# Delta i gamma hedging

Daria Dziuba, Erwin Jasic, Michał Syposz

Listopad 2021

## 1 Wstęp

W projekcie będziemy pracować nad delta i gamma hedgingiem. Przybliżymy znaczenie tych pojęć oraz pokażemy ich zastosowanie w świecie abstrakcyjnym i realnym. Będziemy zakładać, że dziś jest 1 stycznia 2017 roku.

## 2 Część 0

### 2.1 Trajektorie WIG20

Zasymulujemy przyszłe trajektorie WIG20 od dziś do końca roku z dobraną zmiennością i dryfem na podstawie danych historycznych, a następnie porównamy je z historycznymi trajektoriamii WIG20.

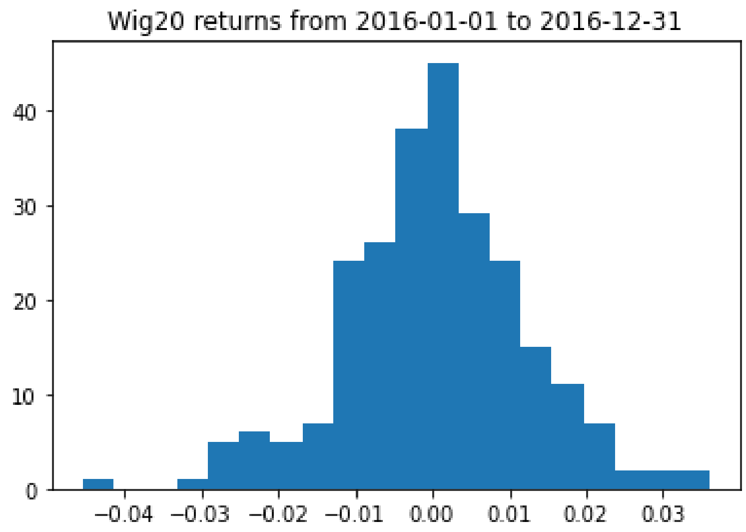
Na początek obliczamy zwroty dzienne ze wzoru

$$R_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}.$$

Do wyliczenia zmienności i dryfu użyjemy

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(M-1)\delta t}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2}, \qquad \mu = \frac{1}{M\delta t}\sum_{i=1}^{M} R_i.$$

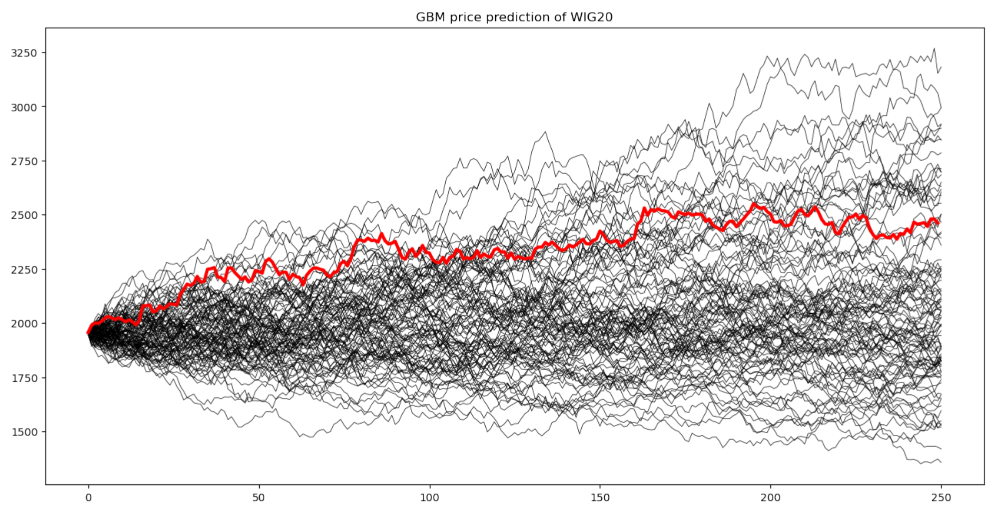
Średnią oraz odchylenie standardowe wyliczyliśmy na podstawie roku 2016.




Przyszłe 100 trajektorii WIG20 na rok 2017 symulujemy z Geometrycznego Ruchu Browna

$$S_{i+1} = S_i + \mu S_i + \sigma S_i N(0, 1),$$

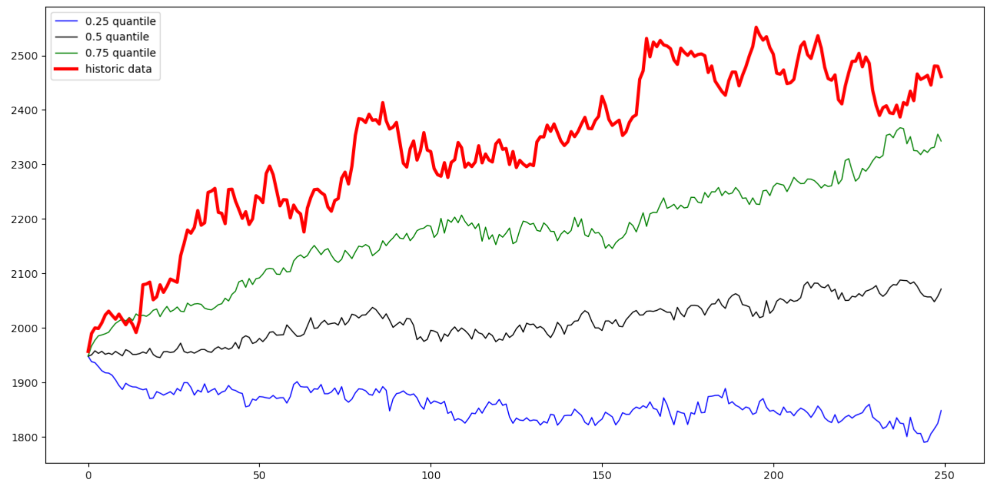
które wyglądają następująco



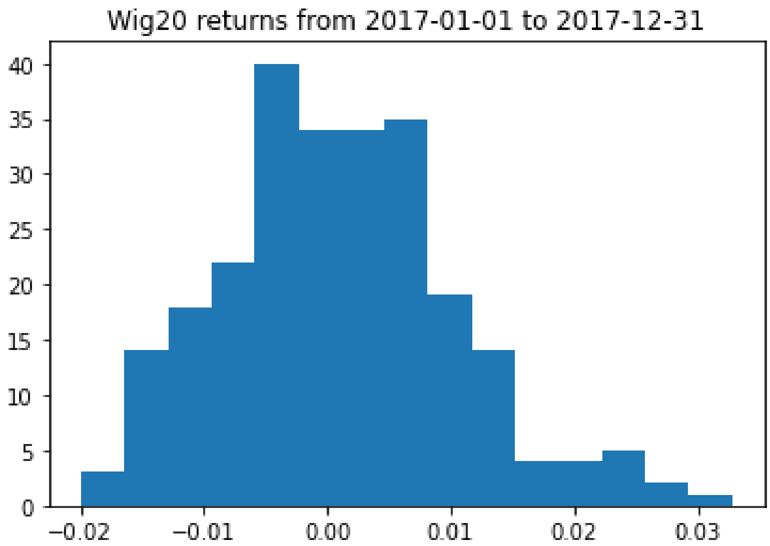

Widzimy, że im dalej tym trajektorie są mniej gęste niż na początku oraz bardziej rozległe w czasie? (nwm czy to ma sens co pisze)

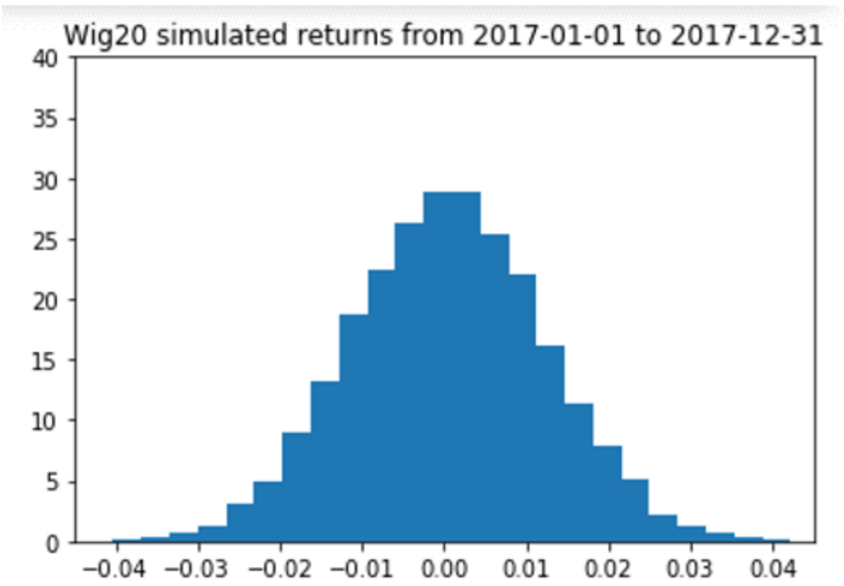
## 2.2 Linie kwantylowe

Na poniższym wykresie zaprezentowano linie kwantylowe dla Geometrycznego Ruchu Browna.




## 2.3 Porównanie histogramów historycznych zwrotów z trajektoriami

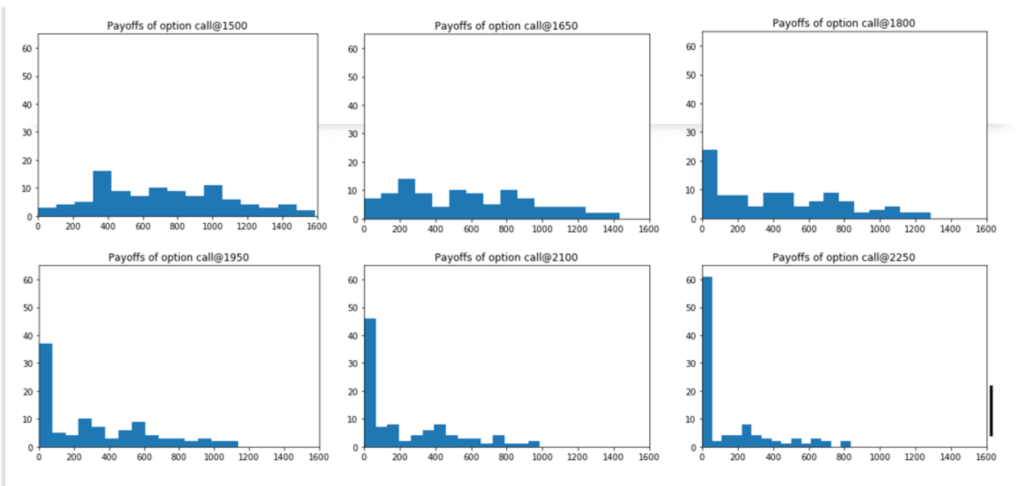




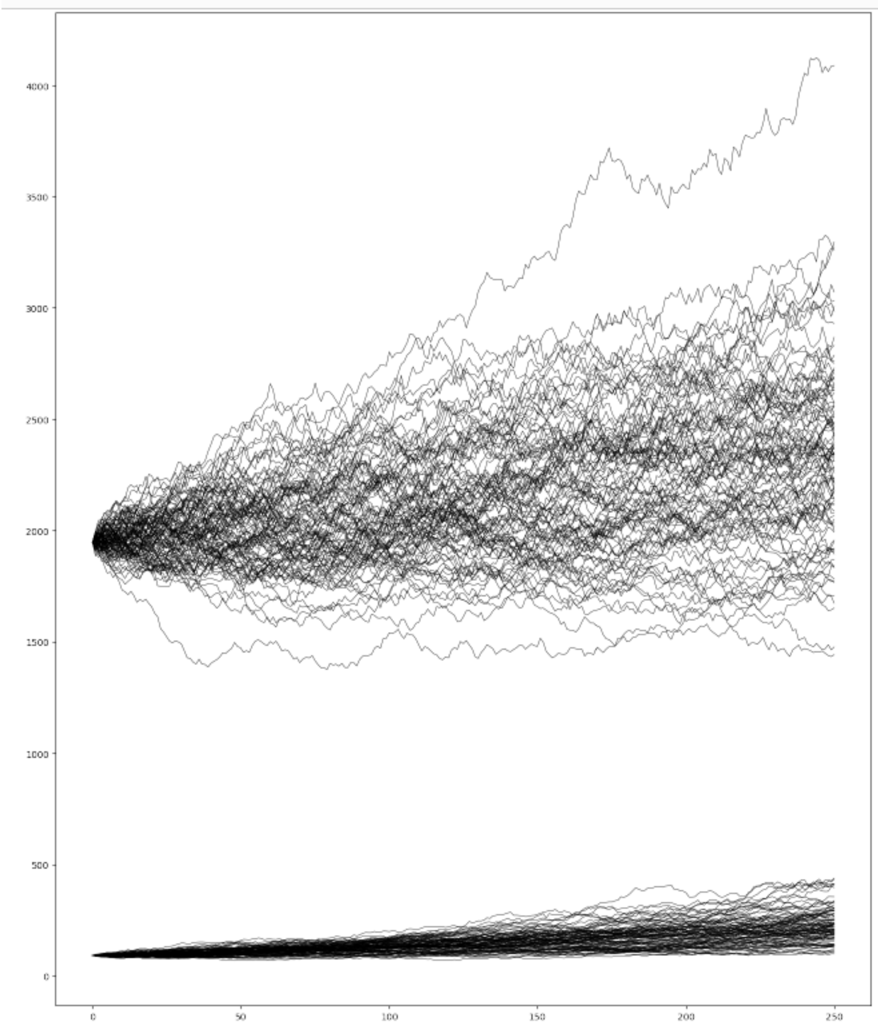

Wygenerowane trajektorie przypominają rozkład normalny.

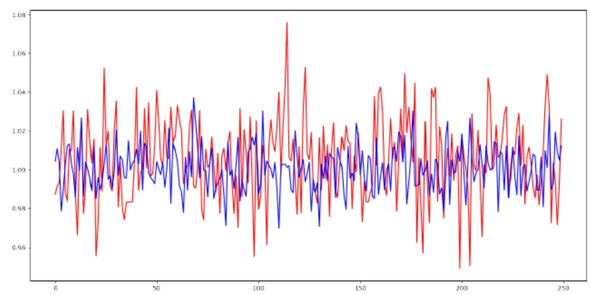
## 2.4 Histogramy payoffów dla opcji zapadających w grudniu

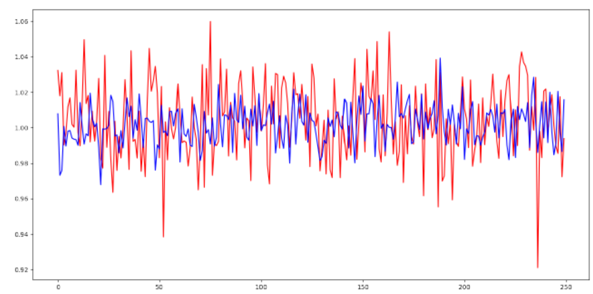
Powyżej znajdują się histogramy dla wygenerowanych trajektorii z ruchu brown'a. Najwięcej trajektorii występuje w okolicach wartości 1950.

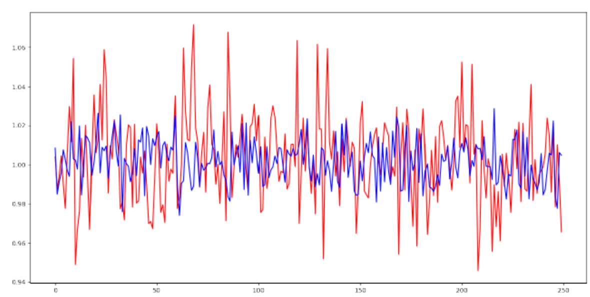


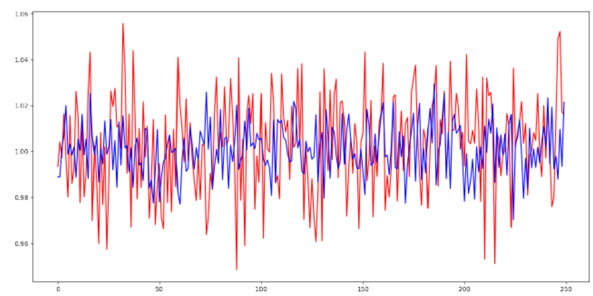
## 2.5 Symulacja KGHM + WIG20



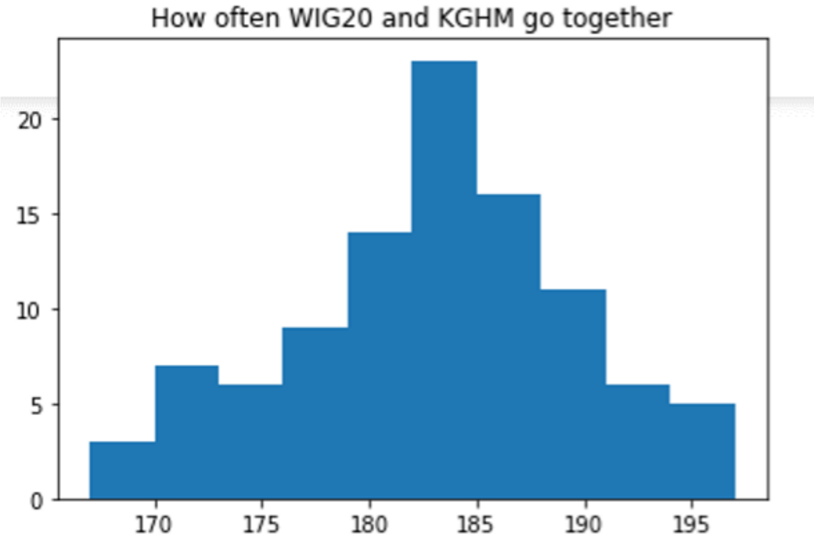









Widzimy, że trajektorie KGHMu zachowują się bardziej niestabilnie niż trajektorie WIGu. Dodatkowo, trajektorie KGHMu i WIGu nakładają się, a poniższy histogram obrazuje jak często to się dzieje.




## 2.6 Ustalenie wolnej stopy od ryzyka

Stopą wolną od ryzyka określimy stopę zwrotu z instrumentów finansowych z zerowym ryzykiem. Czyli inaczej minimalny zysk, który można uzyskać poprzez inwestowanie w instrumenty finansowe bez ryzyka niewykonania zobowiązań.

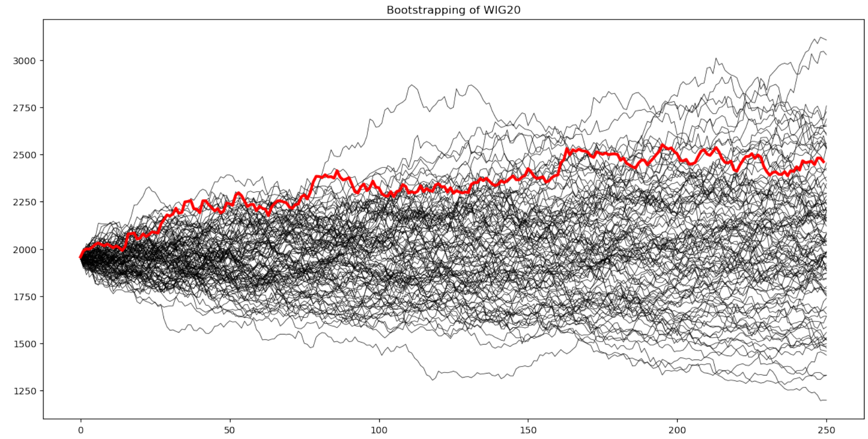
Naszą wolną stopą od ryzyka będzie średnia z z rentowności obligacji 1,2, 5 i 10-letnich, która po obliczeniach wynosi 2.7%. Ze względu na długość czasu w którym modelujemy WIG20 musimy wziąć pod uwagę obligacje roczne i dwuletnie. Obligacje 5-letnie oraz dziesięciolatki bierzemy pod uwagę, ponieważ nic w danym okresie czasu nie sugerowało problemu z wypłacalnością tych długów.

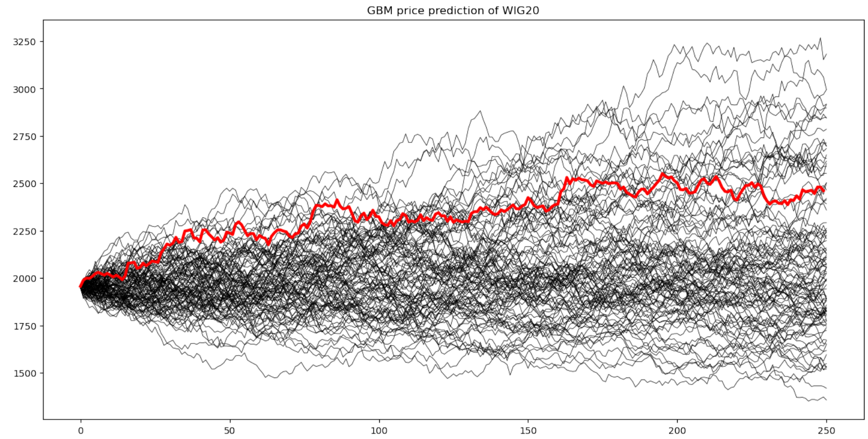
## 2.7 Bootstrapping WIG20

Przewidywalne ceny akcji za pomocą bootstrappingu obliczamy ze wzoru

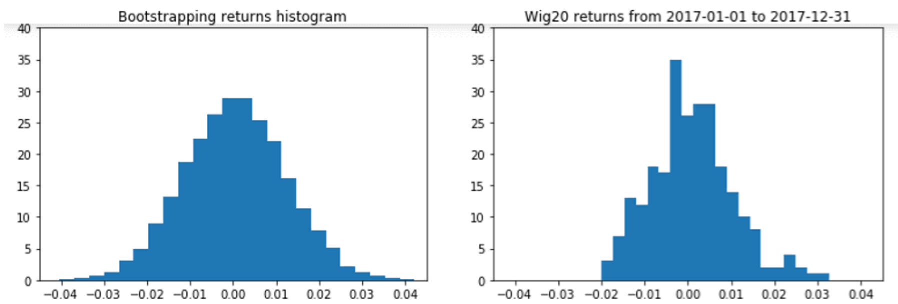
$$S_{t+1} = S_t + S_t * h(1, 500),$$

gdzie $h$ to losowy historyczny zwrot.

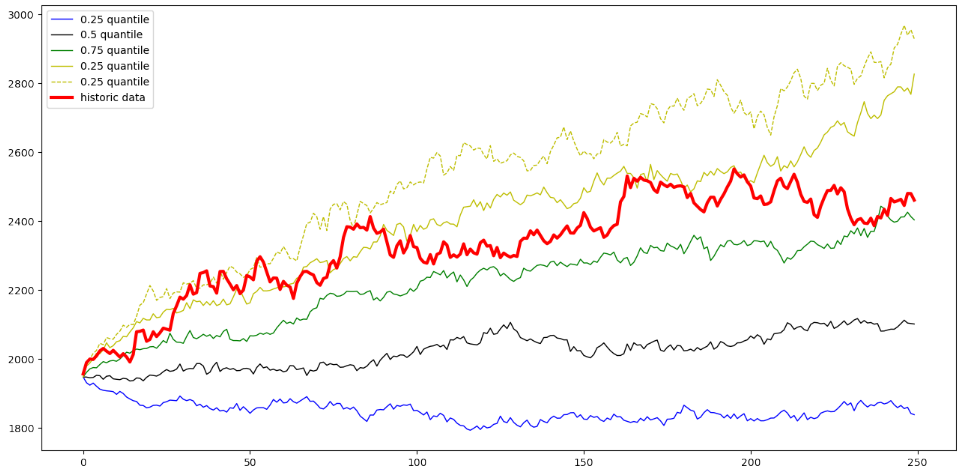


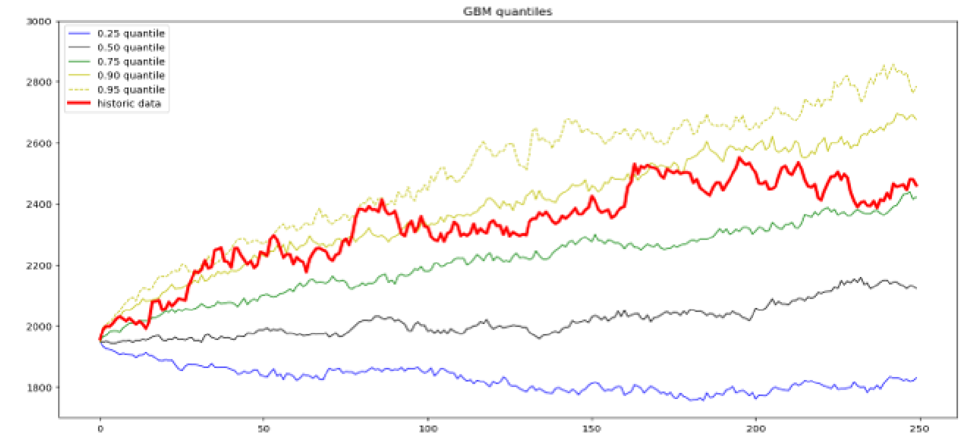

Porównując wykresy przewidywalnych cen WIG20 metodą boostrappingu oraz geometrycznym ruchem, możemy stwierdzić, że w bootstrappingu trajektorie są gęstsze niż w GBM.




Linie kwantylowe dla metody bootstrappingu i geometrycznego ruchu brown'a wyglądają następująco




Widzimy, że różnią się od siebie minimalnie.




# 3 Właściwe zadanie

Handlujemy opcjami europejskimi call i put na WIG20. Możemy skorzystać z wszystkich z wszystkich opcji występujących na GPW, które zapadają w grudniu 2017. Zabezpieczamy je przy pomocy indeksu oraz inwestycji wolnej od ryzyka. W części A zastosujemy delta-hedging, a w części B gamma-hedging.

Pokażemy wyniki dla świata rzeczywistego i abstrakcyjnego.

# 4 Część A - Delta Hedging

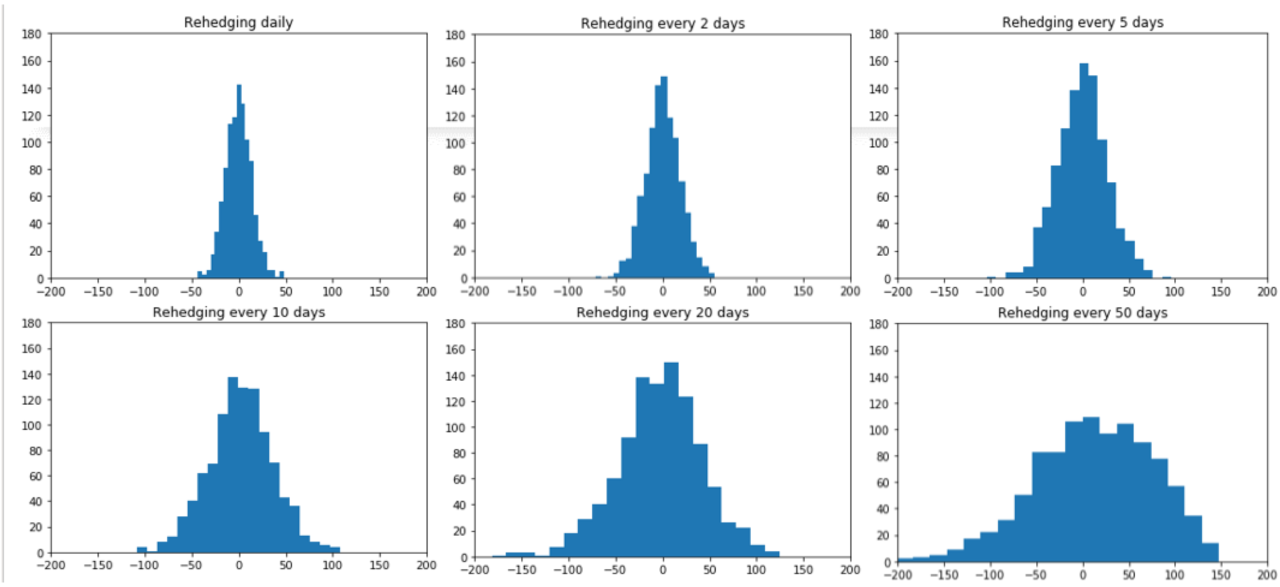
Zabezpieczymy opcję call@2000 przy pomocy delta-hedgingu, czyli będziemy starali się utrzymać deltę jak najbliżej 0. W skład takiego portfela wchodzi pewna ilość akcji (indeks wig20), gotówka oraz zabezpieczana opcja (tutaj call@2000).

## 4.1 Świat abstrakcji

W tym rozdziale przyjrzymy się jak dobrze jesteśmy w stanie zabezpieczyć opcję call@2000 (również put@2000) oraz odpowiemy na pytanie jak częstotliwość rehedgingów wpływa na nasz zysk/stratę.

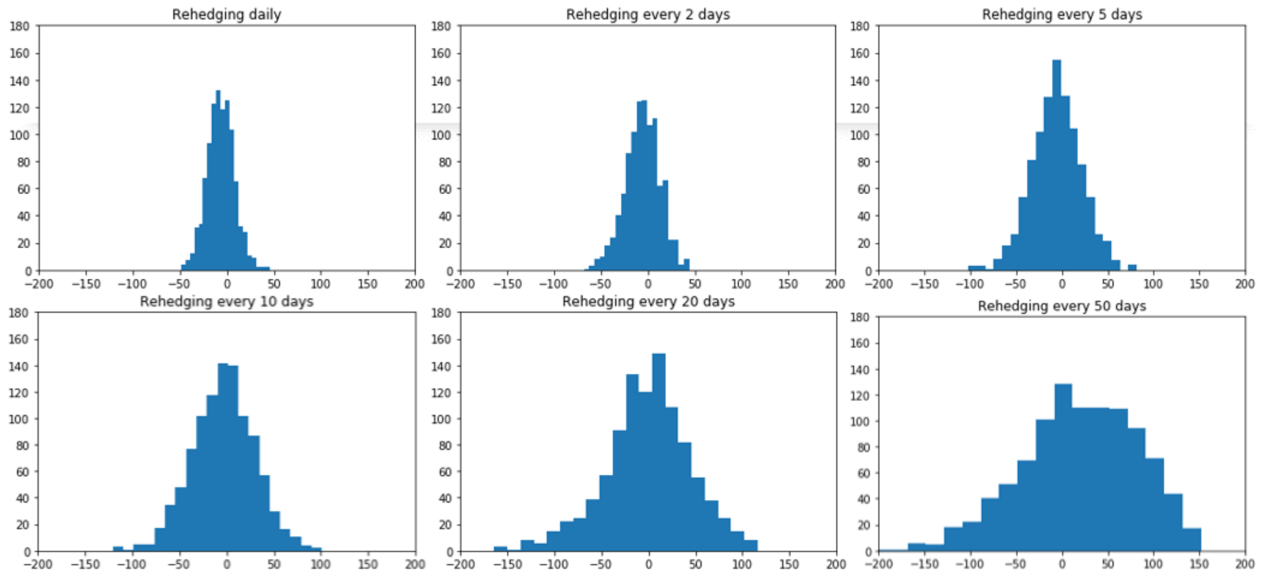
### Opcja call@2000

Poniżej widzimy wygenerowane histogramy dla próbki 1000 trajektorii z geometrycznego ruchu Browna dla różnej częstotliwości rehedgingów. Możemy zauważyć, że średnia w każdym przypadku jest bliska 0, ale wariancja zwiększa się wraz ze zmniejszaniem się częstotliwości rehedgingu, co z kolei oznacza duże ryzyko związane z tym sposobem zabezpieczania portfelu, które raczej chcemy minimalizować.



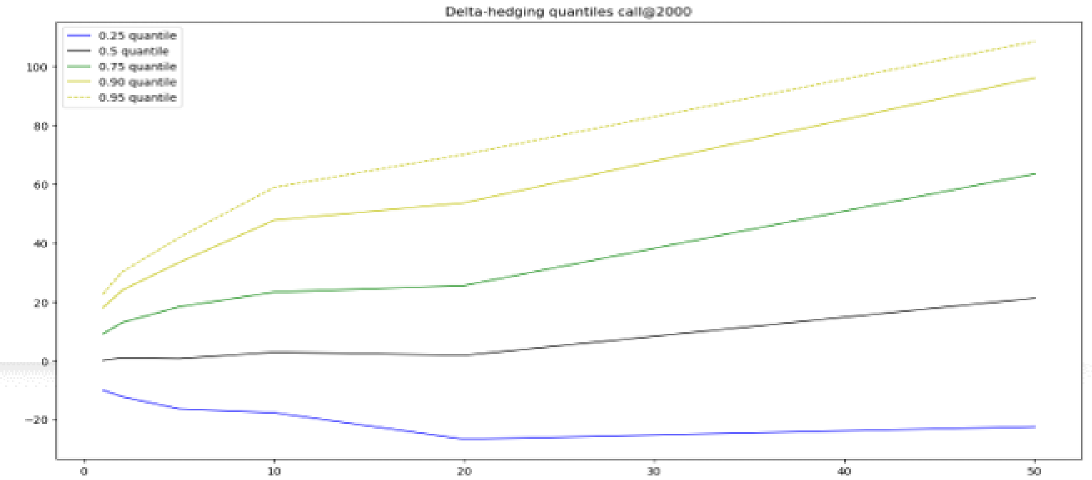
## Opcja put@2000

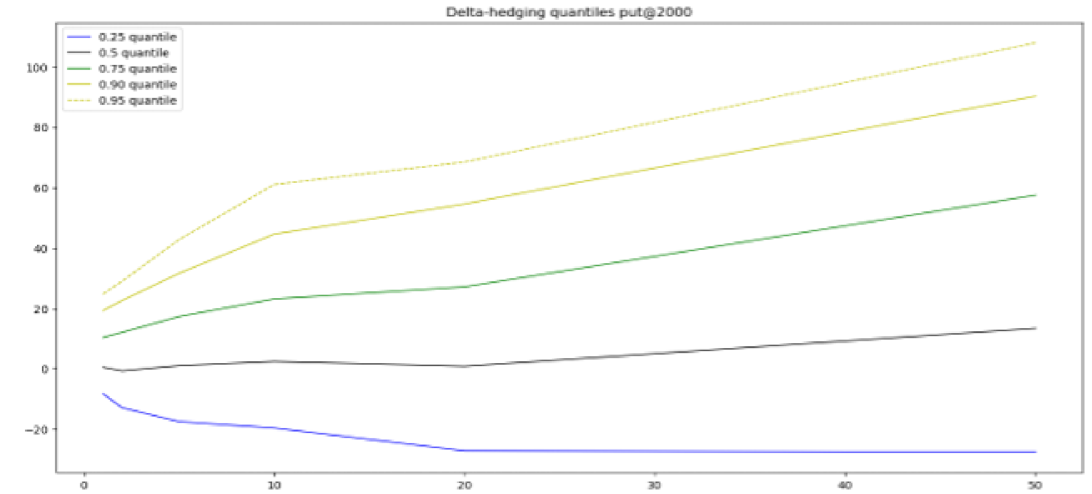
Dla opcji put@2000 możemy zaobserwować podobne zachowanie, choć średnia wydaje się być delikatnie mniejsza niż 0. Poniżej wygenerowane histogramy dla opcji put@2000 w zależności od częstotliwości rehedgingów.



### Kwantyle zysku/straty dla call i put

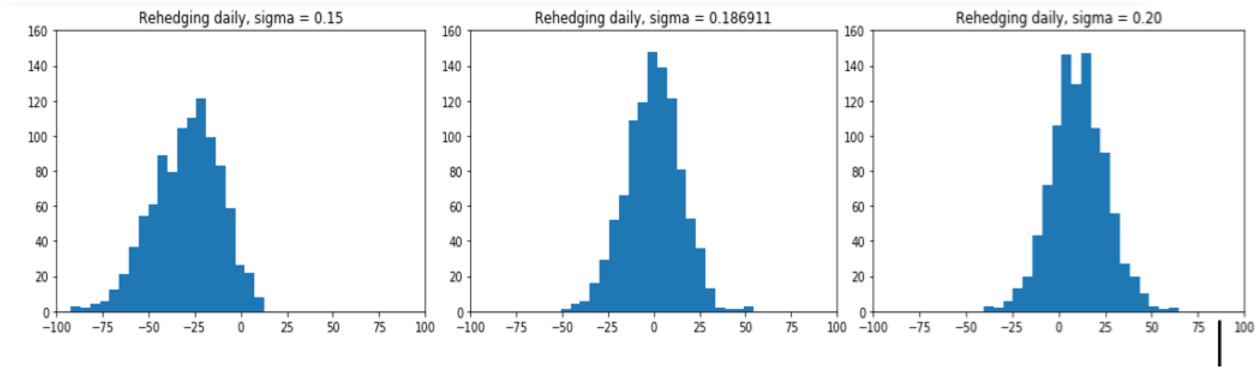
Aby jeszcze lepiej porównać i zrozumieć charakter histogramów zysku/strat, możemy popatrzeć na kwantyle w zależności od częstotliwości rehedgingów. Pierwszy wykres przedstawia kwantyle dla opcji call@2000, a drugi dla opcji put@2000. Widzimy, że kwantyle układają się dosyć podobnie.




### Premia za ryzyko

Zauważmy, że nasze rozważania dotyczące zabezpieczenia opcji są netto, czyli nie przewidujemy dla siebie żadnego wynagrodzenia. Jednym z najtrudniejszych parametrów do przewidzenia jest zmienność w geometrycznym ruchu Browna dla indeksu WIG20. W tym projekcie na rok 2017 przyjęliśmy sigmę na poziomie z roku 2016 i na tej podstawie wyliczyliśmy między innymi wartość opcji call@2000, którą zabezpieczamy. Co w przypadku gdy się pomyliliśmy i źle dobraliśmy sigme, co w konsekwencji poskutkowało nieprawidłowym wyznaczeniem ceny opcji, którą zabezpieczamy? Okazuje się, że dużo lepiej (przynajmniej w teoretycznym modelu) pomylić się w stronę, gdzie sigma jest większa niż w rzeczywistości. Poniższe histogramy przedstawiają zysk/stratę z delta-hedgingu z codziennym rehedgingiem w zależności od przyjętej sigmy (prawdziwa na środkowym histogramie, brak pomyłki).



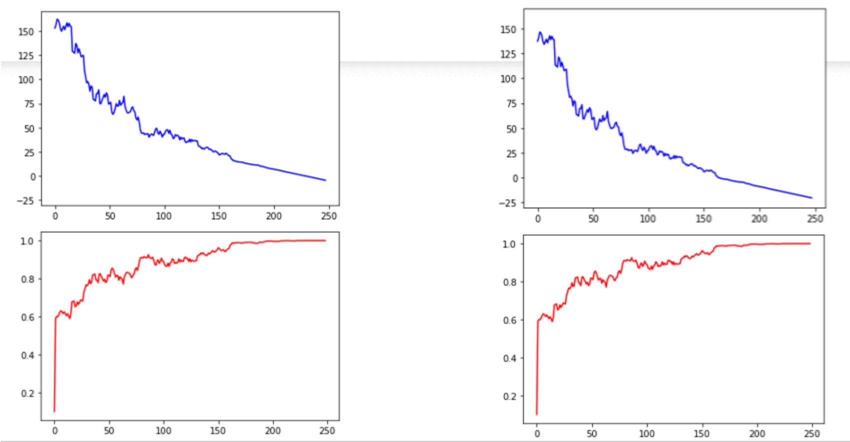

## 4.2 Świat rzeczywisty

### Zysk/strata w zależności od rehedgingów

Na konkretnej trajektorii historycznej WIG20 otrzymaliśmy następujące wyniki dla zysku/straty w zależności od częstotliwości rehedgingów. Widzimy, że wyniki są raczej losowe i niewiele nam mówią.

| Co ile dni rehedging | Call@2000 | Put@2000 |
|---|---|---|
| 1 | -4.582 | -20.649 |
| 2 | -10.050 | -25.877 |
| 5 | -6.665 | -21.767 |
| 10 | -0.768 | -14.661 |
| 20 | -6.126 | -17.617 |
| 50 | -35.888 | -40.137 |

### Skład portfela call@2000 i put@2000 w czasie przy codziennym rehedgowaniu



# 5 Część B - Gamma Hedging

Zakładamy, że żyjemy w świecie abstrakcji jak w części A i chcemy zabezpieczyć opcję call z ceną wykonania 2000 zapadającą w grudniu. Zabezpieczamy ją za pomocą indeksu WIG20 oraz opcji binarnych z cenami wykonania od 1500 do 2950 rosnącymi co 25 (mamy 116 opcji). Opcje binarne oraz indeks możemy kupować oraz sprzedawać, a zmiany w portfelu wykonywane są co 5 dni. 0.4%.

### Czym jest gamma hedging?

Gamma hedging będziemy stosować do zmniejszenia rozmiaru każdego rehedgingu albo do zwiększenia czasu pomiędzy rehedgowaniem. Gamma hedging to strategia, która pomaga eliminować ryzyko spowodowane nagłym zachowaniem aktywa bazowego. Innymi słowy będziemy dążyć do tego, by

$$\Gamma = 0, \qquad \Delta = 0.$$

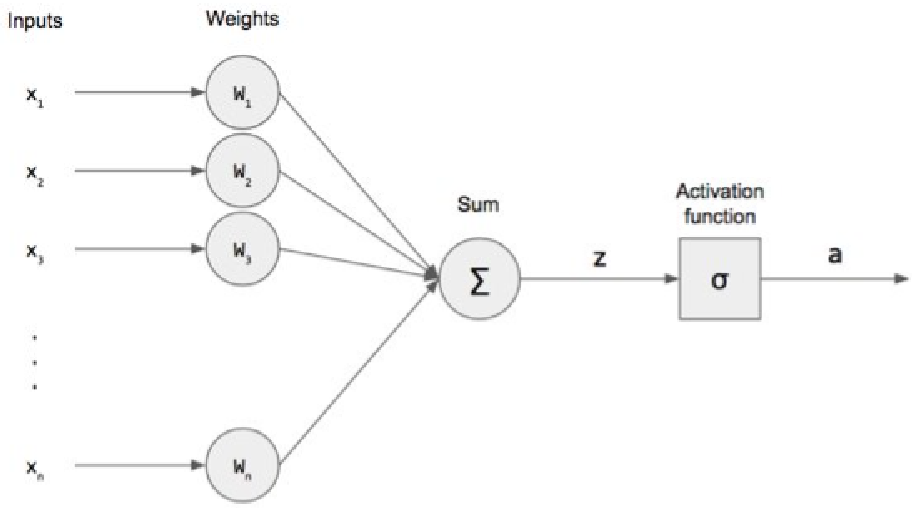
Przy kosztach transakcyjnych, jednak zadowolimy się

$$\Gamma \approx 0, \qquad \Delta \approx 0.$$

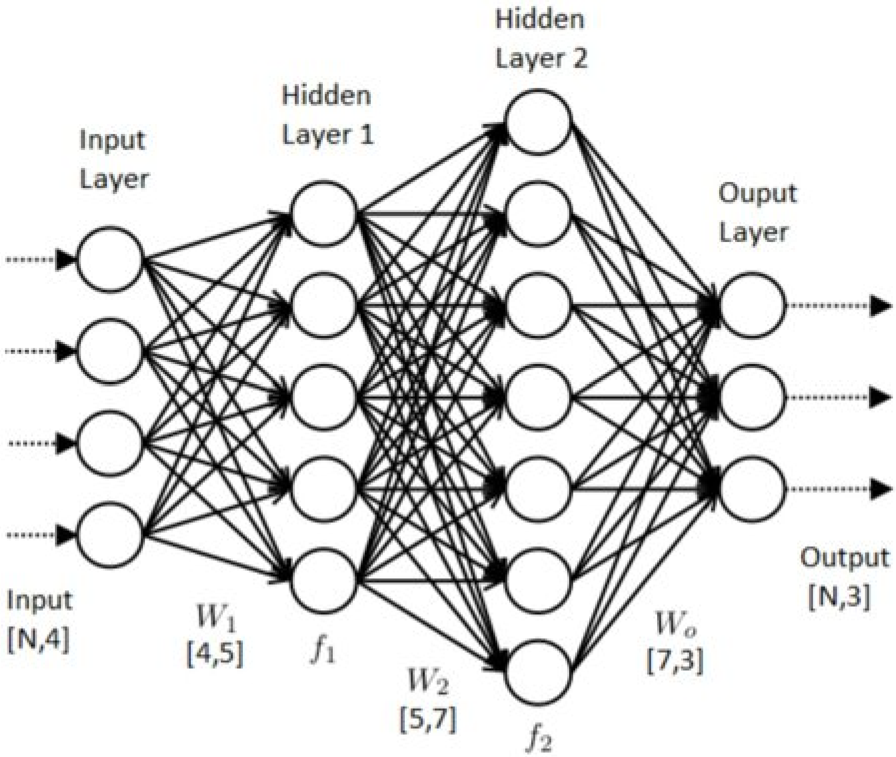
Do zabezpieczenia opcji wykorzystamy algorytm deep learningowy.

### Wstęp do algorytmu

Główną ideą jest wykorzystanie sieci neuronowych, które imitują ludzki mózg. Neurony w mózgu otrzymują sygał, przetwarzają go, a następnie podejmują decyzję o przekazaniu go dalej. Na podobnej zasadzie działają neurony w sieciach neuronowych (ang. Artifical Neural Networks - ANNs).
Formalnie przetwarzają $n$-wymiarowyw wektor $X$. Przetwarzają go obliczając iloczyn skalarny z wektorem wag $H$. Natomiast decyzję o przekazaniu podejmują podstawiając tę sumę do funkcji aktywacji $f$. Wynik przekazują do kolejnych neuronów.



**Model sieci neuronowej**
Pojedyńcze neurony są ułożóne w warstwy (3 lub więcej). Pierwsza warstwa ma rozmiar danych wejściowych, a ostatnia wymiaru wektora przyjmowanego przez funkcję kosztu.




**Funkcja kosztu**

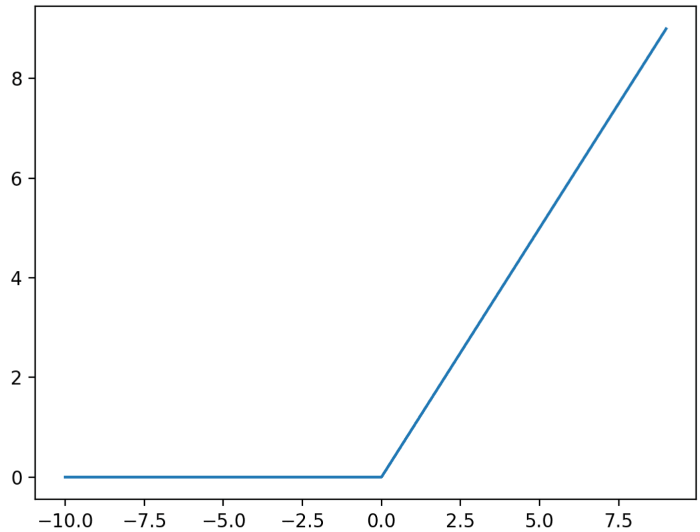
Jakie zastosowanie mają sieci neuronowe w naszym zadaniu? Pozwalają one minimalizować tzw. funkcję kosztu, czyli odległośi otrzymanych wyników od oczekiwań.

Naszym celem jest minimalizowanie modułu delty, gammy oraz maksymalizowanie wartości portfela. Funkcja kosztu $J$ wygląda następująco

$$
\begin{aligned}
J(\alpha, \beta, \gamma) = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + Ce^{-D\pi}, &\text{, gdzie} \\
\pi = -V_c + \ cash + \sum_i \alpha_i V^i_{bp} + \sum_i \beta_i V^i_{bc} + \gamma WIG \\
\Delta = -\delta_c + \gamma + \sum_i \alpha_i \Delta^i_{bp} + \sum_i \beta_i \Delta^i_{bc} \\
\Gamma = -\Gamma_c + \sum_i {}_i\Gamma^i_{bp} + \sum_i \beta_i \Gamma^i_{bc}.
\end{aligned}
$$

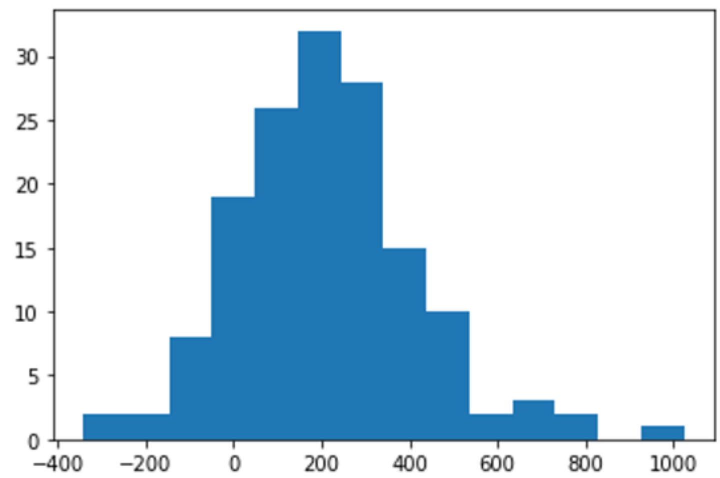
### Szczegóły uczenia

- sieć ma wejście rozmiaru 471 - aktualne współczynniki, delty, gammy oraz ceny wszystkich opcji i indeksu
- ma dwie ukryte warstwy po 70 neuronów z funkcją aktywacji ReLu
- wyjście ma rozmiar 117 - współczynniki dla opcji binarnych oraz indeksu; funkcja aktywacji jest liniowa
- współczynniki normalizujące (wyznaczone empirycznie):
  - $A = 100.000$
  - $B = 10.000$
  - $C = \frac{1}{100}$
  - $D = \frac{1}{100}$




### Uczenie

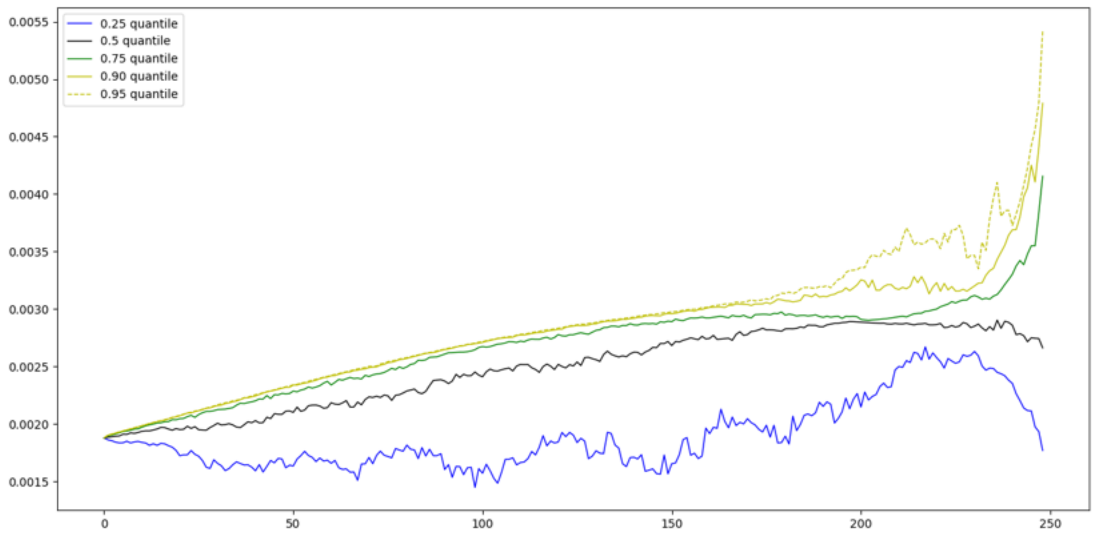
- losowane trajektorii zgodnie z geometrycznym ruchem Brown'a
- w każdym kroku trzymamy aktualny stan portfela, sieć neuronowa zwraca nam nowe wagi opcji oraz indeksu
- optymalizujemy sieć poprzez funkcję kosztu
- uczymy sieć wykonywać rehedging codziennie



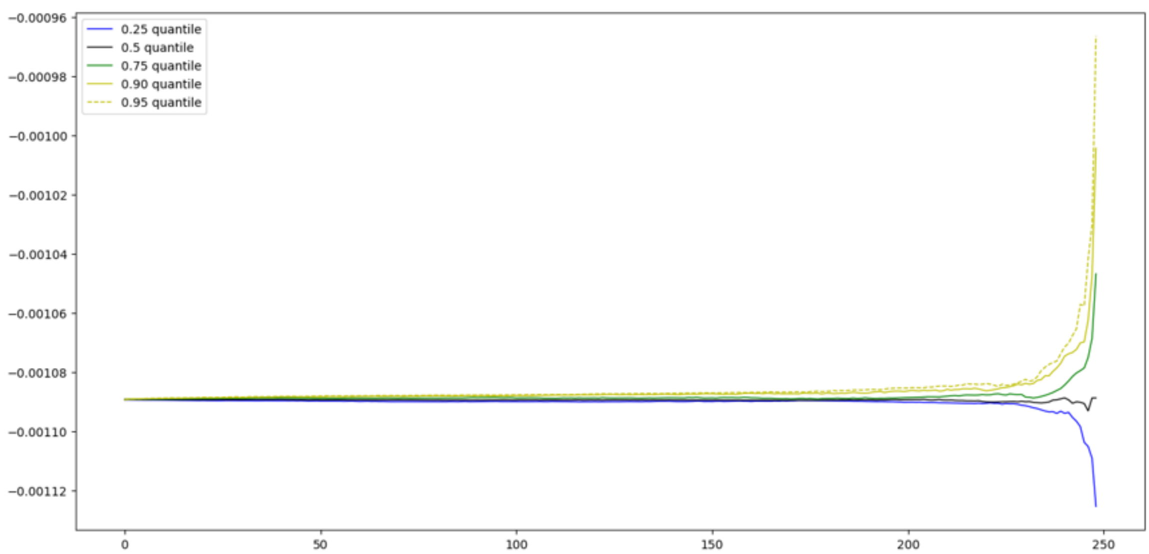

Rysunek 1: Histogram wartości portfela po 100 symulacjach.

**Wyniki**
Rezultaty otrzymane siecią neuronową są bardzo dobre. Otrzymujemy średni zysk w wysokości 208, utrzymując deltę oraz gammę relatywnie niskie.
Na wykresach delty i gammy widać lekkie zaburzenie na końcu czasu. Bierze się to z dzielenia przez $\sqrt{T-t}$ we wzorach na wskąźniki greckie opcji binarnych. Potencjalnym rozwiązaniem byłoby napisanie osobnej sieci liczącej współczynniki na ostatnie parę dni. Nie zostało jednak ono przez nas zaimplementowane, ponieważ uważamy, że pomimo zwiększenia odległości od zera wskaźniki pozostają niskie.

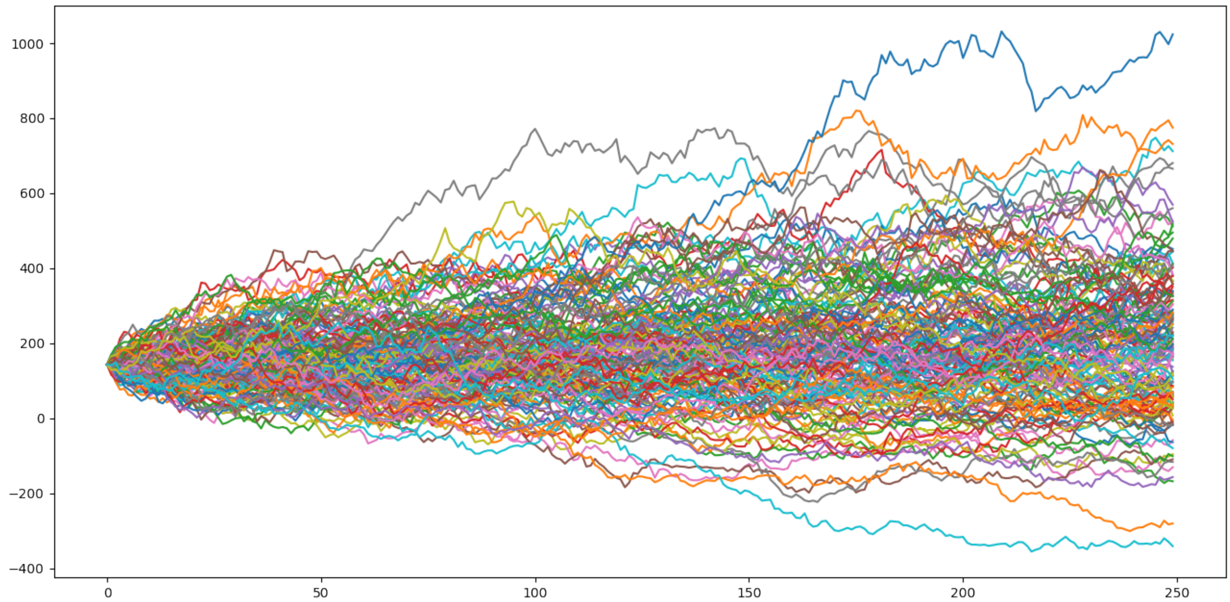
**Replikowalność strategii**
Po wstępnej analizie współczynników obliczanych przez sieć neuronową można dojść do wniosku, iż sprzedaje ona opcje binarne put z niskim strikiem oraz opcje binarne call z wysokim strikiem. Relatywnie wcześnie kupuje znaczną część indeksu. W praktyce wymienione opcje są aktywem niepłynnym albo w ogóle nie można nimi handlować na giełdzie co sprawia, że ta strategia nie jest replikowalna.




Rysunek 2: Kwantyle delty w czasie




Rysunek 3: Kwantyle gammy w czasie




Rysunek 4: Trajektorie wartości portfela w czasie (gamma hedging)