Mathématiques
Informatique
Statistique
Appliquées

RAMANGASON Notahiana Erwan
erwan.ramangason@gmail.com
+261 34 85 670 14
L3 MISA – promotion 2024
(2021 – 2022)

Méthode de résolution de système par la méthode de Gauss

Nous nous servons des calculs numériques pour modéliser et résoudre différents problèmes de la vie réelle en problème mathématiques. Nous avons par exemple la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système d'équations à n-inconnues.

Le pivot de Gauss est une méthode pour trigonaliser une matrice. En effet, on peut modéliser un système d'équations sous forme matriciel. Si la matrice est inversible, alors on a sûrement une solution. Elle consiste alors à choisir une variable comme pivot, puis éliminer petit à petit les autres coefficients des autres équations pour cet inconnu. On procède ainsi pour chaque colonne de façon à obtenir une forme triangulaire, avec un pivot à chaque colonne. Après obtention de la valeur d'une inconnue, on effectue une substitution successive afin d'obtenir la valeur de toute les autres inconnues.

On va soustraire les lignes de façon à ce que les coefficients (sauf le pivot) soient nul

$$A.x = b, \qquad \begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ b3 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\begin{pmatrix} a'11 & a'12 & a'13 \\ 0 & a'22 & a'23 \\ 0 & 0 & a'33 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'1 \\ b'2 \\ b'3 \end{pmatrix}$

D'une manière générale, on applique la fomule

$aij = aij - \left(\frac{aik}{akk}\right) . akj$ pour la matrice, de même $bi = bi - \left(\frac{aik}{akk}\right) . bk$

On l'implémentera à notre algorithme (dans notre fichier cpp) afin d'aboutir aux solutions

$\sum_{j=0}^{n-1} aij . xj = bi$ $\quad 0 \leq i < N$

$xi = (bi - \sum_{j=i+1}^{n-1} aij . xji) / aij$ $\quad 0 \leq i < N\text{-}1$

On procède ici à une élimination de Gauss sans pivotage partiel.
En faisant le calcul par ordinateur, il faut cependant faire attention à quelques erreurs qui pourraient survenir, comme l'apparition d'un pivot nul par exemple.

Dans ce cas il faudra penser à inverser les positions des vecteurs lignes. On peut cependant eviter comme on peut (pas toujours) ce souci en choisissant comme pivot le plus grand nombre pour chaque colonne: on nomme cette methode "Elimination de Gauss avec pivotage patriel" et c'est le problème que traite le programme ci-joint avec ce fichier, écrit en C++.

La méthode de Gauss a été créé bien sur pour son efficacité. En effet on a un gain de temps. Sa complexité est de $O(\frac{n^3}{3})$ si on a $O(n+1)!$ pour la méthode du determinant.
Et l'élimination de Gauss avec pivotage nous donne aussi une version plus stable.