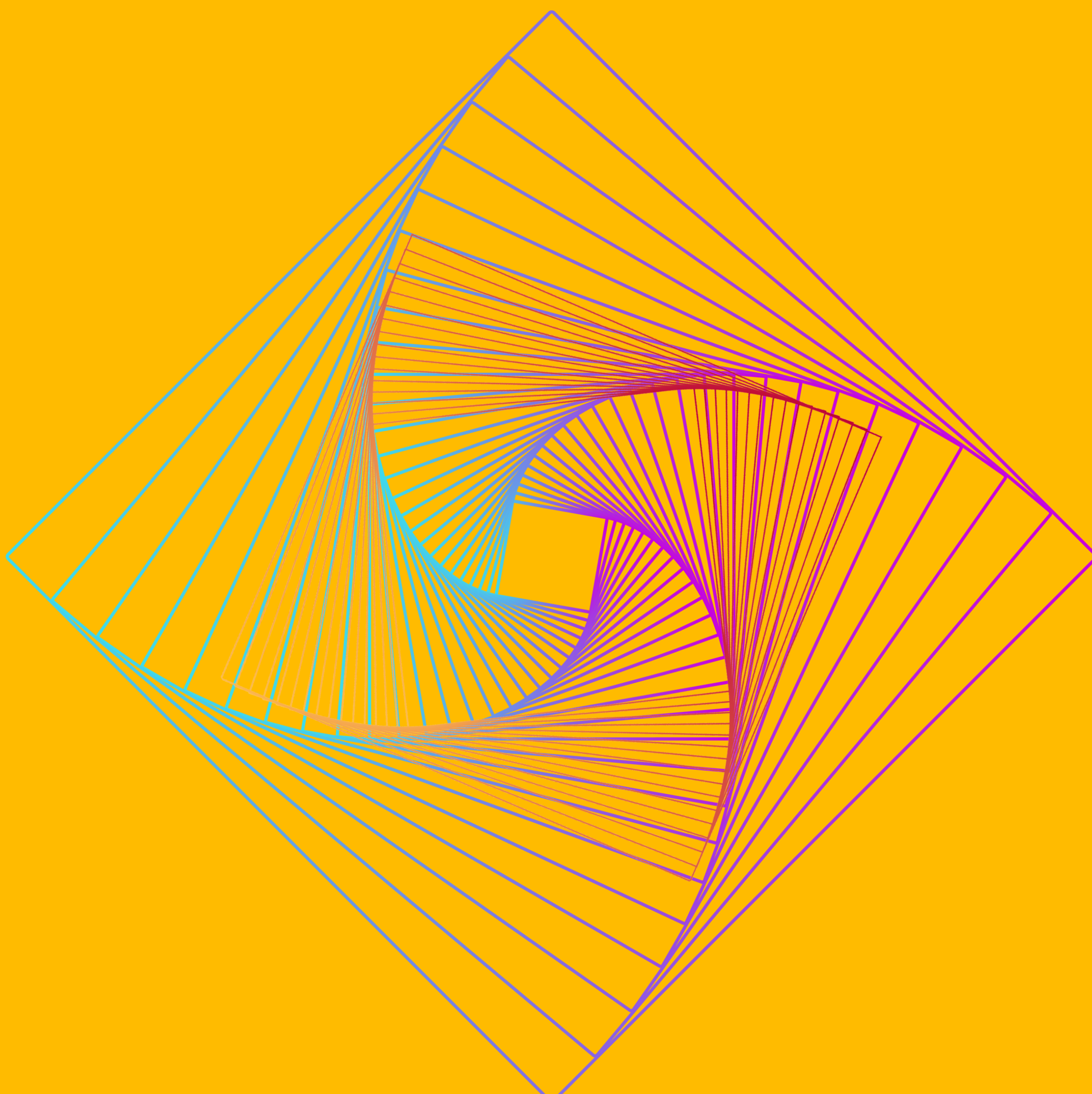
ELECTIVO DE MATEMÁTICA IV MEDIO



Colegio San Francisco Javier

Departamento de matemática

Índice general

lasegunda prueba de trabajo

Capítulo 1

Sucesiones

El concepto abstracto de sucesión se puede asociar, en una primera aproximación, a los procesos discretos de la naturaleza, o a aquellos que se pueden describir de esta forma, por ejemplo, la evolución de una población en instantes de tiempo equiespaciados o una señal digital.
Aparte de su interés como mecanismo para modelar, la teoría de sucesiones aporta una importante herramienta deductiva en el Análisis Matemático.
En 1902, el matemático italiano, Leonardo Pisano, llamado Fibonacci, investigó el siguiente problema: "un hombre pone un par de conejos (macho y hembra) de diferente sexo, en un lugar cercado. Los conejos pueden aparearse a partir del primer mes de vida, y las hembras dan a luz tras un mes de gestación. Suponiendo que ningún conejo muere en un año, y que las camadas de conejos que ha parido la hembra están formadas por una nueva pareja de conejos de diferente sexo, cada mes a partir de su segundo mes de vida, ¿cuántos pares de conejos habrá en un año?".
Fibonacci formuló una respuesta mes a mes: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 y 144. Aunque el problema de Fibonacci no era muy realista, su resultado dio origen a una sucesión numérica llamada sucesión de Fibonacci, una de las maravillas de la matemática, presente en los más insólitos fenómenos de la naturaleza y en la creación humana. Algunos de estos ejemplos son: la forma en que se ordenan las semillas de un girasol (tienen 34 curvas en un sentido y 21 en otro, las espirales que se forman hacia la derecha y hacia la izquierda), el ordenamiento de las hojas en una rama...

1.1. Variable discreta

Si una magnitud varía mediantes saltos, como por ejemplo el número de personas que llegan a la caja de un banco en intervalos de tiempos fijos, el número de nacimientos o muertes medidos día a día, se dice que es discreta. Otra forma de concebir algo discreto es algo que al ser fraccionado pierde su esencia. Por ejemplo: la mitad de una mesa no es una mesa y la tercera parte de 34

nacimientos no son $11,333\ldots$ nacimientos. En cambio, existen otras magnitudes que permiten, al menos abstractamente, infinitas posibilidades de división. La más típica de las magnitudes continuas son el tiempo y la temperatura.
Las variables discretas, en general, aparecen al contar objetos, sucesos o fenómenos y, por tanto, quien modela una variable discreta es el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$.
En una relación funcional de variable independiente y [1]dependiente, cuando la variable independiente es discreta necesariamente la variable dependiente también lo es, este tipo de asignación se les llama sucesiones. Una sucesión es una abstracción de un proceso cuyas etapas se pueden contar y extender indefinidamente.

Definición 1.1.1

Una sucesión de números reales es una función definida en los naturales que toma valores en los reales, es decir, una sucesión se define como:

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$

$$n\to f(n)$$

Observación 1.1.1

El término $f(n)$ se escribe como a_n, esto es $f(n)=a_n$, donde a_n recibe el nombre de término general.
Una sucesión de término general a_n se identifica como $\{a_n\}$ o también $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ [1]

Capítulo 2

Funciones

Capítulo 3

Derivadas

3.1. Regla de la cadena

Teorema

1. $a + b = a + c$ sí y solo sí $b = c$
2. $a \cdot b = a \cdot c$, $a \neq 0$, sí y solo sí $b = c$

3.2. Regla de la cadena

Suponga que se le pide derivar la función $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Las fórmulas de derivación que aprendimos en la clase anterior no nos permiten siempre calcular $F'(x)$.
Observa que F es una función compuesta. De hecho, si hacemos $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, entonces podemos escribir $y = F(x) = f(g(x))$; es decir, $F = f \circ g$. Sabemos cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que nos indique cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Esto parece verosímil si interpretamos las derivadas como razones de cambio.

Considera $\dfrac{du}{dx}$ como la razón de cambio de u respecto a x, $\dfrac{dy}{du}$ como la razón de cambio de y respecto a u, y $\dfrac{dy}{dx}$ como la razón de cambio de y respecto a x. Si u cambia al doble de rapidez de x e y varía tres veces más rápido que u, entonces parece razonable que y se modifique seis veces más rápido que x, y, por tanto, esperamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Definición 1 (Regla de la cadena) *Si g es derivable en x y f es derivable en $g\left(x\right)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ definida mediante $F\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right)$ es derivable en x, y F' está dada por el producto*

$$F'\left(x\right) = f'\left(g\left(x\right)\right) \cdot g'\left(x\right)$$

En la notación de Leibniz, si $y = f\left(u\right)$ y $u = g\left(x\right)$ son funciones derivables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Observación 3.1 *En la aplicación de la regla de la cadena, se debe trabajar del exterior hacia el interior. La fórmula expresa que derivamos la función exterior f [en la función interior $g\left(x\right)$] y, a continuación, multiplicamos por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\quad \underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \quad = \quad \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \quad \underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \quad \cdot \quad \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

Ejemplo

Determina $F'(x)$ con $F(x) = \sqrt{x^2+1}$

Soluci'on
Haciendo $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$

Obtenemos

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

y utilizando la Regla de la Cadena, tenemos

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

La *Regla de la cadena* nos permite resolver problemas. A continuación presentamos un ejemplo

Ejemplo

Supóngase que la longitud L (en cm) de una barra de acero depende de la temperatura del aire, $H°C$, que a su vez depende del tiempo t medido en horas. Si la longitud aumenta 2 cm por cada grado que aumenta la temperatura, y esta aumenta $3°C$ por hora, ¿con qué rapidez crece la longitud de la barra?

Solución

Del problema se rescata que:

$$\frac{\text{Rápidez de aumento de } L}{\text{Temperatura}} = \frac{dL}{dH} = 2\ cm/°C$$

$$\frac{\text{Rápidez de aumento de } H}{\text{Tiempo}} = \frac{dH}{dt} = 3°C/h$$

Y tenemos que calcular:

$$\frac{\text{Rápidez de aumento de } L}{\text{Tiempo}} = \frac{dL}{dt}$$

Tomando a L como una función de H y a H como una función de t, entonces:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dH} \cdot \frac{dH}{dt} = (2\ cm/°C)\,(3°C/h) = 6\ cm/h$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

A continuación se presentan las reglas de derivación de las fucniones trigonométricas

1. $\dfrac{d\,(\operatorname{sen} x)}{dx} = \cos x$
2. $\dfrac{d\,(\cos x)}{dx} = -\operatorname{sen} x$
3. $\dfrac{d\,(\tan x)}{dx} = \sec^2 x$

4. $\dfrac{d(\csc x)}{dx} = -\csc x \cdot \cot x$

5. $\dfrac{d(\sec x)}{dx} = \sec x \cdot \tan x$

6. $\dfrac{d(\cot x)}{dx} = -\csc^2 x$

Observación 3.2 *Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, ondas, movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, pueden describirse por medio de las funciones trigonométricas.*

Ejemplo

Determina la derivada de $f(x) = x^2 \text{sen } x$

Solución

Utilizando la Regla del producto, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 \cdot \frac{d(\text{sen } x)}{dx} + \text{sen } x \cdot \frac{d(x^2)}{dx} \\ &= x^2 \cos x + 2x \text{sen } x \end{aligned}$$

Derivada de funciones logarítmicas

1. $\dfrac{d(\ln x)}{dx} = \dfrac{1}{x}$

2. $\dfrac{d(\log_a x)}{dx} = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$ con $a > 0$ y $a \neq 1$

3. $\dfrac{d(\log_a t(x))}{dx} = \dfrac{1}{t(x) \ln a} \cdot \dfrac{dt(x)}{dx}$

Derivada de funciones exponenciales

Se definen dos tipos de funciones con comportamiento exponencial:

1. $y = e^x$ llamada exponencial natural.
2. $y = a^x$ llamada exponencial general.

En ambos casos se plantea una fórmula para su diferenciación. Así.

1. $\dfrac{d\left(e^{f(x)}\right)}{dx} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$
2. $\dfrac{d\left(a^{f(x)}\right)}{dx} = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$

Ejemplo

Deriva $f(x) = e^{4\sqrt{x}}$

Solución

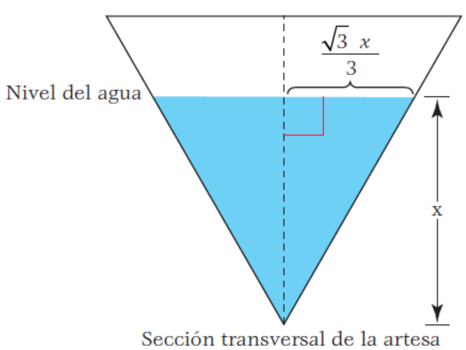
$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{4\sqrt{x}} \cdot \frac{d(4\sqrt{x})}{dx} \\
&= e^{4\sqrt{x}} \cdot \left[4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x}\right) \cdot 0\right] \\
&= \frac{2e^{4\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

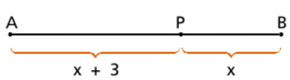
Ejercicios

1. Deriva las siguintes funciones

   A. $f(x) = (5x^2 + 3x)^3$
   B. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x - 1}$
   C. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
   D. $f(x) = \operatorname{sen} 8x$
   E. $f(x) = \cos 3x^2$
   F. $f(x) = \tan x^3$
   G. $f(x) = 6 \sec x^2$
   H. $f(x) = x^3 \cdot e^{\sqrt{x}}$
   I. $f(x) = \ln x^3$
   J. $f(x) = x^3 \cdot \ln x^2$
   K. $f(x) = e^{3x-1}$

2. Una artesa para agua con sección vertical transversal en forma de triángulo equilátero (ver figura), se llena a razón de un metro cúbico por minuto. Suponiendo que la longitud de la artesa es de 6 metros, ¿con qué rapidez sube el nivel del agua en el momento en que esta alcanza una profundidad de medio metro?





debes ser una prueba de trabajar
Esta es una pruba del trabajar

Bibliografía

[1] Gladys Bobadilla and Rafael Labarca. *Cálculo*. Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, 2009.