# Portfele złożone i prawdopodobieństwo ruiny

Erwin Jasic

Kwiecień 2022

# Wejście

Na wejściu dostajemy ciąg szkód $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$, które są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie dyskretnym o skończonym nośniku postaci

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{1}{3},\ k \in \{9, 10, 11\}$$

gdzie $\mathbb{E}[X_i] = 10$.

Ponadto dostajemy trzy portfele postaci $S_N = X_1, ..., X_N$, $S_N = X_1, ..., X_N$, $S_K = X_1, ..., X_K$, gdzie $N$ ma rozkład postaci $Bin(30, \frac{1}{2})$, $M$ ma rozkład $Poi(15)$ oraz $K$ ma rozkład $Geo(\frac{1}{16})$. Są one niezależne od $\{X_i\}$, wszystkie o średniej 15.

Istotnie

$$\mathbb{E}[Bin(30, \frac{1}{2})] = 15,$$

$$\mathbb{E}[Poi(15)] = 15,$$

$$\mathbb{E}[Geo(\frac{1}{16})] = 15.$$

# Zadanie 1

Celem w tym zadaniu jest wyliczenie funkcji tworzących oraz rozkładów $S_N$, $S_M$ oraz $S_K$ za pomocą dwóch różnych metod. Pierwsza z nich to tzw. metoda funkcji tworzących, a druga to metoda Panjera. Następnie porównamy ze sobą te metody i spróbujemy odpowiedzieć na pytanie, która z nich daje lepsze rezultaty.

## Metoda funkcji tworzącej

Z wykładu wiemy, że funkcja tworząca rozkładu złożonego $S_Y = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ wyraża się wzorem

$$P_{S_Y} = P_Y(P_X(t)),$$

gdzie $P_Y$ oraz $P_X$ są również funkcjami tworzącymi. Żeby wyliczyć $S_N$, $S_M$ i $S_K$ musimy najpierw znaleźć funkcje tworzące rozkładów $X$, $N$, $M$ oraz $K$. Korzystając z tożsamości

$$P_Y(t) = \mathbb{E}[t^Y],$$

oraz z programu Maple otrzymujemy poniższe funkcje tworzące:

- $P_X(t) = \frac{1}{3}t^9 + \frac{1}{3}t^{10} + \frac{1}{3}t^{11}$
- $P_N(t) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^{30}$

- $P_M(t) = \exp(15 - 15t)$
- $P_K(t) = \frac{0.0625}{1-0.9375t}$

Teraz podstawiając do wzoru $P_{S_Y} = P_Y(P_X(t))$ otrzymujemy:

- $P_{S_N}(t) = (\frac{1}{6}t^9 + \frac{1}{6}t^{10} + \frac{1}{6}t^{11} + \frac{1}{2})^{30}$
- $P_{S_M}(t) = \exp(5t^{11} + 5t^{10} + 5t^9 - 15)$
- $P_{S_K}(t) = \frac{0.0625}{1-0.3125t^9-0.3125t^{10}-0.3125t^{11}}$

Teraz wystarczy rozwinąć te funkcje w szereg Taylora w zerze i odczytać współczynniki przy $t^k$, $k = 0, ..., N$. (wykonane w Maple)

## Metoda Panjera

Ta metoda polega na użyciu wzoru rekurencyjnego, zgodnego z poniższym twierdzeniem z wykładu.

**Twierdzenie 1** *Jeśli* $S = X_1 + ... + X_N$ *jest sumarycznym roszczeniem w portfelu,* $g_k := p_X(k) = P(X_i = k)$, $k \in \mathbb{N}$ *oznacza rozkład pojedynczego roszczenia, to*

$$P(S=k) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} g_0^i \cdot p_i & dla \quad k = 0 \\ \frac{1}{1-ag_0} \sum_{i=1}^{k} (a + \frac{b \cdot i}{k}) g_i P(S = k-i) & dla \quad k \geqslant 1 \end{cases}$$

W powyższym wzorze brakuje nam tylko współczynników $a$ i $b$. Na szczęście dla rozkładu dwumianowego, Poissona oraz ujemnego dwumianowego są one łatwe do wyliczenia. Dla rozkładu $Bin(n,p)$ mamy

$$a = \frac{-p}{1-p},\ b = \frac{p(n+1)}{1-p}$$

dla $Poi(\lambda)$ mamy

$$a = 0,\ b = \lambda$$

oraz dla $Geo(p)$ mamy

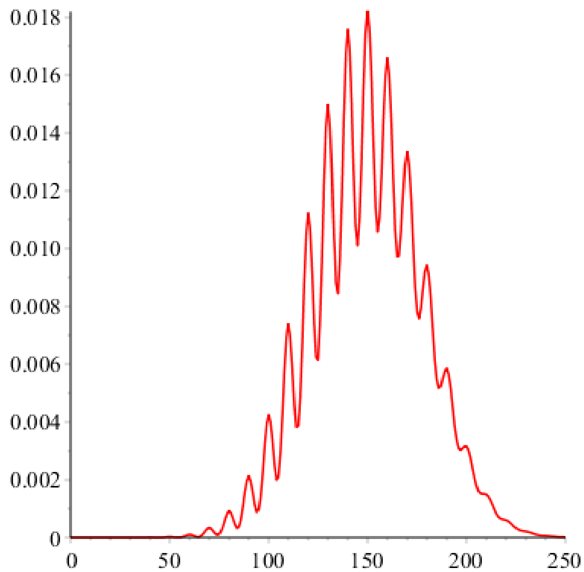
$$a = 1-p,\ b = 0.$$

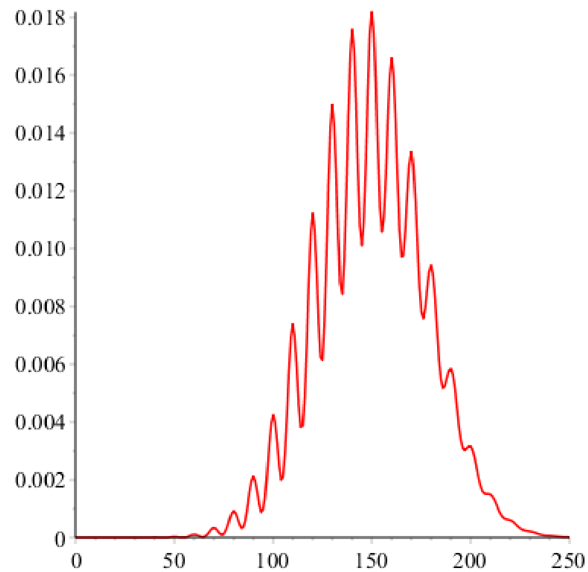
Podstawiając do wzoru w Maple, otrzymujemy wyniki dla rozkładów $S_N$, $S_M$ oraz $S_K$.

## Porównanie metody funkcji tworzącej oraz metody Panjera

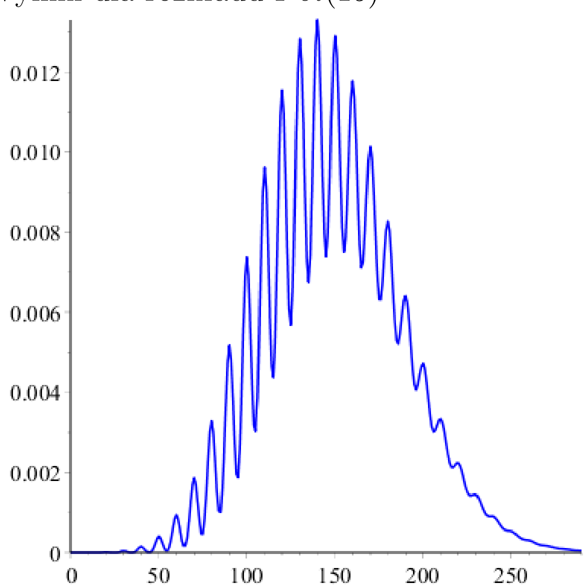
Poniżej przedstawimy porównanie wyników metody funkcji tworzącej oraz metody Panjera dla odpowiednich rozkładów. Po lewej będziemy widzieli wykresy stworzone z wyników, które otrzymaliśmy za pomocą metody funkcji tworzącej, natomiast po prawej metodą Panjera.

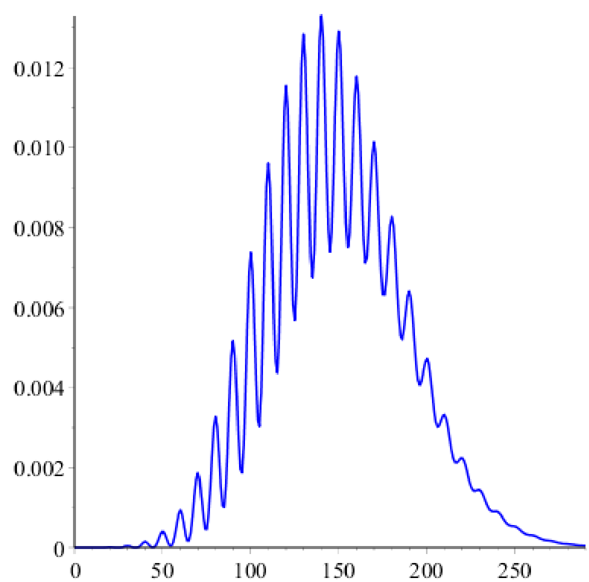
Wyniki dla rozkładu $Bin(30, \frac{1}{2})$



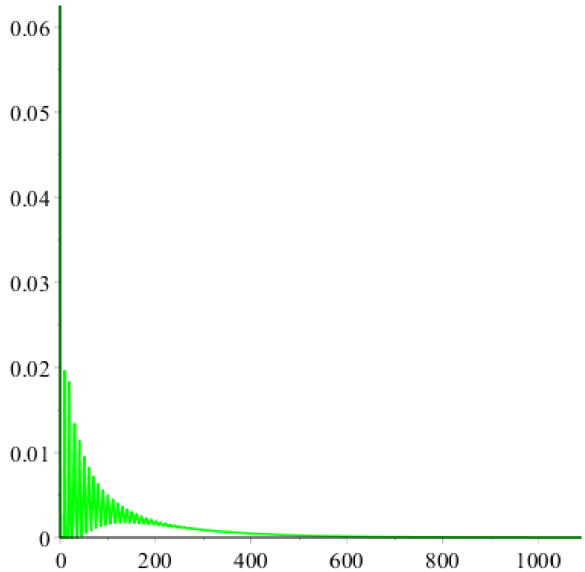



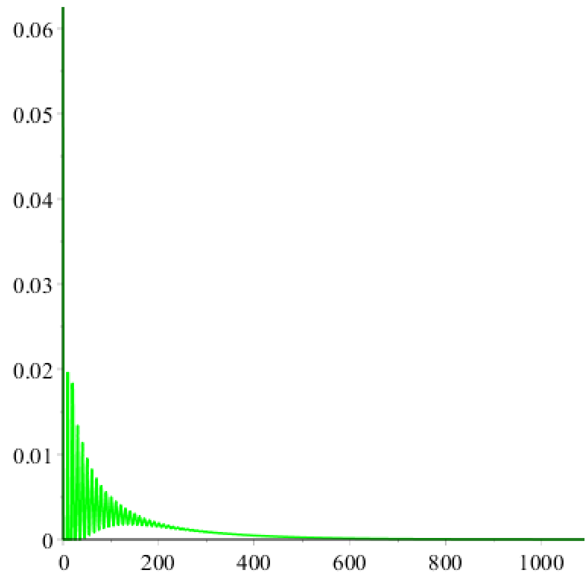

Wyniki dla rozkładu $Poi(15)$




Wyniki dla rozkładu $Geo(\frac{1}{16})$






Jak łatwo zauważyć, obie metody dają bardzo zbliżone wyniki.

## Wariancje

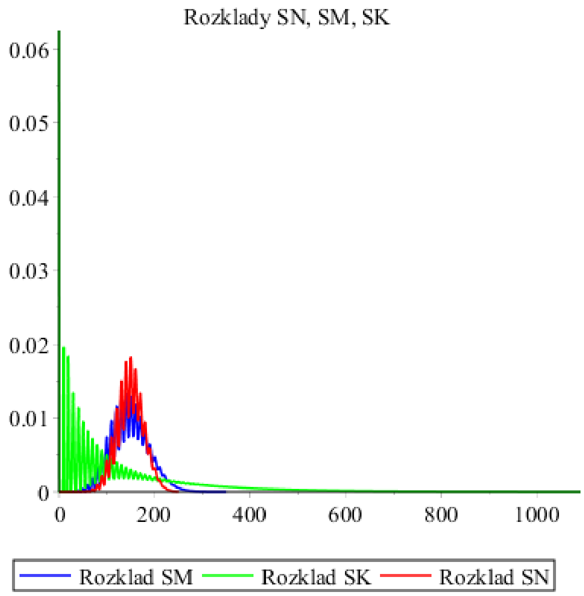
Korzystając ze wzoru na wariancję dla rozkładu złożonego $S_Y$

$$Var[S_Y] = \mathbb{E}[Y]Var[X] + Var[Y](\mathbb{E}[X])^2$$

możemy w łatwy sposób wyliczyć interesujące nas wariancje rozkładów $S_N$, $S_M$ oraz $S_K$. Podstawiając do wzoru, otrzymujemy:

- $Var[S_N] = 760$
- $Var[S_M] = 1510$
- $Var[S_K] = 24010$

### Przedstawienie rozkładów na jednym wykresie



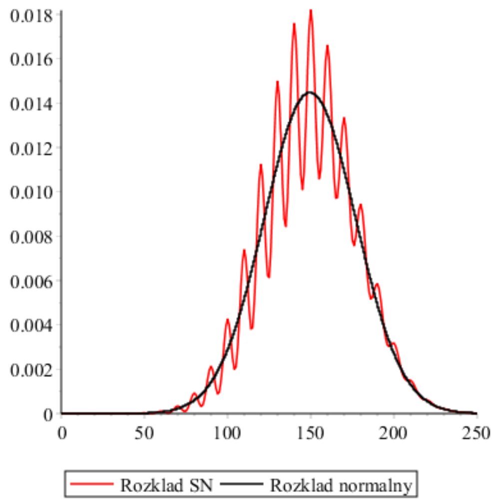

# Zadanie 2

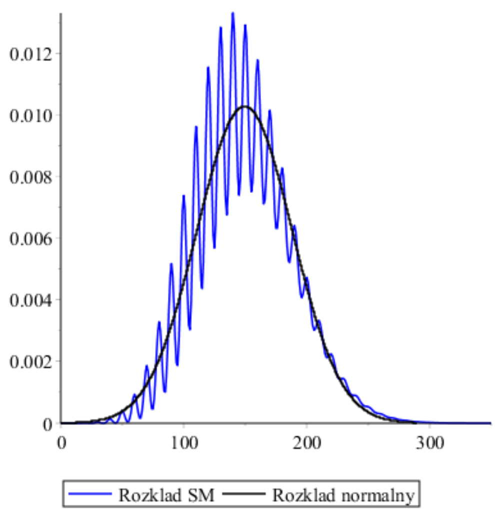
### Przybliżenie rozkładem normalnym

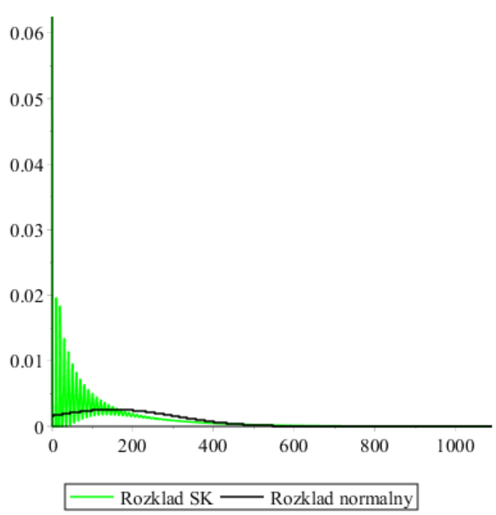
Celem w tym zadaniu jest znalezienie przybliżeń dla rozkładów $S_N$, $S_M$ oraz $S_K$ rozkładem normalnym. Wykonuje się to w taki sposób, że bierzemy gęstość rozkładu normalnego o średniej i wariancji takiej jak przybliżany rozkład. Należy pamiętać o tym, że przybliżamy rozkłady dyskretne, więc zmniejszamy wartość oczekiwaną o 1 otrzymując

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{Var[X]}}\Phi(\frac{t + 0.5 - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{Var[X]}}).$$

Podstawiając w Maple odpowiednie wartości otrzymujemy poniższe wykresy.


0.018
0.016
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
50
100
150
200
250
Rozklad SN
Rozklad normalny


0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
100
200
300
Rozklad SM
Rozklad normalny


0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
200
400
600
800
1000
Rozklad SK
Rozklad normalny

Widzimy, że w pierwszym i drugim przypadku przybliżenie rozkładem normalnym dało raczej zadowalający nas rezultat, ale w ostatnim przypadku jesteśmy daleko od zadowolenia, nie jest to dobre przybliżenie rozkładu $S_K$.

# Zadanie 3

## Przybliżenie rozkładem gamma

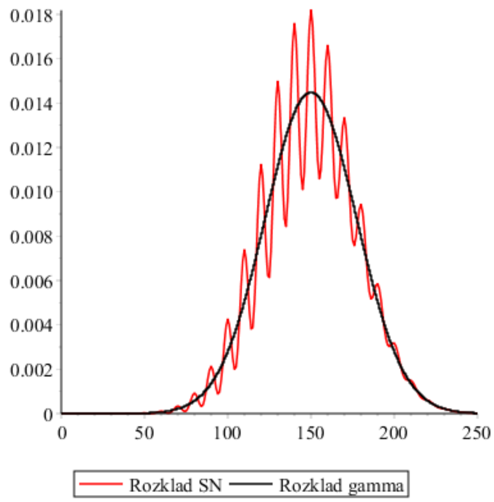
W tym zadaniu mamy wykonać dokładanie to samo co w poprzednim zadaniu, ale tym razem będziemy przybliżać rozkładem gamma $\Gamma(\alpha, \beta, x_0)$. Na współczynniki są odpowiednie wzory, które przytoczymy poniżej.

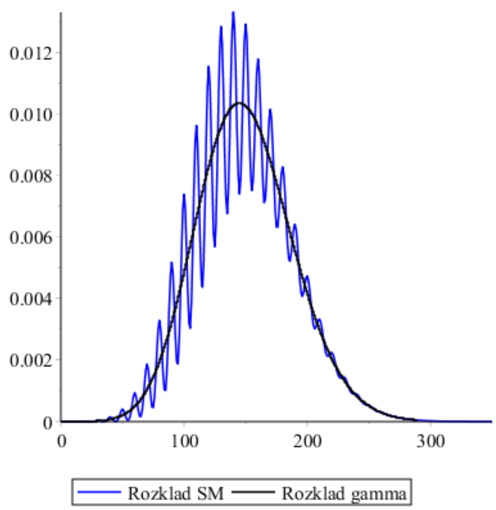
$$\alpha = 4\frac{(\mathrm{Var}\,[S])^3}{(\mathrm{E}\,[(S - \mathrm{E}\,[S])^3])^2},$$

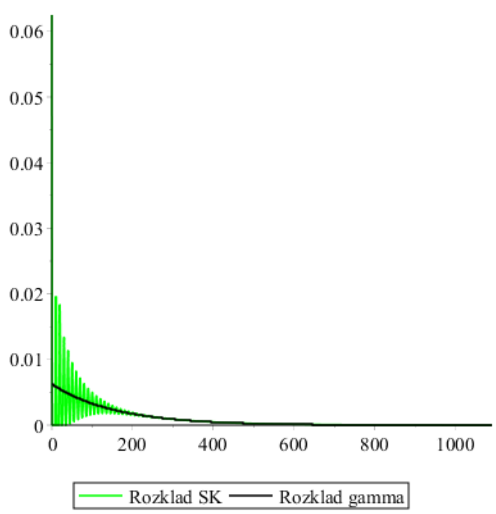
$$\beta = 2\frac{\mathrm{Var}\,[S]}{\mathrm{E}\,[(S - \mathrm{E}\,[S])^3]},$$

$$x_0 = \mathrm{E}\,[S] - 2\frac{(\mathrm{Var}\,[S])^2}{\mathrm{E}\,[S - \mathrm{E}\,[S]]^3}.$$

Podstawiając w Maple odpowiednie wartości otrzymujemy poniższe wykresy.

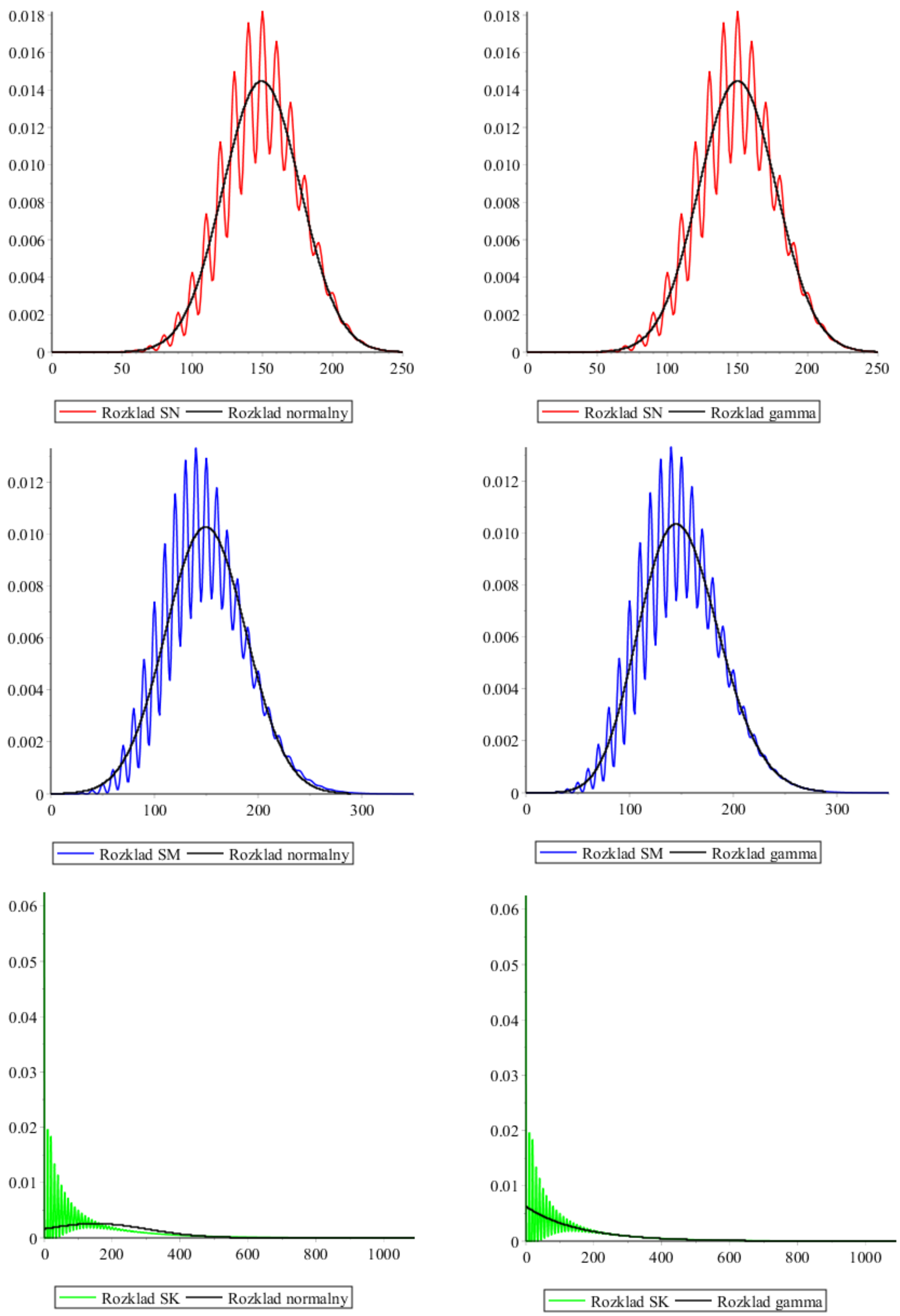

0.018
0.016
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
50
100
150
200
250
Rozklad SN
Rozklad gamma


0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
100
200
300
Rozklad SM
Rozklad gamma


0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
0
200
400
600
800
1000
Rozklad SK
Rozklad gamma

Widzimy, że w każdym przypadku rozkład gamma dość dobrze przybliża rzeczywiste rozkłady.

## Porównanie przybliżeń rozkładem normalnym oraz gamma



Jak nietrudno zauważyć, w pierwszym jak i drugim przypadku przybliżenie rozkładem normalnym oraz gamma daje praktycznie tę samą krzywą, natomiast znaczącą różnicę na korzyść rozkładu gamma dostrzegamy w przybliżeniu trzeciego rozkładu. Podsumowując, dla rozkładów $S_N$ oraz $S_M$ obie metody aproksymacji dają zbliżone rezultaty, natomiast dla rozkładu $S_K$ przybliżenie gamma daje zdecydowanie lepszy wynik.

# Podsumowanie

W tym projekcie przedstawiliśmy jak i porównaliśmy metodę funkcji tworzącej oraz metody Panjera w teorii jak i w praktyce, aby wyliczyć jawnie konkretne rozkłady. Zobaczyliśmy, że obie metody dają bardzo podobne rezultaty. W następnym zadaniach zajmowaliśmy się aproksymacją tych rozkładów, rozkładem normalnym jak i gamma oraz odpowiedzieliśmy na pytanie, która metoda daje lepsze rezultaty na konkretnych rozkładach.

## Literatura

[1] Ryszard Szekli, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych i osobowych*, Uniwersytet Wrocławski (2018).