces calculs deviennent rapidement coûteux lorsque la dimension du problème augmente.

Le calcul quantique est étudié dans ce contexte car il promet, pour certaines classes de problèmes, des accélérations asymptotiques par rapport aux méthodes numériques classiques.

Il est important de souligner que le calcul quantique ne modifie pas les modèles financiers sous-jacents, mais vise uniquement à accélérer certaines étapes computationnelles.

2 Optimisation en finance

Un problème fondamental en finance consiste à déterminer une allocation optimale des actifs pour un investisseur donné.

Ce problème peut s'écrire :

$$\max_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \mathbb{E}[U(W_T)], \tag{1}$$

où U est une fonction d'utilité et W_T la richesse finale.

La richesse finale est donnée par :

$$W_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} (1 + R_{i,t+1})\alpha_{i,t}, \tag{2}$$

où $R_{i,t}$ représente le rendement aléatoire de l'actif i.

Ces problèmes sont souvent non convexes ou combinatoires et deviennent rapidement difficiles à résoudre numériquement.

3 Modélisation stochastique des actifs

Le prix d'un actif financier S_t est classiquement modélisé par un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = \alpha S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t. \tag{3}$$

La solution explicite de cette équation différentielle stochastique est :

$$S_t = S_0 \exp\left((\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t\right), \tag{4}$$

ce qui implique que S_t suit une loi log-normale.

En pratique, une discrétisation temporelle est utilisée :

$$S_{t+1} = S_t \exp\left((\alpha - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} Z_t\right), \quad Z_t \sim \mathcal{N}(0,1). \tag{5}$$

4 Pricing d'options et méthode de Monte Carlo

Pour une option européenne de payoff $h(S_T)$, le prix à l'instant initial est :

$$V_0 = e^{-rT}\,\mathbb{E}[h(S_T)]. \tag{6}$$

La méthode de Monte Carlo classique consiste à :

— générer M trajectoires indépendantes,

— calculer le payoff pour chacune,

— moyenner les résultats.

Si l'on considère le payoff normalisé $f(X) \in [0,1]$, l'estimateur est :

$$\hat{\mu}_{MC} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(X_i). \tag{7}$$

La variance de cet estimateur vérifie :

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}_{MC}) \leq \frac{1}{4M}, \tag{8}$$

d'où une convergence en $O(1/\sqrt{M})$ et un coût total :

$$M = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{9}$$

5 Idée centrale du Quantum Monte Carlo

L'idée fondamentale du calcul quantique est de transformer le calcul d'une espérance en un problème d'estimation d'une probabilité mesurable sur un qubit.

Après discrétisation, l'espérance s'écrit :

$$\mathbb{E}[h(S_T)] = \sum_x p(x)h(S(x)). \tag{10}$$

On prépare un état quantique :

$$|\psi\rangle = \sum_x \sqrt{p(x)}\,|x\rangle\,, \tag{11}$$

puis on ajoute un qubit ancilla initialisé à $|0\rangle$.

Le payoff est normalisé :

$$f(x) = \frac{h(S(x))}{h_{\max}} \in [0,1]. \tag{12}$$

L'encodage quantique agit comme :

$$|x\rangle\,|0\rangle \mapsto |x\rangle\left(\sqrt{f(x)}\,|1\rangle + \sqrt{1-f(x)}\,|0\rangle\right). \tag{13}$$

La probabilité de mesurer l'ancilla à 1 vaut alors :

$$\mathbb{P}(\text{ancilla} = 1) = \mathbb{E}[f(X)]. \tag{14}$$

Ainsi, le calcul de l'espérance est réduit à l'estimation d'une probabilité.

6 Quantum Amplitude Estimation

Après préparation, l'état global peut s'écrire :

$$A|0\rangle = \sqrt{1-\mu}\,|\mathrm{bad}\rangle + \sqrt{\mu}\,|\mathrm{good}\rangle, \quad \mu = \mathbb{E}[f(X)]. \tag{15}$$

On introduit un angle $\theta \in [0, \pi/2]$ tel que :

$$\mu = \sin^2(\theta). \tag{16}$$

On définit l'opérateur de Grover :

$$Q = -AS_0A^\dagger S_f. \tag{17}$$

Dans le sous-espace engendré par $|\mathrm{good}\rangle$ et $|\mathrm{bad}\rangle$, Q agit comme une rotation d'angle 2θ et possède les valeurs propres $e^{\pm 2i\theta}$.

L'estimation de phase quantique permet d'estimer θ avec une erreur :

$$|\hat{\theta} - \theta| = O\left(\frac{1}{M}\right). \tag{18}$$

Il en résulte :

$$|\hat{\mu} - \mu| = O\left(\frac{1}{M}\right), \tag{19}$$

et donc un coût total :

$$M = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{20}$$

C'est le gain quadratique par rapport au Monte Carlo classique.

7 Ce que les surveys soulignent : hypothèses et limites

7.1 Coût réel et rôle de l'oracle

Le gain $O(1/\varepsilon)$ est exprimé en nombre d'appels à l'opérateur Q, et donc à l'oracle A.

Or A inclut :

— la préparation de la distribution $p(x)$,

— l'évaluation du payoff $f(x)$.

Si ces opérations sont coûteuses, le gain asymptotique peut disparaître en pratique.

7.2 Génération vs chargement de la distribution

Les surveys distinguent deux cas :

— **Génération** d'une loi via un modèle (pricing) : plus réaliste,

— **Chargement** de données empiriques (VaR, risque) : nécessite une qRAM, irréaliste aujourd'hui.

7.3 Décomposition des erreurs

L'erreur totale se décompose comme :

$$\text{Erreur totale} = \text{Erreur de discrétisation} + \text{Erreur d'estimation}. \tag{21}$$

Le calcul quantique n'agit que sur la seconde.

7.4 QAE réaliste (NISQ)

La version idéale de QAE utilise une transformée de Fourier quantique, trop coûteuse pour les machines actuelles. Les implémentations réalistes utilisent :

— Iterative QAE,

— Maximum Likelihood QAE,

qui conservent le scaling $O(1/\varepsilon)$ avec des circuits plus courts.

7.5 Comparaison avec Monte Carlo avancé

En pratique, le Monte Carlo utilise souvent des techniques de réduction de variance ou du quasi-Monte Carlo, ce qui réduit l'écart pratique avec le quantique.

Le gain quantique reste principalement asymptotique.

8 Conclusion générale

Le calcul quantique permet, en théorie, de réduire le coût du calcul d'une espérance de $O(1/\varepsilon^2)$ à $O(1/\varepsilon)$ grâce à l'algorithme de Quantum Amplitude Estimation.

Ce gain repose sur des hypothèses fortes concernant la préparation d'état et l'évaluation du payoff, et reste aujourd'hui principalement théorique.

Néanmoins, il constitue une motivation centrale pour l'étude du calcul quantique en finance quantitative.