

Modèle de Black-Litterman

Kerlaouezo Erwan

Janvier 2025

Le modèle de Black-Litterman est une approche avancée de la gestion de portefeuille qui combine les principes de la théorie moderne du portefeuille avec les perspectives subjectives des investisseurs. Développé par Fischer Black et Robert Litterman à la fin des années 1990, ce modèle a été conçu pour surmonter certaines des limitations des méthodes traditionnelles d'optimisation de portefeuille, telles que le modèle de Markowitz. Dans la théorie moderne du portefeuille, les investisseurs cherchent à maximiser leurs rendements tout en minimisant le risque. Cependant, les estimations de rendements futurs basées uniquement sur des données historiques peuvent être peu fiables et conduire à des portefeuilles sous-optimaux. Le modèle de Black-Litterman introduit une méthode systématique pour intégrer les opinions des investisseurs sur les rendements des actifs dans le processus d'optimisation, tout en maintenant une base solide sur les données historiques. Ci-dessous une vue d'ensemble des paramètres du modèle :

$n \in \mathbb{N}^*$	Nombre d'actifs du portefeuille : représente le nombre total d'actifs composant le portefeuille.
$k \in \mathbb{N}$	Nombre de vues : le nombre d'opinions spécifiées par l'investisseur.
$\lambda \in \mathbb{R}$	Coefficient d'aversion au risque : quantifie la tolérance de l'investisseur au risque.
$R_m \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	Rendements du marché : rendement moyen anticipé du marché, utilisé pour l'équilibre de marché.
$r_f \in \mathbb{R}$	Taux sans risque : rendement offert par un actif sans risque.
$\sigma_m \in]0, +\infty]$	Volatilité du marché : mesure la dispersion des rendements du marché autour de leur moyenne.
$R \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	Vecteur des rendements historiques des actifs : données historiques des rendements des actifs.
$\Sigma \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$	Matrice de covariance des rendements : décrit la manière dont les rendements des actifs évoluent ensemble.
$\tau \in \mathbb{R}$	Coefficient de confiance dans les rendements a priori : quantifie la confiance accordée aux rendements d'équilibre du marché.
$\Pi \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	Estimations des rendements d'équilibre : rendements représentant l'estimation d'équilibre selon les hypothèses du marché.
$P \in \mathbb{M}_{k,n}(\mathbb{R})$	Matricielle des vues : P décrit la manière dont les investisseurs spécifient leurs opinions sur les actifs.
$Q \in \mathbb{M}_{k,1}(\mathbb{R})$	Anticipations associées aux vues : Q contient les niveaux de rendement anticipés pour ces actifs.
$\Omega \in \mathbb{M}_{k,k}(\mathbb{R})$	Niveau de confiance dans les opinions : matrice diagonale décrivant l'incertitude des investisseurs sur leurs vues.

Ces paramètres permettent d'établir un équilibre subtil entre les données historiques et les prévisions subjectives des investisseurs, offrant ainsi un cadre robuste pour construire des portefeuilles optimaux dans un environnement incertain. Cette approche rend possible l'ajustement des rendements à posteriori en prenant en compte à la fois les signaux du marché et les opinions des acteurs.

1 Les Rendements d'Équilibre du Marché Π

Dans le cadre du modèle Black-Litterman, les rendements d'équilibre du marché, notés Π , jouent un rôle central. Ils représentent les rendements anticipés par le marché en l'absence de vues spécifiques des investisseurs, c'est-à-dire les rendements neutres cohérents avec la capitalisation des actifs du marché. Ces rendements sont calculés à partir du modèle d'équilibre de marché en utilisant la formule suivante :

$$\Pi = \lambda \Sigma w_m \quad (1)$$

Où $w_m \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des poids des actifs dans le portefeuille de marché, reflétant leur proportion dans l'allocation globale du marché et le coefficient d'aversion au risque λ est posé comme :

$$\lambda = \frac{\mathbb{E}(R_m) - r_f}{\sigma_m^2} \quad (2)$$

Preuve selon le CAPM:

Le modèle d'équilibre des rendements Π peut être directement interprété dans le cadre du modèle d'évaluation des actifs financiers (CAPM). Selon le CAPM, les rendements excédentaires d'équilibre sont donnés par :

$$\Pi = \beta(\mathbb{E}(R_m) - r_f)$$

Où $\beta \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur des bêtas des actifs, mesurant la sensibilité des rendements des actifs aux fluctuations du marché. Le vecteur β est défini comme :

$$\beta = \frac{\text{Cov}(\mathbb{E}(R), \mathbb{E}(R)^T w_m)}{\sigma_m^2}$$

En écrivant $\text{Cov}(\mathbb{E}(R), \mathbb{E}(R)^T) = \Sigma$, on peut alors réécrire β de la manière suivante:

$$\beta = \frac{\Sigma w_m}{\sigma_m^2}$$

Car $\text{Cov}(\mathbb{E}(R), \mathbb{E}(R)^T w_m) = \text{Cov}(\mathbb{E}(R), \mathbb{E}(R)^T) w_m$ par linéarité de la covariance. Ce qui donne la formulation donnée pour le vecteur des rendements d'équilibre Π dans (1) avec la formulation de λ dans (2). ■

Les rendements d'équilibre Π constituent un point d'ancrage crucial dans le modèle Black-Litterman. Ils garantissent que le processus d'optimisation prend en compte la structure des marchés financiers, tout en permettant aux investisseurs d'intégrer leurs opinions de manière rationnelle et quantitative. Grâce à l'utilisation du CAPM, le modèle capture également la relation fondamentale entre le risque et le rendement en fonction du comportement global du marché.

En général, pour estimer le paramètre λ , on utilise un indice de référence du marché qui reflète au mieux la composition et le comportement de notre portefeuille, tel que le CAC40 pour le marché français, le MSCI World pour une exposition globale diversifiée, ou encore le S&P 500 pour représenter le marché américain.

2 Hypothèses et Description du Modèle

Le modèle Black-Litterman repose sur des hypothèses probabilistes visant à combiner les informations de marché avec les vues des investisseurs de manière cohérente. Ce modèle s'appuie sur deux hypothèses principales concernant la distribution des rendements des actifs.

Hypothèse 1 : Les rendements à priori R suivent une loi normale centrée sur $\mathbb{E}(R)$ et de variance la matrice Σ :

$$R \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(R), \Sigma),$$

Où l'espérance des rendements à priori $\mathbb{E}(R)$ des actifs suivent une distribution normale centrée sur les rendements d'équilibre Π avec une variance proportionnelle à $\tau\Sigma$. Formellement, on a :

$$\mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(\Pi, \tau\Sigma).$$

Cette hypothèse formalise l'idée que les rendements à priori se distribuent autour des rendements d'équilibre du marché, reflétant les informations contenues dans les données historiques.

Hypothèse 2 : Les rendements anticipés $P\mathbb{E}(R)$, conditionnés par l'espérance des rendements à priori $\mathbb{E}(R)$, suivent également une distribution normale. Plus précisément:

$$P\mathbb{E}(R) \mid \mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(Q, \Omega),$$

Avec $P\mathbb{E}(R) = Q + \epsilon$, où $\epsilon \in \mathbb{R}^k$ est un bruit aléatoire normal tel que, $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \Omega)$.

Cette hypothèse illustre que les rendements anticipés sont influencés par les opinions des investisseurs, avec une certaine incertitude représentée par Ω .

2.1 Application de la formule de Bayes

L'objectif principal du modèle Black-Litterman est d'obtenir la distribution des rendements conditionnelle aux vues des investisseurs et à la confiance qu'ils accordent à ces vues. Cette distribution, notée $\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)$, représente les rendements ajustés à posteriori après avoir pris en compte les informations de marché et les opinions des investisseurs. Pour obtenir cette distribution, le modèle utilise la formule de Bayes, qui permet de combiner une distribution a priori (représentant les rendements attendus sur la base des données de marché) avec une distribution conditionnelle (représentant les rendements anticipés en fonction des vues exprimées). La formule de Bayes s'écrit :

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)) = \frac{\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R) \mid \mathbb{E}(R)) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{E}(R))}{\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R))},$$

Dans cette équation, le terme $\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R))$ représente la probabilité marginale des vues, calculée en intégrant la distribution des rendements sur l'ensemble des valeurs possibles :

$$\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R)) = \int \mathbb{P}(P\mathbb{E}(R) \mid \mathbb{E}(R)) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{E}(R)) d\mathbb{E}(R).$$

Cependant, pour une valeur donnée de $P\mathbb{E}(R)$, ce terme est constant par rapport à $\mathbb{E}(R)$. Par conséquent, il n'affecte pas la forme de la distribution a posteriori, mais seulement son facteur de normalisation. On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)) \propto \mathbb{P}(P\mathbb{E}(R) \mid \mathbb{E}(R)) \cdot \mathbb{P}(\mathbb{E}(R)) \quad (3)$$

Bien que le terme $\mathbb{P}(P\mathbb{E}(R))$ soit constant dans cette écriture, il est essentiel pour garantir que la distribution a posteriori soit bien une distribution de probabilité valide. En pratique, ce terme est utilisé pour normaliser la distribution afin que l'intégrale de la densité sur l'ensemble des rendements soit égale à 1 :

$$\int \mathbb{P}(\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)) d\mathbb{E}(R) = 1.$$

L'utilisation de la formule de Bayes permet au modèle Black-Litterman d'intégrer de manière rigoureuse les vues des investisseurs dans l'optimisation de portefeuille. Cette approche assure que les ajustements des rendements prennent en compte à la fois les données de marché et la confiance que l'on accorde aux vues exprimées. Cela permet de construire des portefeuilles robustes et cohérents avec les anticipations des investisseurs tout en restant ancrés dans les dynamiques du marché.

2.2 Distribution des rendements à posteriori

On peut maintenant montrer avec (3) qu'en considérant les densités respectives de $\mathbb{E}(R)$ et celle de $P\mathbb{E}(R) | \mathbb{E}(R)$ la distribution des rendements ajustés à posteriori est une loi normale [1]:

$$\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)], \text{Cov}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)])$$

où :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1} [(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P^T\Omega^{-1}Q], \\ \text{Cov}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)] = \Sigma + [(\tau\Sigma)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}. \end{cases}$$

Ce résultat montre que le modèle ajuste les rendements à posteriori en intégrant les informations de marché et les opinions des investisseurs. On peut résumer le modèle avec sa partie marché, investisseur et ses résultats à posteriori avec la figure ci-dessous:

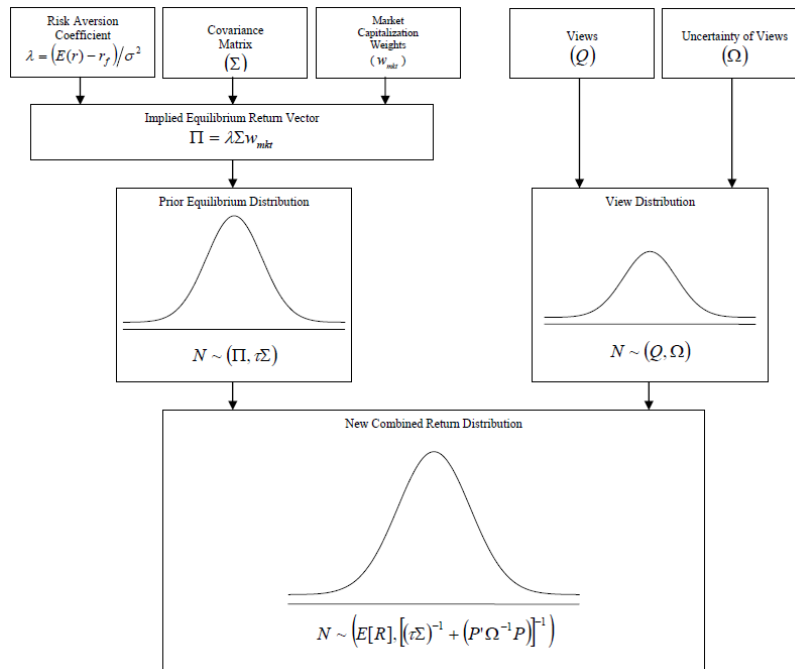


Figure 1: Schéma du modèle de Black-Litterman

3 Réécritures des équations et limites:

Avant toute chose, il est important de noter qu'au sein du calcul des rendements à posteriori dans le modèle Black-Litterman, l'inversion de la matrice Ω joue un rôle central. Cette matrice Ω représente les incertitudes associées aux vues des investisseurs, et un calcul de Ω^{-1} est nécessaire pour obtenir les rendements ajustés. Cependant, l'inversion d'une matrice peut entraîner des instabilités numériques. Pour surmonter ces problèmes d'instabilité, on utilise l'identité de Woodbury, une formule permettant de réécrire l'inverse d'une somme de matrices de manière plus stable et plus efficace. Grâce à cette identité, les expressions des rendements à posteriori $\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)$ et de leur covariance conditionnelle s'écrivent comme suit :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] = \Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P \Pi), \quad (4)$$

$$\text{Cov}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] = (1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma. \quad (5)$$

Preuve :

L'identité de Woodbury permet d'inverser des matrices de la forme $(A + BCD)$ de manière plus efficace et stable. Elle s'énonce de la manière suivante :

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Où A, B, C et D sont telles que $A \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}_{n,k}(\mathbb{R})$, $C \in \mathbb{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{M}_{k,n}(\mathbb{R})$.

Alors avec $\tau \Sigma \in \mathbb{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ la matrice de covariance des rendements a priori multipliée par le paramètre τ , $P \in \mathbb{M}_{k,n}(\mathbb{R})$ la matrice des vues des investisseurs et $\Omega \in \mathbb{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ les incertitudes que l'on a sur les vues. Nous pouvons donc appliquer cette l'identité de Woodbury à $[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1}$ pour avoir :

$$[(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} = \tau \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma.$$

L'espérance et la covariance des rendements à posteriori sont donc égaux à :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] &= [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q] \\ &= \left[\tau \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma \right] [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P^T \Omega^{-1} Q] \\ &= \tau \Sigma (\tau \Sigma)^{-1} \Pi - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} Q \\ &= \Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P \Pi). \end{aligned}$$

Pour la matrice de covariance on a :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] &= \Sigma + [(\tau \Sigma)^{-1} + P^T \Omega^{-1} P]^{-1} \\ &= \Sigma + \left[\tau \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma \right] \\ &= \Sigma + \tau \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma \\ &= (1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien les relations souhaitées. ■

L'identité de Woodbury fournit une méthode puissante pour manipuler et inverser des matrices complexes dans le cadre du modèle Black-Litterman. Grâce à cette identité, il est possible de réécrire les rendements à posteriori et leur covariance conditionnelle de manière plus efficace, garantissant ainsi une meilleure stabilité lors des calculs numériques.

3.1 Calculs des limites :

Dans cette section, nous analysons les limites des rendements à posteriori et de leur covariance en fonction des paramètres τ et Ω . Ces limites permettent de comprendre le comportement du modèle Black-Litterman dans différents cas extrêmes. Nous faisons l'hypothèse que la matrice P est inversible, c'est-à-dire qu'il existe une vue sur chaque actif, ce qui rend P carrée et non singulière.

3.1.1 Limites de l'espérance :

A partir de (4) nous pouvons maintenant exprimer les limites selon τ pour les rendements ajustés $\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]$:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[\Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P \Pi) \right] = \Pi \quad (6)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\Pi + \tau \Sigma P^T (P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P \Pi) \right] = P^{-1} Q \quad (7)$$

Lorsque $\tau \rightarrow 0$, le modèle accorde une confiance totale aux rendements d'équilibre Π , cela veut donc dire que l'on accorde que très peu de confiance dans les vues de l'investisseur ce qui fait que les vues n'ont pas d'impact sur les rendements à posteriori.

Lorsque $\tau \rightarrow \infty$, la confiance dans les rendements d'équilibre est très faible, ce qui fait que l'on accorde beaucoup d'importance dans les vues de l'investisseur et les rendements à posteriori sont donc entièrement déterminés par les vues Q , corrigés par la matrice P^{-1} .

3.1.2 Limites des Covariances :

A partir de (5) nous pouvons maintenant exprimer les limites selon Ω pour les rendements ajustés $\text{Cov}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]$:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} [\text{Cov}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] = (1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T (P \tau \Sigma P^T)^{-1} P \tau \Sigma = \Sigma \quad (8)$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} [\text{Cov}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} [(1 + \tau) \Sigma - \tau \Sigma P^T \Omega^{-1} P \tau \Sigma] = (1 + \tau) \Sigma \quad (9)$$

Lorsque $\Omega \rightarrow 0$, on considère que les vues des investisseurs sont parfaitement précises (pas d'incertitude). La covariance conditionnelle se réduit alors à Σ , la matrice de covariance des rendements a priori.

Lorsque $\Omega \rightarrow \infty$, on considère que les vues sont extrêmement incertaines (peu fiables). La covariance conditionnelle devient alors $(1 + \tau) \Sigma$, ce qui reflète l'influence minimale des vues sur la variance des rendements.

3.1.3 Remarques :

Nous pouvons remarquer que nous avons les égalités suivantes à partir de (6) et (7) :

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] \\ \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)]] \end{aligned}$$

En effet si l'on donne une entière confiance sur les rendements d'équilibre ($\tau = 0$) alors on ne porte pas d'importance aux vues de l'investisseur, ce qui peut être traduit par $\Omega = \infty$. De même nous pouvons remarquer que ne mettre aucune importance dans les rendements d'équilibre permet d'avoir une entière confiance dans les vues, ce qui se traduit par $\Omega = 0$. On peut faire les mêmes remarques pour les deux limites sur les covariances.

4 Méthode d'Optimisation de Portefeuille :

L'objectif de l'optimisation de portefeuille est de construire une allocation d'actifs qui maximise la différence entre le rendement attendu et le risque associé. Cette méthode repose sur la recherche d'une combinaison optimale d'actifs qui offre un rendement excédentaire par rapport au risque encouru.

4.1 Problème d'Optimisation

Le problème d'optimisation se formule de la manière suivante : maximiser la différence entre le rendement espéré $\mathbb{E}(R_p)$ du portefeuille et le risque mesuré par la volatilité σ_p pour avoir les poids optimaux w^* qui satisfont :

$$w^* = \operatorname{argmax} \left[w^T \mathbb{E}(R) - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w \right]$$

La solution de ce problème sans contraintes est de la forme suivante :

$$w^* = (\lambda \Sigma)^{-1} \mathbb{E}(R) \quad (10)$$

Preuve :

Pour maximiser cette expression, on résout le problème suivant :

$$\frac{\partial}{\partial w} \left(w^T \mathbb{E}(R) - \frac{\lambda}{2} w^T \Sigma w \right) = 0,$$

ce qui donne :

$$\mathbb{E}(R) - \lambda \Sigma w = 0.$$

La solution optimale est donc :

$$w^* = \frac{1}{2\lambda} \Sigma^{-1} \mathbb{E}(R).$$

■

Plus le coefficient d'aversion au risque λ est faible, plus le portefeuille est risqué, car les poids optimaux w^* dépendent inversement de λ . Si $\lambda \rightarrow 0$, le portefeuille cherche à maximiser uniquement le rendement, sans considération du risque. Si λ est élevé, le portefeuille privilégie des actifs peu volatils pour minimiser la variance.

4.2 Optimisation sous Contraintes

On peut également ajouter des contraintes aux poids w , par exemple :

- $\sum_{i=1}^n w_i = 1$: contrainte de budget (allocation totale égale à 100 %),
- $w_i \geq 0$: contrainte d'absence de vente à découvert.

Dans ce cas, la solution optimale peut être obtenue en utilisant des techniques telles que les multiplicateurs de Lagrange ou l'algorithme de projection sur l'ensemble admissible des poids.

Conclusion

La méthode d'optimisation de portefeuille qui maximise l'écart entre le rendement et le risque permet de construire un portefeuille performant en tenant compte de la relation entre le rendement espéré et la volatilité associée. En ajustant le coefficient d'aversion au risque λ , on peut moduler la prise de risque pour répondre aux objectifs spécifiques de l'investisseur. Cette approche offre un cadre rigoureux pour équilibrer rendement et risque, tout en étant extensible à des portefeuilles sous contraintes.

5 Calibration du paramètre τ :

Le paramètre τ joue un rôle clé dans le modèle Black-Litterman, car il quantifie le niveau de confiance accordé aux rendements d'équilibre basés sur les données historiques. En d'autres termes, τ détermine dans quelle mesure les rendements a priori influencent la construction du portefeuille. Il est toutefois essentiel de noter que ce paramètre impacte également les rendements ajustés à posteriori. Nous verrons qu'il est possible d'ajuster les incertitudes liées aux vues des investisseurs pour rendre les rendements à posteriori moins sensibles à la valeur de τ , bien que la variance des rendements demeure influencée par ce dernier.

5.1 τ par fréquence :

Dans la littérature, une approche courante consiste à définir τ comme l'inverse du nombre de périodes observées. Par exemple, pour un échantillon contenant n observations et des prévisions sur une année complète, on utilise :

$$\tau = \frac{252}{n}$$

où 252 correspond au nombre moyen de jours de cotation en une année sur les marchés financiers. De manière générale, la formule suivante est utilisée pour adapter τ en fonction de la fréquence d'analyse :

$$\tau = \frac{\text{fréquence}}{n}$$

où la *fréquence* peut correspondre à des données journalières, mensuelles ou annuelles, selon le contexte.

5.2 τ par vraisemblance :

Dans le modèle de Black-Litterman, on fixe généralement la constante de proportionnalité τ sur l'intervalle $[0, 1]$. On peut proposer une méthodologie de calibration statistique de la constante de proportionnalité. Ici on ne démontre pas les résultats mais ils sont bien expliqués dans [1]. En notant $\widetilde{\mathbb{E}[r]}$ la moyenne arithmétique des estimateurs empiriques des espérances de rentabilités, on obtient :

$$\widetilde{\mathbb{E}[r]} \sim \mathcal{N}\left(\bar{\pi}, \frac{1}{k}\Sigma\right),$$

Où $\bar{\pi}$ désigne l'estimateur empirique des rentabilités d'équilibre π .

Ainsi, pour un échantillon d'observations $(\widetilde{\mathbb{E}[r]}_1, \dots, \widetilde{\mathbb{E}[r]}_p) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})^p$, sous l'hypothèse que les variables $(\widetilde{\mathbb{E}[r]}_i)_{i \in [1,p]}$ sont indépendantes, l'application de la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance permet d'obtenir, pour Σ fixé et $\bar{\pi} = \pi$, une approximation du paramètre $k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, et ainsi de déterminer la valeur de la constante de proportionnalité $\tau = \frac{1}{k}$. L'estimateur du maximum de vraisemblance $k^* \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ est défini par l'expression :

$$k^* = \operatorname{argmax}_{k \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}} \left[\frac{p}{2} [\ln(k) - \ln(\det(\Sigma)) - n \ln(2\pi)] - k \sum_{i=1}^p \left(\widetilde{\mathbb{E}[r]}_i - \pi \right)^T \Sigma^{-1} \left(\widetilde{\mathbb{E}[r]}_i - \pi \right) \right]$$

En pratique on utilisera la première méthode car nous verrons que l'on peut rendre les rendements à posteriori insensible à la constante τ .

6 Calibration de Ω :

Après avoir réécrit les formules d'espérance et de covariance pour les rendements à posteriori, et déterminé les limites de ces paramètres dans différents cas extrêmes, il est pertinent de s'intéresser à la calibration du paramètre du modèle qui est le plus difficile à quantifier, la matrice Ω , représentant les incertitudes sur les vues des investisseurs. La complexité de la calibration de Ω réside dans le fait qu'elle doit refléter de manière cohérente le niveau de confiance que l'on accorde aux vues, tout en tenant compte des caractéristiques statistiques des rendements des actifs. Contrairement aux paramètres τ ou Σ qui peuvent être estimés à partir des données de marché historiques, Ω repose sur des informations subjectives qui varient selon les investisseurs et les conditions du marché. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour estimer Ω :

1. **Approche basée sur la variance des vues** : La méthode la plus simple consiste à définir $\Omega = \text{Diag}(P\Sigma P^T)$, en prenant uniquement les variances projetées sur les vues. Cette approche suppose que les covariances entre vues sont nulles.
2. **Méthode d'Idzorek** : Cette méthode propose d'attribuer un niveau de confiance implicite à chaque vue, en associant une probabilité de réalisation aux prévisions Q . Ω est alors calibrée en fonction de ces niveaux de confiance.
3. **Méthode de Walters** : Ici, Ω est définie proportionnellement à $\tau\Sigma$. Cette approche permet de neutraliser l'influence du paramètre τ sur les rendements à posteriori, tout en conservant son effet sur la variance.

La calibration de Ω joue un rôle crucial dans l'application du modèle Black-Litterman. Une bonne estimation de cette matrice permet d'équilibrer les données historiques et les vues subjectives des investisseurs de manière optimale. Cependant, une calibration imprécise peut entraîner des biais importants dans la construction du portefeuille et une instabilité des résultats. L'utilisation d'approches adaptées, telles que celles d'Idzorek ou de Walters, offre des solutions pour améliorer la robustesse du modèle et mieux intégrer les incertitudes liées aux vues.

6.1 Méthode d'Idzorek :

La méthode d'Idzorek propose une approche innovante pour calibrer la matrice des incertitudes Ω en s'appuyant sur des niveaux de confiance implicites spécifiés par l'investisseur pour chaque vue. Contrairement aux méthodes classiques, cette approche permet d'associer une incertitude quantitative à chaque prévision en fonction de la confiance que l'on a dans sa réalisation. Considérons une situation où l'on dispose d'une seule vue parfaitement précise, c'est-à-dire avec une incertitude nulle ($\Omega = 0$). Pour chaque vue $i \in \{1, \dots, k\}$, les rendements à posteriori associés à cette vue certaine sont notés $\mathbb{E}(R_{i,100\%})$ et se calculent de la manière suivante :

$$\mathbb{E}(R_{i,100\%}) = \Pi + \tau \Sigma P_{i,n}^T (P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T)^{-1} (Q_i - P_{i,n} \Pi) \quad (11)$$

Où :

- $P_{i,n} \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R})$: vecteur de dimension $1 \times n$ représentant la vue sur les actifs,
- $Q_i \in \mathbb{M}_{1,1}(\mathbb{R})$: réalisation anticipée pour la vue i ,
- $\mathbb{E}(R_{i,100\%}) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: vecteur des rendements à posteriori de dimension $n \times 1$.

À partir des rendements $\mathbb{E}(R_{i,100\%})$ obtenus avec une vue certaine, on peut déterminer les poids optimaux du portefeuille en utilisant une optimisation moyenne-variance sans contraintes :

$$w_{i,100\%} = (\lambda \Sigma)^{-1} \mathbb{E}(R_{i,100\%})$$

Pour mesurer l'impact maximal qu'une vue certaine peut avoir sur la composition du portefeuille, on calcule la différence entre les poids optimaux associés à la vue certaine et les poids initiaux du portefeuille :

$$D_i = w_{i,100\%} - w_m$$

Où D_i représente l'écart maximal entre les poids du portefeuille avant et après la prise en compte de la vue i . Si la vue est parfaitement fiable ($\Omega \rightarrow 0$), cet écart correspond au changement maximal possible dans la répartition du portefeuille. Cela reflète l'impact direct de la confiance dans la vue sur les décisions d'allocation.

Dans le cadre de la calibration des incertitudes associées aux vues des investisseurs, il est nécessaire de définir les poids cibles \hat{w}_i pour chaque vue i . Ces poids cibles représentent la répartition optimale du portefeuille lorsque l'on prend en compte la confiance de l'investisseur dans sa prévision :

$$\hat{w}_i = w_m + D_i \cdot C_i \quad (12)$$

Où $C_i \in [0, 1]$: niveau de confiance spécifié par l'investisseur concernant la vue i . Le niveau de confiance C_i représente la probabilité de réalisation du rendement anticipé Q_i . Alors à partir de (12) on définit ce niveau comme :

$$C_i = \frac{\hat{w}_i - w_m}{w_{i,100\%} - w_m} \quad (13)$$

Une fois les poids cibles \hat{w}_i obtenus, le problème consiste à minimiser l'écart quadratique entre les poids cibles et les poids réels du portefeuille w :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \omega_i^* = \underset{\omega_i > 0}{\operatorname{argmin}} \sum (\hat{w}_i - w)^2$$

Le vecteur w représente la répartition effective des actifs après prise en compte des incertitudes et se calcule par :

$$w = (\lambda \Sigma)^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} + P_{i,n}^T \omega_i^{-1} P_{i,n}]^{-1} [(\tau \Sigma)^{-1} \Pi + P_{i,n}^T \omega_i^{-1} Q_i]$$

Après avoir défini les poids cibles \hat{w}_i pour chaque vue et obtenu les poids optimaux en minimisant l'écart quadratique entre ces poids cibles et la répartition effective des actifs, il est nécessaire de répéter ces opérations pour l'ensemble des k vues. Ainsi, nous obtenons la matrice $\Omega = \operatorname{Diag}(\omega_1, \dots, \omega_k)$, qui est calibrée en fonction des niveaux de confiance spécifiés par l'investisseur pour chacune de ses vues.

6.1.1 Remarques sur la méthode d'Idzorek

Cette méthode présente l'avantage de neutraliser l'effet du paramètre τ sur l'espérance des rendements ajustés à posteriori. En d'autres termes, la valeur de τ n'a plus d'impact sur la moyenne des rendements à posteriori, ce qui garantit une certaine robustesse du modèle indépendamment de la calibration précise de ce paramètre. Cependant, il est essentiel de noter que τ continue d'influencer la variance des rendements à posteriori, illustrant ainsi l'importance de calibrer convenablement ce paramètre pour éviter une sous-estimation ou une surestimation du risque. La méthode des poids cibles permet d'intégrer de manière progressive les vues des investisseurs dans l'allocation du portefeuille en fonction de leur niveau de confiance C_i . Cette approche flexible permet de moduler l'impact des vues en fonction de leur fiabilité perçue, offrant ainsi une meilleure personnalisation des allocations de nos actifs.

6.1.2 Compréhension des D_i

Pour illustrer que les D_i représentent bien les écarts maximaux entre les poids initiaux w_m et les poids ajustés $w(p)$, nous traçons ci-dessous deux graphes qui montrent l'évolution de ces différences en fonction du niveau de confiance $p \in [0, 1]$ accordé aux vues des investisseurs. Le graphique de gauche montre, pour chaque actif $i \in \{1, \dots, n\}$, les différences normalisées $|w_m^i - w^i(p)|$ entre les poids initiaux et les poids ajustés. Ces différences sont normalisées par l'écart maximal observé pour tous les p , afin de comparer l'ampleur des ajustements selon le niveau de confiance p . Le graphique de droite présente une vue 3D de la norme du vecteur des différences $|w_m - w(p)|$ pour l'ensemble des actifs du portefeuille, également normalisée par l'écart maximal observé sur l'intervalle $p \in [0, 1]$. Cela permet de visualiser l'impact global des ajustements. Pour cette analyse, nous considérons un portefeuille composé de trois actifs : BNP, AXA et Orange. Une vue est spécifiée uniquement sur BNP et AXA, ce qui signifie que leurs poids sont ajustés en fonction du niveau de confiance p , tandis que le poids de l'actif Orange reste inchangé.

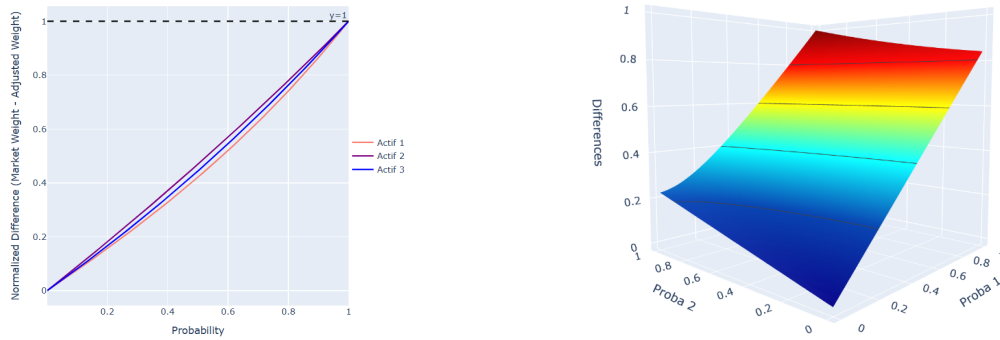


Figure 2: Évolution des différences entre les poids initiaux et ajustés

Ces deux graphes mettent en évidence un point fondamental de la méthode : l'écart maximal entre les poids initiaux du portefeuille (w_m) et les poids ajustés ($w^i(p)$) est atteint lorsque l'on accorde une confiance totale ($C_i = 1$, soit 100% de confiance) dans les vues des investisseurs. Dans les deux cas, on observe que lorsque p tend vers 1, c'est-à-dire lorsque l'on place une confiance totale dans la vue i , l'écart atteint sa valeur maximale $D_i = w_{i,100\%} - w_m$. Cela reflète le fait que, dans ce scénario, la répartition du portefeuille suit entièrement les prévisions associées à la vue et s'écarte donc le plus possible de la répartition initiale d'équilibre. Cette observation souligne plusieurs éléments importants:

- **Modulation des poids selon le niveau de confiance** : Lorsque la confiance C_i diminue ($p \rightarrow 0$), la répartition des poids tend à se rapprocher des poids initiaux w_m . Cela signifie que l'influence des vues devient négligeable lorsque l'on accorde peu de confiance aux prévisions.
- **Impact maximal des vues fiables** : Lorsque la confiance est totale ($p = 1$), les poids ajustés se calquent entièrement sur les prédictions des vues, reflétant l'idée que des vues considérées comme parfaitement fiables doivent avoir un impact maximal sur l'optimisation.

Ces résultats confirment l'intuition selon laquelle plus la confiance dans une vue est élevée, plus l'ajustement des poids est important. En revanche, une faible confiance maintient le portefeuille proche de la répartition d'équilibre, minimisant ainsi l'impact des vues potentiellement erronées. Cette capacité à ajuster l'influence des vues selon leur fiabilité perçue constitue l'un des principaux atouts de la méthode, garantissant à la fois flexibilité et robustesse dans la construction du portefeuille.

6.2 Méthode de Walters

La méthode de Walters propose de calibrer la matrice Ω en supposant que les incertitudes sur les vues des investisseurs sont proportionnelles à la constante τ . Cette approche repose sur l'idée que le niveau d'incertitude associé aux vues est directement lié aux rendements d'équilibre, en prenant en compte la structure de la matrice de covariance Σ . La matrice Ω est définie comme une matrice diagonale $\Omega = \text{Diag}(\omega_1, \dots, \omega_k)$, où chaque ω_i correspond à l'incertitude sur la vue i . Selon la méthode de Walters, ces éléments diagonaux sont donnés par :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \omega_i = \alpha_i P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T,$$

Où $P_{i,n} \in \mathbb{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est un vecteur représentant le portefeuille de la vue i et $\alpha_i \in \mathbb{R}$ le coefficient de proportionnalité pour la vue i . Les coefficients α_i dépendent du niveau de confiance C_i défini dans la méthode d'Idzorek. Plus précisément :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \alpha_i = \frac{1}{C_i} - 1.$$

Preuve :

Si l'on suppose que $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad \omega_i = \alpha_i P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T$ alors le poids cible selon la vue i obtenu sans contrainte est obtenu grâce à (4) et (10) avec :

$$\hat{w}_i = (\lambda \Sigma)^{-1} \left[\Pi + \tau \Sigma P_{i,n}^T \left((1 + \alpha_i) P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T \right)^{-1} (Q_i - P_{i,n} \Pi) \right]$$

Et en notant $w_m^i = (\lambda \Sigma)^{-1} \Pi$ on obtient alors :

$$\begin{aligned} \hat{w}_i &= w_m^i + (\lambda \Sigma)^{-1} \tau \Sigma P_{i,n}^T \left((1 + \alpha_i) P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T \right)^{-1} (Q_i - P_{i,n} \Pi) \\ &= w_m^i + \frac{1}{1 + \alpha_i} \left[(\lambda \Sigma)^{-1} \tau \Sigma P_{i,n}^T \left((1 + \alpha_i) P_{i,n} \tau \Sigma P_{i,n}^T \right)^{-1} (Q_i - P_{i,n} \Pi) + \Pi - \Pi \right] \\ &= w_m^i + \frac{1}{1 + \alpha_i} [w_{i,100\%} - w_m^i] \end{aligned}$$

Cette dernière égalité amène à l'expression des α_i suivante :

$$\frac{1}{1 + \alpha_i} = \frac{\hat{w}_i - w_m^i}{w_{i,100\%} - w_m^i}$$

On a donc en se basant sur la méthode d'Idzorek et l'équation (13), il vient alors que :

$$\alpha_i = \frac{1}{C_i} - 1.$$

■

6.2.1 Insensibilité au paramètre τ

La méthode de Walters permet de neutraliser l'effet de τ sur les rendements ajustés à posteriori lorsque la matrice P est inversible. En d'autres termes, le paramètre τ n'affecte plus l'espérance des rendements ajustés, ce qui assure une certaine stabilité dans la prise en compte des vues. Voici la démonstration à la prochaine page :

Preuve :

$$\mathbb{E} [\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] = \Pi + \tau \Sigma P^T (\Omega + P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P\Pi).$$

En remplaçant Ω par sa définition :

$$\mathbb{E} [\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] = \Pi + \tau \Sigma P^T ((1 + \alpha) P \tau \Sigma P^T)^{-1} (Q - P\Pi).$$

On simplifie :

$$\mathbb{E} [\mathbb{E}(R) \mid P\mathbb{E}(R)] = \Pi + \frac{1}{1 + \alpha} (P^{-1}Q - \Pi).$$

Ainsi, l'espérance des rendements à posteriori dépend uniquement du niveau de confiance α et des vues Q , indépendamment de τ . Cela garantit que l'ajustement des rendements est stable, quelle que soit la calibration de τ . ■

6.2.2 Récapitulatif pour la méthode de Walters

La méthode de Walters est un outil puissant pour ajuster les incertitudes des vues tout en neutralisant l'impact du paramètre τ sur les rendements ajustés. En combinant les définitions d'Idzorek et les coefficients de confiance α_i , elle permet d'intégrer des vues subjectives tout en assurant une robustesse dans l'optimisation du portefeuille. Toutefois, la variance restant sensible à τ , il est indispensable de calibrer ce paramètre avec précision pour garantir une évaluation réaliste du risque.

7 Mise en application de la théorie

Après avoir présenté les principes fondamentaux du modèle de Black-Litterman, nous pouvons désormais passer à leur mise en pratique afin d'examiner si les résultats numériques obtenus sont en accord avec les prédictions théoriques. Cette étape est cruciale, car elle permet de valider l'application des formules dérivées précédemment et de s'assurer que les ajustements apportés aux rendements, en fonction des vues des investisseurs et du niveau de confiance accordé à celles-ci, respectent le comportement attendu. Dans un cadre théorique, les résultats du modèle doivent satisfaire des propriétés clés, telles que :

- La convergence des rendements ajustés à posteriori vers les rendements d'équilibre Π lorsque le paramètre de proportionnalité τ tend vers 0.
- La convergence des rendements ajustés vers les vues des investisseurs Q lorsque τ tend vers l'infini, sous l'hypothèse d'une matrice P inversible.
- La dépendance de la variance des rendements à posteriori à la variable τ .
- La modulation progressive des poids en fonction du niveau de confiance accordé aux vues, illustrant l'impact des prévisions sur l'optimisation du portefeuille.

Les simulations numériques permettent de vérifier la cohérence des calculs et de quantifier l'impact des paramètres du modèle, tels que τ et Ω , sur les rendements à posteriori.

7.1 Neutralisation de τ dans la méthode d'Idzorek

Après avoir exposé le fonctionnement de la méthode d'Idzorek, rappelons que cette approche neutralise l'impact de la constante de proportionnalité τ sur l'espérance des rendements ajustés à posteriori. Contrairement à la méthode de Walters, où il est possible de simplifier les équations analytiquement pour mettre en évidence cet effet, la méthode d'Idzorek nécessite une vérification empirique à l'aide de simulations. Les résultats suivants sont obtenus à partir des paramètres suivants :

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.0678 \\ 0.0289 \\ 0.0798 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0.010 \\ 0.054 \\ 0.042 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

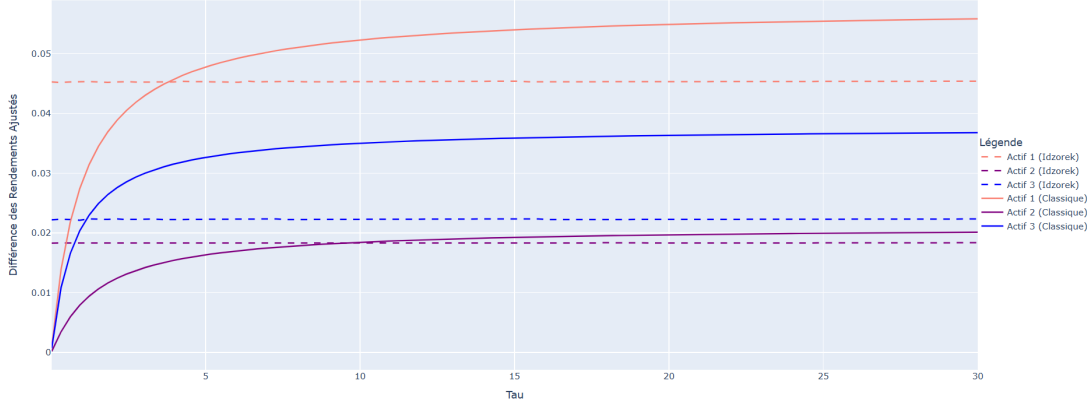


Figure 3: Évolution de $|\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)] - \Pi|$ selon le paramètre τ

Ce graphique montre clairement qu'en utilisant la méthode d'Idzorek et en considérant $\Omega = \text{Diag}(P\Sigma P^T)$, la constante τ est effectivement neutralisée dans le calcul de l'espérance des rendements à posteriori. Cela confirme également le résultat théorique qui est que $\lim_{\tau \rightarrow 0} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = \Pi$, qui reflète la confiance totale dans les données du marché.

Par ailleurs, la pertinence du résultat $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)]] = Q$ est également démontrée.

En prenant $P = I_3$, où I_3 est la matrice identité, la matrice P devient inversible avec $P^{-1} = I_3$, ce qui montre que l'espérance des rendements à posteriori converge vers les vues Q . La figure suivante illustre ce comportement :

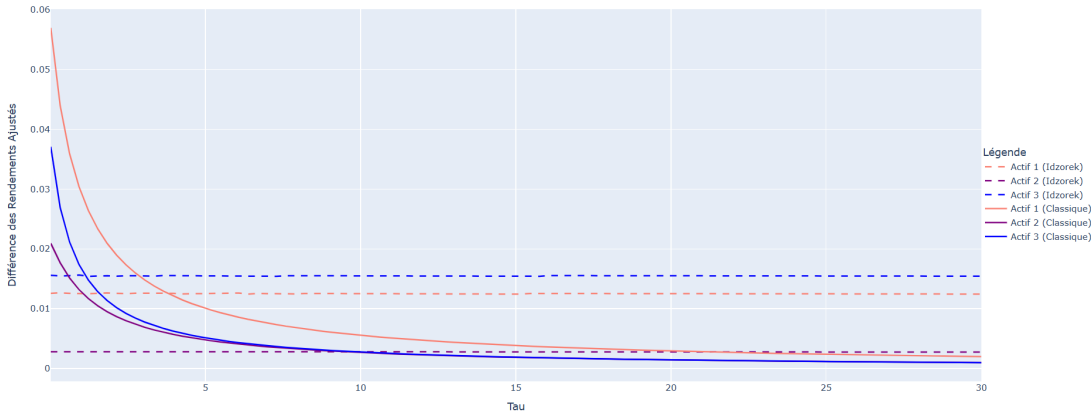


Figure 4: Évolution de $|\mathbb{E}[\mathbb{E}(R) | P\mathbb{E}(R)] - Q|$ selon le paramètre τ

Ce graphique confirme que lorsque τ tend vers l'infini, l'espérance des rendements ajustés se rapproche des vues des investisseurs.

7.1.1 Influence de τ sur la Variance

Bien que la constante τ ne modifie pas l'espérance des rendements à posteriori dans le cadre de la méthode d'Idzorek, elle conserve une influence notable sur la variance de ces rendements. En reprenant les équations (8) et (9), on observe que lorsque Ω tend vers l'infini, c'est-à-dire en présence d'une incertitude totale sur les vues des investisseurs, la covariance conditionnelle converge vers $(1 + \tau)\Sigma$. Cela signifie que la variance des rendements ajustés dépend linéairement de τ , ce qui reflète l'impact de ce paramètre sur la dispersion des rendements. Intuitivement, plus τ est grand, plus la confiance dans les rendements d'équilibre initiaux diminue, augmentant ainsi l'amplitude des fluctuations potentielles des rendements à posteriori. À l'inverse, une faible valeur de τ réduit cette

variance en resserrant les prévisions autour des rendements d'équilibre du marché. Cette dépendance met en évidence la dualité du rôle de τ : bien qu'il soit neutralisé pour le calcul des espérances ajustées grâce à la méthode d'Idzorek, il demeure un paramètre essentiel dans l'évaluation du risque global du portefeuille. La figure ci-dessous illustre cette relation en présentant l'évolution de la variance conditionnelle des rendements en fonction des différentes valeurs de τ , soulignant ainsi que ce paramètre agit comme un multiplicateur de la matrice de covariance Σ , amplifiant ou réduisant les incertitudes selon la calibration choisie.

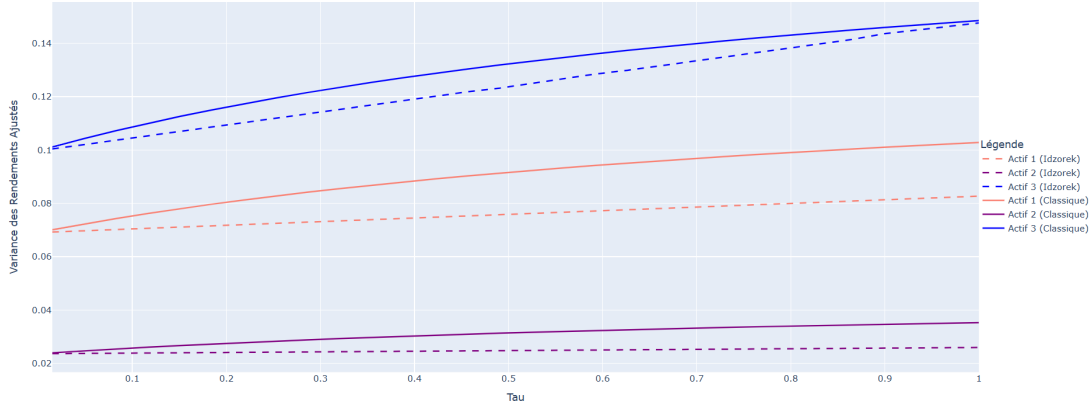


Figure 5: Évolution de la variance conditionnelle selon le paramètre τ

Ce graphe illustre que la variance augmente avec τ , traduisant une incertitude accrue autour des rendements ajustés à posteriori. Cela souligne l'importance de calibrer τ de manière appropriée pour éviter une sous-estimation ou une surestimation du risque dans l'allocation du portefeuille.

7.1.2 Exemple en supprimant une vue

En retirant la troisième vue, nous nous concentrons sur l'impact des deux premières vues sur la répartition des poids dans le portefeuille, ce qui permet d'observer l'évolution des poids des actifs 1 et 2 en fonction du niveau de confiance accordé à ces vues, tout en laissant l'actif 3 inchangé en l'absence de prévision spécifique.

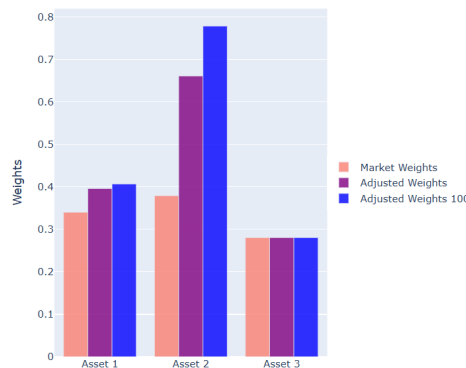


Figure 6: Évolution des poids des actifs en fonction des vues sur les actifs 1 et 2

Ce graphique illustre le mécanisme d'ajustement des poids dans le modèle de Black-Litterman. Plus la confiance dans les vues augmente, plus les poids s'écartent de la composition initiale du portefeuille pour s'aligner sur les anticipations exprimées par l'investisseur. En l'absence de vue sur l'actif 3, son poids reste inchangé, ce qui reflète l'impartialité du modèle pour les actifs sans vues. Cela montre l'importance de calibrer correctement les niveaux de confiance pour obtenir un portefeuille qui reflète fidèlement les préférences de l'investisseur sans augmenter exagérément le risque.

7.1.3 Frontière efficiente

La frontière efficiente représente l'ensemble des portefeuilles optimaux offrant le meilleur rendement possible pour un niveau de risque donné. Dans le cadre du modèle de Black-Litterman, cette frontière peut être tracée avant et après l'intégration des vues des investisseurs, afin d'évaluer l'impact des ajustements apportés à l'espérance des rendements. Le graphique suivant illustre la frontière efficiente du portefeuille après intégration des vues, basé sur les rendements implicites du marché.

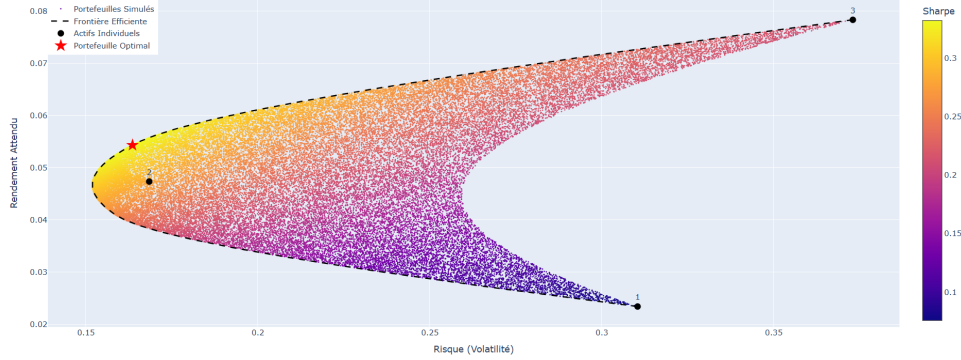


Figure 7: Frontière efficiente pour le portefeuille présenté.

Nous observons ici une frontière typique correspondant aux choix optimaux de portefeuilles pour différents niveaux de risque. Cette courbe sert de référence pour évaluer les effets des ajustements dus aux vues.

Le second graphique compare la frontière efficiente initiale à celle obtenue après l'intégration des vues des investisseurs. Cette comparaison met en évidence le déplacement de la courbe dû à l'ajustement des rendements à posteriori, permettant de visualiser les améliorations potentielles en termes de rendement pour un même niveau de risque.

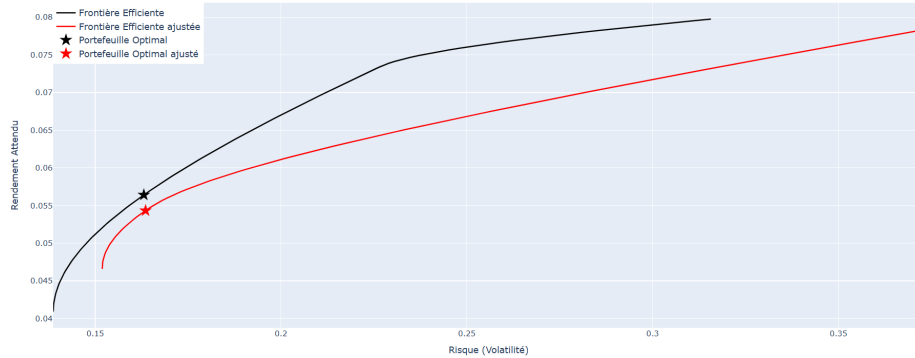


Figure 8: Comparaison des frontières efficientes pour les rendements implicites et ajustés après les vues.

Ce deuxième graphique illustre l'influence des vues des investisseurs sur la composition optimale du portefeuille. Lorsqu'elles sont cohérentes et crédibles, les vues peuvent déplacer la frontière efficiente vers le haut, traduisant une augmentation du rendement espéré pour un même niveau de risque, ce qui reflète une amélioration du portefeuille après l'intégration des anticipations subjectives. Cependant, dans cet exemple, les vues imposent une sous-performance pour les actifs 1 et 3. En conséquence, le modèle de Black-Litterman ajuste les poids en réduisant les rendements espérés du portefeuille optimal, soulignant ainsi la capacité du modèle à refléter fidèlement les prévisions pessimistes dans l'optimisation globale.

8 Bibliographie

1. <https://quantgestion.fr/le-modele-de-fisher-black-et-robert-litterman/>.
2. T. Idzorek, *A step-by-step guide to the Black-Litterman model*, 2002.
3. S. Satchell & A. Scowcroft, *A demystification of the Black-Litterman model: Managing quantitative and traditional portfolio construction*, 2000.
4. R. Litterman & G. He, *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*, 2002.
5. W. Cheung, *The Black-Litterman model explained*, 2009.
6. J. Walters, *The Black-Litterman model in details*, 2007.