RAMANGASON Notahiana Erwan

L3 MISA, promotion 2024

erwan.ramangason@gmail.com

+261 34 85 670 14

Méthode de Cholesky

La factorisation de Cholesky est une méthode pour faciliter la résolution d'un système (sous forme matriciel).

Soit alors $Ax = b$ où A est une matrice carré

b, x des vecteurs

Cette méthode consiste à faciliter le problème en factorisant la matrice A en produit de 2 matrices, notons L (lower) et U (upper).

$$A = L.U \qquad (= B.tB)$$

Où en effet, L est une matrice triangulaire inférieur et U sa transposée (une matrice triangulaire supérieur

Cette opération n'est possible que si 2 conditions sont vérifiées :

- la matrice A est symétrique ;
- elle est définie positive ;

C'est-à-dire dans notre cas que $A = tA$

et aussi que pour toute matrice colonne X, on a $tX.A.X > 0$

On a :

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L11 & 0 & 0 \\ L21 & L22 & 0 \\ L31 & L32 & L33 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} L11 & L21 & L31 \\ 0 & L22 & L32 \\ 0 & 0 & L33 \end{pmatrix}$$

Et si on développe le 2nd membre, on aura

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L11^2 & 0 & 0 \\ L11.L21 & L22^2 + L21^2 & 0 \\ L11.L31 & L31.L23 + L32.L22 & L31^2 + L32^2 + L33^2 \end{pmatrix}$$

Par identification, on aboutit a la formule générale de décomposition :

$$L_{ij} = \sqrt{aij - \sum_{k=1}^{j-1} Lik^2} \quad si \quad i = j \qquad \text{ou} \qquad L_{ij} = \frac{(aij - \sum_{k=1}^{j-1} Lik.Ljk)}{Ljj} \quad sinon$$

$$\text{où} \quad 1 < j \leq n \quad | \quad j \leq i < n$$

Par suite, on divise le problème en 2 :

$$A.x = b \quad <=> \quad L.U.x = b \qquad \text{; et en posant} \qquad y = U.x \qquad \text{on aura}$$

$$\begin{cases} L.y = b \\ U.x = y \end{cases}$$

On procèdera ensuite à 2 substitution, l'une partant vers le haut et l'autre vers le bas. Sous la forme génerale, cela nous donne :

$$yi = \frac{bi - \sum_{j=1}^{i-1} Lij.yj}{Lii} \qquad 1 < i < n$$

$$xi = \frac{yi - \sum_{j=i+1}^{n} Uij.xj}{Uij}$$

Ainsi on obtient les xi qui sont respectivement les solutions de notre système