

Modèle de Black-Litterman

Erwan KERLAOUEZO

LBPAM



January 13, 2025

Overview

1 Modèle

2 References

Introduction

- Partie Marché: coeff d'aversion au risques (CAPM), matrice de covariance (Σ) et rendements d'équilibre (Π) qui représentent la tendance du marché
- Investisseur : rentre des vues sur une ou plusieurs performances (Q) et on associe à ces vues des incertitudes (Ω) qui sont les éléments les plus théoriques du modèle.
- A Posteriori : calcul des rendements ajustés ($\mathbb{E}(R)$) à partir des rendements d'équilibre, des vues et des incertitudes sur celle-ci.

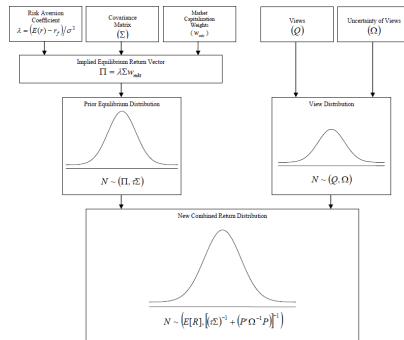


Figure: Schéma du modèle

Inputs du modèle

- Coefficient d'aversion au risque : $\lambda = \frac{\mathbb{E}(r_m) - r_f}{\sigma_m^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Vecteurs des rendements historiques des actifs : $R \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- Matrice de covariance des rendements : $\Sigma \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$
- Coefficient de confiance dans les rendements à priori : $\tau \in \mathbb{R}$
- Estimations de rendements d'équilibre : $\Pi = \lambda \Sigma w_m$, avec $(\Pi, w_m) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$
- Vues des investisseurs : $P \in \mathbb{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathbb{M}_{k,1}(\mathbb{R})$
- Niveau de confiance dans les opinions : $\Omega \in \mathbb{M}_{k,k}(\mathbb{R})$

Explications du modèle

- **Hypothèse 1** : Les rendements à priori ($\mathbb{E}(R)$) suivent: $\mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(\Pi, \tau\Sigma)$
- **Hypothèse 2** : Les rendements anticipés sachant les rendements à priori suivent: $P\mathbb{E}(R)|\mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(Q, \Omega)$ avec $P\mathbb{E}(R) = Q + \epsilon$ où $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ et $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$
- Alors par la formule de Bayes on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)) &= \frac{\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R)|\mathbb{E}(R)) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{E}(R))}{\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R))} \\ &\propto \mathbb{P}(P\mathbb{E}(R)|\mathbb{E}(R)) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{E}(R))\end{aligned}$$

- On a les résultats pour la distribution des rendements à posteriori[1] :
 $\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(R_p), \Sigma + M)$ où l'on a $\mathbb{E}(R_p) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$
avec :

$$\begin{cases} \mathbb{E}(R_p) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q] \\ M = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} \end{cases}$$

Calibration du Paramètre τ

Le paramètre τ est essentiel dans le modèle, car il détermine le niveau de confiance que nous accordons aux rendements à priori. Il est important de souligner que τ influence également les rendements à posteriori. Par la suite, nous verrons qu'il est possible d'ajuster nos incertitudes pour rendre les rendements à posteriori insensibles à la valeur de τ , bien que la variance reste affectée par ce paramètre.

Dans la littérature, il est courant de considérer τ comme l'inverse du nombre de périodes analysées. Par exemple, si nous avons un échantillon de n observations et que nous faisons des prévisions sur une année, nous pouvons définir τ comme suit :

$$\tau = \frac{252}{n}$$

De manière générale, nous utiliserons la formule :

$$\tau = \frac{\text{frequence}}{n}$$

Il existe également d'autres méthodes de calibration qui peuvent fournir une estimation de τ plus précise et de meilleure qualité.

Calibration de Ω

Avant toutes choses, nous pouvons observer que dans le calcul des rendements à posteriori, un calcul de Ω^{-1} est nécessaire, ce qui peut entraîner des instabilités lors des calculs numériques. On peut alors montrer en utilisant l'identité de Woodbury que:

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)] = \Pi + \tau \Sigma P^T \left(\Omega + P \tau \Sigma P^T \right)^{-1} (Q - P\Pi) \quad (1)$$

$$\text{Cov}[\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)] = (1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T \left(\Omega + P \tau \Sigma P^T \right)^{-1} P \tau \Sigma \quad (2)$$

Ω représente les incertitudes que l'investisseur a sur ces vues. C'est le paramètre du modèle le plus difficile à quantifier. Je vais présenter 3 approches pour calibrer cette matrice d'incertitude.

Cas le plus simple: On choisit $\Omega = \text{Diag}(P \Sigma P^T)$.

Bien que cette méthode ne soit pas utilisée, elle permet de comparer les résultats que l'on obtient avec d'autres méthodes de calibrations.

Calcul des limites

On remarque tout d'abord que sous l'hypothèse que P soit inversible (une vue sur chaque asset pour avoir une matrice carré) on a :

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow 0} [\mathbb{E} [\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P\tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P\Pi) \right] = \Pi \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbb{E} [\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\Pi + \tau \Sigma P^T (P\tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P\Pi) \right] = P^{-1}Q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim_{\Omega \rightarrow 0} [\text{Cov} [\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = (1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T (P\tau \Sigma P^T)^{-1} P\tau \Sigma = \Sigma \\ \lim_{\Omega \rightarrow \infty} [\text{Cov} [\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \left[(1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T \Omega^{-1} P\tau \Sigma \right] = (1 + \tau) \Sigma \end{cases}$$

Sachant que $\tau \rightarrow 0$ signifie que l'on a entière confiance aux onformations du marché et que $\Omega \rightarrow 0$ signifie que l'a une entière confiance en nos vues.

Calibration de Ω , méthode d'Idzorek

La méthode d'Idzorek permet d'obtenir des niveaux des incertitudes à partir de niveaux de confiances implicite spécifié par l'investisseur. On note alors $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathbb{E}(R_{i,100\%})$ les rendements à posteriori en supposant que l'on a qu'une seule vue avec une réalisation certaine ($\Omega = 0$):

$$\mathbb{E}(R_{i,100\%}) = \Pi + \tau \Sigma P_{i,n}^T \left(P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T \right)^{-1} (Q_i - P_{i,n} \Pi)$$

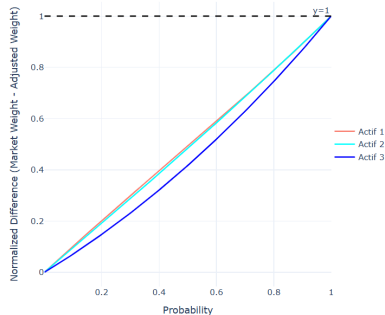
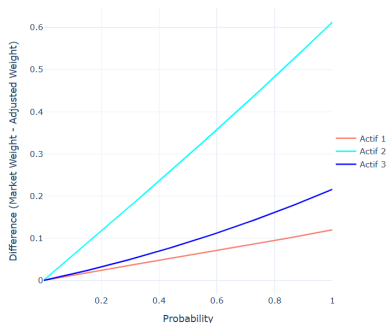
Avec $P_{i,n} \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $Q_i \in \mathbb{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{E}(R_{i,100\%}) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ A partir de ces rendements sous une vue certaine, on calcule les poids optimaux à partir d'une optimisation moyenne variance sans contraintes:

$$w_{i,100\%} = (\lambda \Sigma)^{-1} \mathbb{E}(R_{i,100\%})$$

Puis on calcul $D_i = w_{i,100\%} - w_m$ qui correspond à l'écart max possible entre les poids initiaux et les nouveaux poids car si on suppose une vue certaine, c'est là qu'elle aura le plus d'impact sur la répartition du portefeuille.

Calibration de Ω , méthode d'Idzorek

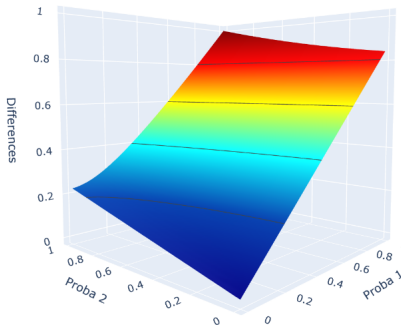
Évolution des différences entre les poids initiaux et ajustés : à gauche, les différences non normalisées $|w_m^i - w^i(p)|$ et à droite, les différences normalisées $\frac{|w_m^i - w^i(p)|}{\max_{p \in [0,1]} |w_m^i - w^i(p)|}$, en fonction du niveau de confiance spécifié par l'investisseur avec $p \in [0, 1]$.



Calibration de Ω , méthode d'Idzorek

Evolution des normes des différences normalisées entre les poids initiaux et ajustés

$$\frac{|w_m - w(p)|}{\max_{p \in [0,1]^2} |w_m - w(p)|} \text{ en fonction des niveaux de confiance } p \in [0, 1]^2.$$



Calibration de Ω , méthode d'Idzorek

Ensuite il faut définir nos target weights \hat{w}_i , avec un niveau de confiance C_i spécifié par l'investisseur concernant la vue:

$$\hat{w}_i = w_m + D_i * C_i$$

On peut donc définir C_i comme une probabilité de réalisation de la rentabilité Q_i , étant égale: $C_i = \frac{\hat{w}_i - w_m}{w_{i,100\%} - w_m}$.

Une fois nos target weights obtenus nous devons résoudre le problème suivant:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \omega_i = \underset{\omega_i > 0}{\operatorname{argmin}} \sum (\hat{w}_i - w)^2$$

Où

$$w = (\lambda \Sigma)^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} + P_{i,n}^T \omega_i^{-1} P_{i,n} \right]^{-1} \left[(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P_{i,n}^T \omega_i^{-1} Q_i \right]$$

A noter que cette méthode permet de neutraliser la contante τ pour le calcul des rendements à posteriori mais pas pour la variance (on illustrera cela plus tard).

Calibration de Ω , méthode de Walters

La méthode de Walters nous dit que nos incertitudes sur les vues sont proportionnelles à la constante τ de la manière suivante:

$$\text{avec } \Omega = \text{Diag}(\omega_1, \dots, \omega_k), \text{ où } \forall i \in \{1, \dots, k\}, \omega_i = \alpha_i P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T$$

A partir des définitions d'Ildzorek on peut montrer que les α_i dépendent des C_i de la méthode d'Ildzorek et sont égaux à:

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \alpha_i = \frac{1}{C_i} - 1$$

On peut aussi montrer que cette méthode rend la valeur de τ inutile pour les calculs des rendements à posteriori si P est inversible:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbb{E}(R) | P \mathbb{E}(R)] &= \Pi + \tau \Sigma P^T \left(\Omega + P \tau \Sigma P^T \right)^{-1} (Q - P \Pi) \\ &= \Pi + \tau \Sigma P^T \left((1 + \alpha) P \tau \Sigma P^T \right)^{-1} (Q - P \Pi) \\ &= \Pi + \frac{1}{1 + \alpha} (P^{-1} Q - \Pi) \end{aligned}$$

Test de la méthode d'Idzorek

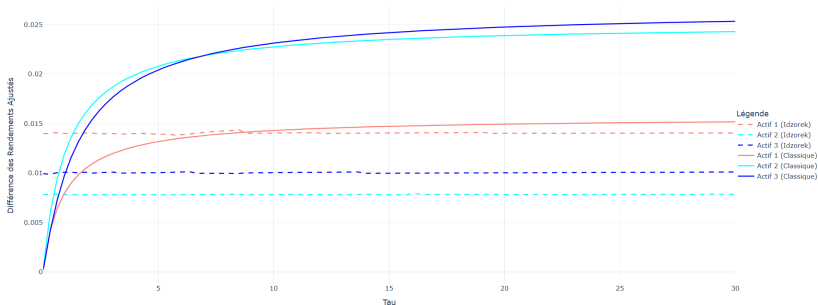
Dans les deux exemples ci-dessous, on prend trois assets avec les inputs suivants :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0.074 \\ 0.054 \\ 0.042 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

De sorte que P soit inversible d'inverse P . De ce fait on peut tirer des calculs de limites précédent que $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbb{E} [\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)]] = Q$ et ainsi observer les résultats sur deuxième graphique. À ne pas oublier que C est un vecteur de confiance dans les vues Q spécifié par l'investisseur. Dans les courbes avec la méthode classique on prend $\Omega = \text{Diag}(P\Sigma P^T)$ de sorte que les rendements à posteriori dépendent de la variable τ .

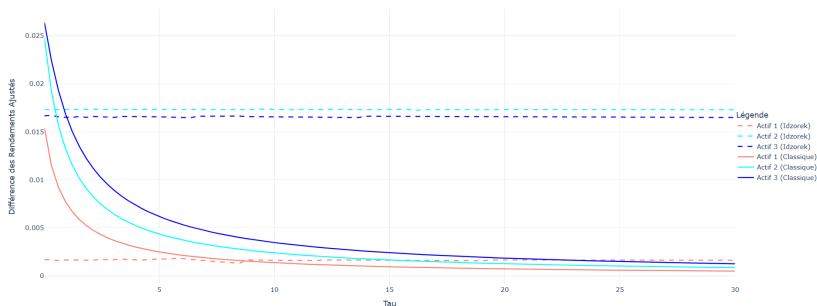
Test de la méthode d'Idzorek

Ce graphe représente la différence entre les rendements à postériori et rendements implicites $|\mathbb{E}[\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)] - \Pi|$ pour des niveaux de τ différents.



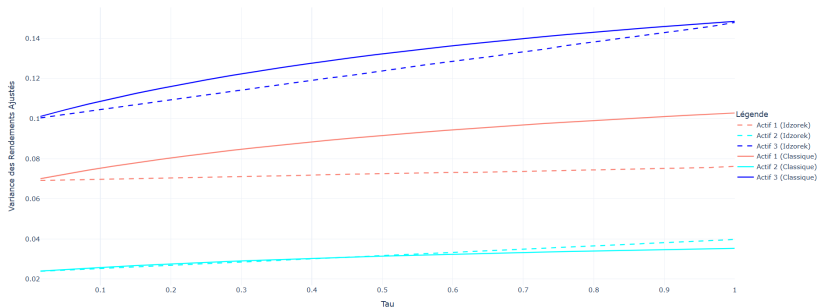
Test de la méthode d'Idzorek

Ce graphe représente la différence entre les rendements à postériori et rendements implicites $|\mathbb{E}[\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)] - Q|$ pour des niveaux de τ différents.



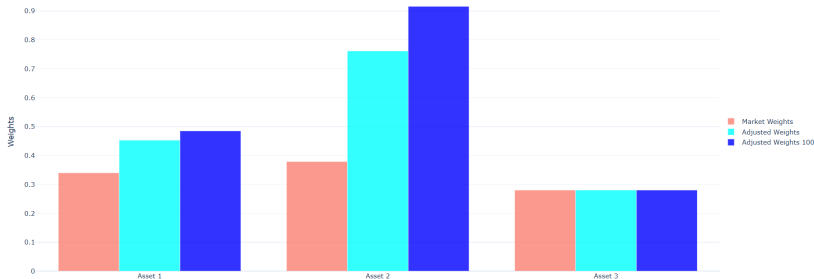
Test de la méthode d'Idzorek

Ce graphe représente la variance des rendements à postériori $\mathbb{V}[\mathbb{E}(R)|P\mathbb{E}(R)]$ pour des niveaux de τ différents.



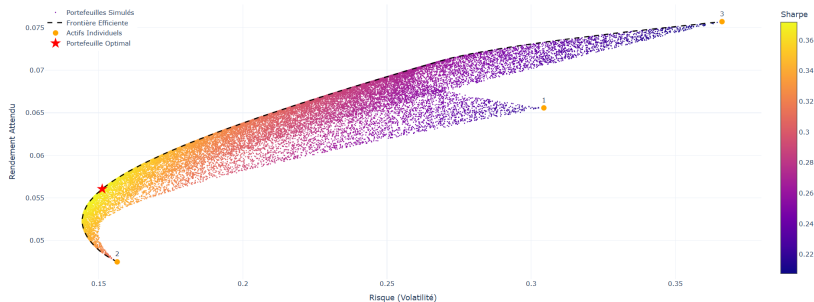
Quelques Résultats

Bar plot des poids initiaux, des poids ajustés ainsi que les poids ajustés avec une vue certaine pour tous les actifs. Ici nous avons considérés une vue sur l'actif 1 et l'actif 2.



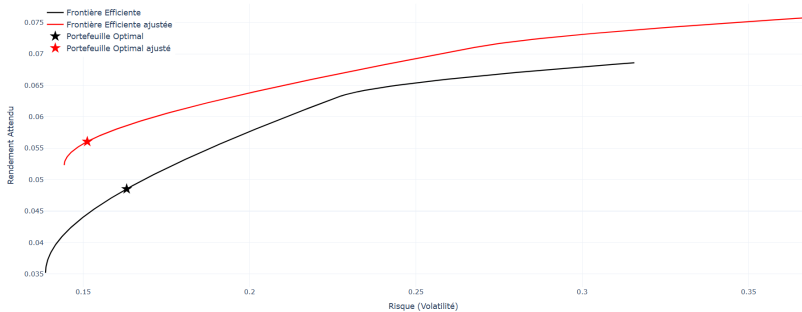
Quelques Résultats

Frontière efficiente de notre portefeuille avec 25000 simulations de portefeuilles.



Quelques Résultats

Comparaison de la frontière efficiente avant les vues et celle après incorporation des vues.



References

- ① <https://quantgestion.fr/le-modele-de-fisher-black-et-robert-litterman/>.
- ② T. Idzorek, *A step-by-step guide to the Black-Litterman model*, 2002.
- ③ S. Satchell & A. Scowcroft, *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction*, 2000.
- ④ R. Litterman & G. He, *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*, 2002.
- ⑤ W. Cheung, *The Black-Litterman model explained*, 2009.
- ⑥ J. Walters, *The Black-Litterman model in details*, 2007.

The End