Lista 3 - Raport

Erwin Jasic

18 grudnia 2020

Cel raportu:

Chcemy porównać skuteczność różnych przedziałów ufności w zależności od rozkładu (normalny, logistyczny, cauchy'ego, wykładaniczy, chi-kwadrat) oraz wielkości próby (20, 50, 100). Dla każdej metody użyjemy tego samego przedziału ufności na poziomie 95% oraz powtórztmu każde doświadczenie 10000 razy, aby wyniki były wiarygodne. Ponadto użyjemy tego samego ziarna dla każdego z podpunktów, żeby korzystać z tej samej próbki dla każdego zadania.

Zadanie 2

W tym zadaniu korzystamy z przedziału ufności postaci $\bar{X} \pm z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, gdzie $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ i $z_{1-\alpha/2}$ to kwantyl z rozkładu normalnego.

(a) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu normalnego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że już dla próby $n = 20$ mamy dobry wynik. Taka próba jest już wystarczająca do konstrukcji przedziału ufności.

```
num <- c(20, 50, 100)
sigma <- c(1, 2, 3)
mu <- 0
M <- matrix(rep(0, 9), nrow = 3)
for(n in c(1,2,3)){
  for(s in sigma){
    M[s,n] <- z2_normal(num[n], mu, s)
  }
}
M <- data.frame(M, row.names = c('$\\mu = 0, \\sigma = 1$','$\\mu = 0, \\sigma = 2$','$\\mu = 0, \\sigma
kable(M, col.names = c('$n = 20$', '$n = 50$', '$n = 100$'))
```

	$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9507	0.951	0.9486
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9507	0.951	0.9486
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9507	0.951	0.9486

(b) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu logistycznego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że rozmiar próby nie ma większego wpływu na skuteczność przedziału dla tego rozkładu. Skuteczność na poziomie 72% informuje nas o tym, że jest to raczej słaba metoda.

$n	= 20$ $n	= 50$ $n	= 100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.7294	0.7232	0.7192
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.7294	0.7232	0.7192
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.7294	0.7232	0.7192

(c) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu cauchy'ego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Możemy zauważyć, że wraz ze wzrostem próby, maleje skuteczność metody.

$n	= 20$ $n	= 50$ $n	= 100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.2606	0.1805	0.1232
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.2606	0.1805	0.1232
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.2606	0.1805	0.1232

(d) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ oraz wielkości próby n. Widzmy, że występują nieznaczne wahania zależne od parametru λ. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że już dla próby $n = 20$ mamy dobry wynik. Taka próba jest już wystarczająca do konstrukcji przedziału ufności.

$n	= 20$ $n	= 50$ $n	= 100$
$\lambda = 1$	0.9553	0.9534	0.9505
$\lambda = 1/2$	0.9553	0.9534	0.9505
$\lambda = 1/3$	0.9553	0.9534	0.9505

(e) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu chi-kwadrat z parametrem ν oraz wielkości próby n. Widzmy, że występują nieznaczne wahania zależne od parametru ν. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że już dla próby $n = 20$ mamy dobry wynik. Taka próba jest już wystarczająca do konstrukcji przedziału ufności.

$n	= 20$ $n	= 50$ $n	= 100$
$\nu = 1$	0.9565	0.9521	0.9495
$\nu = 2$	0.9517	0.9527	0.9491
$\nu = 3$	0.9559	0.9523	0.9521

Zadanie 4

W tym zadaniu korzystamy z przedziału ufności podobnego jak w zadaniu 2, ale tym razem korzystamy z rozkładu studenta z $n-1$ stopniami swobody postaci $\bar{X} \pm t_{(1-\alpha/2,n-1)} \frac{S}{\sqrt{n}}$, gdzie S to odchylenie standardowe z wylosowanej próby.

(a) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu normalnego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że już dla próby $n = 20$ mamy dobry wynik. Taka próba jest już wystarczająca do konstrukcji przedziału ufności.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9513	0.9491	0.9487
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9513	0.9491	0.9487

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9513	0.9491	0.9487

(b) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu logistycznego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że rozmiar próby nie ma większego wpływu na skuteczność przedziału dla tego rozkładu i dla $n = 20$ mamy już dobre wyniki.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9555	0.9547	0.9495
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9555	0.9547	0.9495
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9555	0.9547	0.9495

(c) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu cauchy'ego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Możemy zauważyć, że skuteczność tej metody jest wyższa niż przewidywaliśmy.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9816	0.982	0.9804
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9816	0.982	0.9804
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9816	0.982	0.9804

(d) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ oraz wielkości próby n. Widzmy, że nie występują żadne wahania przy zmianie parametru λ. Mamy dość przyzwoite wyniki już dla $n = 20$, ale trochę niższe niż zakładaliśmy. Widzimy, że im większa próbka tym bardziej się zbliżamy do 95%.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\lambda = 1$	0.9188	0.9342	0.9423
$\lambda = 1/2$	0.9188	0.9342	0.9423
$\lambda = 1/3$	0.9188	0.9342	0.9423

(e) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu chi-kwadrat z parametrem ν oraz wielkości próby n. Widzmy, że im wyższa wartość parametru ν, tym bliżej jesteśmy 95%. Podobnie sytuacja wygląda z rozmiarem próby. Im większa próba, tym lepszy wynik.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\nu = 1$	0.8996	0.9194	0.9299
$\nu = 2$	0.9133	0.9354	0.9399
$\nu = 3$	0.9306	0.9413	0.9464

Zadanie 6

W tym zadaniu korzystamy z przedziału ufności postaci: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2(1-\alpha/2,n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\chi^2(\alpha/2,n)}$. Estymujemy prawdopodobieństwo pokrycia wariancji, gdzie znamy średnią z rozkładu.

(a) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu normalnego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że już dla próby $n = 20$ mamy dobry wynik. Taka próba jest już wystarczająca do konstrukcji przedziału ufności.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9505	0.9501	0.9521
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9505	0.9501	0.9521
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9505	0.9501	0.9521

(b) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu logistycznego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że niezależnie od parametru σ wyniki są takie same. Nieznaczne wahania występują przy zmianie rozmiaru próby, ale widzimy, że rozmiar próby nie ma większego wpływu na skuteczność przedziału dla tego rozkładu, która jest na poziomie bliskim 90%.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.8937	0.8835	0.885
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.8937	0.8835	0.885
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.8937	0.8835	0.885

(c) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu cauchy'ego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n. Widzmy, że prawdopodobieństwo pokrycia jest bliskie zeru i wraz ze wzrostem rozmiaru próby wartości dążą do 0. Przedział jest nieskuteczny.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.0123	0.0000	0
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.0130	0.0000	0
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.0142	0.0001	0

(d) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ oraz wielkości próby n. Widzmy, że nie występują żadne wahania przy zmianie parametru λ. Mamy dość słabe wyniki dla każdego n, ale możemy zaobserwować, że im większe n, tym gorsze wyniki.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\lambda = 1$	0.7444	0.7096	0.6964
$\lambda = 1/2$	0.7444	0.7096	0.6964
$\lambda = 1/3$	0.7444	0.7096	0.6964

(e) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu chi-kwadrat z parametrem ν oraz wielkości próby n. Widzmy, że im wyższa wartość parametru ν, tym lepsze wyniki. Odwrotnie sytuacja wygląda z rozmiarem próby. Im większa próba, tym gorszy wynik.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\nu = 1$	0.5987	0.5669	0.5507
$\nu = 2$	0.7429	0.7080	0.6893
$\nu = 3$	0.8122	0.7758	0.7569

Zadanie 8

W tym zadaniu korzystamy z przedziału ufności postaci: $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{\chi^2(1-\alpha/2,n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{X})^2}{\chi^2(\alpha/2,n)}$. Estymujemy prawdopodobieństwo pokrycia wariancji, ale nie znamy średniej z rozkładu.

(a) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu normalnego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9506	0.9516	0.9508
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9506	0.9516	0.9508
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9506	0.9516	0.9508

(b) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu logistycznego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.8954	0.8853	0.8852
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.8954	0.8853	0.8852
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.8954	0.8853	0.8852

(c) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu cauchy'ego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.0137	0	0
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.0137	0	0
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.0137	0	0

(d) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ oraz wielkości próby n.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\sigma = 1$	0.7679	0.718	0.7012
$\sigma = 1/2$	0.7679	0.718	0.7012
$\sigma = 1/3$	0.7679	0.718	0.7012

(e) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu chi-kwadrat z parametrem ν oraz wielkości próby n.

$n	= 20$ $n=	50$ $n=	100$
$\nu = 1$	0.6245	0.5757	0.5549
$\nu = 2$	0.7666	0.7169	0.6948
$\nu = 3$	0.8268	0.7843	0.7626

Widzimy, że powtórzenie eksperymentu z zadania 6, ale z nieznaną średnią dało niemalże identyczne rezultaty w każdej z tabel.

Zadanie 10

W tym zadaniu skorzystamy z asymtotycznego przedziału ufności: $\bar{p} \pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$, gdzie $\bar{p}$ jest średnią z obserwacji > 0.

(a) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu normalnego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

\$n	= 20\$ \$n=	50\$ \$n=	100\$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9601	0.9360	0.9427
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9616	0.9361	0.9408
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9565	0.9379	0.9433

(b) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu logistycznego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

\$n	= 20\$ \$n=	50\$ \$n=	100\$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9572	0.9361	0.9464
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9550	0.9323	0.9454
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9593	0.9340	0.9453

(c) Tabelka przedstawia wyniki dla rozkładu cauchy'ego z parametrami μ, σ oraz wielkości próby n.

\$n	= 20\$ \$n=	50\$ \$n=	100\$
$\mu = 0, \sigma = 1$	0.9583	0.9340	0.9443
$\mu = 0, \sigma = 2$	0.9574	0.9310	0.9421
$\mu = 0, \sigma = 3$	0.9612	0.9382	0.9416

Wyniki w każdym z podpunktów tego zadania są do siebie bardzo zbliżone. Możemy zaobserować, że w przeciwieństwie do pozostałych zadań, tutaj wszystkie wyniki są dobre i oscylują w okolicach 95%.

Zadanie 11

To zadanie wykonaliśmy podczas poprzednich zadań zmieniając rozmiar próby.

Podsumowanie:

Przeprowadzając analizę wyników zadań 2 i 4 dochodzimy do wniosku, że lepsze wyniki otrzymaliśmy kiedy nie znaliśmy wariancji rozkładu, a ją estymowaliśmy.
Przeprowadzając podobną analizę dla zadań 6 i 8 obserwujemy, że wyniki są do siebie bardzo zbliżone (trochę lepsze, gdy nie znamy wariancji, a ją estymujemy).

Ponadto widzimy, że próbka rozmiaru 20 jest najczęściej wystarczająca, co świadczy o tym, że zazwyczaj nie potrzebujemy dużych próbek, aby stworzyć dobry przedział ufności.