# Intégrales généralisées

*(trois semaines)*

*(du lundi 16 janvier au vendredi 3 février 2023)*

## 1 Révisions sur l'intégration

### Exercice 1

Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^2 3t\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

### Exercice 2

En utilisant des intégrations par parties, calculer calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^1 (2x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

### Exercice 3

1. Via le changement de variable $x=\ln(t)$, déterminer $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\left(1+\ln^2(t)\right)}$.
2. Via le changement de variable $t=\sqrt{x}$, déterminer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
3. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

### Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Pour tout $x > 0$, on définit $I(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
   (a) Calculer $I(x)$ en fonction de $x$ et $\alpha$.
   (b) Discuter en fonction de $\alpha$ l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} I(x)$. Quand la limite existe, donner sa valeur.
   (c) **(Bonus)** Utiliser ce résultat pour démontrer un théorème sur la nature de la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.
2. Pour tout $x > 0$, on définit $J(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$
   (a) Calculer $J(x)$ en fonction de $x$ et $\alpha$.
   (b) Discuter en fonction de $\alpha$ l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to 0} J(x)$. Quand la limite existe, donner sa valeur.

## 2 Intégrales généralisées

### Exercice 5

Déterminer la nature des intégrales suivantes où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\beta}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{t^2-t}}\,\mathrm{d}t$.

## Exercice 6

Soit l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(e^t - 1\right)^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\left(e^t - 1\right)^\alpha}$ en fonction de $\alpha$.
2. Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $\alpha$.
3. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(e^t - 1\right)^\alpha}$ en fonction de $\alpha$.
4. Conclure quant à la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\left(e^t - 1\right)^\alpha}$ en fonction de $\alpha$.

## Exercice 7

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. En déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $\alpha \in ]0,1[$. Montrer par un changement de variable que
$$\int_\alpha^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int_1^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

## Exercice 8

Notons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. a. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $\displaystyle\frac{\ln(1+t^2)}{t^2} = o\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ quand $t \to +\infty$ ?

   b. Montrer que $I$ converge.
2. Notons pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $F_\varepsilon(x) = \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

   a. Soit $(\varepsilon, x) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Calculer $F_\varepsilon(x)$ via une intégration par parties en fonction de $x$ et $\varepsilon$.

   b. En déduire pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $x$.

   c. En déduire la valeur de $I$.

## Exercice 9

Soient $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$ et $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ où $(\alpha, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

1. Étudier la nature de $\Gamma(\alpha)$ en fonction de $\alpha$.
2. Former une relation de récurrence entre $\Gamma(\alpha)$ et $\Gamma(\alpha+1)$.
3. En déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. Étudier la nature de $\beta(x,y)$ en fonction de $x$ et $y$.
5. Montrer que $\beta(x,y) = \beta(y,x)$.

## Exercice 10

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p} = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^p(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_{n,p} = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^p\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer la nature des intégrales $I_{n,p}$ en fonction de $n$ et $p$.
2. Via une intégration par parties, déterminer $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n,p-1}$.
3. En déduire, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $I_{n,p}$ en fonction de $n$ et $p$.
4. Déterminer la nature de $J_{0,p}$ puis des intégrales $J_{n,p}$ en fonction de $n$ et $p$.
5. Via le changement de variable $t = -\ln(x)$, déterminer $I_{n,p}$ en fonction de $J_{n+1,p}$.

## Exercice 11

Considérons $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(x)\big)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer (rigoureusement) que $\ln\big(\sin(x)\big) \underset{0}{\sim} \ln(x)$.
2. Montrer que $I$ converge et, via le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$, que $I = J$.
3. Montrer, via le changement de variable $u = 2x$, que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2x)\big)\,\mathrm{d}x$.
4. Via la relation $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, en déduire la valeur de $I$.

## Exercice 12

1. Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$.
   a. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   b. Montrer, via une intégration par parties, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge.
   c. Par une démarche similaire, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.
2. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ ?

3. Posons $g(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}}$ et $h(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{x}} + \dfrac{\cos^2(x)}{x}$.

   a. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$ ?

   b. Montrer que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} h(x)$.

   c. $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\ \mathrm{d}x$ sont-elles de même nature ?

   Expliquer pourquoi le critère de comparaison ne s'applique pas.

## Exercice 13

Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^2}$.

1. Montrer que $I$ est une intégrale impropre convergente.
2. Via une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.
3. En déduire la valeur de $I$.
4. Retrouver la valeur de $I$ via le changement de variable $u = 1/x$.

## Exercice 14

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f$ continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge.

Le but de cet exercice est de montrer que l'on n'a pas nécessairement $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et $f$ bornée au voisinage de $+\infty$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{+\infty} f$ existe, alors $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.
2. Via le changement de variable $u = x^2$, puis une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos\left(x^2\right)\ \mathrm{d}x$ converge.
3. Via le changement de variable $u = x^3$, puis une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} x\cos\left(x^3\right)\ \mathrm{d}x$ converge.