Mathématiques
Informatique
Statistique
Appliquées

RAMANGASON Notahiana Erwan

L3 MISA, promotion 2024

erwan.ramangason@gmail.com

+261 34 85 670 14

Méthode de descente de gradient

Il s’agit d’une méthode qui permet de résoudre un problème de la forme

$Ax = b$ où A est une matrice carré

b, x des vecteurs

Ici, A est définit positive et strictement croissante c’est-à-dire

$A = A.A^t$ et aussi $X^t.A.X > 0$

Soit y un vecteur.

En définissant | comme produit scalaire, on a une fonction

$$L(y) = \frac{A.y \mid y}{2} - (b|y)$$

Pout toute matrice symétrique définie positive A, et pour tout x solution de notre problème, $L(y) > L(x)$

On cherchera alors à la minimiser.

Il s'agit alors de construire une suite x_n, tel que $L(x_{n+1}) > L(x_n)$

Construisons la suite $x_{n+1} = x_n + \alpha_{n+1}.\omega_{n+1}$

où : - ω représente une direction de descente

- α représente un taux de descente

Comme il s'agit d'une méthode approximative, on part d'une solution initial qui va se rapprocher petit à petit de la vraie solution (avec un taux d'erreur fixé)

1. On choisit la direction de cette façon :

   On va minimiser la fonction suivante :

   $f(\alpha) = 2(x_n + \alpha.\omega_{n+1)}$

   et on aboutira au résultat :

   $$\alpha_n = \frac{b - A.x_n|\omega_n}{A.\omega_n|\omega_{n+1}}$$

2. On choisit ensuite la direction de cette façon :

   On cherche la plus grande pente, cette dernière sera orthogonale à la ligne de niveau de la fonction L et passant par x_n

   $\omega_{n+1} = \vec{\nabla}.2(x_n) = A.x_n - b = -r_n$ (résidu)

   On obtient ainsi

   $$\alpha_{n+1} = \frac{-\|r_n\|^2}{A.r_n|r_n}$$

où $r_{n+1} = r_n - \alpha_{n+1}.z_{n+1}$

avec $z_{n+1} = -A.r_n$

On finit par implémenter l'algorithme (dans notre code final) et on fera le calcul jusqu'à l'obtention de notre solution approximative.