Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny

Finite difference & uncertain volatility

Przemysław Adamski, Michał Dąbrowski, Erwin Jasic

Raport napisany w ramach projektu z Inżynierii Finansowej 1

Wrocław, 2022

Wstęp

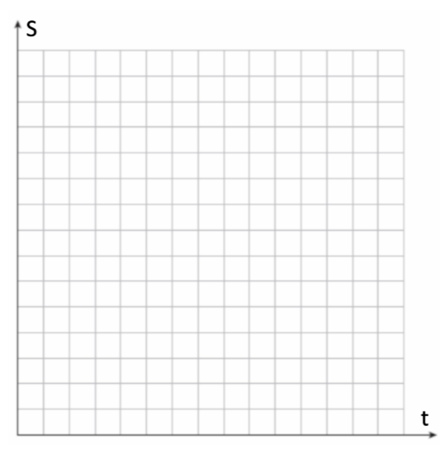
Celem drugiego projektu z Inżynierii Finansowej było poznanie metody finite difference i zastosowanie jej do wyceny opcji barierowych knock-and-out w wersji europejskiej oraz amerykańskiej. Głównymi trudnościami z którymi mieliśmy się zmierzyć była dywidenda wypłacana przez aktywo bazowe w połowie życia opcji oraz nieznana zmienność z podanego przedziału o której mieliśmy zakładać, że będzie przyjmowała wartości dające najgorszy dla nas (emitenta opcji) scenariusz. Po przeprowadzeniu wyceny należało sprawdzić jej poprawność oraz przeanalizować wpływ poszczególnych parametrów na jej wysokość.

Metoda finite difference

Rozpocznijmy od przedstawienia samej metody i wprowadzenia teoretycznego. Czynnikiem motywującym do stworzenia tej metody jest fakt, że zajmując się opcjami naturalnie chcielibyśmy umieć wyznaczać ich wartości. Zgodnie ze znaną już teorią, punktem wyjścia do tego wyznaczenia jest równanie różniczkowe Blacka-Scholesa:

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + rS\frac{\delta V}{\delta S} - rV = 0$$

Okazuje się niestety, że analitycznie można je rozwiązać i otrzymać jawną postać tylko w przypadku niewielu najprostszych opcji, w związku z czym potrzebna jest inna metoda na na osiągnięcie zamierzonego celu. Skoro nie umiemy rozwiązać powyższego równania analitycznie, rodzi się więc pomysł na rozwiązanie numeryczne i tym właśnie jest metoda finite difference. Rozwiązywanie numeryczne polega na dyskretyzacji zmiennych t oraz S, co w efekcie tworzy kratę punktów w układzie współrzędnych:

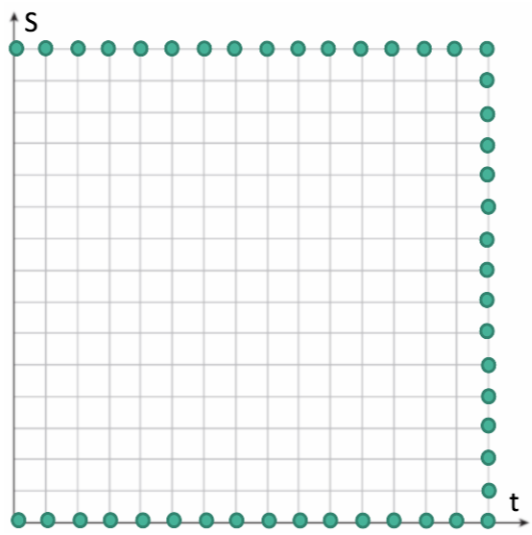


Długość osi t jest równa długości życia opcji (wynoszącej T), natomiast oś S zawiera przedział, który realnie wpływa na wartości opcji, to znaczy kończy się gdy dojdzie do wartości które są zbyt mało prawdopodobne na realny scenariusz lub nie mają już znaczenia dla naszej opcji. Drugą kwestią jest jak przedział zostanie podzielony. Im dystans między kolejnymi wartościami jest mniejszy, tym dokładniejsze będą otrzymywane wyniki. Na rzecz naszego projektu przyjęliśmy, że odległość między wartościami S będzie wynosiła 10 (odległość tę oznaczamy przez dS), natomiast dt nie będzie jednoznacznie ustalone, ponieważ musi ono być odpowiednio dobrane do każdej sytuacji. Konkretnie, aby metoda dawała prawdziwe rezultaty, krok między wartościami t musi spełniać warunek

$$dt \leqslant \frac{1}{\sigma^2 I^2}$$

, gdzie I jest ilością kroków S które zdecydujemy się umieścić na kracie. Jest to teoretyczny wynik z literatury, jednak w praktyce okazuje się, że trzeba dobierać dt na jeszcze mniejszym poziomie, wobec czego zdecydowaliśmy się w projekcie pozostawić to jako zmienną i ręcznie dobierać do sytuacji. Sprecyzujemy jakie dt zostało wybrane dopiero przy obliczaniu wartości opcji.

Gdy mamy już zdefiniowaną kratę, chcemy obliczyć wartość opcji w każdym jej punkcie. Rozpoczynamy od tego, że znamy wartości na obrzeżach. Mianowicie, gdy dojdziemy do ostatniej wartości osi poziomej znajdujemy się w momencie zapadalności, więc wartości są tam po prostu payoffem naszej opcji, a ten oczywiście znamy. Tak samo pierwszy i ostatni wiersz osi pionowej oznaczają już praktycznie deterministyczne sytuacje, dzięki czemu również są nam znane. Jesteśmy więc już w sytuacji, że następujące punkty zostały policzone:



Kolejne punkty będzie można obliczyć rekurencyjnie dzięki tym już wyznaczonym. Wprowadźmy oznaczenie V_i^k na wartość opcji w chwili $T - \delta t \cdot k$, na wysokości $\delta S \cdot i$, czyli w punkcie znajdującym się w i-tym wierszu i k-tej kolumnie od końca, ponieważ to od tej strony zacznie się rekurencja. Wróćmy teraz do równania Blacka-Scholesa. Jego częścią są pierwsze pochodne V po obydwu zmiennych i druga pochodna po argumencie S, które dzięki wzorowi Taylora umiemy przybliżyć:

$$\frac{\delta V}{\delta t} \approx \frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t}$$

$$\frac{\delta V}{\delta S} \approx \frac{V_{i+1}^k - V_{i-1}^k}{2\delta S}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta S^2} \approx \frac{V_{i+1}^k - 2V_i^k + V_{i-1}^k}{\delta S^2}$$

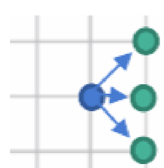
Możemy podstawić otrzymane przybliżenia do równania i otrzymujemy tym sposobem dyskretną sytuację. Oznaczmy przybliżenie pierwszej pochodnej po S przez Δ i drugiej przez Γ:

$$\frac{V_i^k - V_i^{k+1}}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rV = 0$$

Zauważmy, że tylko pochodna po czasie używa wartości z $k+1$ kolumny od końca, podczas gdy Δ i Γ tylko z k-tej. Oznacza to, że jeśli zakładamy znajomość V w chwili $T - \delta t \cdot k$ to wartość V_i^{k+1} jest jedyną niewiadomą w równaniu, co po przekształceniach daje nam jawny wzór rekurencyjny na liczenie V we wcześniejszych momentach czasu:

$$V_i^{k+1} = V_i^k + \delta t \left(\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rV \right)$$

i to właśnie na nim oparta jest cała metoda. Umiemy dzięki niemu liczyć V_i^{k+1} na podstawie trzech sąsiadujących od prawej strony wartości, co obrazuje następujący rysunek:



W konsekwencji umiemy już policzyć V w każdym punkcie. Zaznaczmy, że dużą zaletą tej metody jest pełna kontrola nad wartościami w dowolnym momencie, ponieważ w zależności od specyfiki opcji, możemy w każdym punkcie zareagować na sposób ich liczenia. Pozwala to wyceniać dowolnie egzotyczne opcje, a w naszym przypadku umożliwi uwzględnienie wspomnianej dywidendy oraz różnej zmienności.

Wycena opcji knock-and-out

Naszym celem jest obliczenie wartości opcji knock-and-out. Są to opcje barierowe, które polegają na tym, że jeśli cena aktywa bazowego osiągnie pewien dany poziom (dojdzie do bariery), to opcja zostaje unieważniona i jej payoff wyniesie 0. Poza tym działają jednak jak klasyczne opcje waniliowe.

Przyjęte parametry

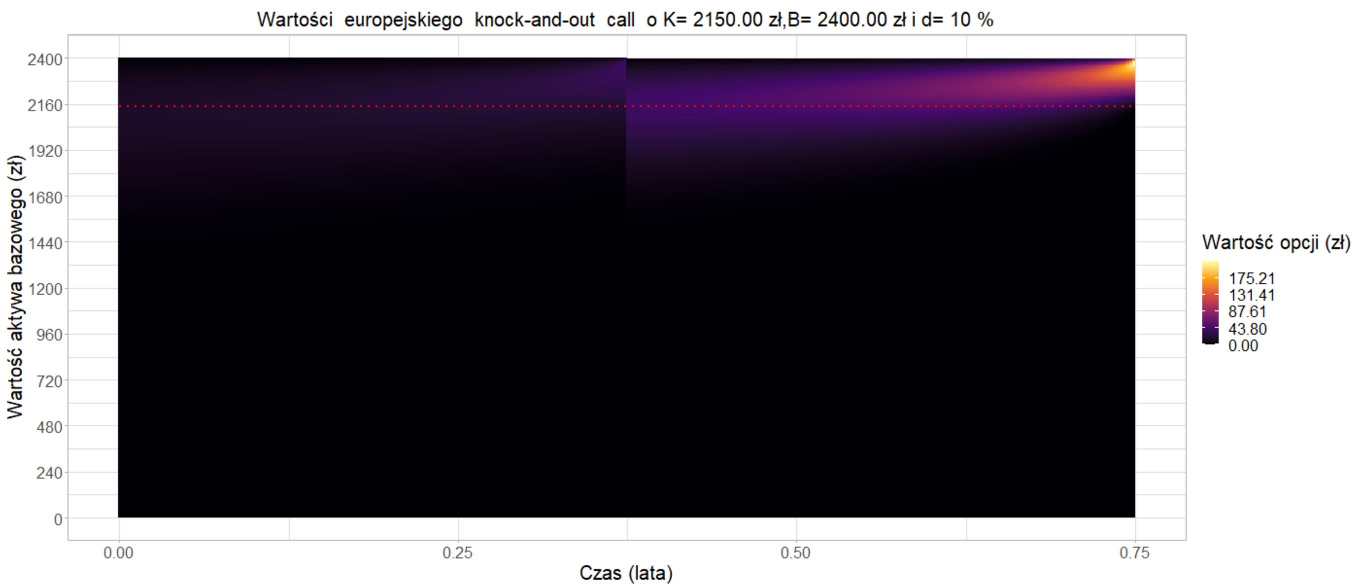
Zakładamy że ceny obliczamy pierwszego stycznia 2020 roku i opcje wygasają 30-ego września, czyli po $\frac{3}{4}$ roku ($T = 0.75$). Aktywem bazowym jest indeks WIG20 w zmodyfikowanej (nierealnej) postaci, a mianowicie zakładamy że wypłaca on dywidendę w połowie życia opcji. Mamy rozważyć zarówno dywidendę procentową na poziomie $d = 10\%$ jak i kwotową o wysokości 200, jednak poza wskazanymi miejscami za domyślną będziemy uważali procentową. Wszystkie podstawowe warianty, które mamy rozważyć, mają cenę wykonania równą 2150, a na rynku zakładamy stopę wolną od ryzyka wynoszącą $r = 3\%$.

W przypadku opcji call (zarówno amerykańskich jak i europejskich) bariera jest na poziomie 2400, co ustanawia ten wiersz górnym na naszej kracie wraz z wpisanymi $V = 0$, a dolnym, z tymi samymi wartościami, jest $S = 0$. W związku z tym dla opcji call przyjęliśmy $\delta t = \frac{1}{4500}$. Opcje put natomiast mają barierę na poziomie 1900, a jako górne ograniczenie ustaliliśmy liczbę 6600, ponieważ pierwszego stycznia 2020 roku wartość WIG20 wynosiła 2160, więc liczba ta jest wystarczająco odległym i nierealnym scenariuszem (co zobaczymy zaraz na wykresach cen). W efekcie dla opcji put przypisaliśmy $\delta t = \frac{1}{21000}$. Tak jak wspomnieliśmy obydwa kroki miedzy wartościami t są mniejsze niż wcześniej podane ograniczenie.

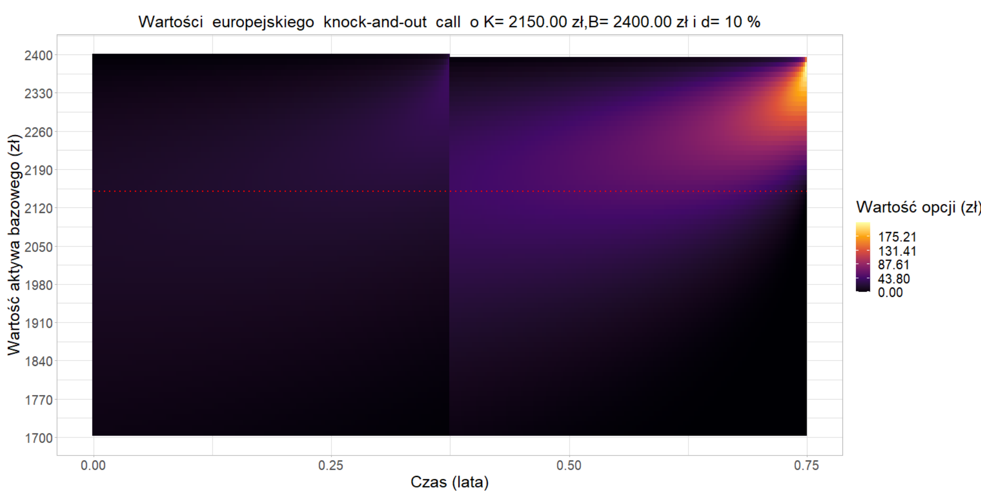
Najciekawszym parametrem w naszym projekcie jest natomiast σ opisująca zmienność. Zakładamy że σ nie jest stała i jedyne co o niej wiemy to fakt, że należy do przedziału $[0.15, 0.25]$. Zgodnie z treścią projektu podczas wyceny mamy zawsze zakładać, że σ przyjęła najgorszą możliwą dla nas wartość. Która wartość jest najgorsza? Z perspektywy emitenta im wyższa wartość opcji tym gorzej, ponieważ oznacza to, że druga strona posiada instrument dający tym większy zysk co w naszej perspektywie oznacza stratę. Po przyjrzeniu się wzorowi rekurencyjnemu widzimy, że zmienność występuje tylko w ramach wyrazu $\frac{1}{2} \cdot \delta t \cdot \sigma^2 S^2 \cdot \Gamma$. Zauważmy, że jedynym składnikiem który może wpływać na znak tego fragmentu jest Γ. Oznacza to, że jeśli $\Gamma > 0$ to cenę opcji maksymalizuje największa możliwa zmienność czyli $\sigma = 0.25$, natomiast w przypadku $\Gamma < 0$ cena maleje i w celu zminimalizowania tego spadku należy przyjąć najmniejsze możliwe σ, a więc $\sigma = 0.15$. Intuicją stojącą za tym stanem rzeczy zajmiemy się przy analizie wpływu tego parametru na cenę.

Wycena opcji europejskiej i amerykańskiej call

Przedstawiliśmy już metodologię i przyjęte parametry, więc czas przejść do wyceny. Powiedzmy jeszcze, że widoczny skok w środku wykresu będzie wynikał z istnienia dywidendy, ponieważ wartości odpowiadające danym S przejdą nagle na 90% swojej dotychczasowej wysokości lub na wartość pomniejszoną o 200. Obserwowane wykresy są mapami cieplnymi, zacznijmy od opcji europejskiej call:

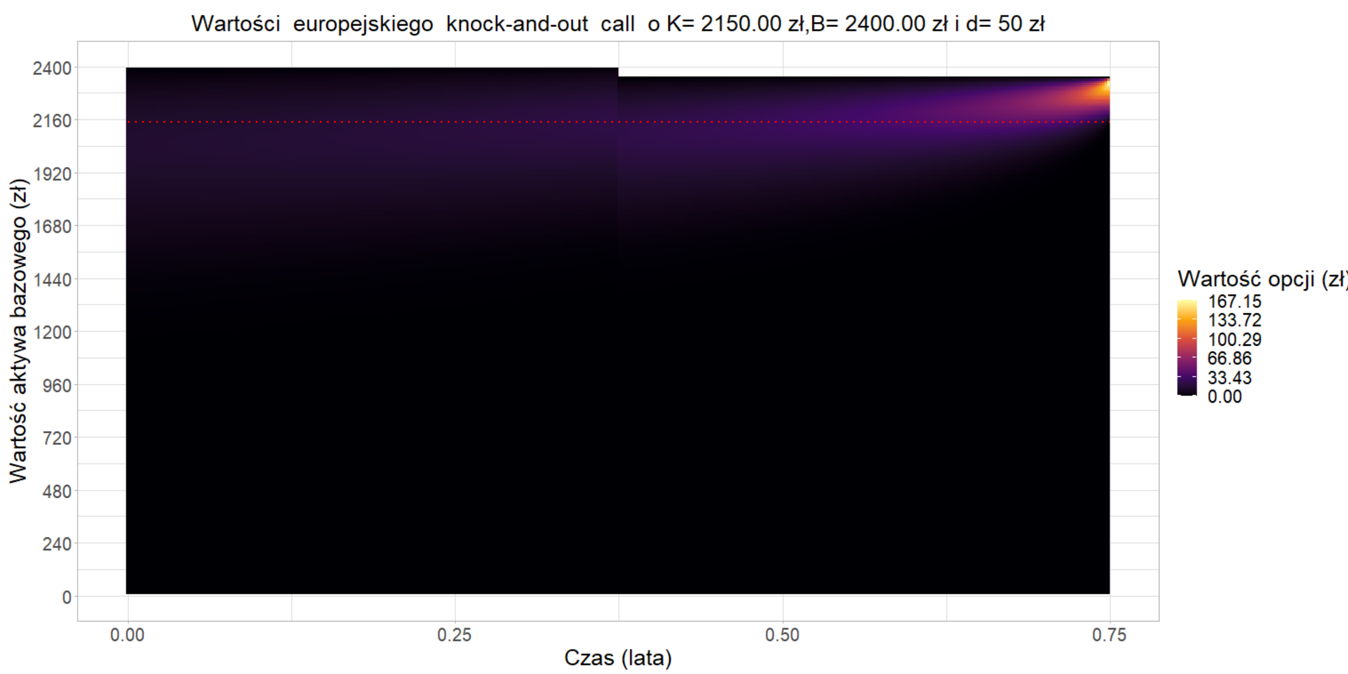


Oraz w przybliżeniu na znaczące wartości:

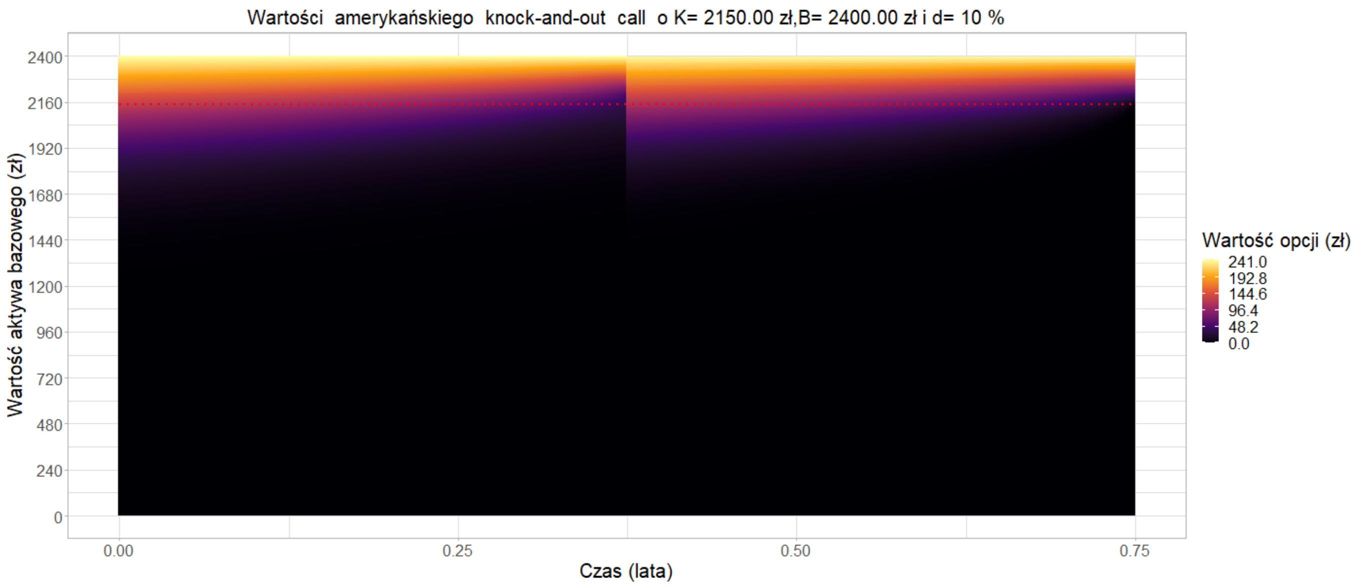


Otrzymane rezultaty są zgodne z tym czego moglibyśmy się spodziewać. Przede wszystkim, tak samo jak w klasycznej europejskiej opcji call, dla S daleko poniżej ceny wykonania, prawdopodobieństwo na to, że trajektoria dojdzie do momentu dającego dodatni payoff jest tak małe, że wartość opcji jest praktycznie (lub faktycznie) równa zeru. Z tego samego powodu wraz ze zbliżaniem się do strike'u (który na wykresach jest zaznaczony czerwoną, przerywaną linią) ceny zaczynają rosnąć. Gdy patrzymy na czas odległy od zapadalności są to ceny bardzo małe i szeroko rozłożone, ponieważ każda ma jeszcze szansę na zaprowadzenie zarówno do zerowego jak i dodatniego payoffu, jednak z czasem sytuacja zaczyna się klarować i wybijać cenę na wartościach które dadzą zyski, co jest powodem zwężającego się charakteru wykresu.

Główną różnicą względem klasycznej opcji waniliowej jest oczywiście fakt istnienia bariery. Powoduje ona, że po przekroczeniu ceny wykonania wartości nie rosną bezustannie, ponieważ od $S = 2400$ zaczynają wynosić 0. Jest to również "wyczuwane" przez wartości S nieodległe od bariery, ponieważ trajektorie które doszły do tej wysokości mają co prawda szansę na danie wysokiego payoffu, jednak ze sporym prawdopodobieństwem mogę także dosięgnąć bariery, co poprawnie przekłada się na zmniejszenie ich wartości. Skutkuje to tworzeniem się charakterystycznej "górki" na wykresie, co zaobserwujemy potem na spojrzeniu dwuwymiarowym. Zmiana dywidendy z procentowej na kwotową nie zmienia ogólnego stanu rzeczy:

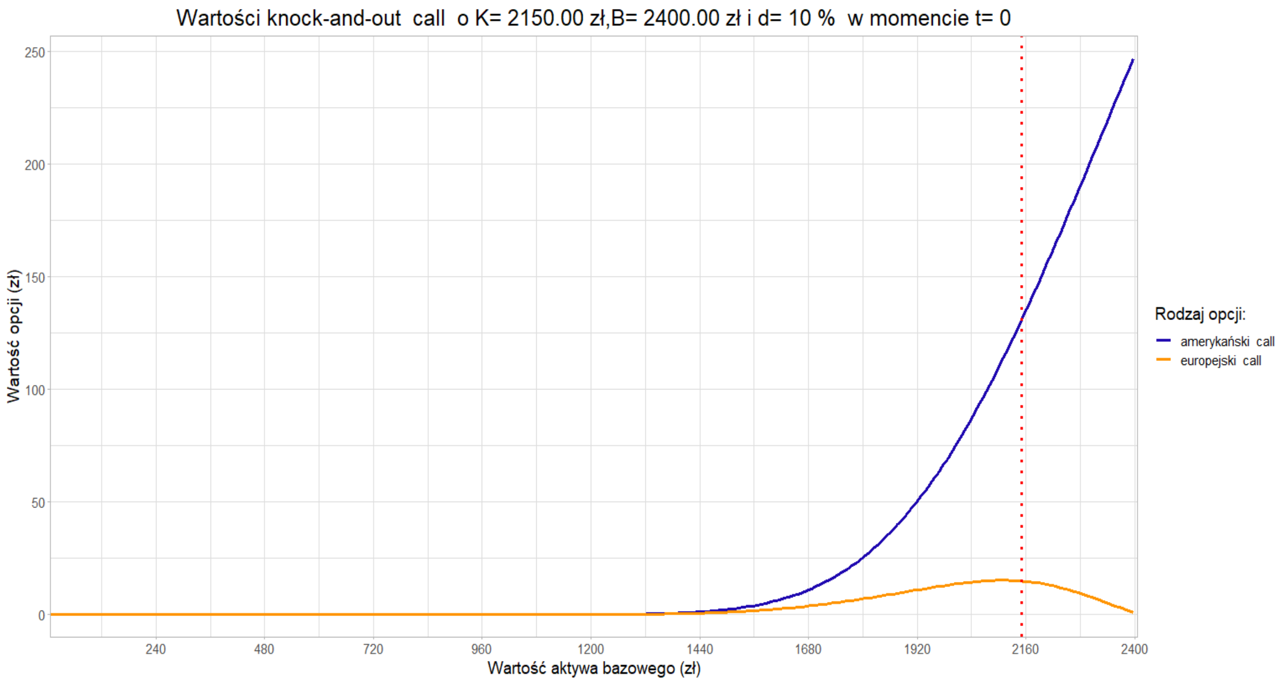


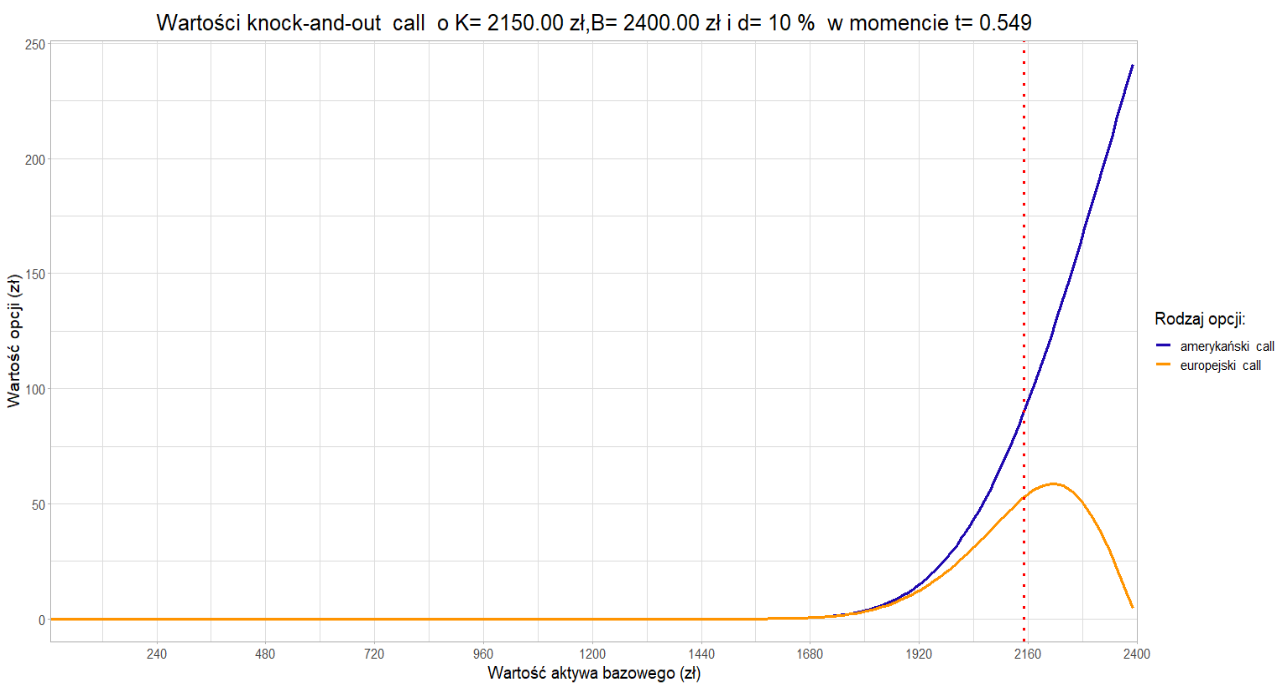
Zaznaczmy tylko, że w przypadku $S < 200$ przyjęliśmy, że wypłacają one całą wartość którą mogą, a więc spadając z wartością na 0. Spójrzmy teraz na opcję amerykańską:



Ponownie wraz ze wzrostem S wartości opcji rosną, jednak jednak tym razem, poza tym że od $S = 2400$ cena wynosi 0, nie zaczyna ona spadać gdy zbliżamy się do bariery. Wynika to z mechaniki opcji amerykańskiej, ponieważ posiadacz opcji ma pełną kontrolę nad momentem jej wykonania. Oznacza to, że nie ma możliwości aby opcja dotknęła bariery i spadła z wartością na 0, gdyż w przypadku dojścia tuż pod barierę i osiągnięciu maksymalnego możliwego zysku możemy ją wykonać. Wykres wartości opcji amerykańskiej knock-and-out call jest więc taki sam jak opcji klasycznej, ale z nałożonym indykatorem obejmującym przedział definiowany przez barierę.

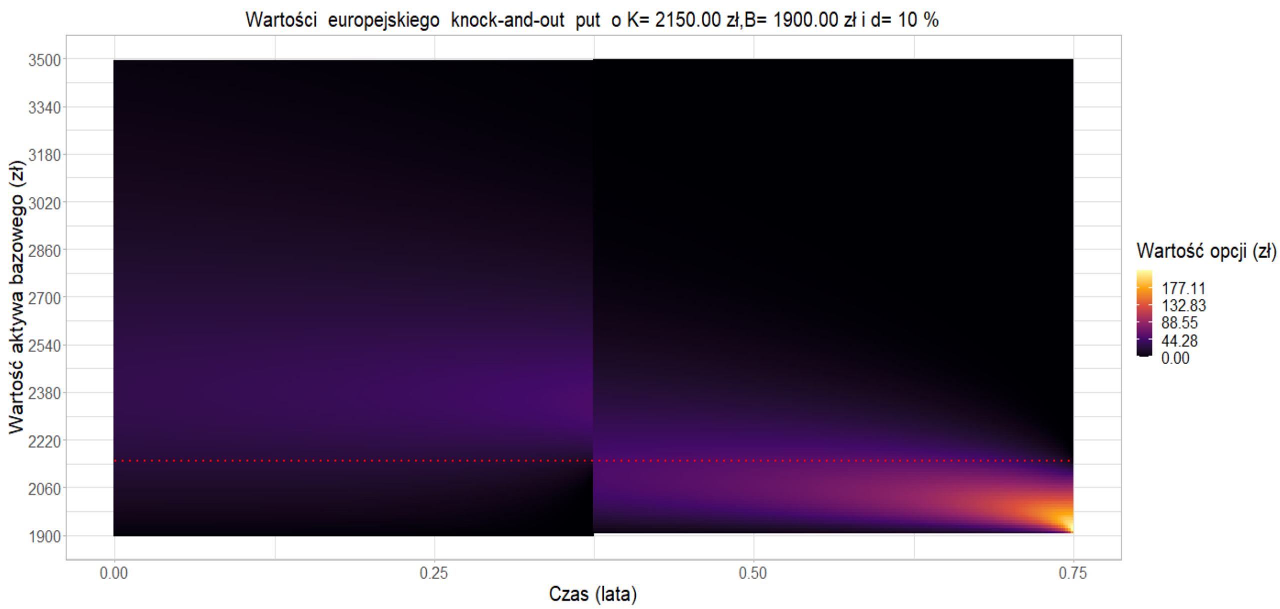
Zobaczmy jeszcze dwa wykresy z perspektywy ustalonych momentów czasowych, które przy okazji porównują opcje europejską i amerykańską. Pierwszy pokaże wartości opcji w chwili 0 i już na nim widać wspomnianą charakterystyczną "górkę" dla europejskiej opcji call. Drugi będzie reprezentował wygląd dowolnej chwili po dywidendzie. Można zaobserwować wspomniane wypiętrzanie się wartości w tym maksimum, a także potwierdzenie słów opisujących wykres opcji amerykańskiej.


Wartości knock-and-out call o K= 2150.00 zł,B= 2400.00 zł i d= 10 % w momencie t= 0
Wartość opcji (zł)
Wartość aktywa bazowego (zł)
Rodzaj opcji:
amerykański call
europejski call
0
50
100
150
200
250
240
480
720
960
1200
1440
1680
1920
2160
2400

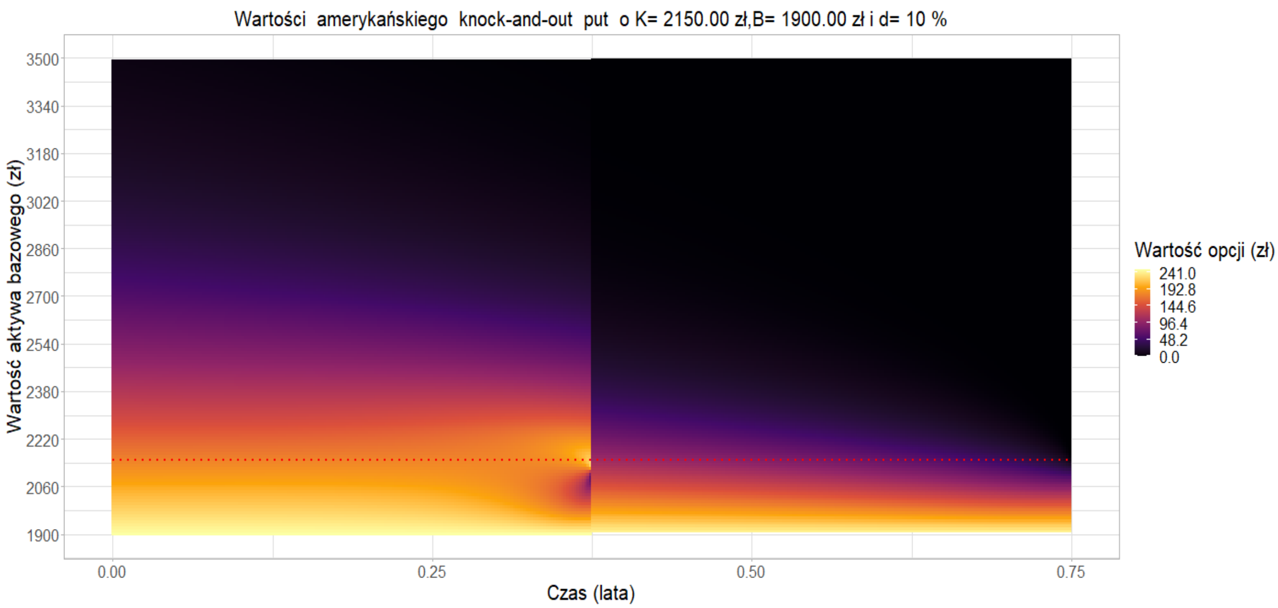

Wartości knock-and-out call o K= 2150.00 zł,B= 2400.00 zł i d= 10 % w momencie t= 0.549
Wartość opcji (zł)
Wartość aktywa bazowego (zł)
Rodzaj opcji:
amerykański call
europejski call
0
50
100
150
200
250
240
480
720
960
1200
1440
1680
1920
2160
2400

Wycena opcji europejskiej i amerykańskiej put

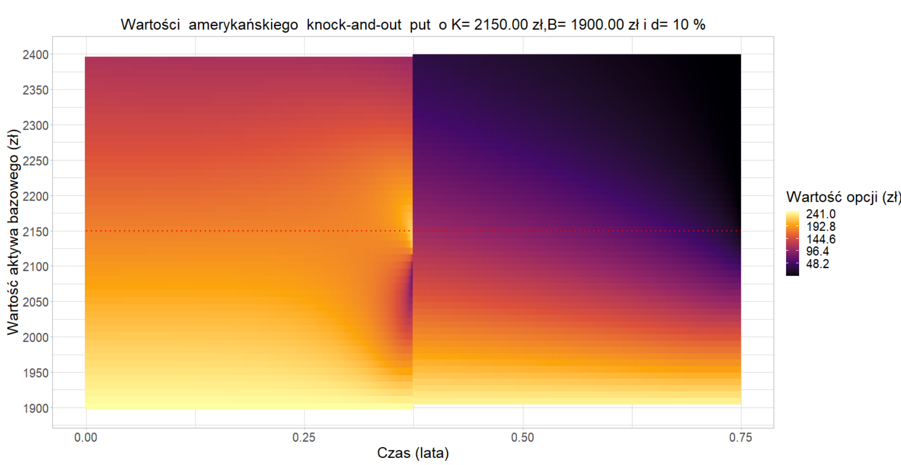
Przejdźmy teraz do opcji put. W przypadku wariantu europejskiego nic się praktycznie nie zmienia, otrzymujemy wykres kompletnie adekwatny do tego z przypadku opcji call:



Wartości ponownie rosną wraz ze zbliżaniem się do ceny wykonania i byciem coraz bardziej za nią, po czym spadają gdy ich odległość od bariery zaczyna być mała. Ciekawie dzieje się natomiast gdy przejdziemy do amerykańskiej opcji put:



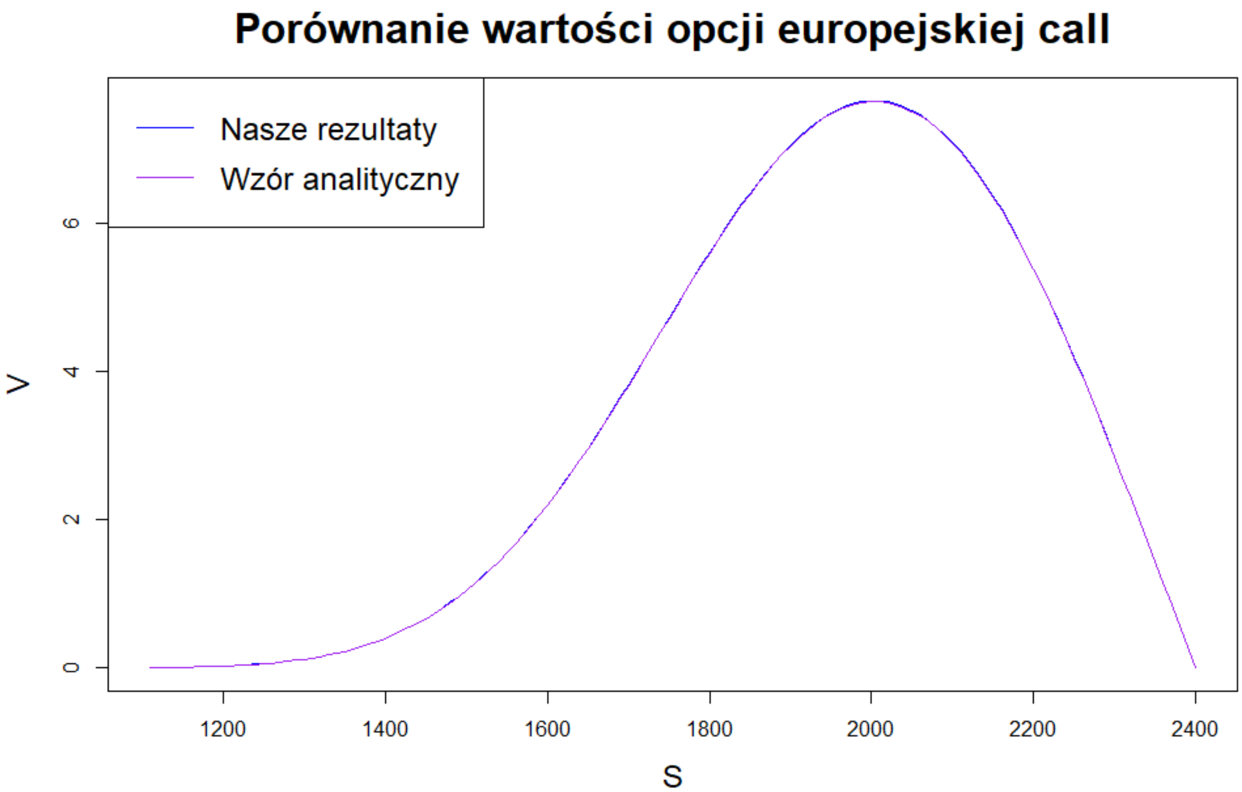
Początkowo moglibyśmy się spodziewać tego samego czego w przypadku opcji europejskich, czyli odbicia symetrycznego względem poprzedniego wykresu. Generalna tendencja i oczywiste własności pozostają co prawda zachowane, to znaczy , ze względu na amerykańskość, funkcja rośnie wraz ze zbliżaniem się do bariery i nie ma spadku związanego z jej istnieniem. Przed nastąpieniem dywidendy widzimy natomiast bardzo interesującą (pozornie) anomalię. Kreuje się tam bardzo nietypowe minimum (lub jak się zaraz przekonamy maksimum) nadające opcji amerykańskiej put miana najbardziej unikalnego wykresu spośród rozpatrywanych. Zróbmy zbliżenie na to nietypowe miejsce i wyjaśnijmy co jest powodem tego stanu rzeczy.



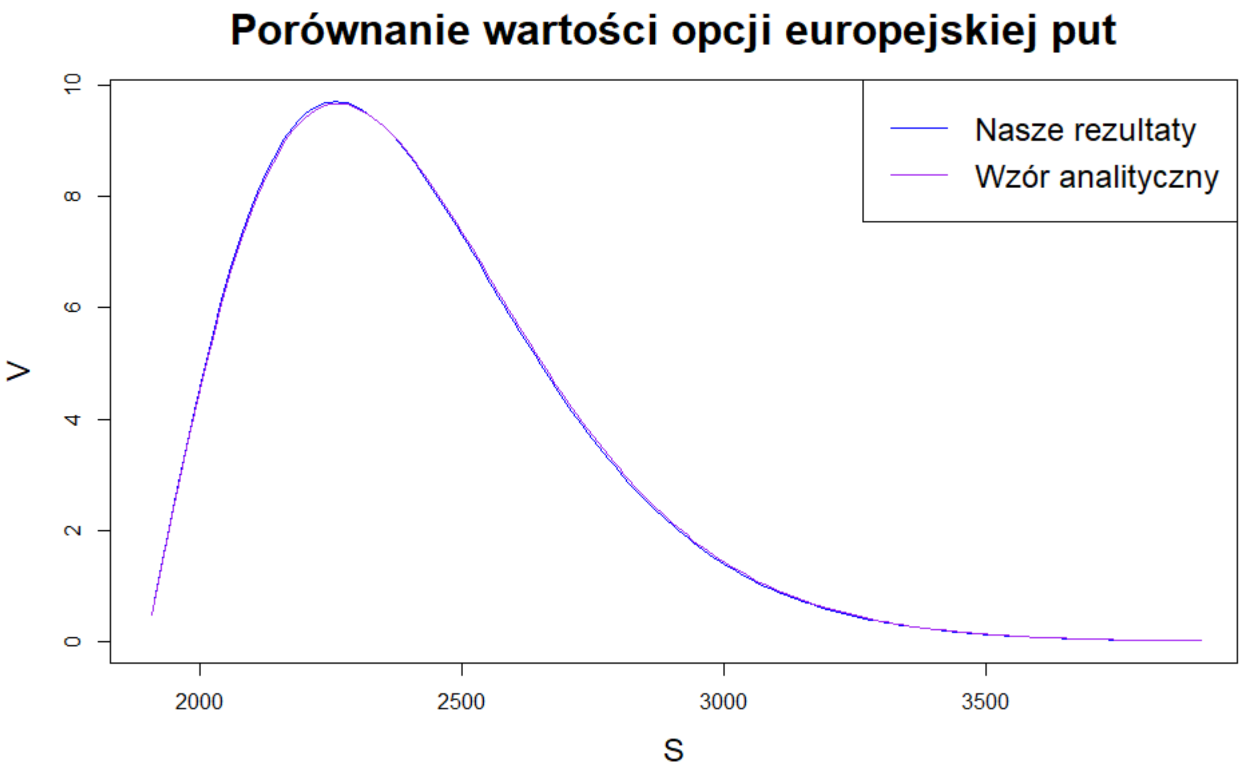
Głównym czynnikiem jest tutaj istnienie dywidendy. Jak wiemy w momencie jej wystąpienia wszystkie wartości zostają obniżone o pewien procent lub kwotę. W przeciwieństwie do opcji call, tym razem bariera znajduje się na dole wykresu, wobec czego skok dywidendowy powoduje, że część wartości odpowiadających argumentom ponad barierą, po dniu dywidendy znajdzie się pod nią i w efekcie zostanie wyzerowanych. Na widocznym powyżej przybliżeniu bariera wynosi 1900 a dywidenda jest wielkości 10%, wobec czego możemy wyliczyć, że wyzerowane zostaną wszystkie wartości poniżej poziomu $S = 1900/0.9 \approx 2111$ i jest to początkiem widocznego minimum. W takim razie jeśli blisko dnia dywidendy znajdziemy się w poniżej tego poziomu, wiemy że nasza opcja zostanie wyzerowana, wobec czego musimy ją wykonać w tej chwili, aby otrzymać jakikolwiek dodatni payoff. Oznacza to, że w przedziale poniżej 2111 wartości mają charakter klasycznego payoffu opcji put, a więc rosną liniowo wraz z maleniem ceny aktywa bazowego i oddalaniem się od ceny wykonania. Małe wartości wynikają właśnie z tego, że wartość 2111 jest bliska strike'owi równemu 2150. Dlaczego więc wartości tuż nad 2111 mają tak duże wartości? Nie znajdują się one już w strefie która zostanie wyzerowana, dlatego nie jesteśmy zmuszeni do ich wykonania przed dywidendą. Jednak ponieważ są tuż nad tą strefą to po nastąpieniu dywidendy znajdą się tuż nad barierą, a w efekcie zaraz przejdą na dostarczenie najwyższego możliwego zysku, co tym samym nadaje im bardzo wysoką wartość i stworzenie się ekstremum. Widzimy dzięki temu duże, względem opcji call, poszerzenie się przedziału w którym opcja na znaczące wartości.

Weryfikacja wyników

Teoretycznie udało nam się już osiągnąć cel wyznaczenia wartości podanych opcji, pytanie jednak czy możemy jakoś potwierdzić, że otrzymane rezultaty są zgodne z prawdą?. Problemem w bezpośrednim potwierdzeniu jest, zgodnie ze wstępem teoretycznym, brak jawnych wzorów na funkcje barierowe z dyskretną jednorazową dywidendą, a do tego uwzględniających zmienną wartość σ. Możemy natomiast przetestować, czy nasza funkcja działa w poprawny sposób, poprzez liczenie wartości opcji, dla których te jawne wzory istnieją. Najbliższymi opcjami do tych liczonych przez nas, na które analityczne wzory są jawne, są europejskie opcje barierowe knock-and-out, jednak bez dywidendy oraz zmiennej σ. Wywołujemy naszą funkcję na takich ustawieniach po czym porównujemy wyniki:

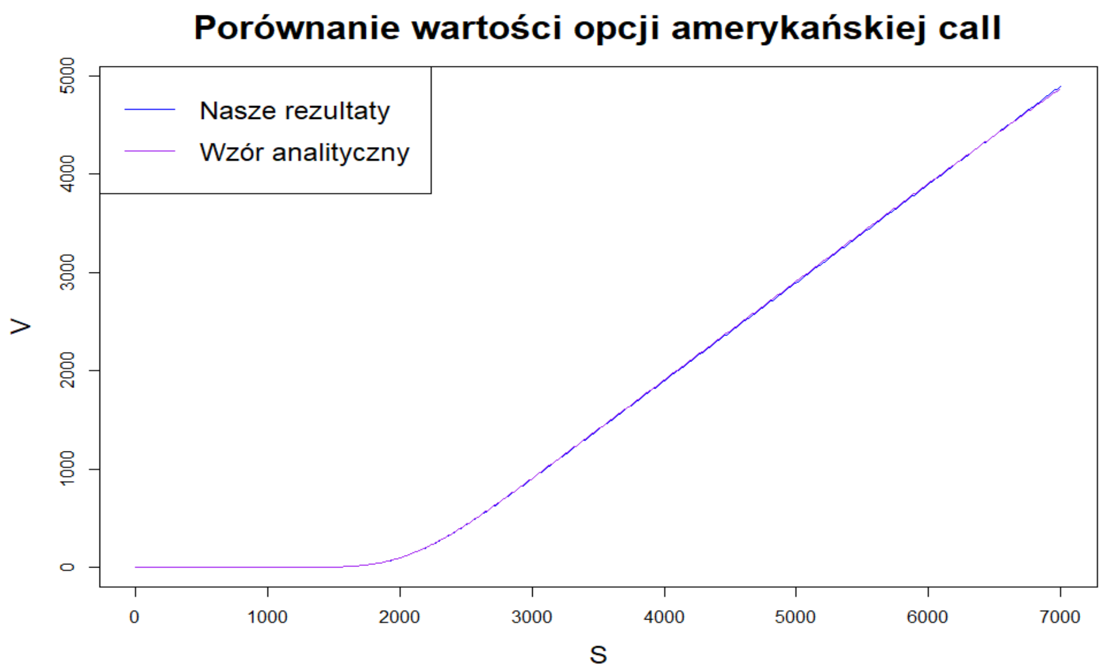


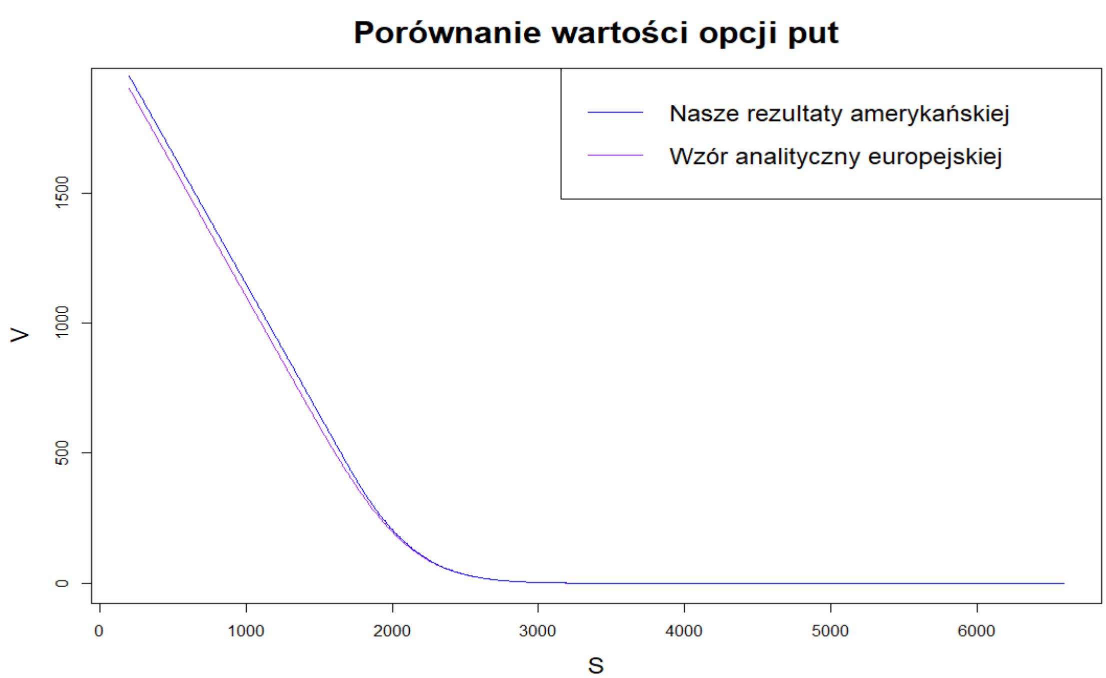
Dzięki przebijającym się nawzajem kolorom widzimy, że wykres nie przedstawia jednej funkcji, a rzeczywiście dwie różne które się praktycznie pokrywają. W przypadku opcji europejskiej call można więc ogłosić sukces, ponieważ mamy potwierdzenia że daje ona poprawne wyniki. Porównywalnie dobrze jest w przypadku opcji europejskiej put:



Problem pojawia się gdy chcemy potwierdzić wyniki opcji amerykańskich i finalnie udało nam się w pełni potwierdzić jedynie wartość opcji call. Co prawda na barierowe opcje amerykańskie wzory niestety nie istnieją, jeśli jednak ustawimy w naszej metodzie bardzo wysoką barierę, całość będzie zachowywała się jak funkcja waniliowa, a tej umiemy już policzyć.

Niestety opcja amerykańska put jest bardziej skomplikowana, dlatego ten sam zabieg względem niej (to znaczy ustawienie bariery bardzo nisko) nie da identycznych rezultatów, ale dla jakiegokolwiek potwierdzenia możemy zaobserwować, że obliczenie amerykańskiej opcji put rzeczywiście ogranicza z góry wariant europejski:


Porównanie wartości opcji amerykańskiej call
Nasze rezultaty
Wzór analityczny
V
S
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000


Porównanie wartości opcji put
Nasze rezultaty amerykańskiej
Wzór analityczny europejskiej
V
S
0
500
1000
1500
2000
3000
4000
5000
6000

Analiza wpływu parametrów na cenę

A jak pan Jezus powiedział?