ESPACES PRÉHILBERTIENS

Trois semaines: du lundi 6 février au vendredi 10 mars 2023

Table des matières

Contexte

L'étude qui a été faite jusqu'à présent des espaces vectoriels a laissé un aspect de côté : la notion de «distance» entre deux vecteurs. On comprend tous cette notion dans l'espace physique à trois dimensions et on imagine facilement qu'elle s'étend à d'autres espaces. Dans de nombreuses applications de l'algèbre linéaire, on en a effectivement besoin.

Citons quelques exemples :

— En analyse de données statistiques, on récolte des mesures de plusieurs variables aléatoires X, Y, Z, etc. Les statisticiens cherchent à en déduire les lois de ces variables et à mettre en évidence des relations entre elles. Peut-on par exemple trouver une relation de la forme $Z = aX = bY + c$? Dans la pratique, il n'arrive jamais qu'une relation de ce type soit vérifiée de façon exacte. Il faut toujours ajouter un terme d'erreur et on cherche à quantifier cette erreur. On détermine $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ de façon à minimiser la distance de Z à $aX + bY + c$.
On pourra par exemple définir cette distance comme étant l'espérance de l'erreur quadratique $\mathrm{E}\left((Z - aX - bY - c)^2\right)$.

— Un signal temporel est une fonction $t \longmapsto s(t)$ qui est défini à chaque t comme la valeur d'une grandeur physique donnée à cet instant. On verra plus tard dans le semestre que, sous certaines conditions, on peut l'écrire comme une somme infinie de sinusoïdes : c'est la représentation de Fourier du signal. Cette représentation est très utilisée pour analyser ou transformer le signal. Mais dans un programme informatique, cette somme infinie est remplacée par une somme finie. Quantifier l'erreur qui en résulte revient à calculer une distance entre le fonction s et la somme finie de sinusoïdes.

Dans l'espace physique, la distance entre deux vecteurs est définie à l'aide de la notion de produit scalaire. Dans d'autres espaces, on peut aussi définir des produits scalaires qui, de la même façon, permettent de définir des distances.

Attendus

Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires

— Savoir reconnaître un produit scalaire.
— Représenter une forme bilinéaire par une matrice.
— Exprimer une forme bilinéaire symétrique en fonction des coordonnées des vecteurs dans une autre base.
— Utiliser les théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Minkowsi pour démontrer des inégalités.

Orthogonalité

— Construire une base orthogonale ou orthonormée (procédé de Gram-Schmidt).
— Savoir analyser une forme bilinéaire symétrique par diagonalisation de sa matrice.

Projection orthogonale

— Connaître le théorème du supplémentaire orthogonal.
— Savoir déterminer une projection orthogonale sur un sev F.
— Savoir construire puis exploiter une base orthonormée d'un sev F pour déterminer la projection orthogonale sur F.
— Déterminer la distance d'un vecteur u à un sev F.

1 Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires

1.1 Résumé

Un ***produit scalaire*** sur un espace E est une application $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie certaines propriétés de base. Un ***espace préhilbertien*** est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Un ***espace euclidien*** est un espace vectoriel de ***dimension finie*** muni d'un tel produit scalaire. Ce dernier permet alors de structurer l'espace E, d'une part à travers la notion d'orthogonalité entre vecteurs, d'autre part en définissant une «norme» sur E, et donc une «distance» entre les vecteurs de E.

Plus précisément, les propriétés de base qu'un produit scalaire φ doit vérifier sont les suivantes :

1. pour tout $u_0 \in E$, l'application $v \longmapsto \varphi(u_0, v)$ est linéaire et de même, pour tout $v_0 \in E$, l'application $u \longmapsto \varphi(u, v_0)$ est linéaire ;
2. pour tout $(u, v) \in E^2$, $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$;
3. pour tout $u \in E$, $\varphi(u, u) \geqslant 0$ et $\varphi(u, u) = 0 \Longrightarrow u = 0_E$.

Les propriétés 1 et 2 définissent une «forme bilinéaire symétrique», la dernière propriété une forme bilinéaire symétrique «définie positive». La norme d'un vecteur u est alors $\|u\| = \sqrt{\varphi(u, u)}$ et la distance entre deux vecteurs u et v est la norme $\|u - v\|$.

Considérons par exemple le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$ défini pour tout $\big(u{=}(x_1, y_1, z_1),\ v = (x_2, y_2, z_2)\big) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Il est facile de vérifier que φ est bien un produit scalaire. De plus, si on note U et V les matrices colonnes constituées des coordonnées et u et v dans la base canonique, alors

$$\varphi(u, v) \;=\; {}^tUV = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

De façon générale, quand un espace E admet une base $\mathcal{B}$, toute forme bilinéaire (et donc en particulier tout produit scalaire) peut s'exprimer sous la forme d'un produit matriciel [1]

$$\varphi(u, v) \;=\; {}^tUAV$$

où les colonnes U et V sont constituées des coordonnées de u et v dans la base $\mathcal{B}$. A est la matrice de la forme bilinéaire dans cette base. Si de plus φ est une forme bilinéaire ***symétrique***, alors la matrice A est ***symétrique*** elle aussi.

1.2 Exercices

Exercice 1.1

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, on considère les trois fonctions φ_1, φ_2 et φ_3 de E^2 dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $\big(u{=}(x_1, y_1), v{=}(x_2, y_2)\big) \in E^2$ par :

$$\varphi_1(u, v) = x_1x_2{+}x_1y_2{+}2y_1x_2{+}y_1y_2, \quad \varphi_2(u, v) = x_1y_2{+}y_1x_2 \quad \text{et} \quad \varphi_3(u, v) = x_1x_2{-}x_1y_2{-}y_1x_2{+}3y_1y_2$$

Pour chacune d'entre elles :

1. Montrer que φ est une forme bilinéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
2. S'agit-il d'un produit scalaire sur E ?
3. En cas de réponse positive, exprimer $\|u\|$ pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 1.2

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit la forme bilinéaire φ pour tout $(P, Q) \in E^2$ par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

1. Plus exactement, le résultat de ce produit matriciel est une matrice de dimensions 1×1, dont l'unique coefficient est $\varphi(u, v)$.

2. Déterminer la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique de E.
3. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in E$. Donner une expression matricielle de $\|P\|^2$.
4. **(Travail personnel)** Reprendre les questions précédentes avec

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 1.3

Soient $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace préhilbertien, $(u, v, w, x) \in E^4$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Développer $\langle au + bv\,, cw + dx\rangle$
2. Développer $\|au + bv\|^2$.
3. L'application $u \longmapsto \|u\|$ est-elle linéaire ?
4. Discuter la propriété :

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle u\,, v\rangle = 0 \iff u = 0_E \text{ ou } v = 0_E$$

Exercice 1.4 *Changement de base*

On considère la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ définie pour tout $\big(u{=}(x_1, y_1, z_1), v{=}(x_2, y_2, z_2)\big) \in E^2$ par

$$\varphi(u, v) = 5x_1x_2 + 6y_1y_2 + 3z_1z_2 - 5x_1y_2 - 5y_1x_2 - 3y_1z_2 - 3z_1y_2 + 2x_1z_2 + 2z_1x_2$$

1. Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que cette forme bilinéaire est symétrique.
2. Soit la famille de E suivante : $\mathcal{B}' = \big(\varepsilon_1{=}(1, 1, 0), \varepsilon_2{=}(1, 1, 1), \varepsilon_3{=}(0, 1, 1)\big)$.
   Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et donner la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de φ dans cette base $\mathcal{B}'$.
   En déduire une expression de $\varphi(u, v)$ en fonctions des coordonnées de u et de v dans $\mathcal{B}'$.
4. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 1.5

Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère le produit scalaire défini pour tout $(P, Q) \in E^2$ par :

$$\langle P\,, Q\rangle = \int_{0}^{2} P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

Exprimer $\langle P\,, Q\rangle$ en fonction des coordonnées de P et de Q :

1. dans la base canonique $\mathcal{B} = \big(1, X, X^2\big)$,
2. dans la base $\mathcal{B}' = \big(1, (X-1), (X-1)^2\big)$.

Exercice 1.6

Soient $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace préhilbertien et $\|.\|$ la norme associée à $\langle\,,\rangle$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $(u, v) \in E^2$, on pose

$$\varphi(u, v) = \big\langle f(u)\,, f(v)\big\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 1.7

Dans l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, on considère les vecteurs

$$u = (2, 1) \qquad \text{et} \qquad v = (1, 3)$$

1. Représenter graphiquement $\langle u \,, v \rangle$ et expliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Expliquer géométriquement l'inégalité de Minkowski.

Exercice 1.8

On considère $E = \mathcal{C}\big([0, 1]\big)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles continues sur $[0, 1]$ et l'application $\varphi \,:\, E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que pour tout $f \in E$,
$$\left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 \leqslant \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$
3. Soit $f \in E$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que
$$f^2(x) \leqslant \int_0^1 \big(f'(x)\big)^2\,\mathrm{d}x$$

2 Orthogonalité

2.1 Résumé

Dans un espace préhilbertien, deux vecteurs u et v sont dits ***orthogonaux*** si leur produit scalaire est nul. Quand il s'agit de l'espace physique de dimension 2 ou 3 muni du produit scalaire canonique, les vecteurs sont alors perpendiculaires. Il faut garder à l'esprit cette vision géométrique : c'est elle qui permet de développer des intuitions, qu'on peut ensuite formaliser quand on travaille dans un autre espace.

Par exemple, le théorème de Pythagore est vérifié dans tout espace préhilbertien, mais se comprend mieux quand on le représente géométriquement.

La notion de base orthogonale, ou même orthonormée, se généralise elle aussi à tout espace euclidien. Construire une telle base facilite de nombreux calculs. Par exemple, le produit scalaire entre deux vecteurs s'exprime de façon simple à partir des coordonnées des vecteurs dans une telle base. On verra plus tard que la projection orthogonale d'un vecteur sur un sev F se détermine facilement si on dispose d'une base orthonormée de F.

Enfin, le théorème spectrale énonce que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, et qu'on peut trouver une base propre orthonormée vis-à-vis du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Si cette matrice symétrique définit un produit scalaire φ, cette base propre est à la fois orthonormée pour le produit scalaire canonique, et orthogonale pour le produit scalaire φ. De plus, la matrice de passage est alors facile à inverser : les coordonnées d'un vecteur quelconque dans cette base s'obtiennent aisément.

2.2 Exercices

Exercice 2.9

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on considère la base $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2))$.
   (a) À l'aide du procédé de Gram-Schmidt et en partant de cette base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de E.
   (b) Pour tout $u = (x, y) \in E$, déterminer les coordonnées de u dans cette nouvelle base.
   (c) Soit $(u, v) \in E^2$. Exprimer $\langle u\,, v\rangle$ en fonction des coordonnées de u et de v dans cette base.
2. **(Travail personnel)** Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère la base $\mathcal{B} = ((1,1,1),(1,2,1),(1,1,2))$.
   (a) À l'aide du procédé de Gram-Schmidt et en partant de cette base $\mathcal{B}$, construire une base orthonormée de E.
   (b) Pour tout $u = (x, y, z) \in E$, déterminer les coordonnées de u dans cette nouvelle base.
   (c) Soit $(u, v) \in E^2$. Exprimer $\langle u\,, v\rangle$ en fonction des coordonnées de u et de v dans cette base.

Exercice 2.10

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire défini pour tout $\big(u{=}(x_1, y_1, z_1),\ v{=}(x_2, y_2, z_2)\big) \in E^2$ par

$$\langle u\,, v\rangle = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 2z_1z_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1z_2 + z_1y_2$$

1. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt et en partant de la base canonique de E, construire une base orthonormée de E.
2. Pour tout $u = (x, y, z) \in E$, déterminer les coordonnées de u dans cette nouvelle base.
3. Soit $(u, v) \in E^2$. Exprimer $\langle u\,, v\rangle$ en fonction des coordonnées de u et de v dans cette base.

Exercice 2.11

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini pour tout $(P, Q) \in E^2$ par

$$\langle P\,, Q\rangle = \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$$

1. À l'aide du procédé de Gram-Schmidt et en partant de la base canonique de E, construire une base orthogonale de E.
2. Pour tout $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in E$, déterminer les coordonnées de P dans cette nouvelle base.
3. Soit $(P, Q) \in E^2$. Exprimer $\langle P\,, Q\rangle$ en fonction des coordonnées de P et de Q dans cette base.

Exercice 2.12

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Étude des endomorphismes f, g et h définis par ces trois matrices dans la base canonique.
   (a) Diagonaliser A, B et C et vérifier qu'elles ont une même base propre. Montrer qu'on peut choisir une base propre orthonormée $\mathcal{B}'$.
   (b) Soit P la matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base $\mathscr{B}'$. Vérifier que ${}^tP = P^{-1}$.
   (c) Pour tout $u = (x, y) \in E$, déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En raisonnant dans cette base propre, déterminer les images du cercle de rayon 1 par f, g et h.

2. Soient φ_A, φ_B et φ_C les formes bilinéaires définies par les matrices A, B et C dans la base canonique.
   (a) Vérifier que ce sont des formes bilinéaires symétriques.
   (b) Soit $(u, v) \in E^2$. Exprimer $\varphi_A(u, v)$, $\varphi_B(u, v)$ et $\varphi_C(u, v)$ en fonction des coordonnées de u et de v dans la base $\mathcal{B}'$.
   (c) Parmi ces trois formes bilinéaires symétriques, lesquelles sont définies positives ?

3 Projection orthogonale

3.1 Résumé

Étant donnés un espace préhilbertien $(E, \langle\,,\rangle)$ et un sev F de dimension finie, le théorème du supplémentaire orthogonal énonce que F et $F^\perp$ sont supplémentaires. Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe un unique $(v, w) \in F \times F^\perp$ tel que

$$u = \underbrace{v}_{\in F} + \underbrace{w}_{\in F^\perp}$$

Le vecteur v est la projection de u sur F, parallèlement à $F^\perp$. C'est le projeté orthogonal de u sur F.

Une propriété de cette projection est que $v = p_F(u)$ est le vecteur de F le plus proche de u. C'est le vecteur de F qui minimise $\|u - v\|^2$. De nombreux problèmes d'optimisation sont résolus en définissant un produit scalaire correspondant à ce qu'on souhaite optimiser, puis en calculant le projeté orthogonal.

3.2 Exercices

Exercice 3.13

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, on considère le sev

$$F = \{(x, y) \in E, x - y = 0\}$$

1. Déterminer une base de F. On note $\mathcal{B}$ cette base.
2. Comparer $\mathcal{B}^\perp$ et $F^\perp$. Expliquer.
3. Trouver le projeté orthogonal sur F de $u = (1, 2)$.
4. Déterminer $\underset{v \in F}{\mathrm{Min}} \|u - v\|^2$. Expliquer géométriquement.

Exercice 3.14

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère la famille

$$\mathcal{F} = \big((1, 1, 0),\ (0, 1, 1)\big)$$

1. Déterminer $\mathcal{F}^\perp$ (en exhibant une base).
2. Déterminer $\big(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})\big)^\perp$.

Exercice 3.15

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, on considère les sev

$$F_1 = \{(x, y, z) \in E, x + 2y - z = 0\} \qquad F_2 = \{(x, y, z) \in E, -x + y + z = 0\}$$

$$\text{et} \quad F_3 = \left\{ (x, y, z) \in E, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

Pour chacun d'entre eux :

1. Déterminer $F^{\perp}$.
2. Vérifier que $F^{\perp\perp} = F$ et expliquer pourquoi.
3. Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 2, 3)$ sur F.
4. Déterminer $\underset{v \in F}{\text{Min}} \|u - v\|^2$.

Exercice 3.16

Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni du produit scalaire

$$\langle f\,, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$$

Considérons le sev $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

1. Montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.
2. En déduire $F^{\perp\perp}$.
3. Considérons la fonction $x \longmapsto 1$. Peut-on définir son projeté orthogonal sur F ?

Exercice 3.17

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire canonique.

Considérons le sev $F = \left\{ (x, y, z, t) \in E, \left| \begin{array}{lll} x - z + t & = & 0 \\ y - 2z + t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$

1. Donner une base de F.
2. En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, trouver une base orthogonale de F.
3. Déterminer le projeté orthogonal sur F de $u = (1, 1, 1, 1)$.

Exercice 3.18

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P\,, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$$

Soient $F = \mathbb{R}_1[X]$ et $P = X^2$.

1. Déterminer la matrice de ce produit scalaire relativement à la base canonique de E.
2. Calculer le projeté orthogonal P_0 de P sur F.
3. En déduire $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \displaystyle\int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\,\mathrm{d}x$

Exercice 3.19

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On définit l'application $\langle\,,\rangle :\ E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\langle P\,, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$. Déterminer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la matrice du produit scalaire $\langle\,,\rangle$ relativement à la base canonique de E.
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
5. Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \displaystyle\int_0^{+\infty} (x^2 - ax - b)^2 e^{-x}\mathrm{d}x$