



ASSET  
MANAGEMENT

Rapport de validation

# QUARISMA – MODÈLE BLACK-LITTERMAN

21 décembre 2018

Validateurs : S. MAUFFREY, A. SYLLA

## Suivi des modifications

| Date       | Version | Acteurs                             | Création / Relecture / Modification |
|------------|---------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 09/10/2018 | 1.0     | S. MAUFFREY                         | Création                            |
| 20/11/2018 | 2.0     | S. MAUFFREY, A. SYLLA               | Relecture et modifications          |
| 22/11/2018 | 3.0     | S. MAUFFREY, A. SYLLA, J-B. DENIZOT | Relecture et modifications          |
| 18/12/2018 | 4.0     | S. MAUFFREY, A. SYLLA, J-B. DENIZOT | Relecture et modifications          |

# Fiche synoptique

## Modèle / Outil

Nom : BLACK-LITTERMAN MVO

Module : -

Version : -

Propriétaire : QUARISMA

Développeur(s) : QUARISMA

Périmètre : OPC LBPAM multi-actifs benchmarkés

Date de mise en production : 2012

## Catégorisation du risque

1

2

3

4

5

6

## Validation

Valideur(s) : Simon MAUFFREY, Alpha SYLLA

Publication du rapport : décembre 2018

Notation globale : Acceptable

Date du Comité de Validation : 21 décembre 2018

Prochaine validation : décembre 2021

# Table des Matières

|            |   |           |
|------------|---|-----------|
| <b>1</b>   | <b>Introduction .....</b>   | <b>5</b>  |
| <b>2</b>   | <b>Contexte, description et objectifs du modèle.....</b>                                  | <b>5</b>  |
| <b>3</b>   | <b>Revue détaillée des éléments audités.....</b>  | <b>6</b>  |
| <b>3.1</b> | <b>Démarche méthodologique .....</b>  | <b>6</b>  |
| 3.1.1      | Rappels théoriques.....   | 6         |
| 3.1.2      | Calibration .....   | 10        |
| <b>3.2</b> | <b>Implémentation .....</b>   | <b>13</b> |
| 3.2.1      | Données et traitement statistique .....   | 13        |
| 3.2.2      | Implémentation numérique .....  | 15        |
| 3.2.3      | Qualité de l'implémentation informatique .....  | 19        |
| 3.2.4      | Sécurisation de l'outil .....   | 21        |
| <b>3.3</b> | <b>Documentation .....</b>  | <b>22</b> |
| <b>4</b>   | <b>Recommandations .....</b>  | <b>22</b> |
| 4.1        | Validation théorique .....  | 22        |
| 4.2        | Validation numérique.....   | 23        |
| 4.3        | Validation opérationnelle.....  | 24        |
| <b>5</b>   | <b>Conclusion.....</b>  | <b>25</b> |
| <b>6</b>   | <b>Annexes .....</b>  | <b>26</b> |
| 6.1        | Annexe 1 : reformulation des espérances de rentabilités « a posteriori » .....            | 26        |
| 6.2        | Annexe 2 : détermination des niveaux d'incertitudes selon la méthode « Idzorek ».....     | 26        |
| 6.3        | Annexe 3 : influence de la constante de proportionnalité .....                            | 28        |
| 6.4        | Annexe 4 : détermination des niveaux d'incertitudes selon Meucci .....                    | 29        |
| 6.5        | Annexe 5 : détermination des niveaux d'incertitudes selon la méthode « Walters » .....    | 30        |
| 6.6        | Annexe 6 : comparatif des méthodes « Idzorek » et « Walters ».....                        | 31        |
| 6.7        | Annexe 7 : composition de l'univers d'investissement .....                                | 33        |
| 6.8        | Annexe 8 : définition du portefeuille de marché et des rentabilités « d'équilibre » ..... | 36        |
| 6.9        | Annexe 9 : portefeuille-modèle du mandat de gestion « dynamique » .....                   | 38        |

## 1 Introduction

Conformément aux principes détaillés dans le document « Principes de Validation des Modèles », le modèle de Black-Litterman implémenté dans la plateforme **QUARISMA** a été présenté par l'équipe de Gestion Multi-Actifs pour audit.

Ce rapport de validation a pour objet de présenter les résultats de l'audit de l'implémentation de la méthode de Black-Litterman et de l'interface Excel destinée à charger les inputs en entrée et recevoir les outputs en sortie.

Cet audit a été réalisé au regard des entretiens réalisés avec l'équipe de Gestion Multi-Actifs, de l'outil d'interface Excel « **Black-Litterman\_Optimizer\_2018\_10.xlsx** » et de l'examen de la documentation mise à notre disposition.

Le modèle de Black-Litterman a fait l'objet d'un audit détaillé selon les trois axes suivants :

- son fondement et sa démarche méthodologique,
- sa construction et son développement numérique,
- sa mise en œuvre sur le plan opérationnel.

A l'issue de ce travail, ont été émises les recommandations qui figurent au paragraphe « Recommandations » du présent rapport. Ce rapport sera soumis à l'appréciation du Comité de Validation des Modèles qui émettra un avis final sur la base de ces recommandations.

## 2 Contexte, description et objectifs du modèle

La plateforme QUARISMA comporte plusieurs modules dédiés respectivement aux calculs de risques (Valeur-à-Risque, tests de résistance) et à l'optimisation de portefeuille (moyenne-variance robuste, Black-Litterman).

Le modèle de Black-Litterman est un outil d'aide à la décision utilisé depuis 2012 dans le processus de construction des portefeuilles-modèles des fonds LBPAM long-only multi-actifs et actions internationales benchmarkés. Ce modèle permet de combiner par une approche bayésienne les rentabilités attendues à horizon 3 mois formulées par le Comité d'Investissement avec les anticipations du marché ; les rentabilités actualisées ainsi obtenues sont alors intégrées dans une routine d'optimisation moyenne-variance sous contraintes.

La criticité du modèle dans le processus de gestion peut être considérée comme moyenne dans la mesure où il constitue une étape importante dans le processus de construction des portefeuilles LBPAM long-only multi-actifs benchmarkés, mais néanmoins non indispensable en raison du caractère ultimement discrétionnaire du choix d'allocation et du caractère benchmarké des portefeuilles.

Son degré de complexité théorique, numérique et opérationnelle est également jugé moyen. Ces considérations nous amènent à le classer en **catégorie 3** de notre grille de cotation du risque de modèle.

### 3.1 Démarche méthodologique

#### 3.1.1 Rappels théoriques

##### 3.1.1.1 Notations

|   |   |
|---|---|
| $\{A_1; \dots; A_n\}$                                 | Ensemble des $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ actifs considérés                                 |
| $k \in \mathbb{N}^*$                                  | Entier naturel inférieur ou égal à $n$  |
| $r_f \in \mathbb{R}$                                  | Taux d'intérêt sans risque  |
| $r = (r_{A_i}) \in \mathbb{R}^n$                      | Rentabilités des actifs $A_i, i = 1 \dots n$ ajustées du taux sans risque $r_f$                     |
| $r_m \in \mathbb{R}$                                  | Rentabilité du marché   |
| $\varpi = (\varpi_i) \in \mathbb{R}^n$                | Pondérations des actifs $A_i, i = 1 \dots n$ au sein du portefeuille de marché de rentabilité $r_m$ |
| $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$                  | Matrice de covariance inversible des rentabilités ajustées $r$                                      |
| $\pi \in \mathbb{R}^n$                                | Rentabilités dites « d'équilibre » des actifs $A_i, i = 1 \dots n$                                  |
| $P \in \mathbb{R}^{k \times n}$                       | Matrice des anticipations relatives/absolues sur les actifs $A_i, i = 1 \dots n$                    |
| $q \in \mathbb{R}^k$                                  | Rentabilités associées à la matrice des anticipations $P$   |
| $\Omega = (\omega_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ | Matrice de covariance inversible représentant les incertitudes sur les rentabilités $q$             |
| $\zeta \in [0; 1]^k$                                  | Probabilités associées aux rentabilités anticipées $q$  |
| $\tau \in \mathbb{R}_+^*$                             | Constante de proportionnalité   |

##### 3.1.1.2 Le modèle d'évaluation des actifs financiers

Le Modèle d'Évaluation des Actifs Financiers (MÉDAF) permet de déterminer pour un actif la rentabilité attendue par le marché en fonction de son risque systématique. Au travers de la réalisation de l'équilibre du marché, résultat de l'offre et la demande, et sous certaines hypothèses, le MÉDAF permet d'écrire pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$\mathbb{E}[r_{A_i}] = \frac{\text{Cov}(r_{A_i}, r_m)}{\text{Var}[r_m]} \times (\mathbb{E}[r_m] - r_f)$$

C'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[r] = \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \varpi$$

##### 3.1.1.3 Le modèle de Black-Litterman

L'approche développée par Fischer Black et Robert Litterman (1992)<sup>1</sup> consiste à déterminer la distribution de « probabilité a posteriori » des rentabilités espérées sur les actifs  $A_i, i = 1 \dots n$ , en fonction des hypothèses probabilistes suivantes :

<sup>1</sup> Black F. et Litterman R. (1992). Global Portfolio Optimization. Financial Analysts Journal, 48, 28-43.

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}] \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\pi}; \tau \boldsymbol{\Sigma}) \quad , \quad \mathbf{P}\mathbb{E}[\mathbf{r}] | \mathbb{E}[\mathbf{r}] \sim \mathcal{N}(\mathbf{q}; \boldsymbol{\Omega})$$

À savoir :

- les espérances de rentabilité, considérées ici comme des variables aléatoires gaussiennes, fluctuent autour de rentabilités dites « d'équilibre »,
- la variance des espérances de rentabilité est proportionnelle à la matrice de covariance des rentabilités,
- les rentabilités anticipées sur les actifs, que l'on peut définir par la relation linéaire :

$$\mathbf{P}\mathbb{E}[\mathbf{r}] = \mathbf{q} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \boldsymbol{\Omega})$$

sont mutuellement non corrélées.

D'après ces hypothèses et l'application du théorème de Bayes, le modèle de Black-Litterman permet l'obtention de l'expression suivante :

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}] | \mathbf{P}\mathbb{E}[\mathbf{r}] \sim \mathcal{N}\left(\left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + {}^t \mathbf{P} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}\right]^{-1} \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} \boldsymbol{\pi} + {}^t \mathbf{P} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{q}\right]; \boldsymbol{\Sigma} + \left[(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1} + {}^t \mathbf{P} \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{P}\right]^{-1}\right)$$

Autrement dit, sur un ensemble d'actifs considérés, l'approche bayésienne du modèle de Black-Litterman permet de combiner des anticipations subjectives  $\mathbf{q}$  avec les rentabilités « d'équilibre »  $\boldsymbol{\pi}$  ; les rentabilités « d'équilibre » des actifs sont considérées comme « connaissance a priori » et sont actualisées en fonction des anticipations de rentabilité formulées. L'espérance des rentabilités espérées  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbf{r}] | \mathbf{P}\mathbb{E}[\mathbf{r}]]$  apparaît ainsi comme une moyenne pondérée :

- des rentabilités « d'équilibre »  $\boldsymbol{\pi}$ , avec un coefficient de pondération  $(\tau \boldsymbol{\Sigma})^{-1}$  qui sera d'autant plus fort que la valeur de  $\tau$  sera faible,
- des rentabilités anticipées  $\mathbf{q}$ , avec un coefficient de pondération  ${}^t \mathbf{P} \boldsymbol{\Omega}^{-1}$  qui sera d'autant plus fort que les incertitudes sur les anticipations  $(\omega_{i,i})_{i=1\dots k}$  seront faibles.

En pratique, dans le modèle de Black-Litterman les hypothèses du MÉDAF sont quasi-systématiquement privilégiées, ce qui permet de définir les rentabilités « d'équilibre » selon la formule :

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{\mathbb{E}[\mathbf{r}_m] - r_f}{\text{Var}[\mathbf{r}_m]} \right) \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{w}$$

Concernant l'évaluation de la constante de proportionnalité  $\tau$  ainsi que des incertitudes sur les rentabilités anticipées  $\mathbf{q}$ , plusieurs approches existent, telles que la méthode « Idzorek » ou encore la méthode « Walters ».

#### 3.1.1.4 Ajustement des niveaux d'incertitude par la méthode « Idzorek »

À partir de l'approche de Black-Litterman et de divers travaux sur le sujet, Thomas Idzorek (2005)<sup>2</sup> propose une méthodologie itérative afin de calibrer le modèle de Black-Litterman et notamment les incertitudes  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\omega_{i,i})_{i=1\dots k}$  selon l'expression de probabilités de réalisation  $\zeta$  des anticipations de rentabilité  $\mathbf{P}\mathbb{E}[\mathbf{r}]$  formulées.

<sup>2</sup> Idzorek M. (2005). A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model. Working Paper.

Plus particulièrement, si  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  désigne la pondération issue d'une optimisation moyenne-variance sans contraintes définie par l'égalité :

$$\gamma = \left[ \frac{(\mathbb{E}[r_m] - r_f)}{\text{Var}[r_m]} \Sigma \right]^{-1} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]]$$

avec :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = [(\tau\Sigma)^{-1} + {}^tP\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + {}^tP\Omega^{-1}q]$$

alors selon cette méthode, il est possible d'exprimer pour tout  $i = 1 \dots k$  une « confiance implicite » associée à chaque anticipation de rentabilité  $q_i$  formulée, comme la différence entre le poids optimal  $\gamma_i$  et la pondération de marché  $\varpi_i$ , rapporté à l'écart maximal de pondérations ( $\gamma_i - \varpi_i$ ) obtenu pour une incertitude  $\omega_{i,i} = 0$ .

Dès lors, en assimilant pour chaque  $i = 1 \dots k$  la « confiance implicite » à une probabilité de réalisation  $\zeta_i$  de la rentabilité anticipée  $P_{i,n}\mathbb{E}[r]$ , il devient possible de déterminer la valeur de l'incertitude  $\omega_{i,i}$  telle que l'on obtienne l'égalité (cf. Annexe 2) :

$$\zeta_i = \frac{(\gamma_i - \varpi_i)}{(\{\gamma_i | \omega_{i,i} = 0\} - \varpi_i)}$$

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques constate qu'en complément de la détermination de la matrice des incertitudes  $\Omega$ , cette approche présente l'avantage de neutraliser la valeur de la constante de proportionnalité  $\tau$  dans la formule de calcul des espérances de rentabilité « a posteriori », réduisant ainsi l'exercice de calibration du modèle de Black-Litterman à la seule matrice de covariance « a posteriori » (cf. Annexe 3).

### 3.1.1.5 Ajustement des niveaux d'incertitude par l'approche « Walters »

À partir des travaux d'Attilio Meucci (2005)<sup>3</sup> et Thomas Idzorek, Jay Walters (2007)<sup>4</sup> démontre qu'il est possible d'obtenir par l'application d'une simple formule fermée une estimation des incertitudes  $(\omega_{i,j})_{i,j=1\dots k}$  qui coïncide avec l'estimation issue de la méthode « Idzorek ».

La méthode « Walters » s'appuie en particulier sur l'hypothèse formulée par Meucci selon laquelle la matrice des incertitudes  $\Omega = (\omega_{i,j})_{i,j=1\dots k}$  est proportionnelle à la matrice de covariance  $\Sigma$  et vérifie la solution analytique :

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i P_{i,n} \tau \Sigma {}^t P_{i,n} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le terme  $(\alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , qui apparaît comme un vecteur de « niveaux d'incertitude » dans les  $k = n$  anticipations de rentabilité  $P\mathbb{E}[r]$  (cf. Annexe 4), est alors associé aux probabilités de réalisation  $\zeta$  de la méthode « Idzorek », selon l'égalité :

<sup>3</sup> Meucci A. (2005). Risk and Asset Allocation. Springer Finance, chapitre 9.2 – page 431.

<sup>4</sup> Walters J. (2007). The Black-Litterman Model in Detail. Working Paper.



$$\alpha_i = \frac{1}{\zeta_i} - 1, \quad i = 1 \dots n$$

avec  $\zeta_i \in ]0 ; 1[$  (cf. Annexe 5).

## REVUE CRITIQUE

Pour des résultats analogues à ceux obtenus par la méthode « Idzorek » (cf. Annexe 6), la méthode « Walters » oblige à formuler une rentabilité espérée sur chaque actif  $A_1, \dots, A_n$  qui compose l'univers d'investissement, ainsi qu'une probabilité de réalisation sur les  $n$  vues. L'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs fixe ainsi dans certains cas une rentabilité espérée comme nulle « par défaut » afin de pallier l'absence de vue sur la classe d'actifs considérée (paires de devises, matières premières). Dans ces conditions, la Direction des Risques recommande d'implémenter la méthode « Idzorek » plutôt que la méthode « Walters » afin de limiter les biais induits par un paramétrage « par défaut ».

La Direction des Risques recommande enfin d'effectuer pour chaque anticipation de rentabilité un paramétrage du « niveau d'incertitude » qui soit similaire pour l'ensemble des portefeuilles considérés.

### 3.1.1.6 Optimisation moyenne-variance

Suite à l'obtention des espérances de rentabilité et de la matrice de covariance « a posteriori » issues du modèle de Black-Litterman et de ses variantes, une manière d'obtenir un portefeuille optimal est de rechercher la solution du problème d'optimisation quadratique suivant :

$$\max_{\gamma} \left[ {}^t \gamma \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] - \frac{1}{2} \lambda {}^t \gamma \text{Cov}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] \gamma \right]$$

avec ou sans contraintes, où le terme  $\lambda$  représente un coefficient dit « d'aversion au risque ».

Dans le cadre spécifique de la gestion des fonds long-only multi-actifs benchmarkés de l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs, l'optimisation s'effectue avec  $\lambda = (\mathbb{E}[r_B] - r_f) / \text{Var}[r_B]$ , où la rentabilité  $r_B \in \mathbb{R}$  est calculée à partir d'un indice de référence de gestion, ainsi qu'avec les jeux de contraintes suivants :

$$\text{C1 : } \begin{cases} \sqrt{{}^t (\gamma - \varpi) \Sigma (\gamma - \varpi)} \leq \sigma \\ {}^t \gamma \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \leq \gamma \leq \mathbf{1}_n \\ {}^t \text{DAE}_l \gamma \leq \delta_l, \quad \delta_l \in [0 ; 1] \end{cases}$$

$$\text{C2 : } \begin{cases} \sqrt{{}^t (\gamma - \varpi) \text{Cov}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] (\gamma - \varpi)} \leq \sigma \\ {}^t \gamma \mathbf{1}_n = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \leq \gamma \leq \mathbf{1}_n \\ {}^t \text{DAE}_l \gamma \leq \delta_l, \quad \delta_l \in [0 ; 1] \end{cases}$$

où la valeur  $\sigma \in \mathbb{R}_+$  représente la limite de tracking-error, et  $\mathbf{DAE}_l$ ,  $l = 1 \dots L$  le vecteur-colonne des « équivalents delta », c'est-à-dire la part de chaque position permettant de déterminer sa contribution à l'exposition totale du portefeuille à un segment donné du marché.

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques s'interroge sur la pertinence du jeu de contraintes **C2**, à savoir considérer la matrice de covariance « a posteriori »  $\text{Cov}[\mathbf{E}[\mathbf{r}] | \mathbf{PE}[\mathbf{r}]]$  dans la contrainte du budget de risque afin de construire des portefeuilles-modèles optimaux, alors que la tracking-error réalisée du portefeuille se calcule ex post à partir de la matrice  $\Sigma$  des rentabilités.

### 3.1.2 Calibration

#### 3.1.2.1 Les rentabilités « d'équilibre »

D'après le modèle de Black-Litterman, les rentabilités « d'équilibre » peuvent être déduites du MÉDAF par la relation :

$$\boldsymbol{\pi} = \left( \frac{\mathbf{E}[\mathbf{r}_m] - r_f}{\text{Var}[\mathbf{r}_m]} \right) \Sigma \boldsymbol{\omega}$$

Dans le cadre des hypothèses du MÉDAF, le portefeuille de marché est un portefeuille d'approche moyenne-variance efficient ; il contient tous les actifs financiers proportionnellement à leurs capitalisations boursières mondiales.

Selon la méthodologie de l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs, l'univers d'investissement global se compose de 75 indices et actifs répartis en 4 classes d'actifs : actions, produits de taux, devises et matières premières (cf. Annexe 7). Cet univers d'investissement global est segmenté en autant de sous-univers d'investissement que d'indices de référence de gestion. Au sein de chaque sous-univers d'investissement, les pondérations des indices et actifs qui composent le portefeuille de marché sont déterminées selon leur présence dans la composition de l'indice de référence de gestion : si tel est bien le cas, une pondération identique à celle de l'indice de référence de gestion est appliquée, sinon la pondération des indices correspond à l'exposition totale de leurs composantes calculée à partir d'indices globaux d'exposition mondiale.

Par exemple, dans le cadre de la gestion du mandat « dynamique » d'indice de référence de gestion **30% MSCI EMU + 20% MSCI EUROPE ex EMU + 20% MSCI WORLD ex EUROPE + 30% JPM EMU GOVERNMENT BOND**, les pondérations des actifs et indices qui composent le portefeuille de marché sont déterminées par l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs dans les proportions suivantes :

- **30,00%** JPM EMU GOVERNMENT BOND (identique à la pondération dans l'indice de référence du portefeuille),
- **30,00%** MSCI EMU (identique à la pondération dans l'indice de référence du portefeuille),
- **20,00%** MSCI EUROPE ex EMU (identique à la pondération dans l'indice de référence du portefeuille),
- **16,00%** MSCI USA (d'après la pondération totale des actions qui composent l'indice MSCI USA dans l'indice global MSCI WORLD ex EUROPE),

- **2,15%** MSCI JAPAN (d'après la pondération totale des actions qui composent l'indice MSCI JAPAN dans l'indice global MSCI WORLD ex EUROPE),
- **1,00%** MSCI AC ASIA ex JAPAN (d'après la pondération totale des actions qui composent l'indice MSCI AC ASIA ex JAPAN dans l'indice global MSCI WORLD ex EUROPE),
- **0,85%** MSCI CANADA (d'après la pondération totale des actions qui composent l'indice MSCI CANADA dans l'indice global MSCI WORLD ex EUROPE),

Concernant les indices MSCI EM ASIA, MSCI EM LATINA AMERICA, MSCI EM EUROPE, BB EURO GOVERNMENT ILB ALL, BB EURO-AGG 500, BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD, BB EM SOVEREIGN BOND, BB EURO-AGG CORPORATE BBB/BB, EXANE EUROPE CONVERTIBLE BOND, EONIA CAPITALISÉ ainsi que des actifs USD/EUR, JPY/EUR, GBP/EUR, CHF/EUR, SEK/EUR, CAD/EUR et NOK/EUR de l'univers d'investissement du mandat, une pondération identique à la pondération dans l'indice de référence du portefeuille de gestion, à savoir nulle, est appliquée.

À partir des poids de marché  $\varpi_s$  ainsi déterminés et du calcul de la matrice de covariance  $\Sigma_s$  associé au sous-univers d'investissement  $S$  considéré, l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs définit ensuite les rentabilités « d'équilibre » selon l'équation :

$$\pi_s = \left( \frac{\mathbb{E}[\mathbf{r}_B] - r_f}{\text{Var}[\mathbf{r}_B]} \right) \Sigma_s \varpi_s$$

Où le terme  $\mathbf{r}_B \in \mathbb{R}$  correspond à la rentabilité de l'indice de référence de gestion.

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques considère qu'il est contradictoire de supposer d'une part, des anticipations de rentabilité  $P\mathbb{E}[\mathbf{r}]$  homogènes sur les actifs et indices qui composent l'univers du portefeuille de marché, et d'autre part, des rentabilités « d'équilibre »  $\pi$  non régulières qui varient selon le sous-univers d'investissement et la composition de l'indice de référence de gestion considérés.

Afin d'établir des rentabilités « d'équilibre » telles que définies par le MÉDAF, la Direction des Risques suggère plutôt :

1. de reconstituer à partir des travaux de Tobias Sichert et Alexis Meyer-Cirkel (2016)<sup>5</sup> et Ronald Doeswijk, Trevin Lam et Laurens Swinkels (2012<sup>6</sup>, 2017<sup>7</sup>), un portefeuille de marché unique qui d'une part, contient la quasi-totalité des actifs financiers proportionnellement à leurs capitalisations boursières mondiales, et qui d'autre part, soit le plus représentatif possible de l'univers d'investissement de l'équipe de Gestion Multi-Actifs (cf. Annexe 8).
2. D'estimer la matrice de covariance  $\Sigma$  sur l'ensemble des indices et actifs constituant le portefeuille de marché et de calculer le ratio de marché :

$$\left( \frac{\mathbb{E}[\mathbf{r}_m] - r_f}{\text{Var}[\mathbf{r}_m]} \right)$$

<sup>5</sup> Sichert T. et Meyer-Cirkel A. (2016). Calculating the Global Market Portfolio. SAALT. Research note.

<sup>6</sup> Doeswijk R. Q. et Lam T. W. et Swinkels L. (2012). Strategic Asset Allocation : the Global Multi-Asset Market Portfolio 1959-2011.

<sup>7</sup> <https://personal.eur.nl/lswinkels/Update%20Market%20Portfolio%202017.xlsx>

à partir des pondérations établies et de la recombinaison de la série de rentabilités du portefeuille de marché (cf. Annexe 8).

Alternativement au modèle du MÉDAF, la Direction des Risques fait remarquer que les rentabilités « d'équilibre » du portefeuille de marché peuvent s'estimer à partir d'une approche économétrique.

### 3.1.2.2 La constante de proportionnalité $\tau$

Intuitivement, l'incertitude sur l'espérance des rentabilités est supposée être beaucoup moins importante que l'incertitude sur les rentabilités elles-mêmes, c'est pourquoi dans le modèle de Black-Litterman on fixe généralement la constante de proportionnalité  $\tau$  sur l'intervalle  $]0; 1[$ .

Du point de vue du statisticien, pour une population de taille  $T \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  si l'on considère  $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  échantillons de rentabilités :

$$\begin{bmatrix} r_1^{A_1} & \dots & r_1^{A_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ r_t^{A_1} & \dots & r_t^{A_n} \end{bmatrix}, \quad t < T$$

et que l'on suppose que les  $R_1, \dots, R_k$  variables aléatoires de réalisations :

$$R_j^t = \left( \frac{1}{t} \sum_{i=(j-1)t+1}^{j \times t} r_i^{A_1}; \dots; \frac{1}{t} \sum_{i=(j-1)t+1}^{j \times t} r_i^{A_n} \right), \quad j = 1, \dots, k$$

sont indépendantes et identiquement distribuées, alors d'après le théorème de Bickel-Freedman<sup>8</sup> :

$$\sqrt{k} \left[ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i^t - \left( \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i^{A_1}; \dots; \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i^{A_n} \right) \right] \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \Sigma)$$

Autrement dit, pour  $T \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  et  $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  suffisamment grands, la moyenne empirique  $\overline{\mathbb{E}[r]}$  des rentabilités vérifie :

$$\overline{\mathbb{E}[r]} \sim \mathcal{N}\left(\hat{\pi}; \frac{1}{k} \Sigma\right)$$

En pratique, pour un échantillon d'observations  $(\overline{\mathbb{E}[r]}; \dots; \overline{\mathbb{E}[r]})$  de taille  $n > k$ , sous l'hypothèse de variables  $\overline{\mathbb{E}[r]}$  indépendantes, l'application de la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance permet d'obtenir pour  $\Sigma$  fixé et  $\hat{\pi} = \pi$  une approximation du paramètre  $k$  et ainsi déterminer la valeur de la constante de proportionnalité  $\tau = 1/k$ .

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques observe que l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs impose comme valeur  $\tau = 0,3$  sans donner de justification méthodologique.

<sup>8</sup> Bickel P. J. et Freedman D. A. (1981). Some asymptotic Theory for the Bootstrap. The Annals of Statistics, 9, 1196-1217.

## 3.2 Implémentation

### 3.2.1 Données et traitement statistique

Le modèle fait appel à deux sources de données :

- le provider Bloomberg, qui fournit les performances MTD ainsi que les historiques de prix des indices représentatifs des divers actifs et classes d'actifs. Les données historiques sont produites sous forme d'un fichier Excel nommé « **history.csv** » à partir des classeurs Excel « **history\_bbg\_update.xlsm** » et « **history\_bbg\_update\_com.xlsm** » et de la procédure VBA « **HistoryData()** »,
- le provider Datastream Thomson Reuters, utilisé afin d'obtenir le nom, le poids, le pays ainsi que la devise et la zone géographique des sous-jacents qui composent les principaux indices actions globaux publiés par MSCI.

Un fichier Excel nommé « **assets.csv** » permet de « créer » les indices de l'univers étudié (plus précisément les tickers des indices dans la terminologie de l'éditeur) selon une syntaxe propre dans la base de données QUARISMA localisée sur le poste de l'utilisateur.

La création des tickers et le chargement des données historiques dans la base locale sont exécutés de manière programmatique à l'aide de procédures VBA. La complétion des données manquantes se fait alors par extrapolation simple à partir de la dernière valeur connue. Cependant, pour un traitement plus élaboré, la plateforme QUARISMA dispose d'un autre procédé décrit dans le document « **RISKDATA POSITION-BASED METHODOLOGY** »<sup>9</sup> qui n'est accessible qu'en se connectant à ses serveurs, ce qui n'est pas possible avec la solution « standalone » retenue par l'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs.

Voici la liste des 74 indices et actifs représentatifs de l'univers d'investissement des fonds de la gamme Allocation Multi-Actifs benchmarkée :

| Nom                                   | Ticker Bloomberg | Type         | Devise |
|---------------------------------------|------------------|--------------|--------|
| MSCI AC ASIA PACIFIC                  | MXAP             | Price return | USD    |
| MSCI WORLD ex EUROPE                  | MXWOE            | Price return | USD    |
| MSCI EM                               | MXEF             | Price return | USD    |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN                 | MAASJ            | Total return | EUR    |
| MSCI EM ASIA                          | MXMS             | Price return | USD    |
| MSCI USA                              | MXUS             | Price return | USD    |
| MSCI GOLDEN DRAGON                    | MXGD             | Price return | USD    |
| MSCI EUROPE                           | MXEU             | Price return | EUR    |
| MSCI JAPAN                            | MXJP             | Price return | JPY    |
| MSCI EMU                              | MXEM             | Price return | EUR    |
| MSCI EUROPE ex EMU                    | MXEUM            | Price return | EUR    |
| MSCI EM EMEA                          | MSEUEMEA         | Total return | USD    |
| MSCI PACIFIC ex JAPAN                 | MXPCJ            | Price return | USD    |
| MSCI KOREA                            | MXKR             | Price return | KRW    |
| MSCI EM LATIN AMERICA                 | MXLA             | Price return | USD    |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD            | LP01TREU         | Total return | EUR    |
| BB EM SOVEREIGN BOND                  | BSSUTRUU         | Total return | USD    |
| BB EURO GOVERNMENT ILB ALL MATURITIES | BEIG1T           | Total return | EUR    |

<sup>9</sup> G:\Direction des Risques\PROCESS VALIDATION DE MODELES\VALIDATION\Modèles\GESTION DIVERSIFIEE\QUARISMA\Documentation\Module\_RISK\RISKDATA POSITION-BASED METHODOLOGY.pdf

| Nom                               | Ticker Bloomberg | Type          | Devise |
|-----------------------------------|------------------|---------------|--------|
| JPM GLOBAL GOVERNMENT BOND        | JHUCGBIG         | Total return  | USD    |
| JPM EMU GOVERNMENT BOND           | JMMVEG           | Total return  | EUR    |
| BB EURO AGG SECURITIZED-COVERED   | LSC1TREU         | Total return  | EUR    |
| JPM GOVERNMENT BOND US            | JNDCUS           | Total return  | USD    |
| JPM GOVERNMENT BOND CANADA        | JNQCCA           | Total return  | CAD    |
| JPM GOVERNMENT BOND UK            | JNGCUK           | Total return  | GBP    |
| JPM GOVERNMENT BOND SWEDEN        | JNWCSW           | Total return  | SEK    |
| JPM GOVERNMENT BOND JAPAN         | JNYCJP           | Total return  | JPY    |
| JPM GOVERNMENT BOND AUSTRALIA     | JNACAU           | Total return  | AUD    |
| BB EURO-AGG CORPORATE BBB/BB      | BCB5TREU         | Total return  | EUR    |
| BB PAN-EUROPEAN AGG 5-7 YEARS     | I02506EU         | Total return  | EUR    |
| BB EURO-AGG CORP 5-7 YEARS        | I06270           | Total return  | EUR    |
| BB EURO-AGG SECURITIZED 5-7 YEARS | H02176EU         | Total return  | EUR    |
| BB EUR-AGG AGENCY 5-7 YEARS       | H02126EU         | Total return  | EUR    |
| BB EURO-AGG 500 CORPORATE         | LE5CTREU         | Total return  | EUR    |
| EXANE EUROPE CONVERTIBLE BOND     | EECIECI          | Price return  | EUR    |
| EONIA CAPITALISÉ                  | UCGREONC         | Total return  | EUR    |
| USD/EUR                           | USDEUR           | -             | -      |
| JPY/EUR                           | JPYEUR           | -             | -      |
| GBP/EUR                           | GBPEUR           | -             | -      |
| CHF/EUR                           | CHFEUR           | -             | -      |
| SEK/EUR                           | SEKEUR           | -             | -      |
| CAD/EUR                           | CADEUR           | -             | -      |
| NOK/EUR                           | NOKEUR           | -             | -      |
| AUD/EUR                           | AUDEUR           | -             | -      |
| PLN/EUR                           | PLNEUR           | -             | -      |
| HUF/EUR                           | HUFEUR           | -             | -      |
| RUB/EUR                           | RUBEUR           | -             | -      |
| CZK/EUR                           | CZKEUR           | -             | -      |
| ZAR/EUR                           | ZAREUR           | -             | -      |
| BRL/EUR                           | BRLEUR           | -             | -      |
| MXN/EUR                           | MXNEUR           | -             | -      |
| CNH/EUR                           | CNHEUR           | -             | -      |
| INR/EUR                           | INREUR           | -             | -      |
| KRW/EUR                           | KRWEUR           | -             | -      |
| B COMMODITY                       | BCOM             | Excess return | USD    |
| WTI                               | USCRWTIC         | Price return  | USD    |
| BRENT                             | EUCRBRDT         | Price return  | USD    |
| RBOB                              | XBA              | Price return  | USD    |
| HEATING OIL                       | HOA              | Price return  | USD    |
| GOLD                              | GOLDS            | Price return  | USD    |
| GOLD                              | XAU              | Price return  | USD    |
| SILVER                            | HHARSILB         | Price return  | USD    |
| PLATINIUM                         | XPT              | Price return  | USD    |
| PALLADIUM                         | PALL             | Price return  | USD    |
| COPPER                            | LMCADY           | Price return  | USD    |
| ALUMINIUM                         | LMAHDY           | Price return  | USD    |
| NICKEL                            | LMNIDY           | Price return  | USD    |
| ZINC                              | LMZSDY           | Price return  | USD    |

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques recommande la réécriture de la procédure « **HistoryData()** » au sein du classeur Excel « **history\_bbg\_update.xlsm** » afin que le copier/coller de l'ensemble des données (dates et prix) soit totalement automatisé.

### 3.2.2 Implémentation numérique

La méthode implémentée par la plateforme QUARISMA se base sur les résultats de la méthode « Walters » afin de calculer l'espérance et la matrice de covariance « a posteriori » des rentabilités espérées du modèle de Black-Litterman.

À partir des historiques de prix, des pondérations du portefeuille de marché, des anticipations de rentabilité  $PE[r]$  et des probabilités de réalisation  $\zeta$  associées, QUARISMA réalise une estimation de la matrice de covariance annualisée  $\widehat{\Sigma_Q}$ , du ratio de marché  $\hat{\lambda} = (\widehat{E[r_m]} - r_f) / \widehat{Var[r_m]}$ , des rentabilités « d'équilibre », des termes  $E[E[r] | PE[r]]$  et  $Cov[E[r] | PE[r]]$  (avec  $\tau = 0,3$ ) ainsi que des poids optimaux sous contraintes de risque associées.

#### ■ 1<sup>er</sup> comparatif de résultats

On considère le jeu de données du mandat de gestion « dynamique » utilisé pour la revue du portefeuille du 28 septembre 2018, et notamment un historique de prix quotidiens restreint aux 24 actifs et indices de l'univers d'investissement du mandat sur la période du 4 janvier 2010 au 28 septembre 2018.

À partir des paramètres transmis par l'équipe de Gestion Multi-Actifs sur l'univers d'investissement considéré (pondérations de marché, niveaux de risque, rentabilités anticipées à horizon 3 mois et probabilités de réalisation associées), de la matrice de covariance annualisée  $\widehat{\Sigma_Q}$  ainsi que du ratio de marché  $\hat{\lambda}$  calculés par QUARISMA, sous les contraintes **C1** nous obtenons les résultats suivants :

| PORTEFEUILLE                   | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE » |         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » |         | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |         |
|--------------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|---------------------------|---------|
|                                | QUARISMA                        | DR      | QUARISMA                         | DR      | QUARISMA                  | DR      |
| INDICES/ACTIFS                 |                                 |         |                                  |         |                           |         |
| MSCI EMU                       | +4,373%                         | +0,017% | -0,761%                          | -0,758% | 22,519%                   | 23,907% |
| MSCI EUROPE ex EMU             | +4,198%                         | +0,017% | -0,662%                          | -0,659% | 11,776%                   | 10,023% |
| MSCI USA                       | +2,543%                         | +0,010% | +0,736%                          | +0,737% | 9,999%                    | 10,000% |
| MSCI CANADA                    | +3,419%                         | +0,014% | +0,570%                          | +0,572% | 4,997%                    | 5,000%  |
| MSCI JAPAN                     | +5,347%                         | +0,021% | -0,227%                          | -0,224% | 4,999%                    | 5,000%  |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN          | +4,708%                         | +0,019% | +1,034%                          | +1,036% | 5,000%                    | 5,000%  |
| MSCI EM ASIA                   | +3,601%                         | +0,014% | -0,296%                          | -0,296% | 0,001%                    | 0,000%  |
| MSCI EM LATIN AMERICA          | +2,631%                         | +0,010% | -2,136%                          | -2,135% | 0,000%                    | 0,000%  |
| MSCI EM EUROPE                 | +2,694%                         | +0,011% | -1,126%                          | -1,125% | 0,001%                    | 0,000%  |
| JPM EMU                        | -0,051%                         | +0,000% | -0,356%                          | -0,356% | 10,905%                   | 11,070% |
| BB EURO GVT ILB ALL MATURITIES | +0,194%                         | +0,001% | -0,395%                          | -0,395% | 0,117%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG 500 CORPORATE      | +0,231%                         | +0,001% | -0,140%                          | -0,140% | 9,827%                    | 10,000% |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD     | +0,776%                         | +0,003% | -0,316%                          | -0,315% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EM SOVEREIGN BOND           | +0,752%                         | +0,003% | -0,917%                          | -0,916% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG CORP BBB 500MM+    | +0,373%                         | +0,001% | -0,165%                          | -0,165% | 0,000%                    | 0,000%  |
| EXANE EUROPE CONVERT BOND      | +1,577%                         | +0,016% | -0,082%                          | -0,081% | 4,999%                    | 5,000%  |
| EONIA CAPITALISÉ               | -0,007%                         | +0,000% | -0,041%                          | -0,041% | 14,860%                   | 15,000% |
| USD/EUR                        | +0,670%                         | +0,003% | +0,866%                          | +0,867% | 0,000%                    | 0,000%  |
| JPY/EUR                        | -0,759%                         | -0,003% | +0,894%                          | +0,894% | 0,000%                    | 0,000%  |
| GBP/EUR                        | +0,426%                         | +0,002% | -1,469%                          | -1,469% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CHF/EUR                        | -0,446%                         | -0,002% | +0,944%                          | +0,943% | 0,000%                    | 0,000%  |
| SEK/EUR                        | +0,591%                         | +0,002% | -0,245%                          | -0,245% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CAD/EUR                        | +0,919%                         | +0,004% | +0,038%                          | +0,038% | 0,000%                    | 0,000%  |
| NOK/EUR                        | +0,069%                         | +0,000% | +0,094%                          | +0,093% | 0,000%                    | 0,000%  |

Les espérances de rentabilités « d'équilibre » obtenues sous QUARISMA diffèrent très significativement des résultats obtenus par l'équipe de Direction des Risques du fait de leur

annualisation. Contrairement aux espérances de rentabilités « a posteriori » estimées, la plateforme QUARISMA exprime les rentabilités « d'équilibre » à partir de la matrice annualisée  $\widehat{\Sigma}_Q$ .

## ■ 2<sup>ème</sup> comparatif de résultats

À partir du jeu de données du mandat de gestion « dynamique » utilisé pour la revue du portefeuille du 28 septembre 2018 et des paramètres transmis par l'équipe de Gestion Multi-Actifs sur l'univers d'investissement considéré, en utilisant cette fois-ci la matrice de covariance « a postérieur » des espérances de rentabilité dans la contrainte de risque de la procédure d'optimisation moyenne-variance (contraintes C2), on obtient les résultats suivants :

| PORTEFEUILLE<br>INDICES/ACTIFS | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE » |         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » |         | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |         |
|--------------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|---------------------------|---------|
|                                | QUARISMA                        | DR      | QUARISMA                         | DR      | QUARISMA                  | DR      |
| MSCI EMU                       | +4,373%                         | +0,017% | -0,761%                          | -0,758% | 15,001%                   | 23,907% |
| MSCI EUROPE ex EMU             | +4,198%                         | +0,017% | -0,662%                          | -0,659% | 5,000%                    | 10,023% |
| MSCI USA                       | +2,543%                         | +0,010% | +0,736%                          | +0,737% | 10,000%                   | 10,000% |
| MSCI CANADA                    | +3,419%                         | +0,014% | +0,570%                          | +0,572% | 5,000%                    | 5,000%  |
| MSCI JAPAN                     | +5,347%                         | +0,021% | -0,227%                          | -0,224% | 5,001%                    | 5,000%  |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN          | +4,708%                         | +0,019% | +1,034%                          | +1,036% | 4,999%                    | 5,000%  |
| MSCI EM ASIA                   | +3,601%                         | +0,014% | -0,296%                          | -0,296% | 14,999%                   | 0,000%  |
| MSCI EM LATIN AMERICA          | +2,631%                         | +0,010% | -2,136%                          | -2,135% | 0,000%                    | 0,000%  |
| MSCI EM EUROPE                 | +2,694%                         | +0,011% | -1,126%                          | -1,125% | 0,000%                    | 0,000%  |
| JPM EMU                        | -0,051%                         | +0,000% | -0,356%                          | -0,356% | 10,000%                   | 11,070% |
| BB EURO GVT ILB ALL MATURITIES | +0,194%                         | +0,001% | -0,395%                          | -0,395% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG 500 CORPORATE      | +0,231%                         | +0,001% | -0,140%                          | -0,140% | 10,000%                   | 10,000% |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD     | +0,776%                         | +0,003% | -0,316%                          | -0,315% | 0,001%                    | 0,000%  |
| BB EM SOVEREIGN BOND           | +0,752%                         | +0,003% | -0,917%                          | -0,916% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG CORP BBB 500MM+    | +0,373%                         | +0,001% | -0,165%                          | -0,165% | 0,000%                    | 0,000%  |
| EXANE EUROPE CONVERT BOND      | +1,577%                         | +0,016% | -0,082%                          | -0,081% | 4,999%                    | 5,000%  |
| EONIA CAPITALISÉ               | -0,007%                         | +0,000% | -0,041%                          | -0,041% | 15,000%                   | 15,000% |
| USD/EUR                        | +0,670%                         | +0,003% | +0,866%                          | +0,867% | 0,000%                    | 0,000%  |
| JPY/EUR                        | -0,759%                         | -0,003% | +0,894%                          | +0,894% | 0,000%                    | 0,000%  |
| GBP/EUR                        | +0,426%                         | +0,002% | -1,469%                          | -1,469% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CHF/EUR                        | -0,446%                         | -0,002% | +0,944%                          | +0,943% | 0,000%                    | 0,000%  |
| SEK/EUR                        | +0,591%                         | +0,002% | -0,245%                          | -0,245% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CAD/EUR                        | +0,919%                         | +0,004% | +0,038%                          | +0,038% | 0,000%                    | 0,000%  |
| NOK/EUR                        | +0,069%                         | +0,000% | +0,094%                          | +0,093% | 0,000%                    | 0,000%  |

Pour une constante de proportionnalité identique les pondérations optimales obtenues de part et d'autre diffèrent significativement. La plateforme QUARISMA calcule ici une matrice de covariance « a postérieur » non annualisée mais considère, sur le modèle de la matrice  $\widehat{\Sigma}_Q$ , que la matrice de covariance qui intervient dans la contrainte de tracking-error est sous forme annualisée.

## ■ 3<sup>ème</sup> comparatif de résultats

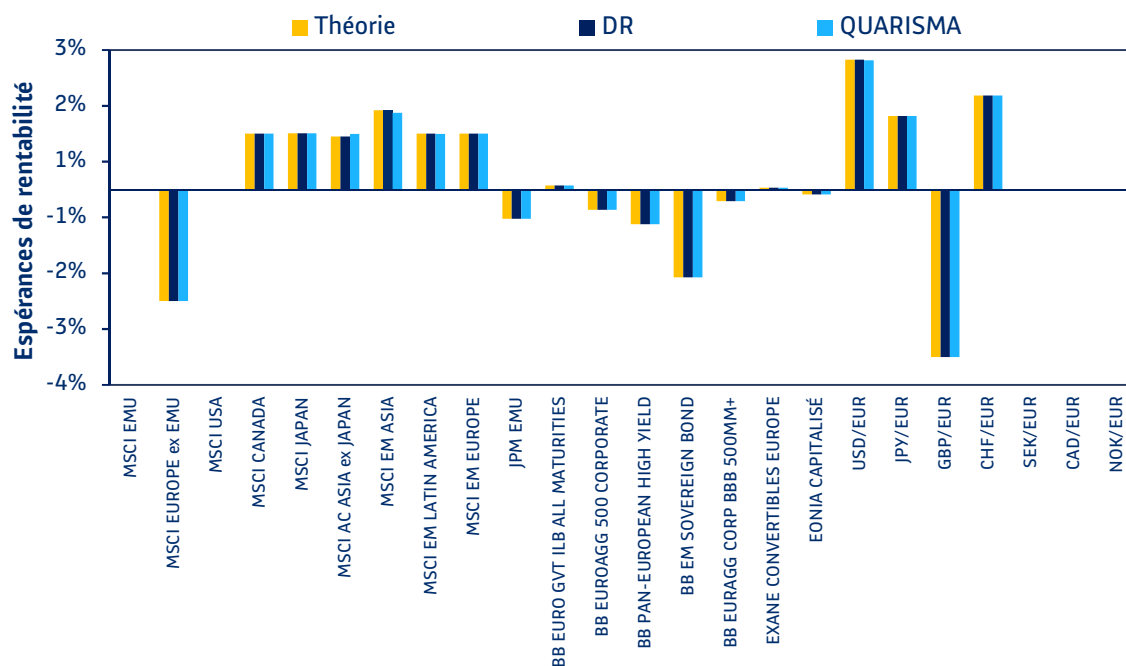
On considère à présent un jeu de données légèrement modifié par rapport à celui utilisé pour la revue du portefeuille du 28 septembre 2018 concernant le mandat de gestion « dynamique ». On choisit de fixer ici une probabilité de réalisation égale à 1 sur chacune des 24 anticipations formulées sur l'univers d'investissement considéré, ainsi qu'une contrainte de tracking-error annuelle maximale proche de 0%.



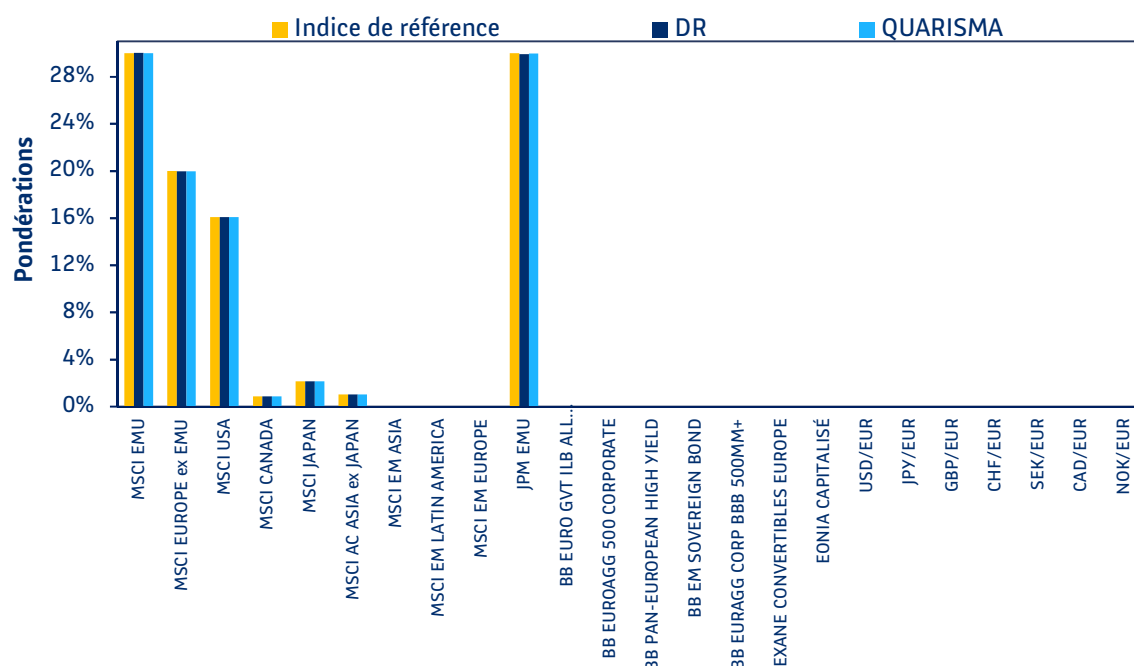
Selon la matrice de covariance annualisée  $\widehat{\Sigma}_Q$  ainsi que du ratio de marché  $\hat{\lambda}$  calculés par QUARISMA, sous les contraintes **C1** nous obtenons les résultats suivants :

| PORTEFEUILLE                   | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE » |         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » |         | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |         |
|--------------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|---------------------------|---------|
|                                | QUARISMA                        | DR      | QUARISMA                         | DR      | QUARISMA                  | DR      |
| INDICES/ACTIFS                 |                                 |         |                                  |         |                           |         |
| MSCI EMU                       | +4,373%                         | +0,017% | +0,001%                          | +0,001% | 29,978%                   | 30,010% |
| MSCI EUROPE ex EMU             | +4,198%                         | +0,017% | -2,002%                          | -2,002% | 19,967%                   | 19,975% |
| MSCI USA                       | +2,543%                         | +0,010% | +0,003%                          | +0,003% | 16,070%                   | 16,076% |
| MSCI CANADA                    | +3,419%                         | +0,014% | +0,999%                          | +1,000% | 0,865%                    | 0,868%  |
| MSCI JAPAN                     | +5,347%                         | +0,021% | +1,008%                          | +1,009% | 2,150%                    | 2,153%  |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN          | +4,708%                         | +0,019% | +0,955%                          | +0,950% | 1,019%                    | 1,021%  |
| MSCI EM ASIA                   | +3,601%                         | +0,014% | +1,374%                          | +1,420% | 0,000%                    | 0,000%  |
| MSCI EM LATIN AMERICA          | +2,631%                         | +0,010% | +0,997%                          | +1,000% | 0,000%                    | 0,000%  |
| MSCI EM EUROPE                 | +2,694%                         | +0,011% | +1,001%                          | +1,000% | 0,000%                    | 0,000%  |
| JPM EMU                        | -0,051%                         | +0,000% | -0,524%                          | -0,524% | 29,949%                   | 29,897% |
| BB EURO GVT ILB ALL MATURITIES | +0,194%                         | +0,001% | +0,069%                          | +0,069% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG 500 CORPORATE      | +0,231%                         | +0,001% | -0,366%                          | -0,367% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD     | +0,776%                         | +0,003% | -0,622%                          | -0,623% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EM SOVEREIGN BOND           | +0,752%                         | +0,003% | -1,577%                          | -1,577% | 0,000%                    | 0,000%  |
| BB EURO-AGG CORP BBB 500MM+    | +0,373%                         | +0,001% | -0,210%                          | -0,209% | 0,000%                    | 0,000%  |
| EXANE EUROPE CONVERT BOND      | +1,577%                         | +0,016% | +0,028%                          | +0,028% | 0,000%                    | 0,000%  |
| EONIA CAPITALISÉ               | -0,007%                         | +0,000% | -0,090%                          | -0,090% | 0,000%                    | 0,000%  |
| USD/EUR                        | +0,670%                         | +0,003% | +2,317%                          | +2,328% | 0,001%                    | 0,000%  |
| JPY/EUR                        | -0,759%                         | -0,003% | +1,313%                          | +1,314% | 0,000%                    | 0,000%  |
| GBP/EUR                        | +0,426%                         | +0,002% | -3,006%                          | -3,006% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CHF/EUR                        | -0,446%                         | -0,002% | +1,685%                          | +1,684% | 0,000%                    | 0,000%  |
| SEK/EUR                        | +0,591%                         | +0,002% | +0,000%                          | +0,000% | 0,000%                    | 0,000%  |
| CAD/EUR                        | +0,919%                         | +0,004% | +0,000%                          | +0,000% | 0,000%                    | 0,000%  |
| NOK/EUR                        | +0,069%                         | +0,000% | +0,000%                          | +0,000% | 0,000%                    | 0,000%  |

Pour une probabilité de réalisation égale à 1 dans les anticipations, les rentabilités « a posteriori » obtenues sont identiques aux anticipations de rentabilité formulées, comme on peut l'observer sur le graphique ci-dessous :



De plus, la forte contrainte de tracking-error implique des pondérations identiques à celles de l'indice de référence de gestion, ce que l'on obtient bien à la lecture des résultats obtenus.



#### ■ 4<sup>ème</sup> comparatif de résultats

Toujours à partir du jeu de données du mandat de gestion « dynamique » utilisé pour la revue du portefeuille du 28 septembre 2018, on considère maintenant une probabilité de réalisation égale à **0,001** sur chacune des 24 anticipations formulées sur l'univers d'investissement considéré, ainsi qu'une contrainte de tracking-error annuelle maximale fixée à **20%**. On impose de plus une exposition short-only sur les 24 actifs considérés. À partir de la matrice de covariance annualisée  $\widehat{\Sigma}_Q$  ainsi que du ratio de marché  $\hat{\lambda}$  calculés par QUARISMA, sous les contraintes **C1** on obtient alors les résultats suivants :

| PORTEFEUILLE                   | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE » |         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » |         | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |    |
|--------------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|---------------------------|----|
|                                | QUARISMA                        | DR      | QUARISMA                         | DR      | QUARISMA                  | DR |
| INDICES/ACTIFS                 |                                 |         |                                  |         |                           |    |
| MSCI EMU                       | +4,373%                         | +0,017% | -0,005%                          | +0,012% | -                         | -  |
| MSCI EUROPE ex EMU             | +4,198%                         | +0,017% | -0,003%                          | +0,013% | -                         | -  |
| MSCI USA                       | +2,543%                         | +0,010% | +0,001%                          | +0,011% | -                         | -  |
| MSCI CANADA                    | +3,419%                         | +0,014% | +0,001%                          | +0,014% | -                         | -  |
| MSCI JAPAN                     | +5,347%                         | +0,021% | -0,004%                          | +0,017% | -                         | -  |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN          | +4,708%                         | +0,019% | +0,000%                          | +0,019% | -                         | -  |
| MSCI EM ASIA                   | +3,601%                         | +0,014% | -0,005%                          | +0,010% | -                         | -  |
| MSCI EM LATIN AMERICA          | +2,631%                         | +0,010% | -0,016%                          | -0,006% | -                         | -  |
| MSCI EM EUROPE                 | +2,694%                         | +0,011% | -0,010%                          | +0,000% | -                         | -  |
| JPM EMU                        | -0,051%                         | +0,000% | -0,001%                          | -0,002% | -                         | -  |
| BB EURO GVT ILB ALL MATURITIES | +0,194%                         | +0,001% | -0,002%                          | -0,002% | -                         | -  |
| BB EURO-AGG 500 CORPORATE      | +0,231%                         | +0,001% | -0,001%                          | +0,000% | -                         | -  |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD     | +0,776%                         | +0,003% | -0,002%                          | +0,001% | -                         | -  |
| BB EM SOVEREIGN BOND           | +0,752%                         | +0,003% | -0,004%                          | -0,001% | -                         | -  |

| PORTEFEUILLE                | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE » |         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » |         | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |    |
|-----------------------------|---------------------------------|---------|----------------------------------|---------|---------------------------|----|
|                             | QUARISMA                        | DR      | QUARISMA                         | DR      | QUARISMA                  | DR |
| BB EURO-AGG CORP BBB 500MM+ | +0,373%                         | +0,001% | -0,001%                          | +0,000% | -                         | -  |
| EXANE EUROPE CONVERT BOND   | +1,577%                         | +0,016% | -0,001%                          | +0,005% | -                         | -  |
| EONIA CAPITALISÉ            | -0,007%                         | +0,000% | +0,000%                          | +0,000% | -                         | -  |
| USD/EUR                     | +0,670%                         | +0,003% | +0,004%                          | +0,006% | -                         | -  |
| JPY/EUR                     | -0,759%                         | -0,003% | +0,004%                          | +0,001% | -                         | -  |
| GBP/EUR                     | +0,426%                         | +0,002% | -0,003%                          | -0,001% | -                         | -  |
| CHF/EUR                     | -0,446%                         | -0,002% | +0,004%                          | +0,002% | -                         | -  |
| SEK/EUR                     | +0,591%                         | +0,002% | -0,001%                          | +0,001% | -                         | -  |
| CAD/EUR                     | +0,919%                         | +0,004% | +0,001%                          | +0,004% | -                         | -  |
| NOK/EUR                     | +0,069%                         | +0,000% | +0,000%                          | +0,000% | -                         | -  |

Les résultats obtenus sous QUARISMA sont ici cohérents avec les résultats attendus, en particulier une pondération optimale inexistante du fait de la contrainte imposée sur la somme des pondérations.

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques recommande de revoir l'implémentation de la contrainte de risque dans la routine d'optimisation moyenne-variance sous contraintes dans QUARISMA. Une attention particulière doit être portée sur l'annualisation des paramètres de l'optimiseur (rentabilités et matrice de covariance). Afin d'éviter toute confusion, la Direction des Risques recommande d'exprimer les rentabilités « d'équilibre » sur la même unité temporelle que les autres rentabilités calculées (anticipées et a posteriori).

La Direction des Risques tient à souligner que dans les exercices de comparaison ci-dessus, l'univers d'investissement du mandat de gestion « dynamique » composé de 24 indices et actifs a servi à calculer la matrice de covariance  $\widehat{\Sigma}_Q$ , le ratio de marché  $\widehat{\lambda}$  et in fine les rentabilités « d'équilibre »  $\pi$ . Ces résultats ne tiennent de fait pas compte des remarques émises au paragraphe 3.1.2.1. et qui conduisent à des pondérations optimales différentes (cf. Annexe 9).

### 3.2.3 Qualité de l'implémentation informatique

L'outil d'interface Excel « **Black-Litterman\_Optimizer\_2018\_10.xlsx** » se compose de quarante-cinq onglets, dont :

- 1 page de garde,
- 1 page « **Optimisation** » qui permet :
  - d'initialiser la base de données QUARSIMA à la date voulue,
  - de mettre à jour des données dans QUARISMA,
  - de lancer l'optimisation pour l'ensemble des portefeuilles de la gamme Allocation Multi-Actifs benchmarkée,
  - de lancer le reporting des fonds optimisés,
  - d'accéder aux onglets relatifs à l'optimisation des portefeuilles sous gestion.
- 1 feuille nommée « **Correl** » contenant les volatilités, matrices de covariance et de corrélation linéaire estimées par QUARISMA sur l'univers d'investissement des 74(+3) indices et actifs de la gamme Allocation Multi-Actifs benchmarkée.

- 1 feuille nommée « **Chgt\_Datastream\_To\_Bloom** » qui répertorie pour chaque portefeuille les tickers Bloomberg et Datastream des actifs et classe d'actifs de l'univers d'investissement.
- 5 feuilles intitulées « **list geo zone** » et « **COMPO\_DATA** », qui permettent de déterminer pour l'univers actions le poids de chaque composante actions en fonction du poids des sous-jacents qui la composent dans des indices globaux publiés par MSCI.
- 19 onglets relatifs à l'optimisation des portefeuilles sous gestion.
- 20 onglets relatifs au reporting des portefeuilles optimisés.

## REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques recommande :

- au sein de la procédure VBA « **optimize()** » du module « **Optimisation** », la réécriture de la ligne de code VBA :

```
For i = 0 To UBound(tickers)
    Vol = Round(Data(i, 2) / Data(i, 1), 3) + Vol
Next i
```

en :

```
For i = 0 To UBound(tickers)
    Vol = Data(i, 2) / Data(i, 1) + Vol
Next i
```

afin d'éviter de cumuler à chaque itération sur **i** une erreur d'approximation décimale (d'ordre 3 par excès) sur la quantité **Data(i, 2) / Data(i, 1)**.

- De commenter dans chaque onglet relatif à l'optimisation des portefeuilles sous gestion, la procédure de modification de la matrice des anticipations relatives/absolues **P**. Selon l'implémentation actuelle dans l'outil, celle-ci se lit colonne par colonne et non ligne par ligne.
- De renommer dans chaque onglet relatif à l'optimisation des portefeuilles sous gestion, la colonne « **Bench Weights** » par « **Global Market Portfolio Weights** », ainsi que le nom de chaque paire de devises de l'univers d'investissement en inversant l'ordre des devises.
- D'améliorer la lisibilité de l'implémentation VBA de l'outil, en supprimant notamment les fonctions et procédures obsolètes.
- D'établir dans les onglets relatifs à l'optimisation des portefeuilles, une règle qui vérifie systématiquement sur l'ensemble des indices et actifs de l'univers d'investissement, la cohérence entre la sélection « **Long Only - Short Only - Long/Short** » faite et les contraintes d'exposition minimale et maximale imposées, sachant que QUARISMA privilégie systématiquement la contrainte « **Long Only - Short Only - Long/Short** » aux limites minimale et maximale d'exposition.
- De s'assurer que les inputs de la colonne « **Confidence** » de chaque onglet relatif à l'optimisation des portefeuilles soient bien définis dans l'intervalle ]0% ; 100%]. Dans la version actuelle de l'outil, pour une erreur de signe et une saisie négative dans la colonne « **Confidence** », la plateforme QUARISMA considère comme nulle la probabilité de réalisation de l'anticipation de rentabilité. De même, pour une saisie à trois chiffres dans la

colonne « **Confidence** », la plateforme QUARISMA considère une probabilité de réalisation de l'anticipation de rentabilité égale à **100%**.

### 3.2.4 Sécurisation de l'outil

Les droits d'accès au dossier<sup>10</sup> où sont conservés les historiques des jeux de données (inputs et outputs) ainsi que le classeur « **Black-Litterman\_Optimizer\_2018\_10.xlsx** » sont les suivants :

| Nom  | Type        | Affichage | Lecture et exécution | Modification | Contrôle total | Accès fichiers |
|--|-------------|-----------|----------------------|--------------|----------------|----------------|
| Administrateurs  | Groupe      |           |                      |              | ✓              | ✓              |
| Admintech  | Utilisateur |           |                      |              | ✓              | ✓              |
| Emmanuel BECQ  | Utilisateur |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| Fares BEN GHACHEM  | Utilisateur |           |                      | ✓            |                | ✓              |
| Thierry BLAIS  | Utilisateur |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| CONFORMITE & CONTROLE INTERNE                              | Groupe      |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| CONFORMITE_CONTROLEINTERNE                                 | Groupe      |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| Consultant CSTIM   | Utilisateur |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| Vincent CORNET   | Utilisateur |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| DIRECTION DES RISQUES                                      | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| DIRECTION DU DEVELOPPEMENT<br>DES MARCHES DES PARTICULIERS | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GESTION_DIVERSIFIEE  | Groupe      |           |                      | ✓            |                | ✗              |
| GRP_ALL_GESDIVER_EQUP_DOCPE<br>RSO_ANDRE_R                 | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✓              |
| GRP_ALL_GESDIVER_PORFEUILLES<br>_GES_CPPI_R                | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_ALLO_GESTDIV_PROCPROTEF<br>EU_MOD_BLACKLITTERMAN_RW    | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_ALLOC&GESDIVER_EQUP_DOCPE<br>RS_ROZENN_PROGRESSIO_R    | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_ALLOC&GESTDIV_PROCE<br>TPORTMOD_SENS_GESTIONSSENS_R    | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_ALLOC&GESTDIV_R  | Groupe      |           | ✓                    |              |                | ✓              |
| GRP_ALLOCATION&Gestion_RW                                  | Groupe      |           |                      | ✓            |                | ✓              |
| GRP_ALLOCGESTDIV<br>_AEGONCONFCALL_RW                      | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_ALLOCGESTDIV_QPAM_RW                                   | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| GRP_Allocgestion_Portefeuilles<br>_IDM_source_RW           | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| INGENIERIE FINANCIERE                                      | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |
| QUANT GERANT ANALYST                                       | Groupe      | ✓         |                      |              |                | ✗              |

Détail du groupe « GRP\_ALLOCATION&Gestion\_RW » :

| Utilisateur     |
|-----------------|
| Mirela AGACHE   |
| Delphine ARNAUD |
| Antoine BYJANI  |

<sup>10</sup> \\serv0\enfin\Allocation & Gestion Diversifiée\Process et Portefeuilles modèles\Quarisma\_Production

ainsi que du groupe « GRP\_ALLOC&GESTDIV\_R » :

| Utilisateur           |
|-----------------------|
| Clotilde COEURET      |
| Narayanan PADMANABHAN |

### REVUE CRITIQUE

La Direction des Risques recommande que le contrôle d'accès soit amélioré en réalisant la suppression des accès aux utilisateurs « Consultant CSTIM », Bernard COHEN et Fares BEN GHACHEM, et en contrôlant périodiquement la liste des utilisateurs des groupes ayant accès au dossier (en particulier les groupes disposant des droits de modification « GESTION\_DIVERSIFIEE » et « GRP\_ALLOCATION&GESTION\_RW »).

Concernant le contenu de l'outil, la Direction des Risques recommande de verrouiller (avec mot de passe) les cellules avec formules afin d'éviter les modifications involontaires.

## 3.3 Documentation

L'équipe de Gestion et Allocation Multi-Actifs a mis à notre disposition le document « Algorithme de Black Litterman (Méthode Idzorek) » qui a été transmis aux équipes de QUARISMA pour l'implémentation du modèle de Black-Litterman.

### REVUE CRITIQUE

Après analyse de la Direction des Risques, il s'avère que la plateforme QUARISMA utilise la méthode de « Walters » dans l'implémentation du modèle de Black-Litterman.

La Direction des Risques recommande que soit rédigé un manuel d'utilisation complet de l'outil ainsi qu'un document méthodologique en adéquation avec l'implémentation sous QUARISMA. La documentation devra être rédigée selon le modèle « Documentation Méthodologique et Technique »<sup>11</sup> que la Direction des Risques met à disposition.

## 4 Recommandations

### 4.1 Validation théorique

#### 4.1.1 Fondements

---

<sup>11</sup> G:\Direction des Risques\PROCESS VALIDATION DE MODELES\DOCUMENTS\ MODEL\_DOCUMENTATION\_TEMPLATE.docx

#### 4.1.2 Approche méthodologique et hypothèses

- a) Implémenter dans QUARISMA la méthode « Idzorek » plutôt que la méthode « Walters » (§ 3.1.1.5).
- b) S'assurer de la cohérence du paramétrage sur l'ensemble des portefeuilles-modèles (§ 3.1.1.5).
- c) Étudier une méthode alternative de calcul des rentabilités « d'équilibre » (§ 3.1.2.1).
- d) Proposer une méthode de calibration de la constante de proportionnalité (§ 3.1.2.2).
- e) Étudier la possibilité d'internaliser la production de la matrice de covariance des rentabilités des indices en amont du chargement dans QUARISMA (cf. rapport de validation QUARISMA RMVO).
- f) Supprimer l'option de choix de la matrice de covariance dans la contrainte de risque de la routine d'optimisation (§ 3.1.1.6).

Nécessaire

Recommandé

#### 4.1.3 Documentation de l'outil et du modèle

La documentation doit être inscrite à l'agenda de revue de l'outil :

- a) rédaction d'une documentation méthodologique en cohérence avec l'implémentation effectuée sous QUARISMA,
- b) formulation des instructions d'exécution et de maintenance de l'outil destinée aux utilisateurs.

Nécessaire

### 4.2 Validation numérique

#### 4.2.1 Structure du modèle

#### 4.2.2 Qualité des données brutes

#### 4.2.3 Qualité du traitement statistique

Implémenter une méthodologie de complétion des données manquantes plus réaliste en amont du chargement des données dans QUARISMA.

Recommandé

#### 4.2.4 Diagnostic et robustesse des résultats

- a) Revoir l'implémentation de la contrainte de tracking-error dans la routine d'optimisation moyenne-variance (§ 3.2.2).
- b) Corriger le calcul VBA de la volatilité annualisée du portefeuille optimal (§ 3.2.3).
- c) Exprimer les rentabilités « d'équilibre » sur la même base temporelle que les autres rentabilités considérées (§ 3.2.2).

Nécessaire

Recommandé

## 4.3 Validation opérationnelle

### 4.3.1 Qualité de l'implémentation

- a) Améliorer l'automatisation de la requête des données dans les fichiers « history\_bbg\_update » et « history\_bbg\_update\_com ». Idéalement, mettre en place un processus de données s'appuyant sur un référentiel central (DISCO) comme source principale.
- b) Effectuer dans l'outil les modifications proposées au § 3.2.3.

**Recommandé**

**Nécessaire**

### 4.3.2 Qualité du reporting

### 4.3.3 Gouvernance de l'outil

Actualiser les droits d'accès au répertoire où se situent les données nécessaires à la revue des portefeuilles-modèles.

**Nécessaire**

### 4.3.4 Sécurisation de l'outil

Protéger les cellules Excel qui contiennent les inputs (paramètres de l'optimiseur, anticipations de rentabilités, budget de risque, contraintes sur les poids) ainsi que par mot de passe l'ouverture de l'outil Excel.

**Nécessaire**



## 5 Conclusion

A la suite de cet audit, la Direction des Risques recommande de valider l'utilisation du modèle en production. Un calendrier de résolution des recommandations devra néanmoins lui être transmis.

### 6.1 Annexe 1 : reformulation des espérances de rentabilités « a posteriori »

Sous les hypothèses du modèle de Black-Litterman nous pouvons écrire :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] = [(\tau\Sigma)^{-1} + {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + {}^tP \Omega^{-1}q]$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] &= [(\tau\Sigma)^{-1} + {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}(\tau\Sigma) [(\tau\Sigma)^{-1}\pi + {}^tP \Omega^{-1}q] \\ &= [I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}[\pi + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}q] \\ &= [I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}[(I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P)\pi + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}(q - P\pi)] \\ &= \pi + [I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}) \\ &\quad \times [(\Omega + P \tau\Sigma {}^tP)(\Omega + P \tau\Sigma {}^tP)^{-1}](q - P\pi) \\ &= \pi + [I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma {}^tP + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P \tau\Sigma {}^tP) \\ &\quad \times (\Omega + P \tau\Sigma {}^tP)^{-1}(q - P\pi) \\ &= \pi + [I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P]^{-1}[(I_n + \tau\Sigma {}^tP \Omega^{-1}P) \tau\Sigma {}^tP] \\ &\quad \times (\Omega + P \tau\Sigma {}^tP)^{-1}(q - P\pi) \\ &= \pi + \tau\Sigma {}^tP (\Omega + P \tau\Sigma {}^tP)^{-1}(q - P\pi) \end{aligned}$$

### 6.2 Annexe 2 : détermination des niveaux d'incertitudes selon la méthode « Idzorek »

Thomas Idzorek (2005)<sup>12</sup> expose l'idée selon laquelle il est possible d'exprimer une « confiance implicite » dans les anticipations de rentabilité à partir des pondérations de marché  $\varpi$  et des pondérations  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  obtenues dans le cadre d'une optimisation moyenne-variance sans contraintes de la forme :

$$\max_{\gamma} \left[ {}^t\gamma \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]] - \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) {}^t\gamma \Sigma \gamma \right]$$

En fonction de cette « confiance implicite », Idzorek élabore alors une méthodologie afin de calibrer le modèle de Black-Litterman et notamment les incertitudes  $\Omega = \text{diag}(\omega_{i,i})_{i=1\dots k}$ , selon l'expression de probabilités de réalisation des anticipations de rentabilité  $P\mathbb{E}[r]$  formulées.

<sup>12</sup> Idzorek M. (2005). A Step-by-Step Guide to the Black-Litterman Model. Working Paper.

Cette méthodologie de détermination des incertitudes sur les rentabilités  $q$  consiste, pour chaque  $i = 1 \dots k$  :

1. À considérer chaque rentabilité espérée comme unique anticipation, c'est-à-dire :

$$P_{i,n} \mathbb{E}[r] = q_i + \varepsilon \quad , \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \omega_{i,i})$$

et calculer pour une probabilité de réalisation  $\zeta_i = 1$ , les espérances de rentabilité  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P_{i,n} \mathbb{E}[r]]$  d'après la formule du modèle de Black-Litterman<sup>13</sup> :

$$\mathbb{E}[(\mathbb{E}[r] | P_{i,n} \mathbb{E}[r]) | \zeta_i = 1] = \pi + \tau \Sigma^t P_{i,n} (P_{i,n} \tau \Sigma^t P_{i,n})^{-1} (q_i - P_{i,n} \pi)$$

2. Selon une optimisation moyenne-variance avec absence de contraintes sur les pondérations, à déterminer les poids optimaux  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  associés, à savoir :

$$\gamma = \left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]^{-1} \mathbb{E}[(\mathbb{E}[r] | P \mathbb{E}[r]) | \zeta_i = 1]$$

3. À définir les pondérations cibles  $\kappa = (\kappa_1; \dots; \kappa_n) \in \mathbb{R}^n$  ajustées des probabilités de réalisation  $\zeta_i$  formulées, selon l'expression :

$$\begin{aligned} \kappa &= \varpi + \xi_{n,i} \cdot (\gamma - \varpi) \\ &= (1 - \xi_{n,i}) \cdot \varpi + \xi_{n,i} \cdot \gamma \end{aligned}$$

où l'opérateur « $\cdot$ » désigne le produit ligne-par-ligne, avec pour tout  $j = 1 \dots n$  :

$$\xi_{j,i} = \begin{cases} \zeta_i & \text{si l'actif } A_j \text{ participe à la formulation de l'anticipation } q_i \\ \mathbf{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

4. À estimer le terme d'incertitude  $\omega_{i,i}^\star$  qui minimise la norme euclidienne de la différence entre les pondérations cibles  $\kappa$  et les pondérations issues de l'optimisation moyenne-variance avec absence de contraintes suivantes :

$$\left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} + {}^t P_{i,n} \omega_{i,i}^{-1} P_{i,n}]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + {}^t P_{i,n} \omega_{i,i}^{-1} q_i]$$

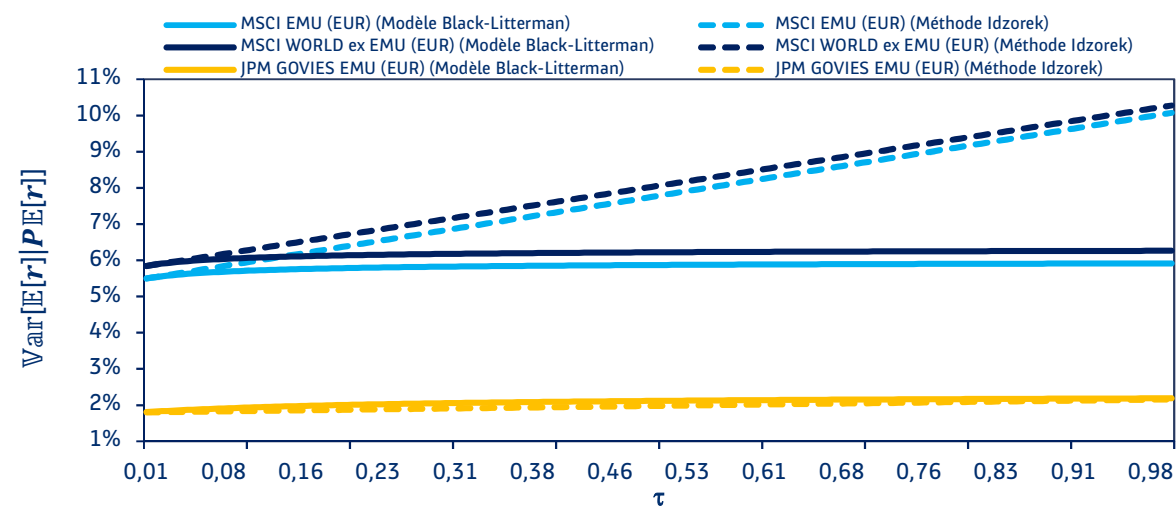
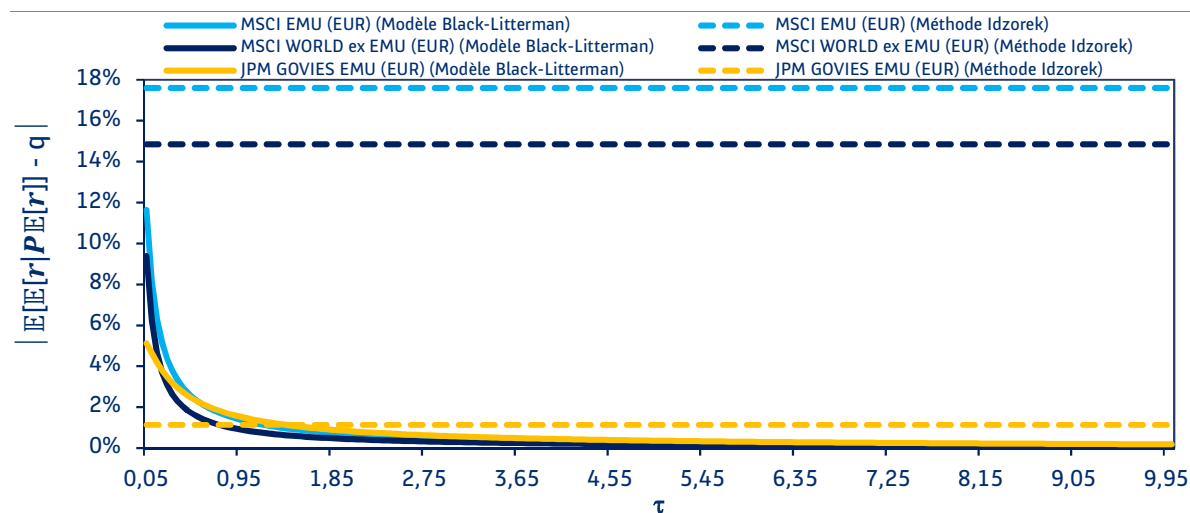
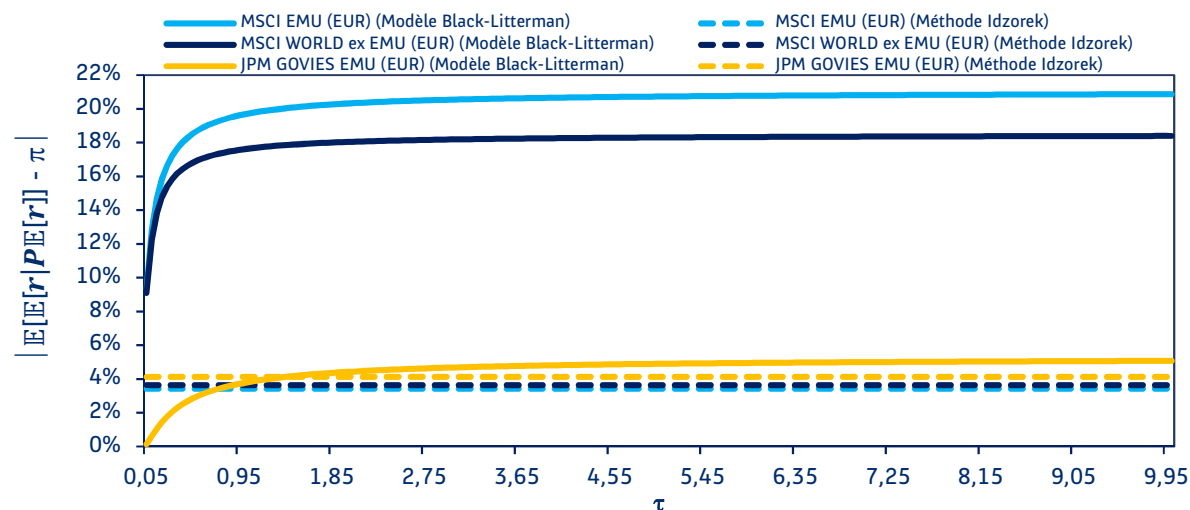
Autrement dit :

$$\omega_{i,i}^\star = \underset{\omega_{i,i} > 0}{\operatorname{argmin}} \left\| \kappa - \left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} + {}^t P_{i,n} \omega_{i,i}^{-1} P_{i,n}]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + {}^t P_{i,n} \omega_{i,i}^{-1} q_i] \right\|_2^2$$

<sup>13</sup> cf. Annexe 1.

### 6.3 Annexe 3 : influence de la constante de proportionnalité

Les graphiques ci-dessous illustrent, selon le modèle de Black-Litterman et la méthode « Idzorek », l'influence de la valeur de la constante de proportionnalité  $\tau$  dans les calculs de l'espérance et de la variance « a posteriori » des rentabilités espérées  $\mathbb{E}[r] \mid P\mathbb{E}[r]$ .



Exemple pour un marché composé à 30% de l'indice MSCI EMU (EUR), 20% de l'indice MSCI WORLD ex EMU (EUR) et 50% de l'indice JPM GOVIES EMU (EUR). La matrice de covariance annualisée  $\Sigma$  est estimée à partir de QUARISMA et des rentabilités arithmétiques des indices MSCI EMU (EUR), MSCI WORLD ex EMU (EUR) et JPM GOVIES EMU (EUR) sur la période quotidienne du 04/01/2010 au 28/09/2018. Afin de mieux visualiser les variations mesurées, on multiplie par 10 les valeurs de la matrice de covariance  $\Sigma$ . On considère  $(\mathbb{E}[r_m] - r_f)/\text{Var}[r_m] = 9,6424273$ .

La matrice des incertitudes sur les rentabilités anticipées  $q = \begin{bmatrix} 0,0000149 \\ 0,0000285 \\ 0,0168433 \end{bmatrix}$  est fixée arbitrairement  $\Omega = \begin{bmatrix} 0,005 & 0 & 0 \\ 0 & 0,005 & 0 \\ 0 & 0 & 0,005 \end{bmatrix}$ . Les anticipations sur les actifs sont exprimées de manière absolue, c'est-à-dire  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , avec des probabilités de réalisation  $\zeta = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,9 \end{bmatrix}$ .

Dans le modèle de Black-Litterman, la constante  $\tau$  se révèle être un degré d'appréciation du niveau de confiance dans le marché : plus la valeur de  $\tau$  est proche de 0, plus la confiance dans le marché est grande ( $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = \pi$ ). À l'opposé, plus la valeur de  $\tau$  est grande, plus on octroie de l'importance dans les anticipations formulées ( $\lim_{\substack{\Omega \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow +\infty}} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = q$ ).

Par la méthode « Idzorek », la constante de proportionnalité n'affecte pas la valeur de l'espérance « a posteriori » des rentabilités espérées. En revanche, la matrice de covariance « a posteriori » des rentabilités espérées est d'autant plus élevée (respectivement faible), que les probabilités de réalisation des anticipations sont faibles (respectivement élevées), avec en particulier :

$$\begin{cases} \lim_{\zeta \rightarrow 1_k} \text{Cov}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = \Sigma \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0_k} \text{Cov}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = (1 + \tau)\Sigma \end{cases}$$

#### 6.4 Annexe 4 : détermination des niveaux d'incertitudes selon Meucci

D'après l'hypothèse de proportionnalité entre les matrices  $\Omega$  et  $\Sigma$  formulée par Attilio Meucci :

$$\Omega = \alpha P \tau \Sigma^t P, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$$

il vient l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] &= [(\tau \Sigma)^{-1} + {}^t P \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \pi + {}^t P \Omega^{-1} q] \\ &= \pi + \tau \Sigma^t P (\Omega + P \tau \Sigma^t P)^{-1} (q - P \pi) \\ &= \pi + \tau \Sigma^t P [(1 + \alpha) P \tau \Sigma^t P]^{-1} (q - P \pi) \end{aligned}$$

Si l'on suppose la matrice  $P$  inversible, nous pouvons alors facilement observer que le paramètre  $\alpha$  agit comme un « niveau de confiance » dans les anticipations de rentabilité  $P\mathbb{E}[r]$ .

En effet :

$$\begin{aligned} P \text{ inversible} &\Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \pi + \frac{1}{1+\alpha} (P^{-1} q - \pi) \\ &= \pi \end{aligned}$$

tandis que pour  $\alpha = 0$  :

$$P \text{ inversible} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = \pi + \frac{1}{1+\alpha} (P^{-1}q - \pi) = P^{-1}q$$

et pour  $\alpha = 1$  :

$$P \text{ inversible} \Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P\mathbb{E}[r]] = \pi + \frac{1}{1+\alpha} (P^{-1}q - \pi) = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{2} P^{-1}q$$

## 6.5 Annexe 5 : détermination des niveaux d'incertitudes selon la méthode « Walters »

À partir de la formulation d'un « niveau d'incertitude » suggérée par Meucci (cf. Annexe 4), Jay Walters (2007)<sup>14</sup> propose de définir pour tout  $i, j = 1 \dots n$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ :

$$\omega_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i P_{i,n} \tau \Sigma^t P_{i,n} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

afin que les rentabilités anticipées sur les actifs soient mutuellement non corrélées, et que l'on puisse également exprimer un « niveau d'incertitude »  $\alpha_i$  propre à chaque anticipation de rentabilité formulée. Sous cette nouvelle écriture et conditionnellement à l'unique  $i^{\text{ème}}$  anticipation de rentabilité, l'espérance de rentabilité « a posteriori » vérifie l'égalité (cf. Annexe 4) :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[r] | P_{i,n} \mathbb{E}[r]] = \pi + \tau \Sigma^t P_{i,n} [(1 + \alpha_i) P_{i,n} \tau \Sigma^t P_{i,n}]^{-1} (q_i - P_{i,n} \pi) \quad , \quad i = 1 \dots n$$

Par une optimisation moyenne-variance avec absence de contraintes sur les pondérations, la  $i^{\text{ème}}$  pondération optimale  $\gamma_i \in \mathbb{R}$  associée vérifie alors la relation :

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]_{i,n}^{-1} \left[ \pi + \tau \Sigma^t P_{i,n} [(1 + \alpha_i) P_{i,n} \tau \Sigma^t P_{i,n}]^{-1} (q_i - P_{i,n} \pi) \right] \\ &= \left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]_{i,n}^{-1} \pi + \frac{1}{1 + \alpha_i} \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)_{i,n}^{-1} {}^t P_{i,n} (P_{i,n} \Sigma^t P_{i,n})^{-1} (q_i - P_{i,n} \pi) \\ &= \varpi_i + \frac{1}{1 + \alpha_i} \left[ \{ \gamma_i | \zeta_i = 1 \} - \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)_{i,n}^{-1} {}^t P_{i,n} (P_{i,n} \Sigma^t P_{i,n})^{-1} P_{i,n} \pi \right] \end{aligned}$$

sous la notation :

$$\varpi_i = \left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]_{i,n}^{-1} \pi$$

et :

<sup>14</sup> Walters J. (2007). The Black-Litterman Model in Detail. Working Paper.

$$\{\gamma_i | \zeta_i = 1\} = \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)^{-1} {}^t P_{i;n} (P_{i;n} \Sigma^t P_{i;n})^{-1} q_i$$

Afin d'obtenir une estimation des incertitudes  $\Omega = \text{diag}(\alpha_i P_{i;n} \tau \Sigma^t P_{i;n})_{i=1 \dots n}$  identique à l'estimation issue de la méthode « Idzorek », on doit pouvoir associer le « niveau d'incertitude » à la « confiance implicite » définie par Thomas Idzorek, selon la relation :

$$\gamma_i = \varpi_i + \frac{1}{1 + \alpha_i} (\{\gamma_i | \zeta_i = 1\} - \varpi_i)$$

Autrement dit, pour tout  $i = 1 \dots n$  il est nécessaire de pouvoir écrire l'égalité :

$$\varpi_i = \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)^{-1}_{i;n} {}^t P_{i;n} (P_{i;n} \Sigma^t P_{i;n})^{-1} P_{i;n} \pi$$

Par analogie aux résultats obtenus pour chaque  $i^{\text{ème}}$  anticipation de rentabilité considérée, pour un vecteur  $\alpha = (\alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , l'égalité ci-dessus équivaut plus globalement à l'égalité matricielle :

$$\varpi = \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)^{-1} {}^t P (P \Sigma^t P)^{-1} P \pi$$

c'est-à-dire :

$$\left[ \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right) \Sigma \right]^{-1} = \left( \frac{\mathbb{E}[r_m] - r_f}{\text{Var}[r_m]} \right)^{-1} {}^t P (P \Sigma^t P)^{-1} P$$

soit :

$$\Sigma^{-1} = {}^t P (P \Sigma^t P)^{-1} P$$

Par conséquent, sous la condition que la matrice des anticipations relatives/absolues  $P$  soit inversible, pour un vecteur  $\alpha = (\alpha_1; \dots; \alpha_n) \in \mathbb{R}_+^n$  nous obtenons pour tout  $i = 1 \dots n$  la relation :

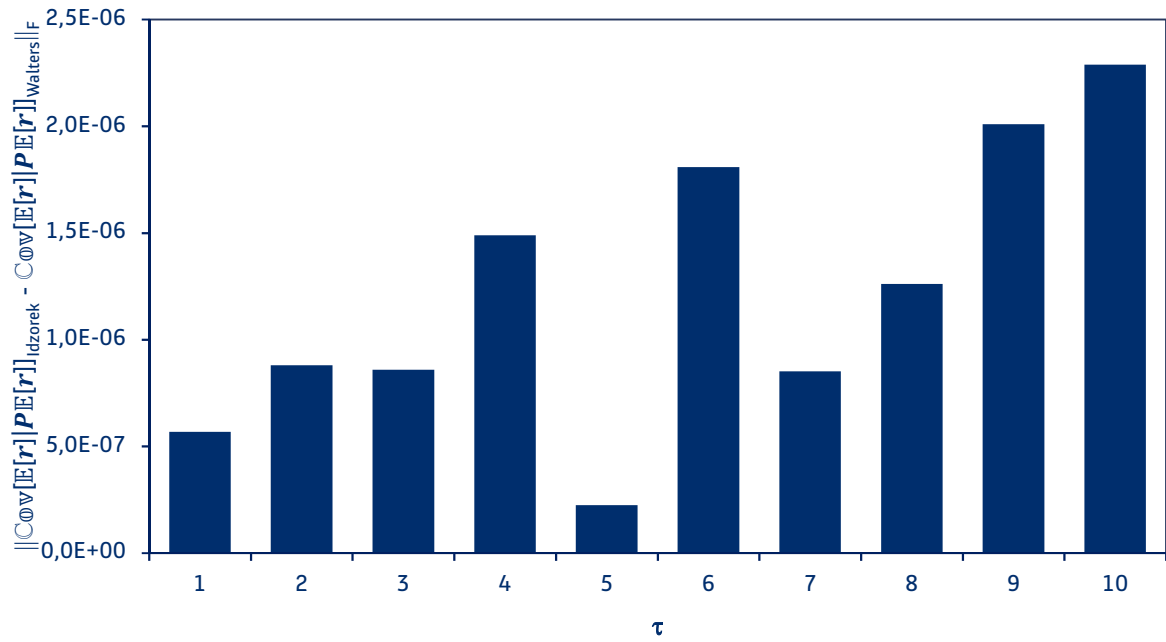
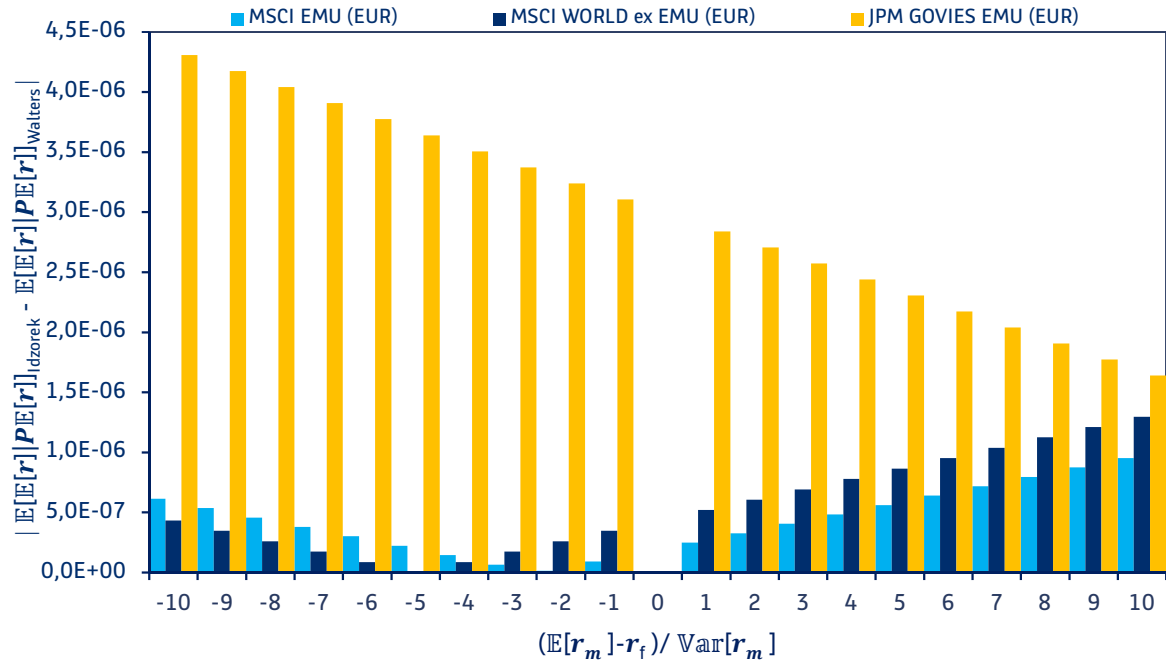
$$\frac{1}{1 + \alpha_i} = \frac{(\gamma_i - \varpi_i)}{(\{\gamma_i | \zeta_i = 1\} - \varpi_i)} = \frac{(\gamma_i - \varpi_i)}{\max_{\gamma_i} (\gamma_i - \varpi_i)} = \frac{1}{\zeta_i} - 1$$

c'est-à-dire :

$$\alpha_i = \frac{1}{\zeta_i} - 1 \quad , \quad \zeta_i \in ]0 ; 1[$$

## 6.6 Annexe 6 : comparatif des méthodes « Idzorek » et « Walters »

Les graphiques suivants mettent en exergue la convergence des résultats issus de la formule analytique de la méthode « Walters », avec ceux issus de la résolution numérique de l'approche « Idzorek ».



Exemple pour un marché composé à 30% de l'indice MSCI EMU (EUR), 20% de l'indice MSCI WORLD ex EMU (EUR) et 50% de l'indice JPM GOVIES EMU (EUR). La matrice de covariance annualisée  $\Sigma$  est estimée à partir de QUARISMA et des rentabilités arithmétiques des indices MSCI EMU (EUR), MSCI WORLD ex EMU (EUR) et JPM GOVIES EMU (EUR) sur la période quotidienne du 04/01/2010 au 28/09/2018.

Les rentabilités anticipées sont  $q = \begin{bmatrix} 0,0000149 \\ 0,0000285 \\ 0,0168433 \end{bmatrix}$  et les anticipations sur les actifs sont exprimées de manière

absolue, c'est-à-dire  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , avec des probabilités de réalisation  $\zeta = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,9 \end{bmatrix}$ . Sur le comparatif des matrices de covariance « a posteriori »  $\text{Cov}[E[r] | PE[r]]$ , la valeur 9,6424273 est affectée au ratio  $(E[r_m] - r_f) / \text{Var}[r_m]$  dans le calcul de la distance de Frobenius.



## 6.7 Annexe 7 : composition de l'univers d'investissement

Composition de l'univers d'investissement « actions » du benchmark de marché élaboré par l'équipe de Gestion Multi-Actifs :

| Nom                   | Ticker Bloomberg | Couverture   |
|-----------------------|------------------|--|
| MSCI AC ASIA PACIFIC  | MXAP             | 1 349 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé des pays développés et émergents d'Asie.                             |
| MSCI WORLD ex EUROPE  | MXWOE            | 1 195 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 8 pays développés hors Europe.                          |
| MSCI EM               | MXEF             | 1 151 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 24 pays émergents.                                      |
| MSCI AC ASIA ex JAPAN | MAASJ            | 953 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 2 pays développés et 9 pays émergents d'Asie hors Japon.            |
| MSCI EM ASIA          | MXMS             | 881 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 9 pays émergents d'Asie.                                  |
| MSCI USA              | MXUS             | 625 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché des États-Unis d'Amérique.   |
| MSCI GOLDEN DRAGON    | MXGD             | 597 émetteurs Large et Mid-Cap du marché composé de la Chine, de Hong-Kong et de Taïwan.   |
| MSCI EUROPE           | MXEU             | 445 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 15 pays développés en Europe.                             |
| MSCI JAPAN            | MXJP             | 322 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché japonais.  |
| MSCI EMU              | MXEM             | 247 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché des pays de la zone Euro.  |
| MSCI EUROPE ex EMU    | MXEUM            | 198 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 5 pays développés européens hors zone Euro.                         |
| MSCI EM EMEA          | MSEUEMEA         | 162 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 10 pays émergents de la région EMEA.                                |
| MSCI PACIFIC ex JAPAN | MXPCJ            | 146 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé de l'Australie, de Hong-Kong, de Singapour et de la Nouvelle-Zélande.  |
| MSCI KOREA            | MXKR             | 115 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché sud-coréen.  |
| MSCI EM LATIN AMERICA | MXLA             | 108 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché composé du Brésil, du Chili, de la Colombie, du Mexique et du Pérou. |
| MSCI CANADA           | MSDECAN          | 91 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché canadien.   |
| MSCI EM EUROPE        | MXMU             | 85 émetteurs et environ 85% de la capitalisation boursière du marché composé de 6 pays émergents d'Europe.   |
| MSCI INDIA            | MXIN             | 79 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché indien.   |
| MSCI AUSTRALIA        | MXAU             | 67 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché australien.   |
| MSCI HONG-KONG        | MXHK             | 47 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché hongkongais.  |
| FTSE ASEAN            | FTS5ASEA         | 40 émetteurs Large Cap du marché composé de l'Indonésie, de la Malaisie, des Philippines, de Singapour et de Taïwan.                                 |
| MSCI SINGAPORE        | MXSG             | 25 émetteurs et approximativement 85% de la capitalisation boursière du marché singapourien.   |

Composition de l'univers d'investissement « produits de taux » du benchmark de marché par l'équipe de Gestion Multi-Actifs :

| Nom                                      | Ticker<br>Bloomberg | Couverture  |
|--|---------------------|---|
| BB PAN-EUROPEAN<br>HIGH YIELD            | LP01TREU            | Principales émissions obligataires High Yield à taux fixe libellées en devises EUR, GDP, DKK, NOK, SEK et CHF.                                  |
| BB EM SOVEREIGN BOND                     | BSSUTRUU            | Principales émissions libellées en USD des États des pays émergents.  |
| BB EURO GOVERNMENT<br>ILB ALL MATURITIES | BEIG1T              | Principales émissions des gouvernements de la zone Euro indexées sur l'inflation et libellées en Euro.  |
| JPM GLOBAL<br>GOVERNMENT BOND            | JHUCGBIG            | Principales émissions des gouvernements des 13 principaux marchés souverains avec couverture en ECU.  |
| JPM EMU<br>GOVERNMENT BOND               | JMMVEG              | Principales émissions Investment Grade gouvernementales de la zone Euro libellées en EUR.   |
| BB EURO AGG<br>SECURITIZED-COVERED       | LSC1TREU            | Principales émissions d'obligations sécurisées Investment Grade libellées en EUR.   |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND US                | JNDCUS              | Principales émissions des États-Unis d'Amérique.  |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND CANADA            | JNQCCA              | Principales émissions de l'État canadien.   |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND UK                | JNGCUK              | Principales émissions de l'État britannique.  |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND SWEDEN            | JNWCSW              | Principales émissions de l'État suédois.  |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND JAPAN             | JNYCJP              | Principales émissions de l'État japonais.   |
| JPM GOVERNMENT<br>BOND AUSTRALIA         | JNACAU              | Principales émissions de l'État australien.   |
| BB EURO AGG<br>CORPORATE BBB/BB          | BCB5TREU            | Principales émissions obligataires privées libellées en EUR de notation et montant supérieure à BBB (500MM)+BB.                                 |
| BB PAN-EUROPEAN<br>AGG 5-7 YEARS         | I02506EU            | Principales émissions de titres Investment Grade à échéance 5-7 à taux fixe libellées en devises EUR, GDP, DKK, NOK, SEK, CZK, HUF, PLN et SKK. |
| BB EURO-AGG CORP<br>5-7 YEARS            | I06270              | Principales émissions de dette Investment Grade à échéance 5-7 ans libellées en EUR.  |
| BB EURO-AGG SECURITIZED<br>5-7 YEARS     | H02176EU            | Principales émissions titrisées Investment Grade à échéance 5-7 ans libellées en EUR.   |
| BB EUR-AGG AGENCY<br>5-7 YEARS           | H02126EU            | Principales émissions Investment Grade à échéance 5-7 ans libellées en EUR émises par les entreprises et organismes publics.                    |
| BB EURO-AGG 500<br>CORPORATE             | LE5CTREU            | 500 plus grosses émissions obligataires privées Investment Grade de la zone Euro libellées en EUR.  |
| EXANE EUROPE<br>CONVERTIBLE BOND         | EECIEECI            | Environ 65 émetteurs d'obligations convertibles des pays d'Europe.  |
| EONIA CAPITALISÉ                         | UCGREONC            | Taux de refinancement interbancaire au jour le jour en devise euro capitalisé et calculé à partir d'un panel de 28 banques.                     |

Composition de l'univers d'investissement « devises » du benchmark de marché élaboré par l'équipe de Gestion Multi-Actifs :

| Nom     | Ticker Bloomberg | Couverture   |
|---------|------------------|--|
| USD/EUR | USDEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises USD/EUR. |
| JPY/EUR | JPYEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises JPY/EUR. |
| GBP/EUR | GBPEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises GBP/EUR. |
| CHF/EUR | CHFEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises CHF/EUR. |
| SEK/EUR | SEKEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises SEK/EUR. |
| CAD/EUR | CADEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises CAD/EUR. |
| NOK/EUR | NOKEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises NOK/EUR. |
| AUD/EUR | AUDEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises AUD/EUR. |
| PLN/EUR | PLNEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises PLN/EUR. |
| HUF/EUR | HUFEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises HUF/EUR. |
| RUB/EUR | RUBEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises RUB/EUR. |
| CZK/EUR | CZKEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises CZK/EUR. |
| ZAR/EUR | ZAREUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises ZAR/EUR. |
| BRL/EUR | BRLEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises BRL/EUR. |
| MXN/EUR | MXNEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises MXN/EUR. |
| CNH/EUR | CNHEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises CNH/EUR. |
| INR/EUR | INREUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises INR/EUR. |
| KRW/EUR | KRWEUR           | Marché des changes spot associé à la paire de devises KRW/EUR. |

Composition de l'univers d'investissement « matières premières » du benchmark de marché constitué par l'équipe de Gestion Multi-Actifs :

| Nom           | Ticker Bloomberg | Couverture (données à fin septembre 2018)   |
|---------------|------------------|---|
| B COMMODITIES | BCOM             | Contrats futures sur 22 matières premières couvrant 7 secteurs différents.                |
| WTI           | USCRWTIC         | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le baril WTI.             |
| BRENT         | EUCRBRDT         | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le baril de BRENT.        |
| RBOB          | XBA              | Marché des matières premières associé aux transactions sur futures sur l'essence.         |
| HEATING OIL   | HOA              | Marché des matières premières associé aux transactions sur futures sur le fioul.          |
| GOLD          | GOLDS            | 17 contributeurs au marché des matières premières associé aux transactions spot sur l'or. |
| GOLD          | XAU              | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur l'or.                     |
| SILVER        | HHARSILB         | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur l'argent.                 |
| PLATINIUM     | XPT              | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le platine.               |
| PALLADIUM     | PALL             | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le palladium.             |
| COPPER        | LMCADY           | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le cuivre.                |
| ALUMINIUM     | LMAHDY           | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur l'aluminium.              |
| NICKEL        | LMNIDY           | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le nickel.                |
| ZINC          | LMZSDY           | Marché des matières premières associé aux transactions spot sur le zinc.                  |

## 6.8 Annexe 8 : définition du portefeuille de marché et des rentabilités « d'équilibre »

En s'inspirant des travaux de Doeswijk, Lam et Swinkels et dans le cadre de la gestion des fonds LBPAM long-only multi-actifs et actions internationales benchmarkés, il est possible de définir un portefeuille global de marché composé de 87 indices et actifs financiers et dont la capitalisation boursière avoisine les 111 723 862 842 000 USD (au 10 décembre 2018). La composition de ce portefeuille de marché est la suivante :

| ACTIFS  | CAPITALISATION BOURSÈRE       | PONDÉRATION    |
|---|-------------------------------|----------------|
| <b>ACTIONS (REITs inclus)</b>                     | <b>54 292 712 000 000 USD</b> | <b>48,595%</b> |
| MSCI EMU  | 4 035 600 000 000 USD         | 3,612%         |
| MSCI EUROPE ex EMU                                | 3 978 600 000 000 USD         | 3,561%         |
| MSCI EM EUROPE                                    | 725 640 000 000 USD           | 0,649%         |
| MSCI USA  | 23 240 000 000 000 USD        | 20,801%        |
| MSCI CANADA                                       | 1 252 500 000 000 USD         | 1,121%         |
| MSCI EM LATIN AMERICA                             | 595 770 000 000 USD           | 0,533%         |
| MSCI JAPAN  | 3 216 638 000 000 USD         | 2,879%         |
| MSCI AUSTRALIA                                    | 1 220 000 000 000 USD         | 1,092%         |
| MSCI KOREA  | 658 504 000 000 USD           | 0,589%         |
| MSCI GOLDEN DRAGON                                | 7 760 000 000 000 USD         | 6,946%         |
| MSCI INDIA  | 439 460 000 000 USD           | 0,393%         |
| MSCI WORLD SMALL CAP                              | 7 170 000 000 000 USD         | 6,418%         |
| <b>OBLIGATIONS CONVERTIBLES</b>                   | <b>340 131 000 000 USD</b>    | <b>0,304%</b>  |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES US                         | 203 556 000 000 USD           | 0,182%         |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES APAC                       | 52 107 000 000 USD            | 0,047%         |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES EMEA                       | 84 468 000 000 USD            | 0,076%         |
| <b>OBLIGATIONS CORPORATE « INVESTMENT GRADE »</b> | <b>16 354 668 490 000 USD</b> | <b>14,638%</b> |
| BB US CORPORATE INVESTMENT GRADE                  | 5 048 689 000 000 USD         | 4,519%         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE CANADA              | 515 749 000 000 USD           | 0,462%         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE UK                  | 793 394 000 000 USD           | 0,710%         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE SWEDEN              | 76 224 000 000 USD            | 0,068%         |
| BB EURO-AGGREGATE 500 CORPORATE                   | 2 378 876 000 000 USD         | 2,129%         |
| BB ASIAN-PACIFIC JAPAN CORPORATE                  | 104 042 490 000 USD           | 0,093%         |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN CORPORATE              | 51 548 000 000 USD            | 0,046%         |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED US                | 6 294 202 000 000 USD         | 5,634%         |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED UK                | 101 946 000 000 USD           | 0,091%         |
| BB EURO-AGGREGATE SECURITIZED                     | 989 998 000 000 USD           | 0,886%         |
| <b>OBLIGATIONS D'ÉTATS « INVESTMENT GRADE »</b>   | <b>34 844 075 922 000 USD</b> | <b>31,188%</b> |
| BB US GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS           | 1 166 153 000 000 USD         | 1,044%         |
| BB EURO GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS ALL MAT | 581 650 800 000 USD           | 0,521%         |
| BB US GOVERNMENT                                  | 8 145 789 000 000 USD         | 7,291%         |
| BB CANADA AGGREGATE GOVERNMENT                    | 966 429 750 000 USD           | 0,865%         |
| BB EURO AGGREGATE GOVERNMENT                      | 7 614 346 482 000 USD         | 6,815%         |
| BB SWEDISH KRONA AGGREGATE GOVERNMENT             | 88 021 890 000 USD            | 0,079%         |
| BB INDIAN GOVERNMENT                              | 717 376 000 000 USD           | 0,642%         |
| BB CHINA AGGREGATE*                               | 5 267 443 000 000 USD         | 4,715%         |
| BB JAPAN GOVERNMENT                               | 8 023 184 000 000 USD         | 7,181%         |
| BB AUSTRALIAN GOVERNMENT                          | 529 926 000 000 USD           | 0,474%         |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN GOVERNMENT             | 1 743 756 000 000 USD         | 1,561%         |
| <b>DETTE ÉMERGENTE LIBELLÉE EN USD</b>            | <b>1 898 598 000 000 USD</b>  | <b>1,699%</b>  |
| BB EM SOVEREIGN BOND                              | 781 227 000 000 USD           | 0,699%         |
| BB EM USD AGGREGATE AGENCIES & LOCAL AUTHORITIES  | 646 806 000 000 USD           | 0,579%         |
| BB EM USD AGGREGATE CORPORATE                     | 470 565 000 000 USD           | 0,421%         |

| ACTIFS                                 | CAPITALISATION BOURSÈRE      | PONDÉRATION   |
|--|------------------------------|---------------|
| <b>OBLIGATIONS « HIGH YIELD »</b>      | <b>3 659 977 430 000 USD</b> | <b>3,276%</b> |
| BB EURO-AGGREGATE CORPORATE BBB 500MM+ | 1 423 247 430 000 USD        | 1,274%        |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD             | 337 752 000 000 USD          | 0,302%        |
| BB EM USD AGGREGATE HIGH YIELD         | 700 259 000 000 USD          | 0,627%        |
| BB US CORPORATE HIGH YIELD             | 1 198 719 000 000 USD        | 1,073%        |
| <b>MATIÈRES PREMIÈRES</b>              | <b>333 700 000 000 USD</b>   | <b>0,299%</b> |
| GOLD                                   | 39 376 600 000 USD           | 11,800%       |
| SILVER                                 | 10 911 990 000 USD           | 3,270%        |
| NATURAL GAS                            | 36 973 960 000 USD           | 11,080%       |
| BRENT CRUDE OIL                        | 24 093 140 000 USD           | 7,220%        |
| WTI CRUDE OIL                          | 21 657 130 000 USD           | 6,490%        |
| RBOB GASOLINE                          | 10 611 660 000 USD           | 3,180%        |
| HEATING OIL                            | 11 512 650 000 USD           | 3,450%        |
| COPPER                                 | 21 490 280 000 USD           | 6,440%        |
| ALUMINIUM                              | 13 848 550 000 USD           | 4,150%        |
| NICKEL                                 | 8 576 090 000 USD            | 2,570%        |
| ZINC                                   | 8 242 390 000 USD            | 2,470%        |
| PLATINIUM                              | 0 USD                        | 0,000%        |
| PALLADIUM                              | 0 USD                        | 0,000%        |
| CORN                                   | 23 592 590 000 USD           | 7,070%        |
| SOYBEANS                               | 19 688 300 000 USD           | 5,900%        |
| SOYBEAN OIL                            | 8 209 020 000 USD            | 2,460%        |
| SOYBEAN MEAL                           | 10 311 330 000 USD           | 3,090%        |
| WHEAT                                  | 14 082 140 000 USD           | 4,220%        |
| HRW WHEAT                              | 5 439 310 000 USD            | 1,630%        |
| SUGAR                                  | 10 411 440 000 USD           | 3,120%        |
| COFFEE                                 | 7 274 660 000 USD            | 2,180%        |
| COTTON                                 | 5 205 720 000 USD            | 1,560%        |
| LIVE CATTLE                            | 15 550 420 000 USD           | 4,660%        |
| LEAN HOGS                              | 6 573 890 000 USD            | 1,970%        |
| <b>DEVISES</b>                         | <b>0 USD</b>                 | <b>0,000%</b> |
| USD/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| JPY/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| GBP/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| CHF/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| SEK/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| CAD/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| NOK/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| AUD/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| PLN/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| HUF/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| RUB/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| CZK/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| ZAR/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| BRL/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| MXN/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| CNH/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| INR/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| KRW/EUR                                | 0 USD                        | 0,000%        |
| <b>MONÉTAIRE</b>                       | <b>0 USD</b>                 | <b>0,000%</b> |
| ÉONIA CAPITALISÉ                       | 0 USD                        | 0,000%        |
| FED FUNDS TOTAL RETURN                 | 0 USD                        | 0,000%        |

\* dette corporate incluse.

Sources : MSCI – Barclays Live – Bloomberg

À partir des séries de rentabilités et des pondérations des 87 indices et actifs financiers listés ci-dessus, sur la période quotidienne du 4 janvier 2010 au 28 septembre 2018, le ratio de marché ( $E[r_m] - r_f / \text{Var}[r_m]$ ) calculé est égal à 1,1504.

## 6.9 Annexe 9 : portefeuille-modèle du mandat de gestion « dynamique »

Le tableau ci-dessous présente les rentabilités « d'équilibre » calculée à partir du portefeuille de marché défini en Annexe 8 ainsi que l'ensemble des anticipations de rentabilité  $PE[r]$  à horizon 3 mois formulées par le Comité d'Investissement et affectées aux indices et actifs représentatifs des classes et sous-classes d'actifs qui composent l'univers d'investissement des fonds LBPAM long-only multi-actifs et actions internationales benchmarkés :

| UNIVERS D'INVESTISSEMENT                          | PONDÉRATION DE MARCHÉ | RENTABILITÉS « D'ÉQUILIBRE » ANNUALISÉES | $PE[r]$ |
|---|-----------------------|--|---------|
| <b>ACTIONS</b>                                    |                       |  |         |
| MSCI EMU  | 3,612%                | +1,666%                                  | +0,001% |
| MSCI EUROPE ex EMU                                | 3,561%                | +1,384%                                  | -2,002% |
| MSCI EM EUROPE                                    | 0,649%                | +2,138%                                  | +1,000% |
| MSCI USA  | 20,801%               | +1,395%                                  | +0,003% |
| MSCI CANADA                                       | 1,121%                | +1,581%                                  | +1,000% |
| MSCI EM LATIN AMERICA                             | 0,533%                | +2,166%                                  | +1,000% |
| MSCI JAPAN  | 2,879%                | +0,774%                                  | +1,009% |
| MSCI AUSTRALIA                                    | 1,092%                | +0,700%                                  | +1,500% |
| MSCI KOREA  | 0,589%                | +0,842%                                  | +1,600% |
| MSCI GOLDEN DRAGON                                | 6,946%                | +1,129%                                  | +0,500% |
| MSCI INDIA  | 0,393%                | +0,856%                                  | +1,000% |
| MSCI WORLD SMALL CAP                              | 6,418%                | +1,282%                                  |         |
| <b>OBLIGATIONS CONVERTIBLES</b>                   |                       |  |         |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES US                         | 0,182%                | +0,886%                                  |         |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES APAC                       | 0,047%                | +0,196%                                  |         |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES EMEA                       | 0,076%                | +0,596%                                  | +0,028% |
| <b>OBLIGATIONS CORPORATE « INVESTMENT GRADE »</b> |                       |  |         |
| BB US CORPORATE INVESTMENT GRADE                  | 4,519%                | -0,082%                                  |         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE CANADA              | 0,462%                | -0,104%                                  |         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE UK                  | 0,710%                | -0,155%                                  |         |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE SWEDEN              | 0,068%                | -0,291%                                  |         |
| BB EURO-AGGREGATE 500 CORPORATE                   | 2,129%                | +0,013%                                  | -0,367% |
| BB ASIAN-PACIFIC JAPAN CORPORATE                  | 0,093%                | -0,046%                                  |         |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN CORPORATE              | 0,046%                | +1,548%                                  |         |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED US                | 5,634%                | -0,046%                                  |         |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED UK                | 0,091%                | -0,248%                                  |         |
| BB EURO-AGGREGATE SECURITIZED                     | 0,886%                | -0,081%                                  |         |
| <b>OBLIGATIONS D'ÉTATS « INVESTMENT GRADE »</b>   |                       |  |         |
| BB US GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS           | 1,044%                | -0,010%                                  |         |
| BB EURO GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS ALL MAT | 0,521%                | +0,132%                                  | +0,069% |
| BB US GOVERNMENT                                  | 7,291%                | -0,131%                                  | +0,014% |
| BB CANADA AGGREGATE GOVERNMENT                    | 0,865%                | -0,372%                                  | +0,000% |
| BB EURO AGGREGATE GOVERNMENT                      | 6,815%                | +0,014%                                  | -0,524% |
| BB SWEDISH KRONA AGGREGATE GOVERNMENT             | 0,079%                | -0,220%                                  | +0,000% |
| BB INDIAN GOVERNMENT                              | 0,642%                | +1,381%                                  |         |

| UNIVERS D'INVESTISSEMENT                         | PONDÉRATION<br>DE MARCHÉ | RENTABILITÉS<br>« D'ÉQUILIBRE »<br>ANNUALISÉES | PE[r]   |
|--|--------------------------|--|---------|
| OBLIGATIONS D'ÉTATS « INVESTMENT GRADE »         |                          |  |         |
| BB CHINA AGGREGATE*                              | 4,715%                   | -0,226%  |         |
| BB JAPAN GOVERNMENT                              | 7,181%                   | -0,026%  | -0,524% |
| BB AUSTRALIAN GOVERNMENT                         | 0,474%                   | -0,167%  | +0,000% |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN GOVERNMENT            | 1,561%                   | +1,295%  |         |
| DETTE ÉMERGENTE LIBELLÉE EN USD                  |                          |  |         |
| BB EM SOVEREIGN BOND                             | 0,699%                   | +0,220%  | -1,577% |
| BB EM USD AGGREGATE AGENCIES & LOCAL AUTHORITIES | 0,579%                   | +0,176%  |         |
| BB EM USD AGGREGATE CORPORATE                    | 0,421%                   | +0,240%  |         |
| OBLIGATIONS « HIGH YIELD »                       |                          |  |         |
| BB EURO-AGGREGATE CORPORATE BBB 500MM+           | 1,274%                   | +0,064%  | -0,209% |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD                       | 0,302%                   | +0,204%  | -0,623% |
| BB EM USD AGGREGATE HIGH YIELD                   | 0,627%                   | +0,288%  |         |
| BB US CORPORATE HIGH YIELD                       | 1,073%                   | +0,279%  |         |
| MATIÈRES PREMIÈRES                               |                          |  |         |
| GOLD   | 11,800%                  | +0,801%  | +1,730% |
| SILVER   | 3,270%                   | +2,033%  | +0,000% |
| NATURAL GAS                                      | 11,080%                  | +0,291%  |         |
| BRENT CRUDE OIL                                  | 7,220%                   | +2,989%  | -4,897% |
| WTI CRUDE OIL                                    | 6,490%                   | +3,277%  | +0,000% |
| RBOB GASOLINE                                    | 3,180%                   | +0,835%  | +0,000% |
| HEATING OIL                                      | 3,450%                   | +1,000%  | +0,000% |
| COPPER   | 6,440%                   | +2,054%  | +0,000% |
| ALUMINIUM  | 4,150%                   | +1,621%  | +0,000% |
| NICKEL   | 2,570%                   | +2,423%  | +0,000% |
| ZINC   | 2,470%                   | +2,123%  | +0,000% |
| PLATINIUM  | 0,000%                   | +1,435%  | +0,000% |
| PALLADIUM  | 0,000%                   | +2,222%  | +0,000% |
| CORN   | 7,070%                   | +0,132%  |         |
| SOYBEANS   | 5,900%                   | +1,410%  |         |
| SOYBEAN OIL                                      | 2,460%                   | +1,381%  |         |
| SOYBEAN MEAL                                     | 3,090%                   | +1,302%  |         |
| WHEAT  | 4,220%                   | +0,193%  |         |
| HRW WHEAT  | 1,630%                   | +0,178%  |         |
| SUGAR  | 3,120%                   | +0,159%  |         |
| COFFEE   | 2,180%                   | +0,221%  |         |
| COTTON   | 1,560%                   | +0,127%  |         |
| LIVE CATTLE                                      | 4,660%                   | +0,027%  |         |
| LEAN HOGS  | 1,970%                   | +0,082%  |         |
| DEVISES  |                          |  |         |
| USD/EUR  | 0,000%                   | -0,317%  | +2,328% |
| JPY/EUR  | 0,000%                   | -0,520%  | +1,314% |
| GBP/EUR  | 0,000%                   | +0,068%  | -3,006% |
| CHF/EUR  | 0,000%                   | -0,109%  | +1,684% |
| SEK/EUR  | 0,000%                   | +0,251%  | +0,000% |
| CAD/EUR  | 0,000%                   | +0,368%  | +0,000% |
| NOK/EUR  | 0,000%                   | +0,430%  | +0,000% |
| AUD/EUR  | 0,000%                   | +0,576%  | +0,000% |
| PLN/EUR  | 0,000%                   | +0,471%  | +0,000% |
| HUF/EUR  | 0,000%                   | +0,433%  | +0,000% |
| RUB/EUR  | 0,000%                   | +0,823%  | +0,000% |
| CZK/EUR  | 0,000%                   | +0,162%  | +0,000% |
| ZAR/EUR  | 0,000%                   | +0,794%  | +0,000% |
| BRL/EUR  | 0,000%                   | +0,591%  | +0,000% |
| MXN/EUR  | 0,000%                   | +0,566%  | +0,000% |



| UNIVERS D'INVESTISSEMENT | PONDÉRATION DE MARCHÉ | RENTABILITÉS « D'ÉQUILIBRE » ANNUALISÉES | $PE[r]$ |
|--------------------------|-----------------------|--|---------|
| DEVISES                  |                       |  |         |
| CNH/EUR                  | 0,000%                | -0,133%                                  | +0,000% |
| INR/EUR                  | 0,000%                | +0,147%                                  | +0,000% |
| KRW/EUR                  | 0,000%                | +0,082%                                  | +0,000% |
| MONÉTAIRE                |                       |  |         |
| ÉONIA CAPITALISÉ         | 0,000%                | -0,000%                                  | -0,090% |
| FED FUNDS TOTAL RETURN   | 0,000%                | -0,000%                                  |         |

\* dette corporate incluse.

Pour des probabilités de réalisation fixées à 0,5 sur l'ensemble des 54 anticipations de rentabilité formulées, suite à l'application de la méthode « Idzorek » et d'une routine d'optimisation moyenne-variance sous contraintes **C1** spécifiques au mandat de gestion « dynamique », nous obtenons alors les résultats suivants :

| UNIVERS D'INVESTISSEMENT                          | RENTABILITÉS « A POSTERIORI » | PONDÉRATIONS OPTIMALES |
|---|-------------------------------|------------------------|
| MSCI EMU  | -0,222%                       | 32,166%                |
| MSCI EUROPE ex EMU                                | -0,292%                       | 12,549%                |
| MSCI EM EUROPE                                    | +0,559%                       | 0,920%                 |
| MSCI USA  | +0,129%                       | 10,000%                |
| MSCI CANADA                                       | +0,271%                       | 5,000%                 |
| MSCI EM LATIN AMERICA                             | +0,604%                       | 1,758%                 |
| MSCI JAPAN  | +0,764%                       | 3,243%                 |
| MSCI AUSTRALIA                                    | +0,829%                       | -                      |
| MSCI KOREA  | +0,959%                       | 2,865%                 |
| MSCI GOLDEN DRAGON                                | +0,723%                       | 0,229%                 |
| MSCI INDIA  | +0,576%                       | 1,505%                 |
| MSCI WORLD SMALL CAP                              | +0,099%                       | -                      |
| OBLIGATIONS CONVERTIBLES                          |                               |                        |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES US                         | +0,108%                       | -                      |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES APAC                       | +0,222%                       | -                      |
| BB GLOBAL CONVERTIBLES EMEA                       | -0,064%                       | 0,000%                 |
| OBLIGATIONS CORPORATE « INVESTMENT GRADE »        |                               |                        |
| BB US CORPORATE INVESTMENT GRADE                  | +0,038%                       | -                      |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE CANADA              | +0,010%                       | -                      |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE UK                  | +0,109%                       | -                      |
| BB GLOBAL AGGREGATE CORPORATE SWEDEN              | -0,087%                       | -                      |
| BB EURO-AGGREGATE 500 CORPORATE                   | +0,039%                       | 0,000%                 |
| BB ASIAN-PACIFIC JAPAN CORPORATE                  | -0,052%                       | -                      |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN CORPORATE              | +0,324%                       | -                      |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED US                | +0,032%                       | -                      |
| BB GLOBAL AGGREGATE SECURITIZED UK                | +0,203%                       | -                      |
| BB EURO-AGGREGATE SECURITIZED                     | +0,023%                       | -                      |
| OBLIGATIONS D'ÉTATS « INVESTMENT GRADE »          |                               |                        |
| BB US GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS           | +0,046%                       | -                      |
| BB EURO GOVERNMENT INFLATION-LINKED BONDS ALL MAT | +0,041%                       | 0,521%                 |
| BB US GOVERNMENT                                  | +0,009%                       | -                      |
| BB CANADA AGGREGATE GOVERNMENT                    | +0,016%                       | -                      |
| BB EURO AGGREGATE GOVERNMENT                      | +0,007%                       | 28,333%                |
| BB SWEDISH KRONA AGGREGATE GOVERNMENT             | -0,007%                       | -                      |
| BB INDIAN GOVERNMENT                              | +0,790%                       | -                      |
| BB CHINA AGGREGATE*                               | -0,252%                       | -                      |

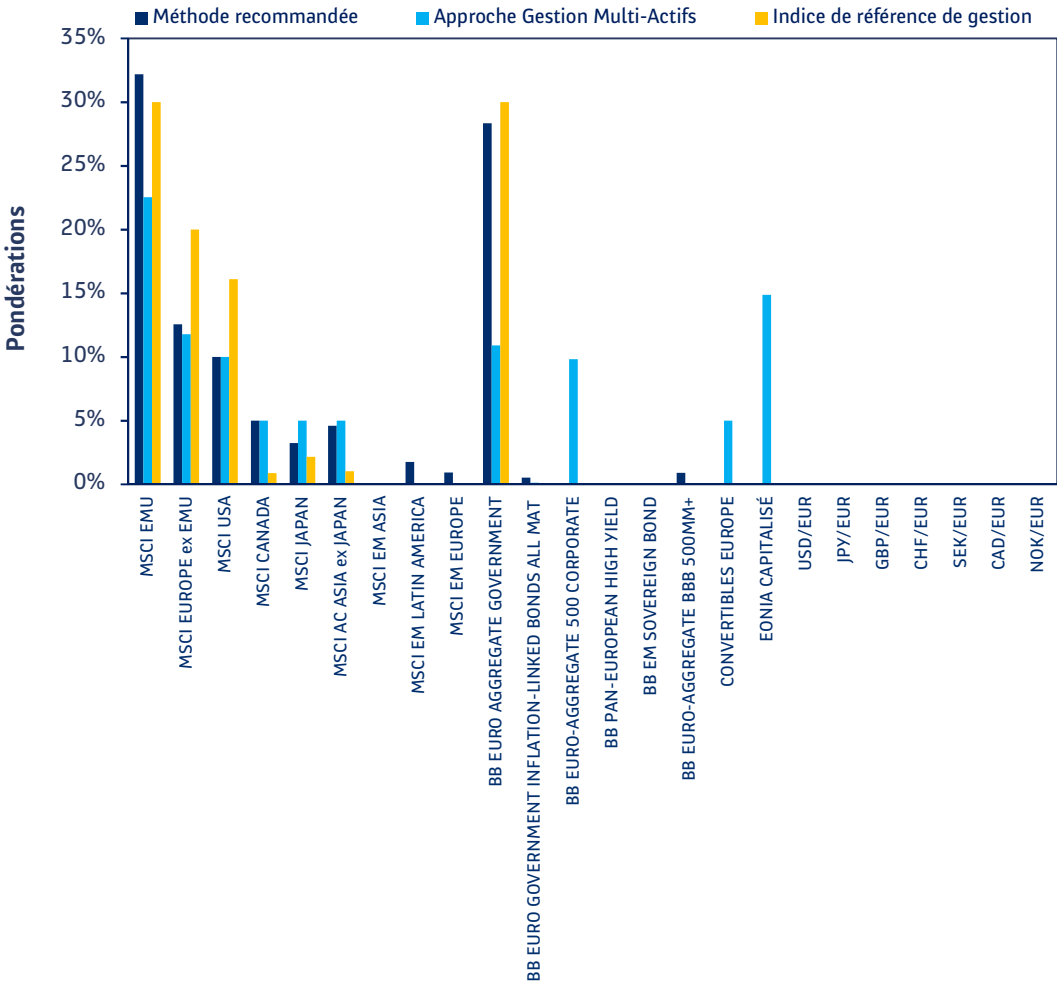


| UNIVERS D'INVESTISSEMENT                         | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |
|--|----------------------------------|---------------------------|
| BB JAPAN GOVERNMENT                              | -0,058%                          | -                         |
| BB AUSTRALIAN GOVERNMENT                         | -0,195%                          | -                         |
| BB ASIAN-PACIFIC NON-JAPAN GOVERNMENT            | +0,363%                          | -                         |
| DETTE ÉMERGENTE LIBELLÉE EN USD                  |                                  |                           |
| BB EM SOVEREIGN BOND                             | +0,098%                          | 0,000%                    |
| BB EM USD AGGREGATE AGENCIES & LOCAL AUTHORITIES | +0,099%                          | -                         |
| BB EM USD AGGREGATE CORPORATE                    | +0,177%                          | -                         |
| OBLIGATIONS « HIGH YIELD »                       |                                  |                           |
| BB EURO-AGGREGATE CORPORATE BBB 500MM+           | +0,032%                          | 0,911%                    |
| BB PAN-EUROPEAN HIGH YIELD                       | +0,053%                          | 0,000%                    |
| BB EM USD AGGREGATE HIGH YIELD                   | +0,119%                          | -                         |
| BB US CORPORATE HIGH YIELD                       | +0,061%                          | -                         |
| MATIÈRES PREMIÈRES                               |                                  |                           |
| GOLD   | +0,219%                          | -                         |
| SILVER   | +0,476%                          | -                         |
| NATURAL GAS                                      | +0,043%                          | -                         |
| BRENT CRUDE OIL                                  | +0,397%                          | -                         |
| WTI CRUDE OIL                                    | +0,413%                          | -                         |
| RBOB GASOLINE                                    | +0,064%                          | -                         |
| HEATING OIL                                      | +0,117%                          | -                         |
| COPPER   | +0,252%                          | -                         |
| ALUMINIUM  | +0,192%                          | -                         |
| NICKEL   | +0,290%                          | -                         |
| ZINC   | +0,364%                          | -                         |
| PLATINIUM  | +0,398%                          | -                         |
| PALLADIUM  | +0,463%                          | -                         |
| CORN   | +0,015%                          | -                         |
| SOYBEANS   | +0,207%                          | -                         |
| SOYBEAN OIL                                      | +0,242%                          | -                         |
| SOYBEAN MEAL                                     | +0,180%                          | -                         |
| WHEAT  | +0,018%                          | -                         |
| HRW WHEAT  | +0,014%                          | -                         |
| SUGAR  | +0,010%                          | -                         |
| COFFEE   | +0,028%                          | -                         |
| COTTON   | +0,005%                          | -                         |
| LIVE CATTLE                                      | +0,006%                          | -                         |
| LEAN HOGS  | +0,018%                          | -                         |
| DEVISES  |                                  |                           |
| USD/EUR  | -0,160%                          | 0,000%                    |
| JPY/EUR  | -0,134%                          | 0,000%                    |
| GBP/EUR  | -0,161%                          | 0,000%                    |
| CHF/EUR  | -0,082%                          | 0,000%                    |
| SEK/EUR  | -0,015%                          | 0,000%                    |
| CAD/EUR  | -0,021%                          | 0,000%                    |
| NOK/EUR  | +0,029%                          | 0,000%                    |
| AUD/EUR  | +0,055%                          | -                         |
| PLN/EUR  | +0,035%                          | -                         |
| HUF/EUR  | +0,026%                          | -                         |
| RUB/EUR  | +0,151%                          | -                         |
| CZK/EUR  | +0,013%                          | -                         |
| ZAR/EUR  | +0,066%                          | -                         |
| BRL/EUR  | +0,074%                          | -                         |
| MXN/EUR  | +0,002%                          | -                         |
| CNH/EUR  | -0,122%                          | -                         |
| INR/EUR  | -0,003%                          | -                         |
| KRW/EUR  | +0,135%                          | -                         |

| UNIVERS D'INVESTISSEMENT | RENTABILITÉS<br>« A POSTERIORI » | PONDÉRATIONS<br>OPTIMALES |
|--------------------------|----------------------------------|---------------------------|
| MONÉTAIRE                |                                  |                           |
| ÉONIA CAPITALISÉ         | +0,000%                          | 0,000%                    |
| FED FUNDS TOTAL RETURN   | +0,000%                          | -                         |

\* dette corporate incluse.

Si l'on compare les résultats ci-dessus avec ceux issus du 1<sup>er</sup> comparatif de résultats du paragraphe 3.2.2<sup>15</sup>, on observe alors une différence significative en matière d'allocation optimale, comme nous pouvons le constater sur le graphique suivant :



<sup>15</sup> Les probabilités de réalisation des anticipations de rentabilité étant identiques dans les deux cas.

---

La Banque Postale Asset Management - 34, rue de la Fédération 75737 Paris Cedex 15

Tél. : 01 57 24 21 00 - Fax : 01 57 24 22 84

SA à Directoire et Conseil de Surveillance au capital de 5 368 107,80 euros – 344 812 615 RCS Paris - Code APE 6630Z

N° TVA Intracommunautaire : FR 78 344 812 615

**labanquepostale-am.fr**



ASSET  
MANAGEMENT