QUANTO

Przemysław Adamski, Erwin Jasic, Kacper Toczek

Luty 2022

Wstęp

Tematem trzeciego projektu z Inżynierii Finansowej było zbadanie opcji typu quanto. W ramach raportu przedstawimy na czym owa opcja polega i wyprowadzimy analitycznie wzór na jej wycenę. Następnie skupimy się na konkretnej opcji tego typu, aby przeprowadzić na niej delta hedging i przeanalizować zarówno jego przebieg jak i wrażliwość na poszczególne parametry. Na koniec porównamy ten instrument z opcją, która wydaje się go replikować.

Opcja typu quanto i jej wycena

Rozpocznijmy od zdefiniowania omawianego instrumentu. Opcja typu quanto jest opcją, której wielkość payoff'u zależy od wartości aktywa w jednej walucie, natomiast potencjalna wypłata jest konwertowana na inny nominał. Oznacza to, że mamy do czynienia z instrumentem opartym na dwóch procesach losowych, a mianowicie wartości pierwszego wspomnianego aktywa oraz kursie między dwoma rozpatrywanymi walutami.

Jako przykład podajmy od razu opcję którą mamy wycenić, jednocześnie wprowadzając oznaczenia, których będziemy używali. Rozważamy instrument zaczynający życie 30 czerwca 2020 roku, o dniu zapadalności ustalonym na 30 czerwca 2021 roku (wobec czego przyjmujemy $T = 1$). Aktywem bazowym będzie złoto notowane w dolarach amerykańskich (zgodnie z London Gold Fixing Price) i przez $S(t)$ oznaczymy jego wartość w chwili t. W dniu zapadalności payoff instrumentu wynosi $100\text{PLN} \cdot \max\left(S(T)/S(0) - K, 0\right)$, gdzie K jest ceną wykonania z przedziału $[0, 2]$, natomiast $X(t)$ będzie kursem dolarów na złotówki, również zmiennym w czasie. Możemy przekształcić payoff do postaci $\frac{100\text{PLN}}{S(0)} \cdot \max\left(S(T) - KS(0), 0\right)$

Wycena pierwszym podejściem

Mając już wszystko zdefiniowane przejdźmy do wyceny opcji. Dokonamy tego na dwa sposoby, za pierwszym razem bezpośrednio posługując się zdefiniowanymi procesami $S(t)$ i $X(t)$, natomiast za drugim wprowadzając nową zmienną. Zacznijmy jednak od pierwszego podejścia.

Zgodnie ze standardowym podejściem do wyceny, rozpoczniemy od ułożenia portfela zawierającego rozpatrywaną opcję oraz składniki służące do kontroli losowości w nim występującej. Ponieważ tym razem ma ona nie jedno, a dwa źródła, będziemy potrzebowali posiadać pewną ilość nie tylko aktywa bazowego, ale również walutę zagraniczną do kontroli zmiany kursu. Ilość posiadanego złota oznaczymy przez Δ_S, natomiast dolarów przez Δ_X. Opcję typu quanto chcemy wycenić w złotówkach, dlatego posiadaną walutę amerykańską oraz cenę złota przemnażamy przez kurs, w celu ujednolicenia nominału składników. Otrzymujemy tym samym następujący portfel:

$$\Pi = V(S, X, t) - \Delta_X \cdot X - \Delta_S \cdot S \cdot X.$$

Zakładamy, że procesy $X(t)$ i $S(t)$ są modelowane przez skorelowane geometryczne ruchy Browna (B_S i B_X), wobec czego

$$dS = \mu_S S dt + \sigma_S S dB_S \quad \text{oraz} \quad dX = \mu_X X dt + \sigma_X X dB_X,$$

a korelację oznaczamy przez ρ_{XS}.

W celu wyliczenia wartości opcji, standardowo przechodzimy na badanie przyrostów portfela. Tym razem potrzebujemy jednak skorzystać ze znanej nam z analizy stochastycznej wielowymiarowej formuły Itô, która dla procesów stochastycznych spełniających $dX(t) = F(t)dt + G(t)dB(t)$ i funkcji $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dana jest następującym wzorem:

$$d\phi(X_1(t), ..., X_n(t)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta\phi}{\delta X_k} dX_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\delta^2\phi}{\delta X_i \delta X_j} d\left\langle X_i, X_j \right\rangle,$$

co po uwzględnieniu korelacji i podstawieniu prowadzi nas do

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} X S \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} - \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} X S \Delta_S - \Delta_X r_f X \right) dt$$

$$+ \left(\frac{\delta V}{\delta X} - \Delta_X - \Delta_S S \right) dX + \left(\frac{\delta V}{\delta S} - \Delta_S X \right) dS.$$

Widzimy więc, że aby wyeliminować z portfela ryzyko, należy przyjąć

$$\Delta_S = \frac{1}{X}\frac{\delta V}{\delta S} \quad \Delta_X = \frac{\delta V}{\delta X} - \frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S}.$$

Ponieważ portfel jest wolny od ryzyka, to z założenia braku arbitrażu przyrost jest równy akumulacji, czyli $d\Pi = r\Pi dt$, tak więc przyrównujemy obydwie postacie $d\Pi$ oraz podstawiamy Δ_X i Δ_S, aby po uporządkowaniu otrzymać

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} X S \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + X \frac{\delta V}{\delta X}(r - r_f)$$

$$+ S \frac{\delta V}{\delta S}(r_f - \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S) - rV = 0$$

Pamiętając o tym że mamy już zdefiniowany payoff, otrzymaliśmy w takim razie poszukiwane równanie różniczkowe na cenę opcji typu quanto. Jak je obliczyć? Przede wszystkim zauważmy, że skoro potencjalna wypłata w chwili T nie zależy od kursu walut, to możemy poszukać rozwiązań niezależnych od tej zmiennej, to jest rozwiązań postaci $V(X, S, t) = W(S, t)$, co natychmiastowo powoduje, że z równania znikają pochodne po zmiennej X i dochodzimy do

$$\frac{\delta W}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 W}{\delta S^2} + S\frac{\delta W}{\delta S}(r_f - \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S) - r_f W = 0.$$

Teraz ostatnim, małym przekształceniem pokażemy, że jest to równanie które doskonale już znamy.

$$\frac{\delta W}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 W}{\delta S^2} + S\frac{\delta W}{\delta S}(r - (r - r_f + \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S)) - r_f W = 0.$$

Mianowicie, jest to standardowe równanie Blacka-Scholesa z ciągłą dywidendą, w którym

$$\sigma = \sigma_S \quad , \quad D = r - r_f + \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S,$$

tak więc

$$V(X, S, t) = \frac{100\text{PLN}}{S(0)}\left(Se^{-D(T-t)}N(d_1) - KS(0)e^{-r(T-t)}N(d_2)\right),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\log\frac{S}{KS(0)} + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

co jest szukaną przez nas ceną opcji typu quanto.

Wycena drugim podejściem

Rozwiążemy teraz to zagadnienie posługując się procesem wartości złota denominowanym w PLN, czyli wprowadzając $Y(t) = X(t) \cdot S(t)$. Przy tym oznaczeniu payoff opcji będzie wyrażał się wzorem $100 \cdot \max\left(\frac{Y(t)}{X(t)}\frac{X(0)}{Y(0)} - K, 0\right)$, który możemy przekształcić do postaci $100\frac{X(0)}{Y(0)} \cdot \max\left(\frac{Y(t)}{X(t)} - K\frac{Y(0)}{X(0)}, 0\right)$. Natomiast nasz portfel przyjmie postać

$$\Pi = V(X, Y, t) - \Delta_X X - \Delta_Y Y.$$

W celu wycenienie opcji ponownie przechodzimy na przyrost wartości

$$d\Pi = dV - \Delta_X dX - \Delta_Y dY - \Delta_X r_f X dt,$$

po czym stosujemy wielowymiarową formułę Itô względem $dV(X,Y,t)$, co po uporządkowaniu wyrazów daje

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_Y \rho XY \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta Y} + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 Y^2 \frac{\delta^2 V}{\delta Y^2} - \Delta_X r_f X\right) dt +$$

$$+ \frac{\delta V}{\delta X} dX + \frac{\delta V}{\delta Y} dY - \Delta_X dX - \Delta_Y dY.$$

Widzimy więc, że w celu wyeliminowania ryzyka z portfela należy przyjąć:

$$\Delta_X = \frac{\delta V}{\delta X} \quad \text{oraz} \quad \Delta_Y = \frac{\delta V}{\delta Y},$$

czym doprowadzamy do

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_Y \rho XY \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta Y} + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 Y^2 \frac{\delta^2 V}{\delta Y^2} - \frac{\delta V}{\delta X} r_f X\right) dt.$$

Portfel jest więc wolny od ryzyka, wobec czego zachodzi

$$d\Pi = r\Pi dt$$

i podstawiając pierwotną postać Π, z przyjętymi Δ_X *i* Δ_Y, mamy

$$d\Pi = r\left(V - \frac{\delta V}{\delta X} X - \frac{\delta V}{\delta Y} Y\right) dt.$$

Przyrównujemy teraz obydwie postacie $d\Pi$ i po uporządkowaniu otrzymujemy

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_Y \rho XY \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta Y} + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 Y^2 \frac{\delta^2 V}{\delta Y^2} + (r - r_f) X \frac{\delta V}{\delta X} + rY \frac{\delta V}{\delta Y} - rV = 0.$$

Doszliśmy tym samym do równania różniczkowego, które musimy rozwiązać. Jest ono bardziej skomplikowane niż poprzednio, jednak okazuje się, że całą sytuację zdecydowanie upraszcza podstawienie $Z = \frac{Y}{X}$. Po pierwsze, pozwala ono pozbyć się jednej zmiennej z równania. Konkretnie, skoro $V(X,Y,t)$ jest ceną opcji w złotówkach, to możemy ją traktować jako cenę w dolarach przemnożoną przez kurs miedzy walutami (X), wtedy proces z perspektywy dolarów, ze względu na payoff, rzeczywiście będzie zależał już tylko od stosunku zmiennych Y i X, co samo z siebie mozemy taktować jako jedną zmienną, czyli wprowadzane właśnie $Z(t)$. Mamy więc $V(X,Y,t) = W(\frac{Y}{X}, t) = W(Z,t)$. Spójrzmy jak wyrażają się poszczególne pochodne w terminach zmiennej Z:

$$\frac{\delta V}{\delta X} = \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{\delta Z}{\delta X} = \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-Y}{X^2}$$

$$\frac{\delta V}{\delta Y} = \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta Y^2} = \frac{\delta}{\delta Y} \left(\frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X} \right) = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{1}{X^2}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta X^2} = \frac{\delta}{\delta X} \left(\frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-Y}{X^2} \right) = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{-Y}{X^2} \cdot \frac{-Y}{X^2} + \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{2XY}{X^4} = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{Y^2}{X^4} + \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{2Y}{X^3}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta X \delta Y} = \frac{\delta}{\delta X} \left(\frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X} \right) = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{-Y}{X^2} \cdot \frac{1}{X} + \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-1}{X^2} = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{-Y}{X^3} - \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X^2}.$$

Możemy teraz podstawić je do naszego równania

$$0 = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{Y^2}{X^4} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{2Y}{X^3} + \sigma_X \sigma_Y \rho XY \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{-Y}{X^3}$$

$$+\sigma_X \sigma_Y \rho XY \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-1}{X^2} + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 Y^2 \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{1}{X^2} + (r - r_f) X \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-Y}{X^2} + rY \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X} - rW$$

We wszystkich miejscach ilorazy Y przez X zamieniają się w pewne potęgi Z, co skutkuje uproszczeniem postaci równania, a wiele wyrazów się skraca. Ostatecznie dochodzimy do równania

$$0 = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} Z^2 \left(\frac{1}{2}\sigma_X^2 - \sigma_X \sigma_Y \rho + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 \right) + \frac{\delta W}{\delta Z} Z \left(r - \left(\sigma_X \sigma_Y \rho - \sigma_X^2 + r - r_f \right) \right) - rW.$$

Oznacza to, że ponownie wynikiem jest klasyczne równanie Blacka-Scholesa z dywidendą, dla parametrów

$$\sigma = \sqrt{\sigma_X^2 - 2\sigma_X \sigma_Y \rho + \sigma_Y^2} \quad \text{i} \quad D = \sigma_X \sigma_Y \rho - \sigma_X^2 + r - r_f$$

W takim razie rozwiązanie jest zadane poprzez

$$W(Z,t) = \frac{100}{Z(0)} \left(Z e^{-D(T-t)} N(d_1) - EZ(0) e^{-r(T-t)} N(d_2) \right),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\log \frac{Z}{EZ(0)} + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Ponieważ $V(X,Y,t) = W(Z,t)$, $Z = \frac{Y}{X}$ i cenę wykonania oznaczamy przez K to szukana cena jest postaci

$$V(X,Y,t) = 100\frac{X(0)}{Y(0)}\left(\frac{Y}{X}e^{-D(T-t)}N(d_1) - K\frac{Y(0)}{X(0)}e^{-r(T-t)}N(d_2)\right),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\log\frac{Y}{XK\frac{Y(0)}{X(0)}} + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho + \sigma_Y^2} \quad , \quad D = \sigma_X\sigma_Y\rho - \sigma_X^2 + r - r_f$$

Porównanie wyników

Udało nam się w takim razie wycenić ten sam instrument finansowy na dwa różne sposoby. Oznacza to, że wyniki powinny być identyczne, jednak na pierwszy rzut oka nie są. Sprawdźmy więc czy popełniliśmy w takim razie błąd, czy może jednak rzeczywiście zachodzi tutaj równoważność.

Jedyne aspekty różniące obydwa otrzymane wzory to parametry σ oraz D. Aby wyniki były takie same, muszą wiec zachodzić dwie równości

$$\begin{cases} \sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \sigma_Y^2} \\ r - r_f + \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S = \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} - \sigma_X^2 + r - r_f \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_S = \sqrt{\sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \sigma_Y^2} \\ \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S = \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} - \sigma_X^2 \end{cases}$$

Aby potwierdzić powyższe zależności, spójrzmy wnioski wynikające z podstawienia $Y = X$. Mamy

$$dY = d(X\cdot S) = SdX + XdS + d\langle X,S\rangle = SdX + XdS + \sigma_X\sigma_S XSdt,$$

więc rozpisując dY, dX i dS

$$\mu_Y Ydt + \sigma_Y YdB_Y =$$

$$S\left(\mu_X Xdt + \sigma_X XdB_X\right) + X\left(\mu_S Sdt + \sigma_S SdB_S\right) + \sigma_X\sigma_S XSdt =$$

$$(\mu_X + \mu_Y + \sigma_X\sigma_Y)\,XSdt + XS\,(\sigma_X dB_X + \sigma_S dB_S) =$$
$$(\mu_X + \mu_Y + \sigma_X\sigma_Y)\,Ydt + Y\,(\sigma_X dB_X + \sigma_S dB_S)$$

Otrzymujemy w wobec tego

$$\mu_Y = \mu_X + \mu_S + \sigma_X\sigma_Y$$

oraz

$$\begin{array}{ccc} \sigma_Y dB_Y & = & \begin{array}{ccc} \sigma_X dB_X & + & \sigma_S dB_S \end{array} \\ \wr & & \begin{array}{ccc} \wr & \quad & \wr \end{array} \\ N\left(0, \sigma_Y^2 dt\right) & & \underbrace{N\left(0, \sigma_X^2 dt\right) \quad N\left(0, \sigma_S^2 dt\right)}_{N\left(0, \left(\sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S\right) dt\right)} \end{array}$$

zatem

$$\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S$$

Jesteśmy więc blisko udowodnienia tezy. Brakuje nam jednak aby zamiast ρ_{XS} występowało ρ_{XY}. Rozpiszmy obydwa te współczynniki kowariancji:

$$\rho_{XS}dt = \mathbb{E}\left[dB_X dB_S\right] \quad , \quad \rho_{XY}dt = \mathbb{E}\left[dB_X dB_Y\right]$$

Dzięki otrzymanej wcześniej równości wiemy, że $dB_Y = \frac{1}{\sigma_Y}\left(\sigma_X dB_X + \sigma_S dB_S\right)$, co pozwala nam rozpisać

$$\rho_{XY}dt = \mathbb{E}\left[dB_X dB_Y\right] = \mathbb{E}\left[dB_X \frac{1}{\sigma_Y}\left(\sigma_X dB_X + \sigma_Y dB_Y\right)\right] =$$
$$= \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mathbb{E}\left[\left(dB_X\right)^2\right] + \frac{\sigma_S}{\sigma_Y}\mathbb{E}\left[dB_X dB_Y\right] = \left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y} + \frac{\sigma_S}{\sigma_Y}\rho_{XS}\right)dt,$$

z czego wynika, że $\sigma_Y\rho_{XY} = \sigma_X + \sigma_S\rho_{XS}$. Po przemnożeniu stronami przez σ_X oraz przerzucenie stronami dochodzimy do tego, że

$$\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S = \sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} - \sigma_X^2,$$

co implikuje równoważność dywidend, czyli drugie równanie z naszego układu równań, a także pozwala uzasadnić prawdziwość pierwszego, poprzez przekształcenie części pod pierwiastkiem prawej strony:

$$\sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_Y\rho_{XY} + \sigma_Y^2 = \sigma_X^2 - 2\sigma_X\left(\sigma_X + \sigma_S\rho_{XS}\right) + \sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S =$$
$$\sigma_X^2 - 2\sigma_X^2 - 2\sigma_X\sigma_S\rho_{XS} + \sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S = \sigma_S^2$$

Podsumowując, udowodniliśmy że obydwie metody dają ten sam rezultat, co można unaocznić, poprzez podstawienie do drugiego równania

$$\sigma_Y = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S},$$

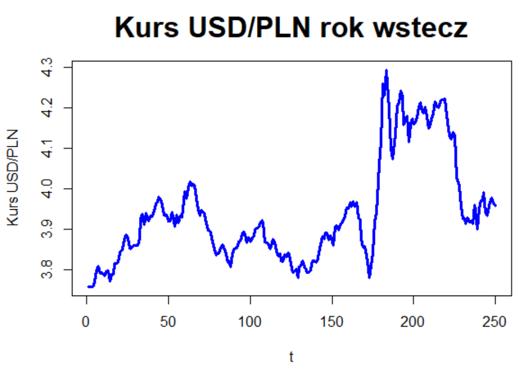
oraz

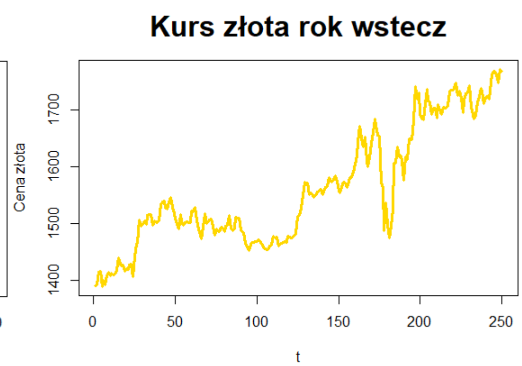
$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_X + \sigma_S\rho_{XS}}{\sigma_Y} = \frac{\sigma_X + \sigma_S\rho_{XS}}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_S^2 + 2\rho_{XS}\sigma_X\sigma_S}}.$$

Kalibracja parametrów modelu

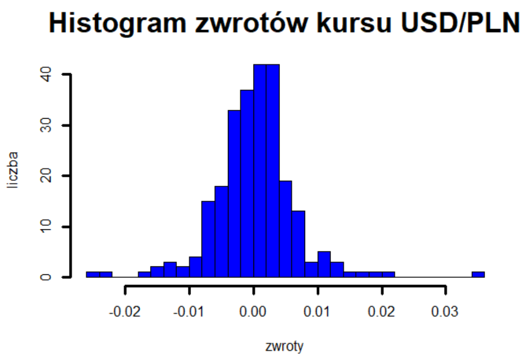
Kalibracja parametrów modelu jest bardzo ważna przy wycenie opcji. Pierwsze pytanie jakie się pojawia, to z jakiego okresu czasu wstecz wziąć historyczne dane, aby dobrze zamodelować, to co będzie się działo z kursem złota, jak i z kursem dolara do złotówki. My postanowiliśmy, że przyjrzymy się danym historycznym z ostatniego roku, ponieważ zamierzamy symulować rok do przodu.

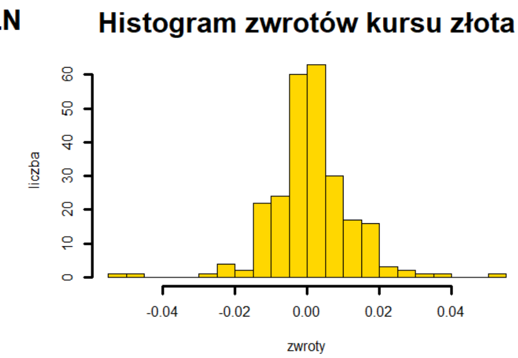
Poniżej możemy zobaczyć jak prezentowały się trajektorie odpowiednio kursu złota oraz kursu dolara do złotówki rok wstecz.





Widzimy, że zarówno jedna jak i druga trajektoria jest bardzo poszarpana oraz na obu wykresach następuje wyraźny skok około 170-180 dnia, co wskazuje na okres około lutego marca, czyli wtedy kiedy wybuchła światowa pandemia związana z SARS-CoV-2. Zobaczmy jak prezentują się histogramy zwrotów.





Widzimy, że histogramy zwrotów przypominają kształtem rozkłady normalne ze średnią w zerze.

Przejdźmy teraz do wyznaczenia parametrów potrzebnych do modelowania ruchu Browna, czyli μ, σ oraz ρ. Najpierw policzyliśmy wartości parametrów dla kursu złota oraz kursu USD/PLN. Wyliczamy je standardowo ze zwrotów.

$\mu_s = 0.2568233$ - średnia zwrotów kursu złota $\sigma_s = 0.1747697$ - zmienność zwrotów kursu złota $\mu_x = 0.05706186$ - średnia zwrotów kursu USD/PLN $\sigma_x = 0.1001554$ - zmienność zwrotów kursu USD/PLN $\rho_{xs} = -0.2086151$ - korelacja kursu USD/PLN do kursu złota

Teraz przejdziemy do policzenia parametrów dla drugiej kropki, to znaczy dla kursu zdenominowanego złoto, czyli złota w złotówkach. Skorzystamy ze wzorów, żeby policzyć te parametry.

$$\mu_y = \mu_s + \mu_x + \sigma_s \sigma_x = 0.3313893$$

- średnia zwrotów zdenominowanego złota

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_s^2 + 2\rho_{xs}\sigma_x\sigma_s} = 0.182407$$

- zmienność zwrotów zdenominowanego złota

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_x + \sigma_s \rho_{xs}}{\sigma_y} = 0.3491961$$

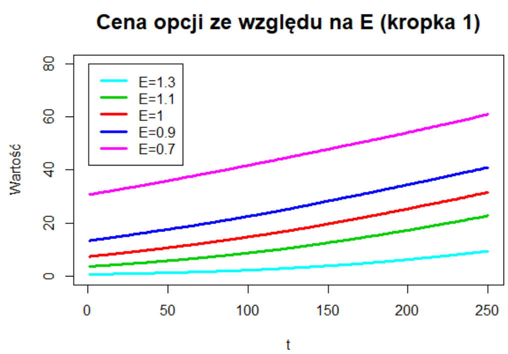
- korelacja kursu USD/PLN do kursu zdenominowanego złota

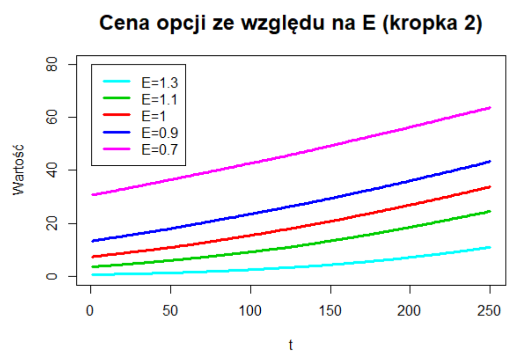
Do końca kalibracji danych pozostało nam ustalenie stóp wolnych od ryzyka "risk free rate" krajowego r i zagranicznego r_f. Zgodnie z datą przyjętą w projekcie, czyli 30 czerwca 2020, znaleźliśmy, że w Polsce risk free rate wynosił 0.0131, a Stanach Zjednoczonych 0.0069. Obie wartości zostały ustalone na podstawie jednorocznych obligacji skarbowych odpowiednie w Polsce i USA. Jak możemy zaobserwować, mamy do czynienia z bardzo niskimi stopami, co wynika oczywiście z tego, że 2020 rok był rokiem pandemicznym.

Analiza wrażliwości ceny opcji ze względu na parametry

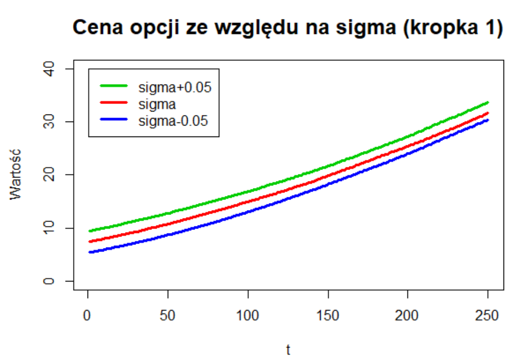
Po skończonej kalibracji danych możemy przejść do analizy ceny opcji w czasie ze względu na poszczególne parametry.

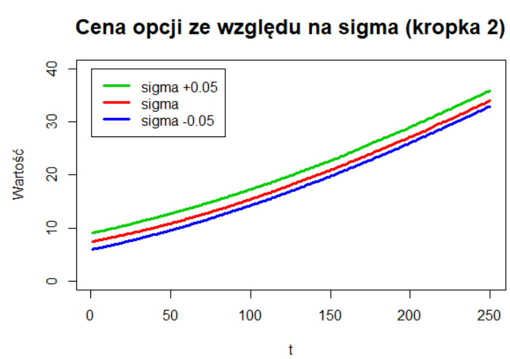
Na początek przyjrzyjmy się jak strike (u nas E) wpływa na cenę opcji. Widzimy, że im większy strike tym mniejsza wartość opcji i tak samo im mniejszy strike tym większa wartość opcji (podobnie jak w europejskiej opcji call). Wynika to z tego, że payoff jest dany stosunkiem kursu złota w chwili końcowej do kursu złota w chwili zero. Więc np. dla $E = 1.3$ oznacza t, że kurs złota musiałby pójść o 30 procent w ciągu roku żebyśmy wykonać tę opcję, a jest to mało prawdopodobne, dlatego cena jest niska.



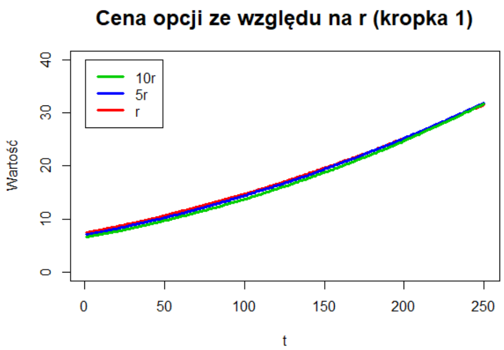


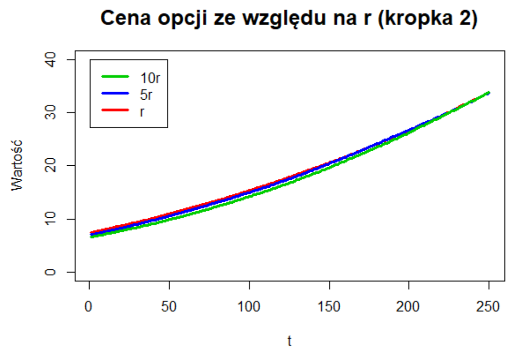
Następnie możemy przejść do parametru σ, czyli zmienność. Tutaj również możemy mieć intuicje z europejskiej opcji call. Większa zmienność oznacza większe wahania, czyli większą szanse na zarobek. Przy kalibracji parametrów przyjęliśmy zmienność na poziomie około 0.17. Widzimy, że jeśli byśmy się pomylili i jednak zmienność wyniosłaby 0.12 lub 0.22 to nie ma znaczącej różnicy, chociaż nie jest ona pomijalna. Porównując z poprzednim projektem, możemy wysnuć wniosek, że w przypadku wyceny tej opcji, zmienność odgrywa mniejszą rolę niż w przypadku poprzedniego projektu.



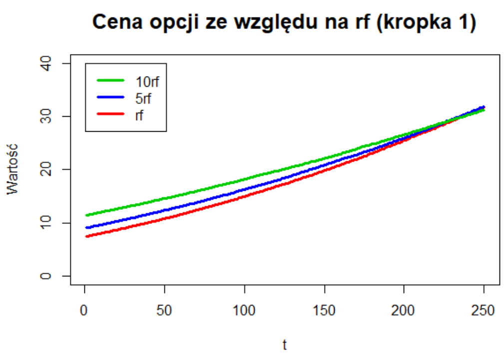


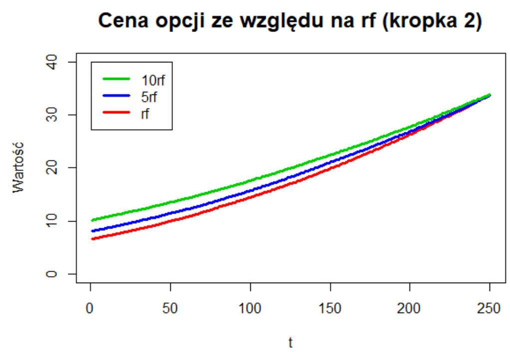
Teraz możemy zobaczyć jak zmiana risk free rate krajowego wpływa na cenę opcji.





Dla zagranicznego risk free rate widzimy, że im jest większy to odrobinę zwiększa się nam cena opcji.





Widzimy, że większy wpływ na cenę opcji ma stopa zagraniczna. Wynika to najprawdopodobniej z tego, że zagraniczna stopa procentowa ma tak jakby większą "wagę" we wzorach na cenę opcji, tzn. jest bardziej istotna. Możemy to zauważyć we wzorze na cenę opcji, że w jednym miejscu r się skraca. Podsumowując, widzimy, że przy obu sposobach wyceny, wyniki wychodzą niemalże identycznie nawet przy zmianie parametrów.

Delta Hedging

Skoro udało nam się wycenić wartość opcji wraz z poznaniem wzorów na eliminację ryzyka z portfela ją zawierającego, to jesteśmy w stanie skonstruować taki portfel, po czym zabezpieczać go delta hedgingiem. Właśnie tym się teraz zajmiemy, rozpoczynając od teoretycznej strony tego przedsięwzięcia. Powiedzmy tylko, że w przeciwieństwie do projektu pierwszego, tym razem postawimy się sytuacji strony, która zakupiła rozpatrywaną opcję quanto (a nie firmą, która ją utworzyła. Nasz portfel jest w związku z tym dalej postaci

$$\Pi = V(S, X, t) - \Delta_X \cdot X - \Delta_S \cdot S \cdot X$$

i przypomnijmy, że dla eliminacji ryzyka przyjmujemy:

$$\Delta_S = \frac{1}{X}\frac{\delta V}{\delta S} \quad , \quad \Delta_X = \frac{\delta V}{\delta X} - \frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S} = -\frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S}$$

co po podstawieniu do portfela daje

$$\Pi = V(S,X,t) - (-\frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S}) \cdot X - (\frac{1}{X}\frac{\delta V}{\delta S}) \cdot S \cdot X$$

$$\Pi = V(S,X,t) + \frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S} \cdot X - \frac{1}{X}\frac{\delta V}{\delta S} \cdot S \cdot X$$

$$\Pi = V(S,X,t) + S\frac{\delta V}{\delta S} - S\frac{\delta V}{\delta S}$$

$$\Pi = V(S,X,t)$$

Oznacza to, że posiadane aktywa nawzajem zerują swoje wartościowe wkłady w portfel i posiadana gotówka będzie musiała sama kontrolować losową zmienność ceny. Będzie to robiła, ponieważ jej ilość wyniknie z zapewniania powyższej eliminacji ryzyka. Aby kontynuować, musimy poznać $\frac{\delta V}{\delta S}$ występujące w Δ_S i Δ_X. Obliczyliśmy już cenę opcji:

$$V = \frac{100}{S_0} \cdot \left(Se^{-D(T-t)}N(d_1) - KS_0 \cdot e^{-r(T-t)}N(d_2)\right)$$

Na bazie której trzeba policzyć pochodną po zmiennej S (dla wygody będzie używali zapisu V_S'). Przeprowadźmy więc rachunki:

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(Se^{-D(T-t)}N(d_1) - KS_0 \cdot e^{-r(T-t)}N(d_2)\right)_S'$$

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(\left(Se^{-D(T-t)}N(d_1)\right)_S' - \left(KS_0 \cdot e^{-r(T-t)}N(d_2)\right)_S'\right)$$

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(e^{-D(T-t)} \cdot (S \cdot N(d_1))_S' - KS_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot (N(d_2))_S'\right)$$

Funkcja $N(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego. Jak wiemy z teorii prawdopodobieństwa, pochodną dystrybuanty jest gęstość, dlatego wprowadzimy na gęstość rozkładu normalnego wygodne oznaczenie $n(x)$. Mamy więc

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(e^{-D(T-t)} \cdot \Big(N(d_1) + S \cdot n(d_1) \cdot (d_1)_S' \Big) - KS_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot n(d_2) \cdot (d_2)_S' \right)$$

Spójrzmy teraz na wyrazy $(d_2)_S'$ i $n(d_2)$. W przypadku tego pierwszego zapiszemy jedynie, że w związku z zależnością $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ otrzymujemy

$$(d_2)_S' = \left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \right)_S' = (d_1)_S'.$$

Drugi natomiast musimy dokładniej rozpisać, przechodząc na początku na jawną postać gęstości standardowego rozkładu normalnego:

$$n(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1 - \sigma\sqrt{T-t})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1)^2 + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_1)^2} \cdot e^{d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} = n(d_1) \cdot e^{d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

Po podstawieniu $d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K \cdot S_0}\right) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ otrzymujemy, że

$$n(d_2) = n(d_1) \cdot e^{\log\left(\frac{S}{K \cdot S_0}\right) + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)} = n(d_1) \cdot e^{\log\left(\frac{S}{K \cdot S_0}\right) + (r-D)(T-t)}$$

$$n(d_2) = n(d_1) \cdot \frac{S}{K \cdot S_0} \cdot e^{(r-D)(T-t)}.$$

Możemy teraz wrócić do wyprowadzania V_S':

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(e^{-D(T-t)} \cdot \Big(N(d_1) + S \cdot n(d_1) \cdot (d_1)_S' \Big) - KS_0 \cdot e^{-r(T-t)} \cdot n(d_1) \cdot \frac{S}{K \cdot S_0} \cdot e^{(r-D)(T-t)} \cdot (d_1)_S' \right)$$

$$V_S' = \frac{100}{S_0} \cdot \left(e^{-D(T-t)} \cdot \Big(N(d_1) + S \cdot n(d_1) \cdot (d_1)_S' \Big) - n(d_1) \cdot S \cdot e^{-D(T-t)} \cdot (d_1)_S' \right)$$

aby finalnie otrzymać, że

$$V_S^{'} = \frac{100}{S_0} \cdot e^{-D(T-t)} \cdot N(d_1).$$

Tak więc w celu delta hedgingu musimy w każdym momencie zapewniać, że

$$\Delta_S = \frac{1}{X}\frac{100}{S_0} \cdot e^{-D(T-t)} \cdot N(d_1) \quad , \quad \Delta_X = -\frac{S}{X}\frac{100}{S_0} \cdot e^{-D(T-t)} \cdot N(d_1)$$

Gotówka

Możemy teraz przejść do konkretnego zaprezentowania jak przebiega nasza procedura. Jak już wspomnieliśmy, poza rozpatrywanymi aktywami, portfel zawiera także gotówkę (jej wartość będziemy symbolizowali przez α). Indeks przy każdej zmiennej będzie wskazywał z którego kroku czasowego jest ona brana (wielkość kroku będzie zależała od ilości dni między rehedgingami). W chwili 0 konstruujemy portfel, tak więc jego wartość wynosi

$$\Pi_0 = V_0 - (\Delta_X)_0 \cdot X_0 - (\Delta_S)_0 \cdot S_0 \cdot X_0.$$

Co oznacza, że początkowa ilość gotówki jest równa

$$\alpha_0 = -V_0 + (\Delta_X)_0 \cdot X_0 + (\Delta_S)_0 \cdot S_0 \cdot X_0.$$

Przechodząc do następnego momentu, zarówno nasza gotówka, jak i posiadane dolary się akumulują:

$$\alpha_0 \to \alpha_0 \cdot e^{r \cdot dt} \quad , \quad (\Delta_X)_0 \to (\Delta_X)_0 \cdot e^{r_f \cdot dt}$$

Oznacza to, że aby zapewnić w chwili 1 chciane $(\Delta_X)_1$ dolarów i $(\Delta_S)_1$ złota, należy zakupić/sprzedać te aktywa za następujące ceny:

$$((\Delta_S)_1 - (\Delta_S)_0) \cdot S_1 \cdot X_1 + \Big((\Delta_X)_1 - (\Delta_X)_0 \cdot e^{r_f \cdot dt}\Big) \cdot X_1$$

Czyli gotówka w drugim momencie przyjmie postać

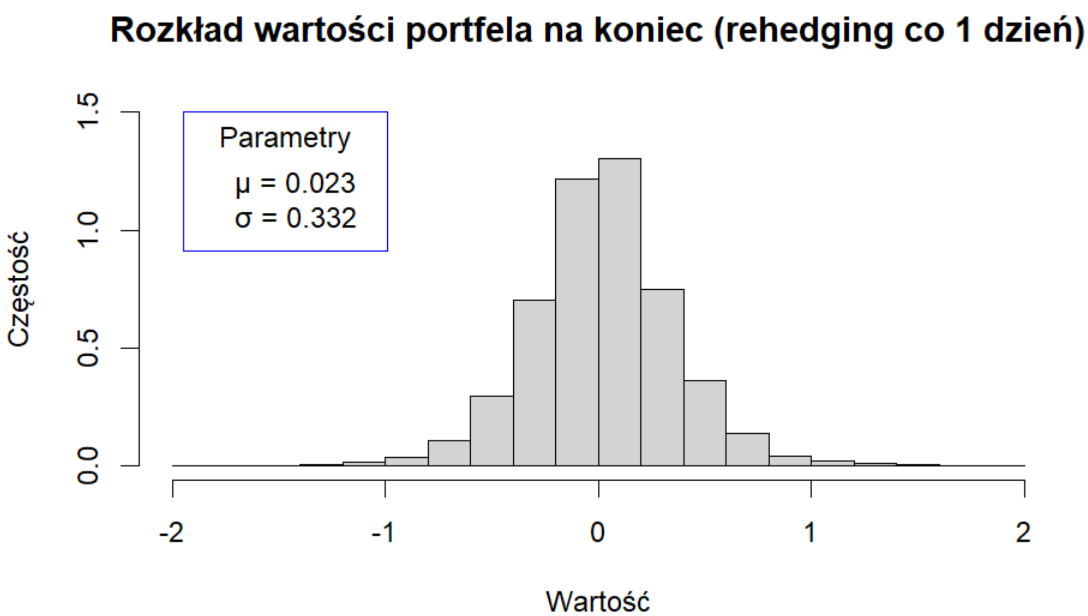
$$\alpha_1 = \alpha_0 \cdot e^{r \cdot dt} - ((\Delta_S)_1 - (\Delta_S)_0) \cdot S_1 \cdot X_1 + \Big((\Delta_X)_1 - (\Delta_X)_0 \cdot e^{r_f \cdot dt}\Big) \cdot X_1.$$

Powyższe przejście z pierwszego do drugiego momentu obrazuje nam zapewnianie delta hedgingu krok po kroku i implikuje rekurencyjny wzór na posiadaną gotówkę, który zgodnie z powyższym jest dany przez

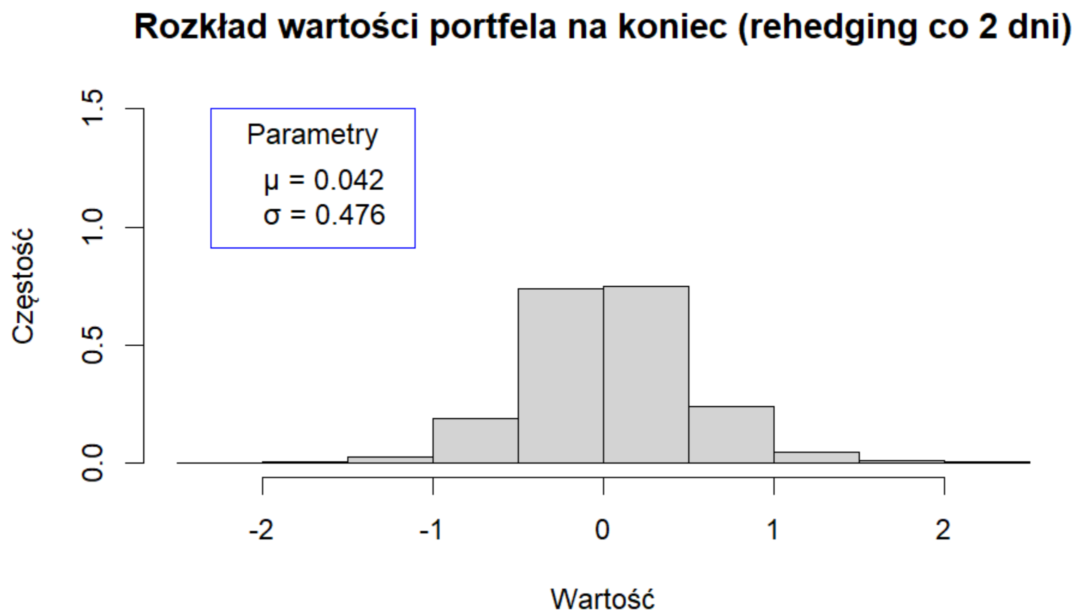
$$\alpha_i = \alpha_{i-1} \cdot e^{r \cdot dt} - ((\Delta_S)_i - (\Delta_S)_{i-1}) \cdot S_i \cdot X_i + \Big((\Delta_X)_i - (\Delta_X)_{i-1} \cdot e^{r_f \cdot dt}\Big) \cdot X_i.$$

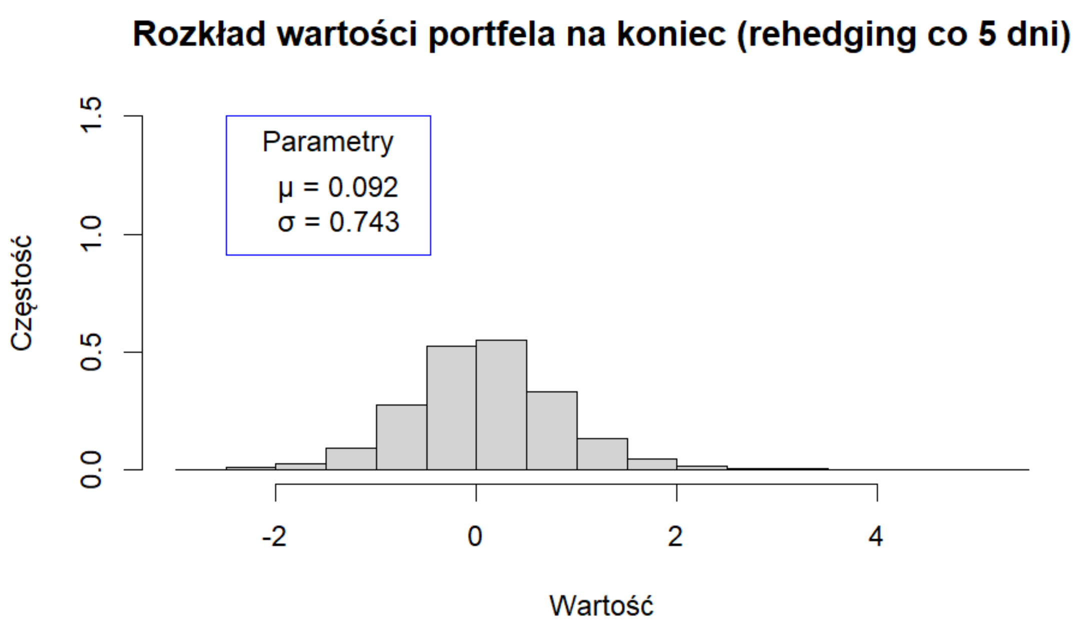
Zastosowanie na symulacjach

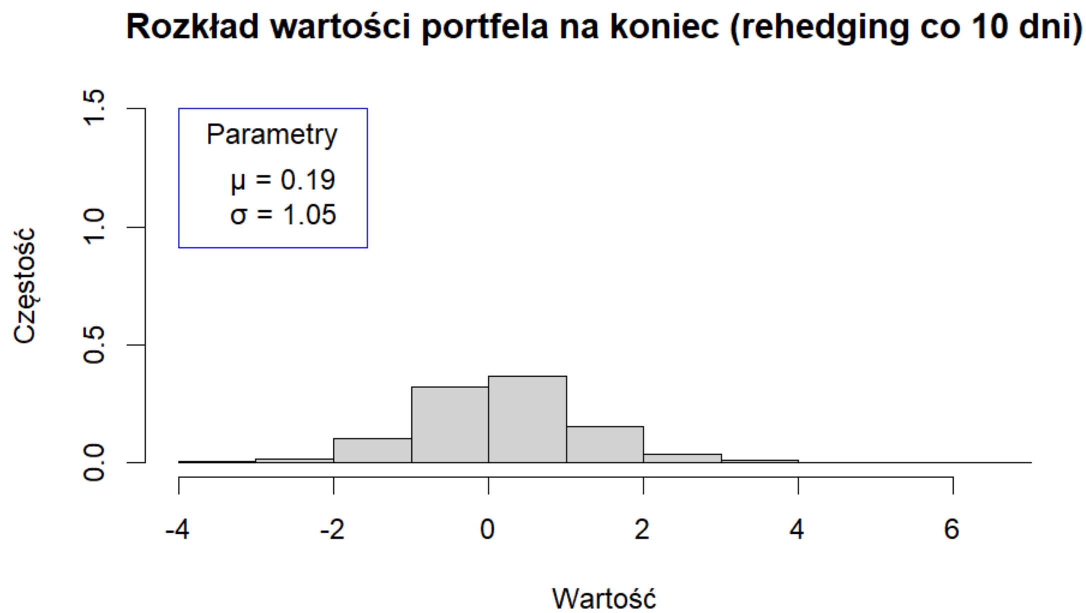
Na początku sprawdźmy efektywność zaprezentowanej metody na symulowanych trajektoriach ceny złota i kursu. Pozostaniemy przy posłużeniu się wykresami tylko z pierwszej kropki, ponieważ tak samo jak w przypadku wyceny, będą one takie same dla drugiej. Naszym celem jest aby średnio wartość portfela wynosiła 0. Przeprowadźmy więc 10000 symulacji, po czym uśrednijmy wyniki wartości portfela na końcu życia opcji w celu sprawdzenia czy udaje się to osiagnąć. Przy okazji zwrócimy także uwagę na odchylenie standardowe tych wartości.

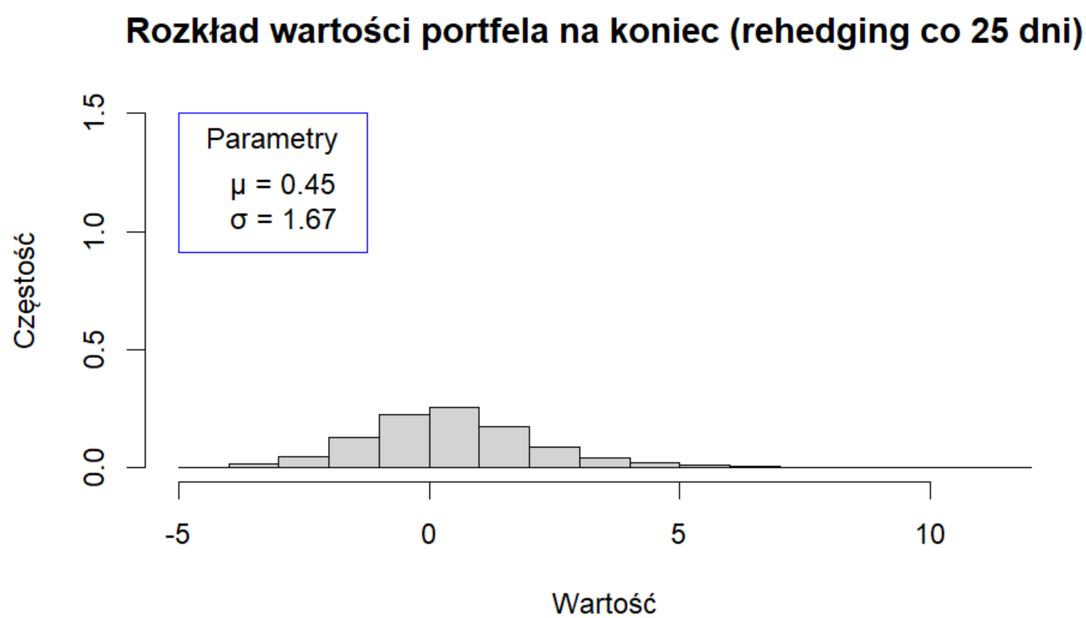


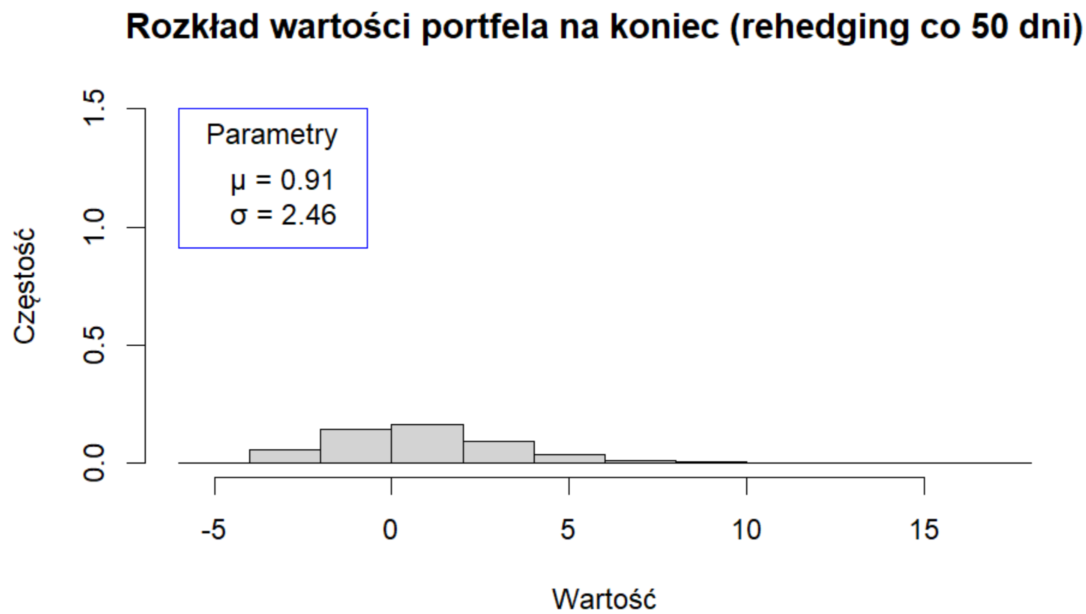
Jak widzimy, rzeczywiście osiagnęliśmy zamierzony cel. Wartości portfela na końcu są skoncentrowane wokół zera, a średnia jest niewiele odległa od tej wartości. Jak za chwilę porównamy, odchylenie standardowe jest również na dość niskim poziomie, więc przeprowadzenie tej operacji wydaje się stosunkowo stabilne. Porównajmy teraz, jak sytuacja zmieni się, gdy zwiększymy odległość między kolejnymi rehedgingami. Wyświetlmy wszystkie wykresy, po czym skomentujmy ogólną tendencję (wszystkie wykresy przedstawiają gęstości całkujące się do jedynki, a dla zauważenia różnic zaprezentowane są na tych samych osiach Y).


Rozkład wartości portfela na koniec (rehedging co 2 dni)
Parametry
μ = 0.042
σ = 0.476
Częstość
0.0
0.5
1.0
1.5
-2
-1
0
1
2
Wartość

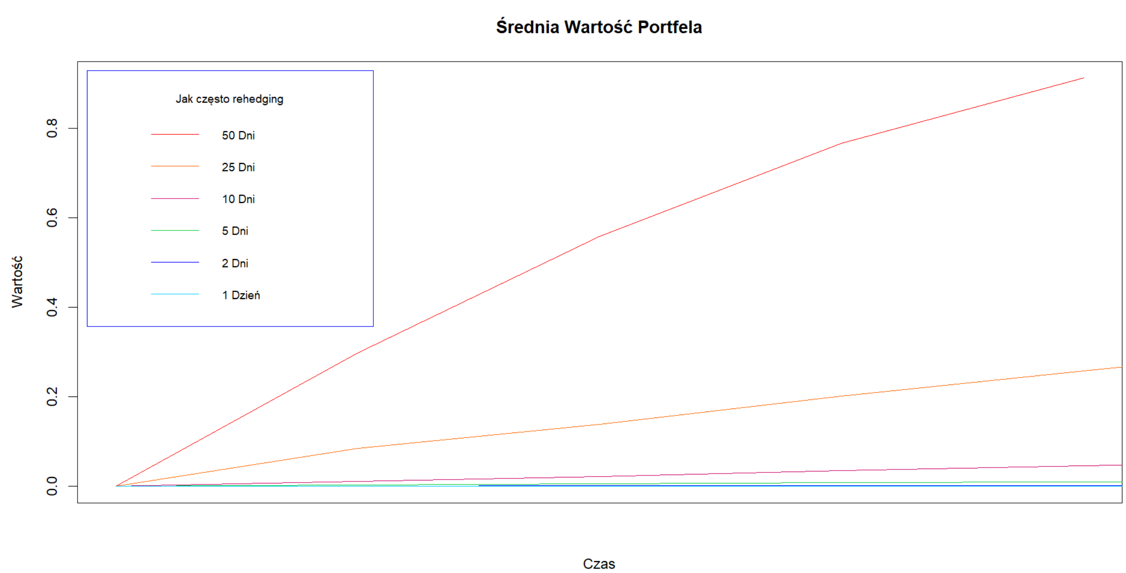

Rozkład wartości portfela na koniec (rehedging co 5 dni)
Parametry
μ = 0.092
σ = 0.743
Częstość
0.0
0.5
1.0
1.5
-2
0
2
4
Wartość

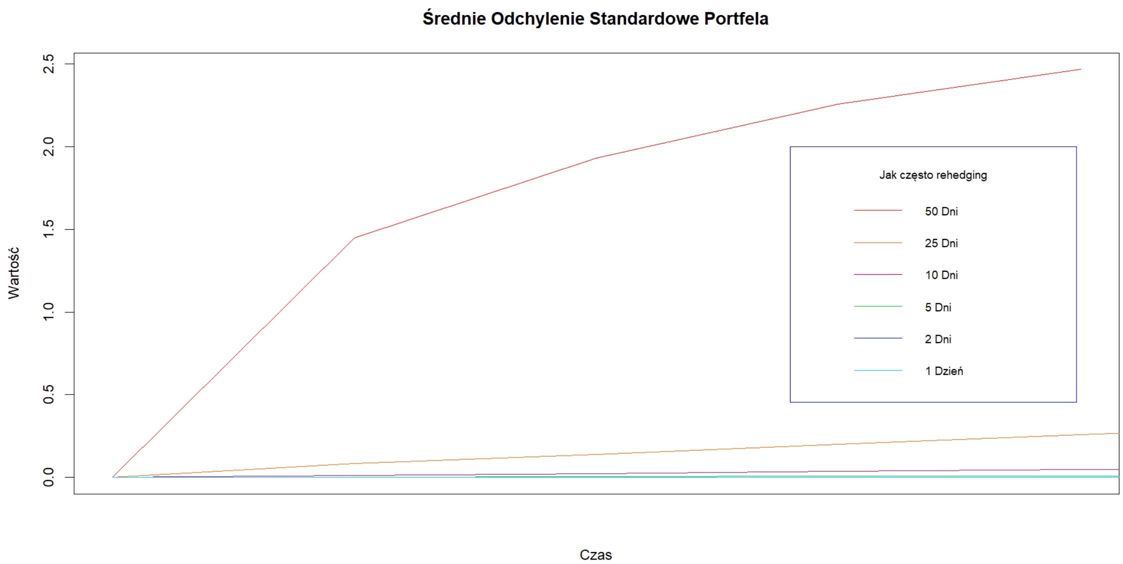

Rozkład wartości portfela na koniec (rehedging co 10 dni)
Parametry
μ = 0.19
σ = 1.05
Częstość
Wartość
0.0
0.5
1.0
1.5
-4
-2
0
2
4
6


Rozkład wartości portfela na koniec (rehedging co 25 dni)
Parametry
μ = 0.45
σ = 1.67
Częstość
Wartość
0.0
0.5
1.0
1.5
-5
0
5
10



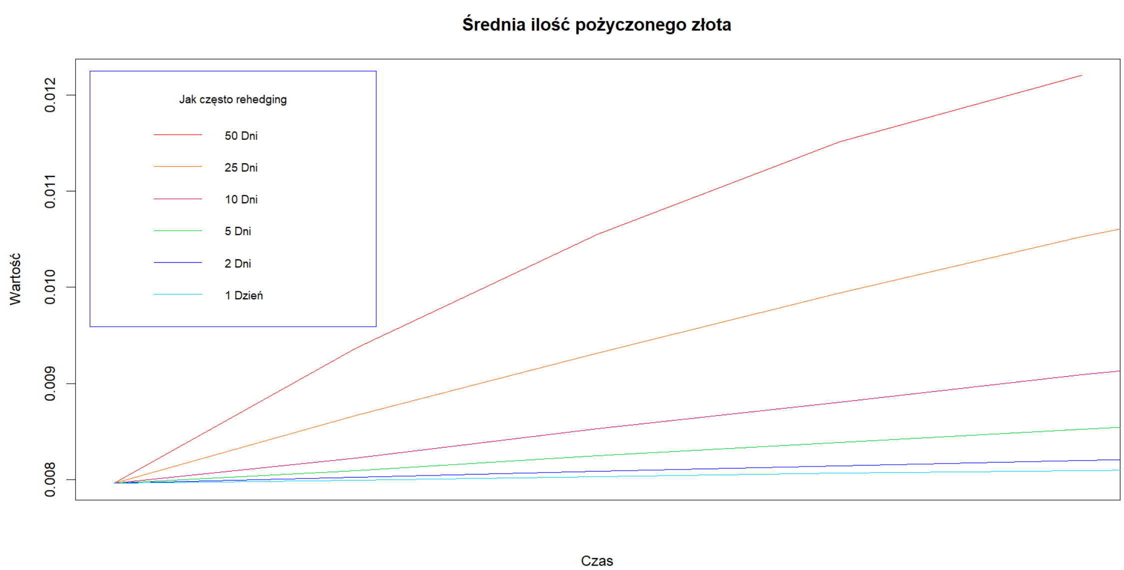
Z powyższej serii wykresów jesteśmy w stanie wyciagnąć wniosek o ogólnej tendencji. Coraz rzadsze rehedgingi poszerzają rozrzut wartości od zera. Ze względu na coraz większą ilość dniu między ostatnim rehedgingiem, a datą zapadalności, powoduje to także oddalenie się średniej od zera, która ze względu na korzystne dla naszej pozycji parametry w symulacjach oznacza otrzymanie wartości dodatnich. Spójrzmy teraz jak porównanie wygląda podczas całego życia portfela

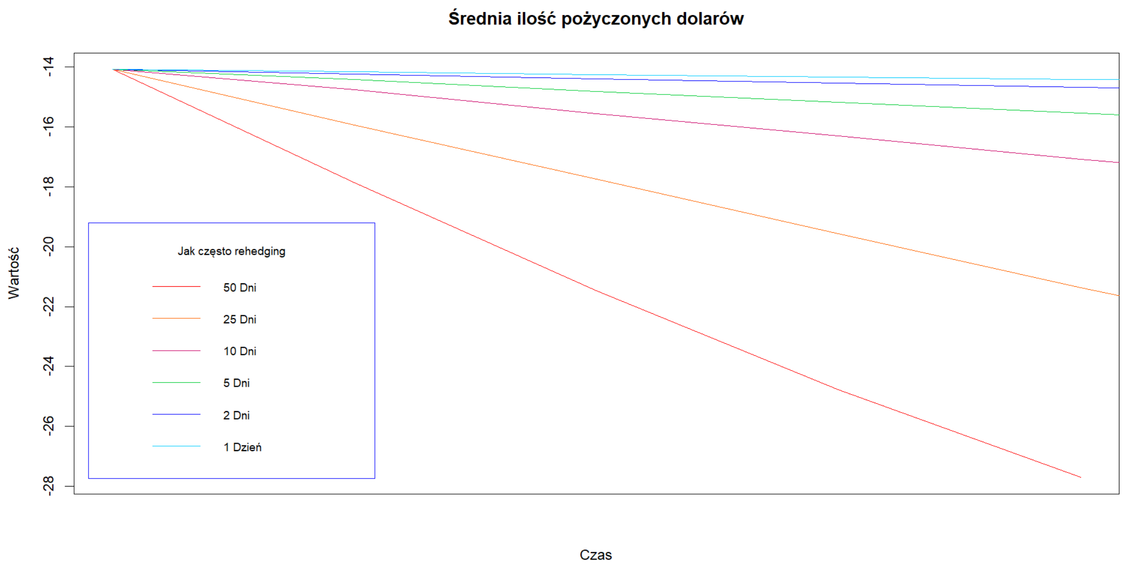


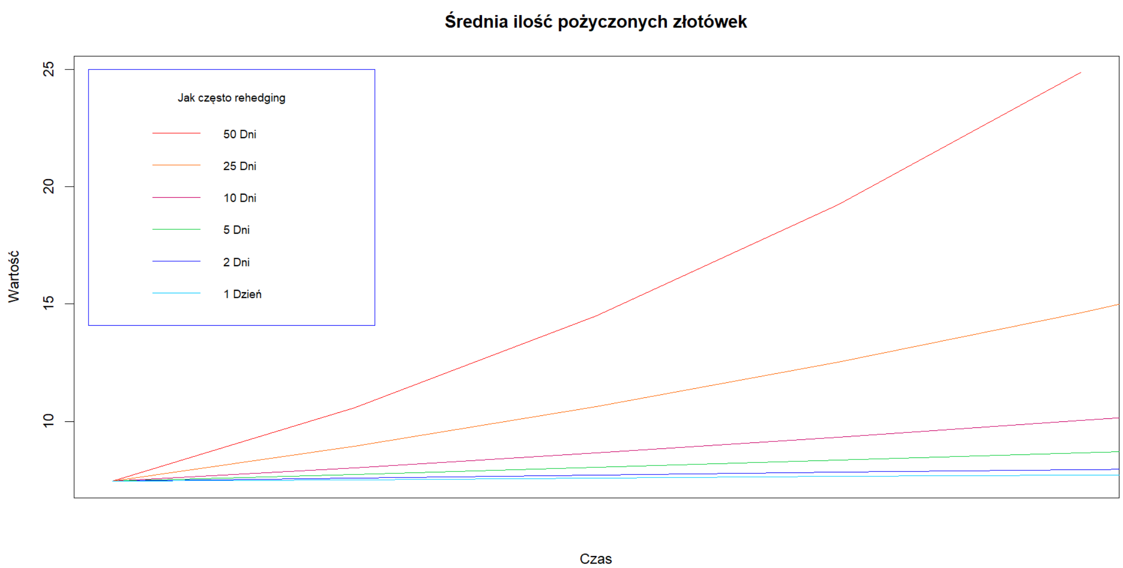


Z powyższych wykresów wynika, że różnica w wynikach między rehedgowaniem do 1, 2 czy 5 dni nie jest znacząca i otrzymywane rezultaty są dość podobne. Dopiero od podejmowania tej czynności co 10 dni wyniki zaczynają się zauważalnie odchylać od pożądanych.

Sprawdźmy teraz jak wyglądał skład naszego portfela podczas rehedgingu. Aby zrozumieć zależności, należy znać postać trzech składników portfela.







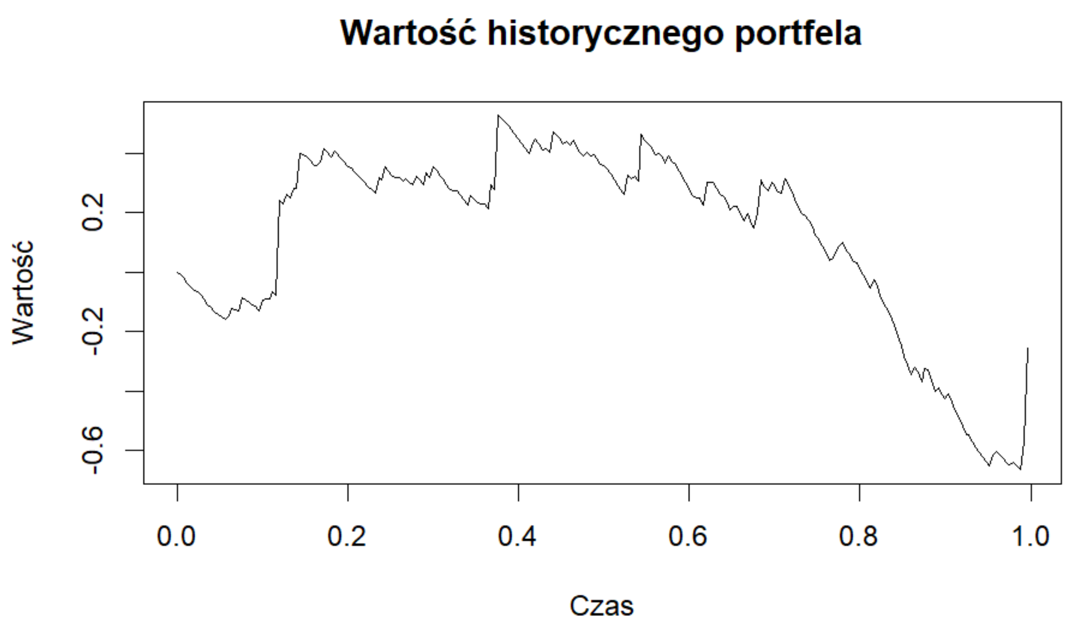
Według tego co zostało powyżej przedstawione, delta hedging bazuje na pożyczaniu złota i posiadaniu (ponieważ tym jest ”ujemne pożyczanie”) pewnej ilości dolarów. Ten stan rzeczy jest zgodny z charakterem naszego instrumentu, ponieważ jest to opcja call, której wykonanie przy skalibrowanych parametrach będzie przeważnie dochodziło do skutku, tak więc short'ujemy złoto i na końcu zamykamy pozycję krótką aktywem uzyskanym z wykonania opcji. W drugą stronę, powiedzieliśmy, że przy dobranych Δ_X i Δ_S złoto i dolary będą nawzajem zerowały swoje wartości w portfelu, więc pożyczenie pierwszego wymusza chęć posiadania drugiego.

Widoczne na ostatnim wykresie zachowanie gotówki potwierdza natomiast tezę stawianą na początku teoretycznego wstępu do delta hedginu. Powiedzieliśmy wtedy, że gotówka będzie musiała kontrować w portfelu wartość ceny opcji, tak więc jej zachowanie powinno być (na minusie $\sim$ pożyczeniu) takie samo jak portfela i rzeczywiście do tego dochodzi.

Widzimy także, że rzadsze rehedgowanie decyduje się na większe posiadanie każdego z aktyw, co skutkuje wspomnianym już zwiększaniem wahaniem rezultatów.

Zastosowanie w realnym świecie

Wiemy już, jak sytuacja wygląda w świecie symulacji, co natomiast ze światem realnym? Spójrzmy na zachowanie wartości portfela w przypadku zastosowania powyższego delta hedgingu (z codziennym rehedgowaniem) do historycznej sytuacji na ryunku, która miała miejsce między trzydziestymi czerwca 2020 i 2021 roku.



Niestety, dla tej szczególnej trajektorii nasz portfel doprowadził nas do poniesienia straty. Konkretnie wartość portfela wyniosła -0.253.

Inna opcja

Rozważmy teraz opcję, która umożliwia nam zakup tego samego aktywa S, czyli złota notowanego w USD, w chwili T za cenę wykonania równą $S(0)X(0)$. Opiszemy payoff tej opcji oraz przedstawimy jej wycenę z dwóch różnych punktów widzenia: inwestora polskiego oraz inwestora amerykańskiego.

Inwestor polski

Z perspektywy inwestora polskiego, payoff tej opcji będzie wyrażał się wzorem

$$\max\left(S(T)X(T) - S(0)X(0), 0\right).$$

Chcemy teraz wyprowadzić wzór na cenę tej opcji. Podobnie jak poprzednio budujemy portfel

$$\Pi = V(S,X,t) - \Delta_X \cdot X - \Delta_S \cdot S \cdot X.$$

Następnie patrzymy na przyrosty oraz korzystamy z wielowymiarowej formuły Itô i otrzymujemy

$$d\Pi = \left(\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} XS \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} - \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} XS \Delta_S - \Delta_X r_f X\right) dt$$

$$+ \left(\frac{\delta V}{\delta X} - \Delta_X - \Delta_S S\right) dX + \left(\frac{\delta V}{\delta S} - \Delta_S X\right) dS.$$

Widzimy więc, że aby wyeliminować z portfela ryzyko, należy przyjąć

$$\Delta_S = \frac{1}{X}\frac{\delta V}{\delta S} \quad \Delta_X = \frac{\delta V}{\delta X} - \frac{S}{X}\frac{\delta V}{\delta S}.$$

Portfel jest wolny od ryzyka, przyrost jest równy akumulacji, co ostatecznie daje

$$\frac{\delta V}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma_X^2 X^2 \frac{\delta^2 V}{\delta X^2} + \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} XS \frac{\delta^2 V}{\delta X \delta S} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\delta^2 V}{\delta S^2} + X\frac{\delta V}{\delta X}(r - r_f)$$

$$+ S\frac{\delta V}{\delta S}(r_f - \rho_{XS}\sigma_X\sigma_S) - rV = 0$$

Możemy zastosować podstawienie $Z = \frac{S}{X}$. Wtedy poszczególne pochodne to Spójrzmy jak wyrażają się poszczególne pochodne w terminach zmiennej Z:

$$\frac{\delta V}{\delta X} = \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{-S}{X^2}$$

$$\frac{\delta V}{\delta S} = \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta S^2} = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{1}{X^2}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta X^2} = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{S^2}{X^4} + \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{2S}{X^3}$$

$$\frac{\delta^2 V}{\delta X \delta Y} = \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \cdot \frac{-S}{X^3} - \frac{\delta W}{\delta Z} \cdot \frac{1}{X^2}.$$

Podstawiając $Z = \frac{S}{X}$ oraz powyższe pochodne otrzymujemy

$$0 = \frac{\delta W}{\delta t} + \frac{\delta^2 W}{\delta Z^2} \frac{1}{2} Z^2 \left(\sigma_X^2 - \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} + \sigma_S^2\right) + \frac{\delta W}{\delta Z} Z \left(r - \left(2\sigma_X \sigma_S \rho_{XS} - \sigma_X^2 + 2r - 2r_f\right)\right) - rW.$$

Jest to standardowe równanie Blacka-Scholesa z ciągłą dywidendą, w którym

$$\sigma = \sqrt{\sigma_X^2 - \sigma_X \sigma_S \rho_{XS} + \sigma_S^2} \quad , \quad D = 2\sigma_X \sigma_S \rho_{XS} - \sigma_X^2 + 2r - 2r_f,$$

tak więc

$$V(X, S, t) = SXe^{-D(T-t)} N(d_1) - S(0)X(0)e^{-r(T-t)} N(d_2),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\log \frac{S}{XS(0)X(0)} + \left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

co jest szukaną przez nas ceną opcji.

Inwestor amerykański

Z perspektywy inwestora amerykańskiego, payoff tej opcji będzie wyrażał się wzorem

$$\max\left(S(T) - \frac{S(0)X(0)}{X(T)}, 0\right).$$

Można zauważyć, że jest to instrument typu "exchange option". Wilmott w rozdziale 11.6 opisuje jak wycenić tą opcję. Są to bardzo podobne rachunki do tych, które już tutaj widzieliśmy. Przyjmując oznaczenia takie jak u Wilmotta $S_1 = S, S_2 = \frac{1}{X}, q_1 = 1, q_2 = S(0)X(0)$, cena opcji będzie wyrażona następujacym wzorem

$$V(S_1, S_2, t) = q_1 S_1 e^{-D_1(T-t)} N(d_1) - q_2 S_2 e^{-D_2(T-t)} N(d_2),$$

gdzie

$$d_1 = \frac{\log\left(q_1 S_1 / q_2 S_2\right) + \left(D_2 - D_1 + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad , \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

oraz $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 - 2\rho_1 2\sigma_1 \sigma + \sigma_2^2}$

Dla obu instrumentów uwzględniono tutaj stopę dywidendy ciągłej. W naszym przypadku złoto notowane w USD nie posiada dywidendy, czyli $D_1 = 0$. Natomiast odsetki jakie otrzymujemy z posiadania dolarów możemy właśnie traktować jako dywidendę.