教材习题答案

第一章　集合与常用逻辑用语

1.1　集合

1.1.1　集合及其表示方法

练习 A

1.答案　(1)$\in$　(2)$\notin$　(3)$\notin$　(4)$\in$　(5)$\notin$　(6)$\in$

2.解析　(1)无限集.　(2)有限集.　(3)有限集(空集).

3.解析　(1){指南针,造纸术,印刷术,火药}.(2)$\{3,5,7,11,13\}$.(3)$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$.

4.解析　(1)$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}_+$且$n<750\}$.(2)$\{x|x$是矩形$\}$.

5.解析　(1)$[-1,3]$.(2)$(0,1]$.(3)$[2,5)$.(4)$(0,2)$.(5)$(-\infty,3)$.(6)$[2,+\infty)$.

练习 B

1.答案　(1)$\notin$　(2)$\in$　(3)$\notin$　(4)$\notin$

2.解析　(1)$\{m,a,t,h,e,i,c,s\}$.(2)$\{(x,y)|x+2y=7\}$.(3)$\varnothing$.

3.解析　有实数x,使得$x\in A$且$x\in B$,如$\frac{5}{2}$.

4.解析　$\because -3\in A$,

$\therefore$当$x-2=-3$时,$x=-1$,此时$A=\{-3,4,12\}$,符合题意;

当$x+5=-3$时,$x=-8$,此时$A=\{-10,-3,12\}$,符合题意.

综上,x的值为-1或-8.

1.1.2　集合的基本关系

练习 A

1.答案　(1)$\in$　(2)$\supsetneqq$　(3)$=$　(4)$\subsetneqq$

2.答案　(1)$\supsetneqq$　(2)$\subsetneqq$　(3)$\supsetneqq$　(4)$\supsetneqq$

3.答案　(1)$\subsetneqq$　(2)$\supsetneqq$　(3)$\supsetneqq$　(4)$=$

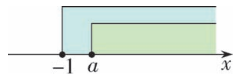
练习 B

1.解析　$\varnothing,\{0\},\{1\},\{2\},\{3\},\{0,1\},\{0,2\},\{0,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{0,1,2\},\{0,1,3\},\{0,2,3\},\{1,2,3\},\{0,1,2,3\}$.

2.解析　$\because A=\{-1,2,5,8,11,\cdots\}$,$B=\{2,5,8,11,\cdots\}$,$\therefore B\subsetneqq A$.

3.解析　$\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\}$.

4.解析　$a\geqslant -1$.如图所示.



5.解析　集合A中最小的3个元素是0,2,4,集合B中最小的3个元素是0,4,8.

证明:A中,当$n=2k,k\in\mathbf{N}$时,$x=2\times 2k=4k$;当$n=2k+1,k\in\mathbf{N}$时,$x=2\times(2k+1)=4k+2$.故$B\subsetneqq A$.

1.1.3　集合的基本运算

练习 A

1.解析　$A\cap B=\{b,d\}$,$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\}$.

2.解析　$A\cap B=(2,+\infty)$,$A\cup B=(0,+\infty)$.

3.解析　$A\cap B$表示既选修羽毛球课程又选修乒乓球课程的同学组成的集合.

$A\cup B$表示选修羽毛球课程或选修乒乓球课程的同学组成的集合.

4.解析　$\complement_U A=\{0,4,5,6,7,8\}$,$\complement_U B=\{0,1,2,7,8\}$.

5.解析　$\complement_U A=(-\infty,7)$,$(\complement_U A)\cap U=(-\infty,7)$,$A\cup(\complement_U A)=\mathbf{R}$.

练习 B

1.解析　总成立.设$x\in(A\cap B)$,则$x\in A$且$x\in B$,$\therefore x\in(A\cup B)$,$\therefore (A\cap B)\subseteq(A\cup B)$.

2.解析　(1)$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

(2)集合C可以是$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$,共8个.

3.解析　$\complement_U A=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$,$\complement_U B=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$.

4.解析　$\because \complement_U A=\{1\}$,$\therefore 1\in U$且$1\notin A$.

$\therefore a^2=1$,$\therefore a=\pm 1$.

当$a=1$时,$a+3=4$,不满足集合中元素的互异性,舍去;

当$a=-1$时,$U=\{1,2,4\}$,$A=\{2,4\}$,符合题意.$\therefore a=-1$.

5.解析　(1)$\because A=(2,4)$,$B=(a,5)$,$A\cap B=(3,4)$,

$\therefore a=3$.

(2)$\because A=(2,4)$,$B=(a,5)$,$A\cup B=(2,5)$,

$\therefore 2\leqslant a<4$.

◆习题 1-1A

1.解析　(1)5.(2)1,3,5,7,9,11,13.(3)27,29,31,33,35,37,39.

2.解析　最小的3个元素是$0,\frac{2}{3},\frac{4}{3}$.

3.解析　(1)×　(2)√　(3)√　(4)×　(5)√　(6)√

4.答案　(1)$\in$　(2)$\supsetneqq$　(3)$\notin$　(4)$\subsetneqq$

5.解析　$A\cap B=\{x|x$是菱形$\}$,$A\cup B=\{x|x$是平行四边形$\}$.

6.解析　$\because A=\{2,3,5,7\}$,$B=\{1,3,5,7,9\}$,$\therefore A\cap B=\{3,5,7\}$,$A\cup B=\{1,2,3,5,7,9\}$.

7.解析　(1)$A\cap B=\{3,4\}$,$B\cap C=\{6,7\}$,$A\cap C=\varnothing$.

(2)$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,$B\cup C=\{3,4,5,6,7,8,9\}$,$A\cup C=\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$.

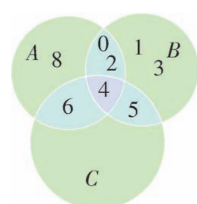
8.解析　(1)$A\subseteq B$.(2)$B\subseteq A$.

9.解析　$A\cap B=(-6,1)$,$A\cup B=[-7,3)$.

10.解析　$\complement_{\mathbf{R}} A=(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$.

◆习题 1-1B

1.解析　画出维恩图如图,



(1)$A\cap B\cap C=\{4\}$.

(2)$A\cup B\cup C=\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$.

(3)$(A\cap B)\cup C=\{0,2,4,5,6\}$.

(4)$(A\cup B)\cap C=\{4,5,6\}$.

2.解析　(1)$\because A\cup B=A$,$\therefore B\subseteq A$.

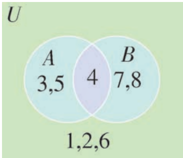
又$\because A=\{a,b,c\}$,

$\therefore$集合B可以是:$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

(2)$\because A\cap B=B$,$\therefore B\subseteq A$,$\therefore$集合B可以是:$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}$.

(3)$\because \complement_U B=A$,$\therefore B=\complement_U A$,$\therefore B=\{d,e\}$.

3.解析　画出维恩图如图.



(1)$\complement_U A=\{1,2,6,7,8\}$,
$\complement_U B=\{1,2,3,5,6\}$,
$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,2,6\}$,
$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.
(2)$\because A\cap B=\{4\}$,
$\therefore \complement_U(A\cap B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.
$\because A\cup B=\{3,4,5,7,8\}$,
$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{1,2,6\}$.
结合(1)知,
$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$,
$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

4.解析 $\because C\subseteq A$ 且 $C\subseteq B$,
$\therefore C\subseteq(A\cap B)$.$\because A\cap B=\{0,2\}$,
$\therefore$ 集合 C 可以为$\varnothing$,$\{0\}$,$\{2\}$,$\{0,2\}$.

5.解析 $\because A=(-3,3)$,$B=\{0,1,2,3\}$,
$\therefore A\cap B=\{0,1,2\}$.

6.解析 $\because A=[-1,2]$,
$\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$,
$\because B\subsetneqq\complement_{\mathbf{R}}A$,$\therefore -\dfrac{p}{4}\leqslant-1$,$\therefore p\geqslant4$.

7.解析 (1)$A\cap(\complement_U B)$.
(2)$(A\cap(\complement_U B))\cup(B\cap\complement_U A)$.

8.解析 设集合 $A=\{x\mid x$ 为正方形$\}$,$B=\{x\mid x$ 为矩形$\}$,$C=\{x\mid x$ 为菱形$\}$,$D=\{x\mid x$ 为平行四边形$\}$,$E=\{x\mid x$ 为四边形$\}$,则 $A=(B\cap C)$,$A\subsetneqq B\subsetneqq D\subsetneqq E$,$A\subsetneqq C\subsetneqq D\subsetneqq E$.

◆习题 1-1C

1.解析 $\because A\cup B=A$,$\therefore B\subseteq A$.
若 $m^2=m$,则 $m=0$ 或 $m=1$.当 $m=0$ 时,$A=\{1,3,0\}$,$B=\{0,1\}$,符合题意;
当 $m=1$ 时,$m^2=1$,不满足集合中元素的互异性,舍去.
若 $m^2=3$,则 $m=\pm\sqrt{3}$.当 $m=\sqrt{3}$时,$A=\{1,3,\sqrt{3}\}$,$B=\{3,1\}$,符合题意;
当 $m=-\sqrt{3}$时,$A=\{1,3,-\sqrt{3}\}$,$B=\{3,1\}$,符合题意.
综上,m 的值为 $0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$.

2.解析 $P=[-1,1]$,$\because P\cup M=P$,
$\therefore M\subseteq P$,$\therefore -1\leqslant a\leqslant1$.

3.解析 $\because \complement_U A=(a,+\infty)$,$(\complement_U A)\cup B=U$,
$\therefore a<1$.

4.解析 $\because M\neq N$,$(\complement_U M)\cap N=\varnothing$,$\therefore N\subsetneqq M$,$\therefore M\cup N=M$.

1.2 常用逻辑用语

1.2.1 命题与量词

练习 A

1.解析 真命题有(3)(4)(7);
假命题有(1)(2)(5)(6)(8).

2.解析 (1)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2>0$,假命题.
(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,$\dfrac{x}{1}=x$,真命题.

3.解析 (1)假命题.(2)假命题.(3)真命题.(4)假命题.(5)真命题.(6)真命题.

练习 B

1.解析 真命题有(1)(2)(3)(5)(6);
假命题有(4).

2.解析 (1)假命题.(2)假命题.(3)真命题.(4)假命题.(5)真命题.

3.解析 (1)真命题.例如 $x=4$ 且 $y=1$.
(2)真命题.例如 $a=b$.(3)真命题.

4.解析 (1)$a\geqslant1$.(2)$a<-1$.

1.2.2 全称量词命题与存在量词命题的否定

练习 A

1.解析 (1)假命题.(2)假命题.

2.解析 (1)有的分数不是有理数.假命题.
(2)任何三角形都不是锐角三角形.假命题.

3.解析 $\neg q$:$\exists x\in[-2,3)$,$x^2\geqslant9$.假命题.

练习 B

1.解析 (1)二次函数 $y=(x-1)^2-1$ 的图像的顶点坐标不是$(1,-1)$.假命题.
(2)正数的立方根不都是正数.假命题.
(3)任何三角形的最大的内角都不小于 $60°$.真命题.
(4)存在实数 t,点(t,t)不在一次函数 $y=x$ 的图像上.假命题.

2.解析 (1)$\forall x\in\mathbf{R}$,$|x|+x\neq0$.假命题.
(2)$\exists x\in\mathbf{R}$,$|x|+1-x=0$.假命题.

3.解析 $\because M=[a,a+1]$,$x\in M$,
$\therefore a\leqslant x\leqslant a+1$,
$\therefore a+1\leqslant x+1\leqslant a+2$,$\therefore a+1>0$,$\therefore a>-1$.

1.2.3 充分条件、必要条件

练习 A

1.解析 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的必要不充分条件.

2.解析 (1)“形如 $y=x^2+bx$(b 是常数)的函数”是“这个函数是二次函数”的充分不必要条件,可看成判定定理.
(2)“四边形对角线互相平分”是“四边形是菱形”的必要不充分条件,可看成性质定理.

3.解析 (1)必要不充分条件.(2)充要条件.(3)充分不必要条件.

4.解析 可以,因为“三角形有两个角之和为 90°”是“三角形是直角三角形”的充要条件.

练习 B

1.解析 (1)充分不必要条件.(2)充要条件.(3)必要不充分条件.

2.解析 (1)必要不充分条件.(2)充要条件.(3)充分不必要条件.

3.解析 “$a>b+1$”是“$a>b$”的充分不必要条件.
“$a>b-1$”是“$a>b$”的必要不充分条件.

◆习题 1-2A

1.解析 $p(5)$是假命题,$p(-1)$是假命题.

2.解析 (1)$\exists$一个多边形,其内角和是 $360°$.
(2)$\forall x\in\mathbf{R}$,$x\times(-1)=-x$.
(3)$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^3\geqslant x^2$.

3.解析 (1)$\neg p$:$\forall x\in\mathbf{Z}$,$x-1\leqslant0$.
(2)$\neg p$:$\exists x\in\mathbf{Q}$,$x-2<0$.
(3)$\neg p$:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+1\leqslant0$.
(4)$\neg p$:$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2-1\geqslant0$.

4.解析 (1)p 是 q 的充分不必要条件.
(2)p 是 q 的充要条件.

5.解析 (1)$\exists x\in M$,$x\leqslant1$.假命题.
(2)$\forall x\in M$,x 是素数.真命题.

◆习题 1-2B

1.解析 真命题:(1)(2)(4);
假命题:(3).

2.解析 (1)真命题.(2)真命题.(3)真命题.

3.解析 (1)充分不必要条件.(2)必要不充分条件.

4.解析 (1)$x=0$.(2)$x^3=0$.

5.解析 $\because x\in A\Rightarrow x\in B$,
且 $x\in B\nRightarrow x\in A$,
$\therefore A\subsetneqq B$,$\therefore a<3$.

6.解析 (1)真命题.例如 $x=0$,$y=0$.
(2)真命题.

◆习题 1-2C

1.解析　(1)假命题($x=0$).(2)真命题.

2.解析　(1)假命题.(2)真命题.

复习题

A 组

1.解析　(1)非空有限集.(2)无限集.(3)空集.(4)无限集.

2.解析　(1)$\{4\}$.(2)$\{1\}$.

3.解析　$A\cap B=\{1,2\}$.

4.解析　$M\cup N=(-2,3)$,

$\complement_{\mathbf{R}}M=(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

5.解析　$\because A\cap B=\{1,2\}$,

$\therefore (A\cap B)\cup C=\{1,2,3,4\}$.

6.解析　$\because \{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3,4\}$,$\therefore$ 集合 A 可以是$\{1,2\}$,$\{1,2,3\}$,$\{1,2,4\}$,$\{1,2,3,4\}$,共四个.

7.解析　A.

8.解析　(1)真命题.(2)真命题.(3)真命题.(4)假命题.

9.解析　真命题:(1)(2)(3)(4)(5).

10.解析　(1)有的实数不存在倒数.真命题.

(2)任意平行四边形,它的对角线相等.假命题.

(3)$\exists x\in\{x|x$ 是三角形$\}$,x 的内角和不是 $180°$.假命题.

11.解析　(1)充分不必要条件.

(2)必要不充分条件.

(3)充分不必要条件.

(4)必要不充分条件.

(5)必要不充分条件.

B 组

1.解析　$\{5\}$.

2.解析　$\because A=\{x|x^2-2x=0\}=\{0,2\}$,$B=\{0,1,2\}$,

$\therefore A\cap B=\{0,2\}$.

3.解析　$\because P=\{0,1,2\}$,$M=\{-2,-1,0,1,2\}$,

$\therefore P\cup M=\{-2,-1,0,1,2\}$.

4.解析　$\because A=\{3,4,5,\cdots\}$,$U=\{2,3,4,5,\cdots\}$,$\therefore \complement_U A=\{2\}$.

5.解析　$\because \complement_U P=\{2,4,6\}$,$\therefore (\complement_U P)\cup Q=\{1,2,4,6\}$.

6.解析　$\because A=\{1,2\}$,$A\cup B=\{1,2,3\}$,

$\therefore$ 集合 B 可以是:$\{3\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$.

7.解析　$\because A=\{1,2\}$,$\therefore B=\{x|x=2a,a\in A\}=\{2,4\}$,$\therefore A\cup B=\{1,2,4\}$,

$\therefore \complement_U(A\cup B)=\{3,5\}$,$\therefore$ 集合$\complement_U(A\cup B)$中包含的元素个数为 2.

8.解析　$a\leqslant -2$.

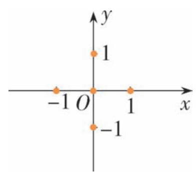
9.解析　(1)必要不充分条件.(2)既不充分也不必要条件.(3)充分不必要条件.

10.解析　(1)假命题.(2)真命题.(3)真命题.(4)真命题.(5)真命题.(6)真命题.

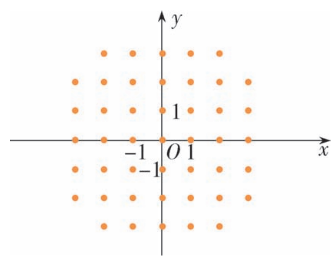
C 组

1.解析　$\because A=\{1,2,3,4,5\}$,$\therefore B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$.$\therefore B$ 中有 10 个元素.

2.解析　$A=\{(-1,0),(0,0),(1,0),(0,1),(0,-1)\}$,如图所示,图上的每个点对应的坐标就是集合 A 中的元素.



因为 $B=\{(x,y)||x|\leqslant 2,|y|\leqslant 2,x,y\in\mathbf{Z}\}$,由 $A\oplus B$ 定义可得,$A\oplus B$ 相当于将集合 A 中各点上、下平移或左、右平移 $-2,-1,0,1,2$ 个单位,如图所示,



所以 $A\oplus B$ 中的元素个数为 45.

3.解析　由$\{1,\sqrt{a}\}\subseteq\{1,2,4,a^2\}$得,

若$\sqrt{a}=2$,则 $a=4$;若$\sqrt{a}=4$,则 $a=16$;

若$\sqrt{a}=a^2$,则 $a=0$ 或 $a=1$.

经检验知,a 的值为 0,4,16.

4.解析　令 $A=\{0,-1,2a\}$,$B=\{a-1,-|a|,a+1\}$,由$\{0,-1,2a\}=\{a-1,-|a|,a+1\}$得,

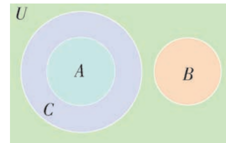
若 $a-1=0$,则 $a=1$,此时 $A=\{0,-1,2\}$,$B=\{0,-1,2\}$,满足条件;

若$-|a|=0$,则 $a=0$,不满足集合中元素的互异性;

若 $a+1=0$,则 $a=-1$,此时 $A=\{0,-1,-2\}$,$B=\{0,-1,-2\}$,满足条件.

综上可得,$a=\pm1$.

5.解析　充要条件.提示:结合维恩图判断.



第二章　等式与不等式

2.1　等式

2.1.1　等式的性质与方程的解集

练习 A

1.解析　(1)$\because 2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}x+1$,$\therefore \frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x=1$,$\therefore \frac{5}{6}x=1$,$\therefore x=\frac{6}{5}$,$\therefore$ 方程的解集为$\left\{\frac{6}{5}\right\}$.

(2)由$\frac{2x-1}{3}-\frac{3-x}{2}=\frac{1}{2}$得 $2(2x-1)-3(3-x)=3$,$\therefore 4x-2-9+3x=3$,

$\therefore 7x=14$,$\therefore x=2$,$\therefore$ 方程的解集为$\{2\}$.

(3)由 $x^2+4x+4=0$ 得$(x+2)^2=0$,$\therefore x=-2$,$\therefore$ 方程的解集为$\{-2\}$.

(4)$\because x^2+7x-8=0$,$\therefore (x+8)(x-1)=0$,$\therefore x=1$ 或 $x=-8$,$\therefore$ 方程的解集为$\{-8,1\}$.

2.解析　(1)$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

(2)$x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$.

3.解析　$\{-1,1,3,5\}$.

4.证明　$\because (x+a)(x+b)=x^2+bx+ax+ab=x^2+(a+b)x+ab$,

$\therefore$ 等式成立.

5.解析　$t^3-m^3=t^3+(-m)^3=[t+(-m)]\cdot[t^2-t\cdot(-m)+(-m)^2]=(t-m)(t^2+mt+m^2)$.

练习 B

1.解析　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

2.解析　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

3.解析　(1)$x^2+(a+2)x+2a=(x+a)(x+2)$.

(2)$x^2-(3+t)x+3t=(x-3)(x-t)$.

4.解析　$\because ax=x-1$,$\therefore (1-a)x=1$,

当 $1-a=0$,即 $a=1$ 时,方程无解,此时方程的解集为$\varnothing$;

当 $1-a\neq0$,即 $a\neq1$ 时,$x=\frac{1}{1-a}$,此时方程的解集为$\left\{\frac{1}{1-a}\right\}$.

5. 解析　$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$.

当 $a=0$ 时,$B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$;

当 $a\neq0$ 时,$B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$,$\because B\subseteq A$,$\therefore \frac{1}{a}=1$ 或$\frac{1}{a}=2$,$\therefore a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 实数 a 的值为 0,1 或$\frac{1}{2}$.

2.1.2　一元二次方程的解集及其根与系数的关系

练习 A

1. 解析　$\because A=\{-4,4\}$,$B=\{-3,4\}$,

$\therefore A\cap B=\{4\}$,$A\cup B=\{-4,-3,4\}$.

2. 解析　由题意得,$\Delta=(-3m)^2-4\times1\times1=0$,$\therefore m=\pm\frac{2}{3}$,$\therefore$ 实数 m 的取值集合为$\left\{-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right\}$.

3. 解析　(1)$\because 2x^4-7x^2+3=0$,$\therefore 2(x^2)^2-7x^2+3=0$,$\therefore (x^2-3)(2x^2-1)=0$,

$\therefore x^2=3$ 或 $x^2=\frac{1}{2}$,

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$或 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore$ 方程的解集为$\left\{-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{3}\right\}$.

(2)令 $t=\frac{1}{x}$,则 $t\neq0$,则 $2t^2+t-1=0$,

$\therefore (t+1)\cdot(2t-1)=0$,$\therefore t=-1$ 或 $t=\frac{1}{2}$,

即$\frac{1}{x}=-1$ 或$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,$\therefore x=-1$ 或 $x=2$.

$\therefore$ 方程的解集为$\{-1,2\}$.

练习 B

1. 解析　当 $m=0$ 时,方程$-3x+1=0$ 的解集为$\left\{\frac{1}{3}\right\}$,不符合题意;

当 $m\neq0$ 时,由方程的解集为空集得 $\Delta=(-3)^2-4m<0$,$\therefore m>\frac{9}{4}$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是$\left(\frac{9}{4},+\infty\right)$.

2. 解析　由题意得,$x_1+x_2=2\sqrt{2}$,$x_1x_2=1$.

(1)$x_1^2x_2+x_1x_2^2=x_1x_2(x_1+x_2)=2\sqrt{2}$.

(2)$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2\sqrt{2}$.

3. 解析　$\because$ 方程的两根同号,

$\therefore \begin{cases}\Delta=(-2)^2-4(m-1)\geqslant0,\\ m-1>0,\end{cases}$

解得 $1<m\leqslant2$.

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是$(1,2]$.

4. 解析　由题意得,$x^2=-a$.

当 $a>0$ 时,方程的解集为$\varnothing$;

当 $a=0$ 时,方程的解集为$\{0\}$;

当 $a<0$ 时,方程的解集为$\{\sqrt{-a},-\sqrt{-a}\}$.

5. 解析　设户高 y 尺,广 x 尺,邪 z 尺,由题意得$\begin{cases}x^2+y^2=z^2,\\ z=y+2,\\ z=x+4,\end{cases}$ $\therefore (z-4)^2+(z-2)^2=z^2$,

即 $z^2-12z+20=0$,

$\therefore z=10(z=2$ 舍去$)$,

$\therefore x=6$,$y=8$.

答:户高 8 尺,广 6 尺,邪 10 尺.

2.1.3　方程组的解集

练习 A

1. 解析　(1)$\begin{cases}2x+y=0,①\\ 3x-2y=14,②\end{cases}$ ①×2+②得,$7x=14$,$\therefore x=2$,

将 $x=2$ 代入①得 $y=-4$.

$\therefore$ 方程组的解集为$\{(2,-4)\}$.

(2)原方程组可化为

$\begin{cases}2x-6y+1=0,①\\ 3x-10y-7=0,②\end{cases}$ ①×3−②×2 得 $y=-\frac{17}{2}$,将 $y=-\frac{17}{2}$代入①得 $x=-26$.

$\therefore$ 方程组的解集为$\left\{\left(-26,-\frac{17}{2}\right)\right\}$.

2. 解析　$A\cap B=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}x+y=6\\ x-2y=0\end{cases}\right\}=\{(4,2)\}$.

3. 解析　(1)$\begin{cases}x+y=3,①\\ y+z=4,②\\ z+x=5,③\end{cases}$ ①+②+③得 $x+y+z=6$④,④−①得 $z=3$,④−②得 $x=2$,④−③得 $y=1$.

$\therefore$ 方程组的解集为$\{(2,1,3)\}$.

(2)$\begin{cases}3x+y-2z=2,①\\ 2y+3z=0,②\\ 2x-y+z=11,③\end{cases}$ ①×2−③×3 得 $5y-7z=-29$④,②×7+④×3 得 $29y=-87$,

$\therefore y=-3$,将 $y=-3$ 代入②得 $z=2$,将 $y=-3$,$z=2$ 代入①得 $x=3$.

$\therefore$ 方程组的解集为$\{(3,-3,2)\}$.

4. 解析　设合伙人数为 x,羊价格为 y 钱,

则有$\begin{cases}5x+45=y,\\ 7x+3=y,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=21,\\ y=150.\end{cases}$

答:合伙人数为 21,羊价格为 150 钱.

5. 解析　设毛诗、春秋、周易分别为 x 册、y 册、z 册,共有 m 个人,

则$\begin{cases}\frac{m}{3}=x,\\ \frac{m}{4}=y,\\ \frac{m}{5}=z,\\ x+y+z=94,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=40,\\ y=30,\\ z=24,\\ m=120.\end{cases}$

答:毛诗 40 册,春秋 30 册,周易 24 册.

练习 B

1. 解析　$\because A\cap B=\{(1,1)\}$,

$\therefore (1,1)\in A$ 且$(1,1)\in B$,

$\therefore \begin{cases}a+1=2,\\ 1+b=3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

2. 解析

(1)$\left\{\left(-\frac{1}{2},-1\right),\left(-\frac{25}{2},-5\right)\right\}$.

(2)$\left\{(-3,-2),\left(\frac{17}{5},\frac{6}{5}\right)\right\}$.

(3)$\left\{(-2,0),\left(1,\frac{3}{2}\right)\right\}$.

3. 解析　设原来 A,B 社团人数都为 a,A 社团成员数的增长率为 p,则有

$\begin{cases}a(1+p)+a(1+80\%)=310,\\ \frac{a(1+p)^2}{a+2\times a\times80\%}=0.65,\end{cases}$

解得$\begin{cases}p=30\%,\\ a=100,\end{cases}$则 $100\times80\%=80$(人).

答:A 社团成员数的增长率为 30%,B 社团每年招收的成员为 80 人.

4. 解析　设练习本、活页夹、签字笔的单价分别为 x 元、y 元、z 元,则有

$\begin{cases}5x+2y+8z=52,①\\ 3x+4y+2z=48,②\end{cases}$

①×3−②×5 得 $y-z=6$.

$\therefore$ 活页夹的单价与签字笔的单价之差为 6 元.

5. 答案　3;4;1;4.

◆习题 2-1A

1. 解析　(1)(2)(4).

2. 解析　$\left\{-\frac{13}{5}\right\}$.

3. 解析　(1)$\left\{-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$.(2)$\varnothing$.

(3)$\{-1,2\}$.(4)$\{0,2\}$.

4.解析 ∵$A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3,4,5\}$,
∴$A\subsetneqq B$.

5.解析 由题意知$\begin{cases}-b=3,\\c=2,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}b=-3,\\c=2.\end{cases}$

6.解析 (1)$\left\{\left(\frac{22}{7},\frac{3}{7}\right)\right\}$.

(2)$\left\{\left(\frac{18}{17},\frac{7}{17}\right)\right\}$.

7.解析 设甲、乙两件商品的进价分别为x元、y元，则$\begin{cases}x\times10\%+y\times8\%=150,\\x\times15\%+y\times10\%=200,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5x+4y=7\ 500,\\3x+2y=4\ 000,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=500,\\y=1\ 250.\end{cases}$

答：甲、乙两件商品的进价分别为500元、1 250元.

8.解析 设长方体的长为x cm，宽为y cm，铁丝的长度为l cm，

则有$\begin{cases}xy\times10=1\ 800,\\2(x+y)\times10+2xy=900,\end{cases}$

∴$\begin{cases}xy=180,①\\10(x+y)+xy=450,②\end{cases}$

将①代入②得$x+y=27$，

∴$l=4(x+y+10)=4(27+10)=148$(cm).

答：铁丝的长度为148 cm.

◆习题2-1B

1.解析 方程的解集为$\{-2,3\}$.

2.解析 $(a+2b)^3=a^3+(2b)^3+3a^2\times(2b)+3a\times(2b)^2=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$.
$(a-2b)^3=a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$.

3.解析 原方程可化为$\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{(x+3)(x+4)}$，∴$(x+1)(x+2)=(x+3)\cdot(x+4)$，∴$x=-\frac{5}{2}$，经检验知，$x=-\frac{5}{2}$符合题意.

4.解析 ∵$A\cap B=B$，∴$B\subseteq A$.
当$B=\varnothing$时，$\Delta=2^2-4(a-1)<0$，∴$a>2$；
当$B\neq\varnothing$时，∵$A=\{-2\}$，∴$B=\{-2\}$.
∴$\begin{cases}(-2)^2+2\times(-2)+a-1=0,\\\Delta=0,\end{cases}$ ∴无解.
综上，a的取值集合为$\{a|a>2\}$.

5.解析 由题意，知$x\neq1$，
由原方程得$1=x-1+k$，
∴$x=2-k(x\neq1)$.
∵方程的解集为空集，
∴$2-k=1$，∴$k=1$.

6.解析 (1)$\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.(2)$\varnothing$.

(3)$\varnothing$.

7.解析 (1)令$x^2=t$，则$t\geqslant0$，则$6t^2-17t+12=0$，∴$(2t-3)(3t-4)=0$，

∴$t=\frac{3}{2}$或$t=\frac{4}{3}$.由$x^2=\frac{3}{2}$得，$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$；

由$x^2=\frac{4}{3}$得$x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

∴方程的解集为

$\left\{-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$.

(2)∵$2x^3-x^2-6x=0$，∴$x(2x^2-x-6)=0$，∴$x=0$或$2x^2-x-6=0$.
由$2x^2-x-6=0$得$(2x+3)(x-2)=0$，

∴$x=2$或$x=-\frac{3}{2}$.

∴方程的解集为$\left\{-\frac{3}{2},0,2\right\}$.

8.解析 将$\begin{cases}x=\frac{7}{2},\\y=-2\end{cases}$代入$2x-ny=13$得$7+2n=13$，∴$n=3$.同理将$\begin{cases}x=3,\\y=-7\end{cases}$代入$mx+y=5$得$3m-7=5$，∴$m=4$.

9.解析 (1)$\begin{cases}x^2+2y^2=3,①\\2x-3y=5,②\end{cases}$ 由②得$x=\frac{3y+5}{2}$，代入①整理得$17y^2+30y+13=0$，

∴$(17y+13)(y+1)=0$，

∴$y=-\frac{13}{17}$或$y=-1$，代入②得

$\begin{cases}x=\frac{23}{17},\\y=-\frac{13}{17}\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=1,\\y=-1,\end{cases}$

∴方程组的解集为

$\left\{(1,-1),\left(\frac{23}{17},-\frac{13}{17}\right)\right\}$.

(2)$\begin{cases}x^2-4y^2=15,①\\x+2y=5,②\end{cases}$

由①得$(x+2y)(x-2y)=15$，∴$x-2y=3$，

∴$\begin{cases}x-2y=3,\\x+2y=5,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}x=4,\\y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

∴方程组的解集为$\left\{\left(4,\frac{1}{2}\right)\right\}$.

10.解析 由题意知$\begin{cases}-\frac{b}{a}=2,\\\frac{c}{a}=\frac{3}{4},\end{cases}$

∴$\begin{cases}\frac{b}{a}=-2,\\\frac{c}{a}=\frac{3}{4}.\end{cases}$

(1)$x_1+x_2=-\frac{b}{c}=-\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{8}{3}$，

$x_1x_2=\frac{a}{c}=\frac{4}{3}$.

(2)$x_1+x_2=\frac{b}{c}=-\frac{8}{3}$，

$x_1x_2=\frac{a}{c}=\frac{4}{3}$.

11.解析 由题意知$x\neq0$且$x\neq1$.原方程可化为$x^2+2x=k$.
由题知，该方程有两个相等的实数根，
故$\Delta=2^2-4\times1\times(-k)=0$，
∴$k=-1$，
当$k=-1$时，原方程为$\frac{x}{x-1}=\frac{-1-2x}{x^2-x}$，
解得$x=-1$，符合题意.
当$x=0$时，$k=0$，若$k=0$，则$x^2+2x=0$，
∴$x=-2$或$x=0$(舍去)；
当$x=1$时，$k=3$，若$k=3$，则$x^2+2x=3$，
∴$x=-3$或$x=1$(舍去).
综上，方程的解集中只有一个元素时，$k=-1$或$k=0$或$k=3$.

12.解析 由题意，得$x_1+x_2=3$，$x_1x_2=1$.
(1)$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]=3\times(3^2-3\times1)=18$.
(2)$\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}=\frac{3^2-2\times1}{1}=7$.

13.解析 设方程的两根为x_1,x_2，$\Delta=4(m-2)^2-4(m^2+4)\geqslant0$，∴$m\leqslant0$.
又$x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1x_2=m^2+4$.
∴$21=(x_1^2+x_2^2)-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=4(m-2)^2-3(m^2+4)$，
∴$m^2-16m-17=0$，∴$(m-17)(m+1)=0$，∴$m=-1$($m=17$舍去).
∴实数m的值为-1.

◆习题2-1C

1.解析 令$x^2+x=t$，则$t\geqslant-\frac{1}{4}$，则$t^2+t-30=0$，∴$(t-5)(t+6)=0$，∴$t=5$或$t=-6$(舍去).

由$x^2+x=5$得$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$.

综上,方程的解集为$\left\{\frac{-1-\sqrt{21}}{2},\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$.

2.解析　由$\begin{cases}3x-y-z=0,\\2x+y-z=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{2z}{5},\\y=\frac{z}{5}.\end{cases}$

$\therefore \frac{x^2+y^2}{(x+y)z}=\frac{\left(\frac{2}{5}z\right)^2+\left(\frac{z}{5}\right)^2}{\left(\frac{2z}{5}+\frac{z}{5}\right)z}=\frac{1}{3}$.

3.解析　由$\Delta=4(k+1)^2-4(k^2-2)\geqslant 0$得$k\geqslant-\frac{3}{2}$,$\because |x_1|=|x_2|$,

$\therefore$ 当$x_1=x_2$时,$\Delta=0$,即$k=-\frac{3}{2}$;

当$x_1=-x_2$时,$x_1+x_2=0$,$2(k+1)=0$,即$k=-1$.综上,实数k的值为$-\frac{3}{2}$或-1.

4.解析　当$a=0,b\neq0$时,方程的解集为$\varnothing$;

当$a=0,b=0$时,方程的解集为$\mathbf{R}$;

当$a\neq0$时,方程的解集为$\left\{\frac{b}{a}\right\}$.

5.解析　由题易知$\Delta=a^2-4$.

当$\Delta<0$,即$-2<a<2$时,方程的解集为$\varnothing$.

当$\Delta=0$时,$a=-2$或$a=2$.当$a=-2$时,方程的解集为$\{1\}$;当$a=2$时,方程的解集为$\{-1\}$.

当$\Delta>0$,即$a<-2$或$a>2$时,方程的解集为$\left\{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}$.

2.2　不等式

2.2.1　不等式及其性质

练习 A

1.解析　(1)如果$a\geqslant b$,那么$a+c\geqslant b+c$.

(2)如果$a\geqslant b,c\geqslant0$,那么$ac\geqslant bc$.

(3)如果$a\geqslant b,c\leqslant0$,那么$ac\leqslant bc$.

(4)如果$a\geqslant b,b\geqslant c$,那么$a\geqslant c$.

(5)$a\geqslant b\Leftrightarrow b\leqslant a$.

(6)如果$a+b\geqslant c$,那么$a\geqslant c-b$.

(7)如果$a\geqslant b,c\geqslant d$,那么$a+c\geqslant b+d$.

(8)如果$a\geqslant b\geqslant0,c\geqslant d\geqslant0$,那么$ac\geqslant bd$.

(9)如果$a\geqslant b\geqslant0$,那么$a^n\geqslant b^n(n\in\mathbf{N},n>1)$.

(10)如果$a\geqslant b\geqslant0$,那么$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}$.

2.解析　(1)真命题.(2)假命题.(3)真命题.

3.答案　(1)>　(2)<　(3)>　(4)<　(5)>　(6)<

4.证明　$\because a>b,\therefore a-b>0,\because c<0,\therefore -c>0$,

$\therefore (-c)\times(a-b)>0,\therefore -ac+bc>0$,

$\therefore ac<bc$.

5.证明　假设$\sqrt{6}-\sqrt{5}\geqslant2-\sqrt{3}$,

即$\sqrt{6}+\sqrt{3}\geqslant2+\sqrt{5}$,

即$(\sqrt{6}+\sqrt{3})^2\geqslant(2+\sqrt{5})^2$,

即$9+6\sqrt{2}\geqslant9+4\sqrt{5}$,

即$6\sqrt{2}\geqslant4\sqrt{5}$,

即$72\geqslant80$,

又$\because 72<80$,$\therefore$ 假设不成立.

$\therefore$ 原不等式成立.

练习 B

1.解析　正比例函数$y=cx(c\neq0)$.结合图像说明即可.

2.答案　(1)>　(2)>　(3)>　(4)<　(5)>　(6)<

3.证明　$\because a^2+9b^2-6ab=(a-3b)^2\geqslant0$,

$\therefore a^2+9b^2\geqslant6ab$.

当$a=3b$时等号成立.

4.证明　$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{ab+bm-ab-am}{b(b+m)}=\frac{m(b-a)}{b(b+m)}$.$\because b>a,\therefore b-a>0$.

又a,b,m都是正实数,

$\therefore \frac{m(b-a)}{b(b+m)}>0$,

$\therefore \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

2.2.2　不等式的解集

练习 A

1.解析　(1)$(-6,+\infty)$.(2)$\left(-\frac{8}{3},+\infty\right)$.

2.解析　(1)$\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$.(2)$\varnothing$.

3.解析　(1)$\because |2x|-3\geqslant0,\therefore |2x|\geqslant3$,

$\therefore 2x\geqslant3$或$2x\leqslant-3$,$\therefore x\geqslant\frac{3}{2}$或$x\leqslant-\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解集为$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.

(2)$\because |1-2x|<2,\therefore |2x-1|<2,\therefore -2<2x-1<2$,

$\therefore -\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 不等式的解集为$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.

4.解析　$AB=8,M(-1)$.

练习 B

1.解析　(1)$\varnothing$.(2)$\{-3\}$.

2.解析　(1)$x=\frac{-1+6}{2}=\frac{5}{2}$.

(2)$\because \left|\frac{-1+x}{2}-6\right|<5,\therefore |x-13|<10$,

$\therefore -10<x-13<10,\therefore 3<x<23$.

$\therefore x$的取值范围是$(3,23)$.

3.解析　(1)$\left(-\frac{a}{2},+\infty\right)$.

(2)当$a=0$时,不等式的解集为$\varnothing$;

当$a>0$时,由$ax>1$得$x>\frac{1}{a}$,

$\therefore$ 不等式的解集为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$;

当$a<0$时,由$ax>1$得$x<\frac{1}{a}$,

$\therefore$ 不等式的解集为$\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$.

2.2.3　一元二次不等式的解法

练习 A

1.解析　(1)$(0,3)$.(2)$[-1,1]$.

(3)$[-7,1]$.(4)$\varnothing$.

2.解析　(1)$(-1-\sqrt{6},-1+\sqrt{6})$.

(2)$(-\infty,2-\sqrt{6}]\cup[2+\sqrt{6},+\infty)$.

(3)$\varnothing$.

(4)$\{4\}$.

(5)$(-\infty,4-\sqrt{15}]\cup[4+\sqrt{15},+\infty)$.

(6)$\varnothing$.

3.解析　(1)$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2)$(1,2)$.

练习 B

1.解析　$\because A=\{x\mid x^2+3x-4\leqslant0\}=[-4,1]$,$B=(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$,

$\therefore A\cap B=\{x\mid -4\leqslant x<-2$或$0<x\leqslant1\}$.

2.解析　(1)$(2,6)$.(2)$\mathbf{R}$.

3.解析　$(x+1)(x-3)>0$,$(x+2)(x-4)>0$,$(x+3)(x-5)>0$.

4.解析　$\frac{x+1}{(x-1)^2}>1\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1,\\x+1>(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1,\\x^2-3x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1,\\0<x<3\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$或$1<x<3$.

$\therefore$ 不等式的解集为$(0,1)\cup(1,3)$.

5.解析　$\because x^2-(a+1)x+a\leqslant0$,

$\therefore (x-1)(x-a)\leqslant 0$.

当 $a>1$ 时,不等式的解集为$[1,a]$;

当 $a<1$ 时,不等式的解集为$[a,1]$;

当 $a=1$ 时,不等式的解集为$\{1\}$.

2.2.4 均值不等式及其应用

练习 A

1.解析 $y=x+\frac{3}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}=2\sqrt{3}$,当且仅当 $x=\frac{3}{x}$,即 $x=\sqrt{3}$时,等号成立,即当 $x=\sqrt{3}$时,y 取得最小值 $2\sqrt{3}$.

2.证明 $\because ab>0,\therefore \frac{b}{3a}>0,\frac{3a}{b}>0$,

$\therefore \frac{b}{3a}+\frac{3a}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{3a}\cdot\frac{3a}{b}}=2$,当且仅当 $\frac{b}{3a}=\frac{3a}{b}$,即 $b=3a$ 时,等号成立.

3.解析 (1)设 x,y 是正数,$xy=49$,则 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=14$,当且仅当 $x=y$ 且 $xy=49$,即 $x=y=7$ 时,等号成立.故当 $x=y=7$ 时,它们的和最小.

(2)设 a,b 是正数,$a+b=12$,则 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=36$,当且仅当 $a=b$ 且 $a+b=12$,即 $a=b=6$ 时,等号成立.故当 $a=b=6$ 时,它们的积最大.

练习 B

1.解析 $\because x\in(-2,5),\therefore 2+x>0,5-x>0$,

$\therefore y=(2+x)(5-x)\leqslant\left[\frac{(2+x)+(5-x)}{2}\right]^2=\frac{49}{4}$,

当且仅当 $2+x=5-x$,即 $x=\frac{3}{2}$时,等号成立,即当 $x=\frac{3}{2}$时,y 取得最大值$\frac{49}{4}$.

2.解析 $\because x<0,\therefore -x>0,\therefore y=x+\frac{1}{x}=-\left[-x+\frac{1}{(-x)}\right]\leqslant -2\sqrt{-x\cdot\frac{1}{(-x)}}=-2$,

当且仅当$-x=\frac{1}{-x}$,即 $x=-1$ 时,等号成立,即当 $x=-1$ 时,y 取得最大值-2.

3.证明 $\because a$ 是正数,

$\therefore a+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$,

当且仅当 $a=\frac{1}{a}$,即 $a=1$ 时,等号成立.

同理,$b+\frac{1}{b}\geqslant 2$,当且仅当 $b=\frac{1}{b}$,即 $b=1$ 时,等号成立.

$\therefore \left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$.

4.解析 设矩形的长为 x m,宽为 y m,菜地面积为 S m^2,则有 $x+2y=l$.

$\because x>0,2y>0,\therefore S=xy=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 2y\leqslant\frac{1}{2}\times\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=\frac{l^2}{8}$,

当且仅当 $x=2y$ 且 $x+2y=l$,即 $x=\frac{l}{2}$,$y=\frac{l}{4}$时,等号成立,此时菜地的面积最大,最大值为$\frac{l^2}{8}$ m^2.

◆习题 2-2A

1.解析 $\left(\frac{6}{7},+\infty\right)$.

2.解析 $a^2+ab>3ab-b^2$.

证明:$a^2+ab-(3ab-b^2)=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

$\because a\neq b,\therefore (a-b)^2>0$,

$\therefore a^2+ab>3ab-b^2$.

3.解析 由题知 $b\neq 0.\because \frac{a}{b}>0\Leftrightarrow\frac{a}{b}\times b^2>0\Leftrightarrow ab>0$,

$\therefore \frac{a}{b}>0$ 是 $ab>0$ 的充要条件.

4.解析 $\because \begin{cases}x+1>0,\\2x+1\geqslant 0,\\-x+3>0,\end{cases}\therefore\begin{cases}x>-1,\\x\geqslant-\frac{1}{2},\\x<3,\end{cases}$

即$-\frac{1}{2}\leqslant x<3$.

$\therefore$ 不等式组的解集为$\left[-\frac{1}{2},3\right)$.

5.解析 (1)$[-8,1]$.

(2)$(-\infty,-4)\cup(-1,+\infty)$.

(3)$(-\infty,2-\sqrt{11})\cup(2+\sqrt{11},+\infty)$.

(4)$\varnothing$.

6.解析 (1)$\because |1-2x|\geqslant 3,\therefore |2x-1|\geqslant 3,\therefore 2x-1\leqslant -3$ 或 $2x-1\geqslant 3,\therefore x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 2,\therefore$ 不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

(2)$\because 2-|1-x|\leqslant 0,\therefore |x-1|\geqslant 2,\therefore x-1\geqslant 2$ 或 $x-1\leqslant -2,\therefore x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -1$,

$\therefore$ 不等式的解集为$(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

7.解析 $y=4x^2+\frac{1}{x^2}\geqslant 2\sqrt{4x^2\cdot\frac{1}{x^2}}=4$,当且仅当 $4x^2=\frac{1}{x^2}$,即 $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时,等号成立,此时 y 取得最小值 4.

8.解析 $\because x>0,\therefore y=\frac{x^2+2x+3}{x}=\left(x+\frac{3}{x}\right)+2\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{3}{x}}+2=2\sqrt{3}+2$,

当且仅当 $x=\frac{3}{x}$,即 $x=\sqrt{3}$时,等号成立,此时 y 取得最小值 $2\sqrt{3}+2$.

◆习题 2-2B

1.解析 $\because \frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1,\therefore$ 只要比较$\sqrt{2}+1$ 与 $2\sqrt{3}-1$ 的大小即可,只要比较$\sqrt{2}+2$ 与 $2\sqrt{3}$的大小,只要比较$(\sqrt{2}+2)^2$ 与$(2\sqrt{3})^2$ 的大小,只要比较 $2\sqrt{2}$与 3 的大小,$\because (2\sqrt{2})^2=8,3^2=9,\therefore$ 只要比较 8 与 9 的大小.$\because 8<9,\therefore \frac{1}{\sqrt{2}-1}<2\sqrt{3}-1$.

2.解析 $\because ax-1>x+2,\therefore (1-a)x<-3$.

$\because$ 不等式的解集为$(2,+\infty),\therefore \frac{-3}{1-a}=2,\therefore a=\frac{5}{2}$.

3.解析 $\because 1<a<3,2<b<3$,

$\therefore 3<a+b<6,2<ab<9$.

$\because -3<-b<-2,\therefore -2<a-b<1$.

又$-6<-2b<-4,\therefore -5<a-2b<-1$.

$\because \frac{1}{3}<\frac{1}{b}<\frac{1}{2},\therefore \frac{1}{3}<\frac{a}{b}<\frac{3}{2}$.

4.解析 $\because B=\{x\mid 2x+1<a\}=\left\{x\,\middle|\,x<\frac{a-1}{2}\right\},A\subseteq B$,

$\therefore \frac{a-1}{2}\geqslant 3$,

解得 $a\geqslant 7$,

$\therefore a$ 的取值范围为$[7,+\infty)$.

5.证明 $\because a^2+3b^2-2b(a+b)=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\geqslant 0,\therefore a^2+3b^2\geqslant 2b(a+b)$.

6.解析 $\because x^2-2mx+m\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$,

$\therefore \Delta=(-2m)^2-4m\leqslant 0$,解得 $0\leqslant m\leqslant 1$.

故 m 的取值范围为$[0,1]$.

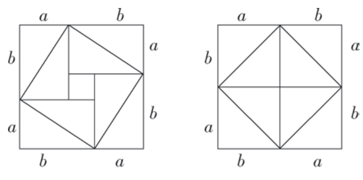
7.解析 由题意知$\begin{cases}-2+3=a,\\(-2)\times 3=-b,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a=1,\\b=6.\end{cases}\therefore x^2-5x+6<0$,

$\therefore (x-2)(x-3)<0$,

$\therefore 2<x<3$,即所求不等式的解集为$(2,3)$.

8. 解析　由图(1)知,大正方形的面积为$(a+b)^2$,八个直角三角形的面积和为$\frac{1}{2}\times ab\times 8=4ab$,
∵ $a\neq b$, ∴ $(a+b)^2>4ab$,即$a^2+b^2>2ab$.
由图(2)知,大正方形的面积为$(a+b)^2$,八个直角三角形的面积和为$4ab$,
∵ $a=b$, ∴ $(a+b)^2=4ab$,即$a^2+b^2=2ab$.
综上,$a^2+b^2\geq 2ab$.



(1) $(a\neq b)$　　(2) $(a=b)$

9. 解析　∵ $a>0,b>0$,
∴ $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}$,
∴ $\sqrt{ab}\geq 2\sqrt{2}$,即$ab\geq 8$,
当且仅当$\frac{1}{a}=\frac{2}{b}$,且$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,即$a=2,b=4$时,等号成立,此时$ab$的最小值为8.

10. 解析　∵不等式的解集为$\left[\frac{5}{3},2\right)$,不等式可化为$\frac{3x-(a+2)}{x-2}\leq 0$, ∴ $\frac{a+2}{3}=\frac{5}{3}$, ∴ $a=3$.

11. 解析　∵ $x>0$, ∴ $y=1-2x-\frac{4}{x}=1-2\left(x+\frac{2}{x}\right)\leq 1-2\times 2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=1-4\sqrt{2}$,
当且仅当$x=\frac{2}{x}$,即$x=\sqrt{2}$时,等号成立,此时y取得最大值$1-4\sqrt{2}$.

12. 解析　设使用x年时的年平均费用为y万元.由题意得,
$$y=\frac{10+0.9x+\left[0.2x+\frac{x(x-1)}{2}\times 0.2\right]}{x}=0.1x+\frac{10}{x}+1\geq 2\sqrt{0.1x\times\frac{10}{x}}+1=3,$$
当且仅当$0.1x=\frac{10}{x}$,即$x=10$时,等号成立,此时年平均费用y最小.
答:这种汽车使用10年时,它的年平均费用最小.

◆习题2-2C

1. 证明　∵ a,b,c都是正实数,
∴ $a+b\geq 2\sqrt{ab}$,当且仅当$a=b$时,等号成立;$b+c\geq 2\sqrt{bc}$,当且仅当$b=c$时,等号成立;$a+c\geq 2\sqrt{ac}$,当且仅当$a=c$时等号成立.
∴ $2(a+b+c)\geq 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$,
即$a+b+c\geq\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$,当且仅当$a=b=c$时,等号成立.

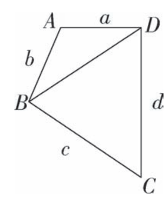
2. 解析　不等式$3x+1>0$的解集为$\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.
∵ $x^2+(a-1)x-a\leq 0$,
∴ $(x-1)(x+a)\leq 0$.
当$a=-1$时,不等式的解集为$\{1\}$,满足题意;
当$a>-1$时,不等式的解集为$[-a,1]$,
∵ $[-a,1]\subseteq\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$, ∴ $-a>-\frac{1}{3}$,
∴ $a<\frac{1}{3}$, ∴ $-1<a<\frac{1}{3}$;
当$a<-1$时,不等式的解集为$[1,-a]$,满足题意.
综上,a的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$.

3. 解析　∵ $x>1$, ∴ 令$x-1=t(t>0)$,则$x=t+1$.
∴ $y=\frac{(t+1)^2-(t+1)+4}{t}=\frac{t^2+t+4}{t}=\left(t+\frac{4}{t}\right)+1\geq 2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}+1=5$,
当且仅当$t=\frac{4}{t}$,即$t=2$时,等号成立,
即当$t=2$时,y取得最小值5,此时$x=3$.

4. 解析　∵ $AB=x$, ∴ $AD=12-x$,又$DP=PB$, ∴ $AP=AB-PB=AB-DP=x-DP$.
由勾股定理得$(12-x)^2+DP^2=(x-DP)^2$, ∴ $DP=12-\frac{72}{x}$.
∴ $\triangle ADP$的面积$S=\frac{1}{2}AD\cdot DP=\frac{1}{2}\cdot(12-x)\left(12-\frac{72}{x}\right)=108-\left(6x+\frac{432}{x}\right)$.
由$\begin{cases}12-x>0,\\ 12-\frac{72}{x}>0\end{cases}$得$6<x<12$, ∴ $6x+\frac{432}{x}\geq 2\sqrt{6x\times\frac{432}{x}}=72\sqrt{2}$, ∴ $S\leq 108-72\sqrt{2}$,
当且仅当$6x=\frac{432}{x}$,即$x=6\sqrt{2}$时,等号成立,此时S有最大值$108-72\sqrt{2}$.

5. 解析　∵ a,b都是正数,且$a+b=1$,
∴ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+2\geq 2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}+2=4$,
当且仅当$\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$且$a+b=1$,即$a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立,此时$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$取得最小值4.

6. 解析　(1)设平行四边形相邻边长分别为x,y,则$x+y=L$.
∵ $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{L^2}{4}$,当且仅当$x=y$时,等号成立.
∴ 平行四边形的面积$S\leq xy\leq\frac{L^2}{4}$.
又∵ $S_{圆}=\pi\times\left(\frac{L}{2}\right)^2=\frac{\pi L^2}{4}$,且$\frac{\pi L^2}{4}>\frac{L^2}{4}$,
∴ 圆形纸片能完全覆盖这个平行四边形.
(2)证明:如图,设四边形$ABCD$的四边长分别为a,b,c,d,则$a+b+c+d=2L$.



连接BD,设$\triangle ABD$,$\triangle BCD$的面积分别为S_1和S_2.
由三角形的面积公式易得$S_1\leq\frac{ab}{2}$,$S_2\leq\frac{cd}{2}$,
则四边形$ABCD$的面积$S=S_1+S_2\leq\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}$,
当$AB\perp AD$,$BC\perp DC$时,等号成立,此时四边形为矩形,
∴ $a=c,b=d$, ∴ $a+b=L$.
此时有$S=S_1+S_2=\frac{ab}{2}+\frac{cd}{2}=\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}=ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{L^2}{4}$,
当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时,等号成立,此时四边形为正方形.

复习题

A组

1. 解析　(1)∵ $3(x-2)^2=x(x-2)$, ∴ $(x-2)[3\cdot(x-2)-x]=0$, ∴ $(x-2)(2x-6)$

$=0$，$\therefore x=2$ 或 $x=3$，

$\therefore$ 方程的解集为$\{2,3\}$.

(2)令 $t=x^2-2x$，则 $t\geqslant-1$，则 $t+\frac{7}{t}=8$，

$\therefore t^2-8t+7=0$，$\therefore t=7$ 或 $t=1$.

由 $x^2-2x=7$ 得 $x=1\pm2\sqrt{2}$；

由 $x^2-2x=1$ 得 $x=1\pm\sqrt{2}$.

$\therefore$ 方程的解集为$\{1+2\sqrt{2},1-2\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2}\}$.

2.解析　由题意知$(-a)^2+b\times(-a)+a=0$，

$\therefore a^2-ab+a=0$.

$\because a\neq0$，

$\therefore a-b+1=0$，$\therefore a-b=-1$.

3.解析　由$\begin{cases}y^2-4x=0,\\y-kx-1=0\end{cases}$得$(kx+1)^2-4x=0$，

即 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.

当 $k=0$ 时，$x=\frac{1}{4}$，符合题意；当 $k\neq0$ 时，有 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$，$\therefore k=1$.

综上，k 的值为 0 或 1.

4.解析　由题意知$\begin{cases}9a-\frac{5}{4}b=1,\\16a-3b=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=1.\end{cases}$

5.解析　$\because\begin{cases}|m|\neq0,\\\Delta=(-2)^2-4|m|>0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m\neq0,\\|m|<1.\end{cases}$

$\therefore -1<m<0$ 或 $0<m<1$，

$\therefore$ 实数 m 的取值范围是$(-1,0)\cup(0,1)$.

6.解析　$\because \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=4$，$\therefore 3x+2y=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y\right)\times6=4\times6=24$.

7.D　由$|x+10|<50$ 得$-50<x+10<50$，

$\therefore -60<x<40$；

由$|x-10|<50$ 得$-50<x-10<50$，$\therefore -40<x<60$；

由$|x+30|<20$ 得$-20<x+30<20$，$\therefore -50<x<-10$；

由$|x-30|<20$ 得$-20<x-30<20$，$\therefore 10<x<50$.

8.C　因为 $a>b>0\Rightarrow0<\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，但 c 的正负不确定，所以 A 不正确；

因为$\begin{cases}a>b>0,\\b>0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$，所以 B 不正确；

因为$\begin{cases}a>b>0,\\-a<0\end{cases}\Rightarrow -a^2<-ab$，所以 C 正确；

因为 $a>b>0$，所以 $a-1>b-1$，但二者正负不确定，所以 D 不正确.

9.解析　(1)$\frac{2x}{x^2+1}\leqslant1$.

证明：$\because \frac{2x}{x^2+1}-1=\frac{2x-x^2-1}{x^2+1}=\frac{-(x-1)^2}{x^2+1}\leqslant0$，$\therefore \frac{2x}{x^2+1}\leqslant1$.

(2)$a^3+b^3>ab^2+a^2b$.

证明：$a^3+b^3-(ab^2+a^2b)=a^2(a-b)+b^2\cdot(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$.

$\because a,b$ 均为正实数，且 $a\neq b$，

$\therefore (a-b)^2\cdot(a+b)>0$，

$\therefore a^3+b^3>ab^2+a^2b$.

10.解析　(1)$(-\infty,-5)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

(2)原不等式可化为$\frac{5}{x+5}-1=\frac{5-x-5}{x+5}=\frac{-x}{x+5}\leqslant0$，

即$\begin{cases}x+5\neq0,\\x(x+5)\geqslant0,\end{cases}$解得 $x\geqslant0$ 或 $x<-5$.

故不等式的解集为$(-\infty,-5)\cup[0,+\infty)$.

11.解析　$\because AB=|x-2|=\frac{7}{2}$，

$\therefore x-2=\frac{7}{2}$或 $x-2=-\frac{7}{2}$，

$\therefore x=\frac{11}{2}$或 $x=-\frac{3}{2}$.

12.解析　由题意得$\left|\frac{x-1}{2}\right|>5$，$\therefore |x-1|>10$，

$\therefore x-1>10$ 或 $x-1<-10$，$\therefore x>11$ 或 $x<-9$，$\therefore x$ 的取值范围为$(-\infty,-9)\cup(11,+\infty)$.

13.解析　由题可知 $x\in\mathbf{R}$，$x^2\geqslant0$，

当 $x^2=0$ 时，$x=0$，此时 $y=0$；

当 $x^2\neq0$ 时，$y=\frac{x^2}{x^4+2}=\frac{1}{x^2+\frac{2}{x^2}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当 $x^2=\frac{2}{x^2}$，即 $x=\pm\sqrt[4]{2}$，$x^2=\sqrt{2}$ 时，等号成立，此时 y 取得最大值$\frac{\sqrt{2}}{4}>0$，故 y 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{4}$，此时 x^2 的值为 $\sqrt{2}$.

14.解析　$\because x>-2$，$\therefore x+2>0$ $\therefore y=\left[(x+2)+\frac{16}{x+2}\right]-2\geqslant2\sqrt{(x+2)\times\frac{16}{x+2}}-2=6$，

当且仅当 $x+2=\frac{16}{x+2}$，即 $x=2$ 时，等号成立，此时 y 取得最小值 6.

15.解析　设 $BC=x$ m，则宽为$\frac{1}{2}(46-x+3)$m.

$\therefore \frac{1}{2}(46-x+3)x=299$，解得 $x_1=26$，$x_2=23$.

$\because 26>25$，$\therefore x=26$ 舍去，$\therefore x=23$.

答：当 $BC=23$ m 时，矩形花园的面积为 299 m^2.

B 组

1.解析　(1)由题意得$\begin{cases}\Delta=(\sqrt{b})^2-4\times\frac{1}{2}\times\left(c-\frac{1}{2}a\right)=0,\\2b=2a,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a+b=2c,\\a=b.\end{cases}$

$\therefore a=b=c$，$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

(2)由(1)知 $a=b$，$\therefore \Delta=m^2-4\times(-3m)=0$，$\therefore m^2+12m=0$，$\therefore m=0$ 或 $m=-12$.

又$\because a\times b=-3m$，$\therefore m=-\frac{ab}{3}<0$，

$\therefore m=-12$.

2.解析　$\because \Delta=(-m)^2-4(2m-1)\geqslant0$，

$\therefore m^2-8m+4\geqslant0$.(*)

又 $x_1+x_2=m$，$x_1x_2=2m-1$，

$\therefore x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(2m-1)=7$，

$\therefore m^2-4m-5=0$，$\therefore m=-1$ 或 $m=5$.

代入(*)式检验，$m=-1$ 符合题意，

$\therefore m=-1$.

3.解析　由题意得 $\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=-5$.

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+2\alpha=\alpha(\alpha+\beta)+2\alpha=-2\alpha+2\alpha=0$.

4.解析　(1)由$\begin{cases}4x^2-9y^2=15,\\2x-3y=5,\end{cases}$

得$\begin{cases}(2x+3y)(2x-3y)=15,\\2x-3y=5,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2x+3y=3,\\2x-3y=5,\end{cases}\therefore \begin{cases}x=2,\\y=-\dfrac{1}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 方程组的解集为$\left\{\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)\right\}$.

(2)由 $xy=2$ 得 $y=\dfrac{2}{x}$,代入 $x^2+4y^2=5$ 得 $x^2+4\times\dfrac{4}{x^2}=5$.

$\therefore x^4-5x^2+16=0,\Delta=(-5)^2-4\times16<0$,方程无实数解,$\therefore$ 原方程组的解集为 $\varnothing$.

5.解析 $\because a>b\nRightarrow ac^2>bc^2$,而 $ac^2>bc^2\Rightarrow a>b$,

$\therefore a>b$ 是 $ac^2>bc^2$ 的必要不充分条件.

6.解析 $\because x>0,\therefore y=\dfrac{-2x^2+x-3}{x}=1-\left(2x+\dfrac{3}{x}\right)\leqslant1-2\sqrt{2x\times\dfrac{3}{x}}=1-2\sqrt{6}$.

当且仅当 $2x=\dfrac{3}{x}$,即 $x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时,等号成立,此时 y 取得最大值 $1-2\sqrt{6}$.

7.解析 由题意知,$PA^2+PB^2=AB^2$.

由均值不等式知,$PA+PB\leqslant\sqrt{2(PA^2+PB^2)}=\sqrt{2AB^2}=\sqrt{2}AB$,当且仅当 $PA=PB$ 时等号成立,$\therefore PA+PB$ 的最大值为$\sqrt{2}AB$.

8.解析 (1)$(-2,1]$.

(2)$(-\infty,-3]\cup[-2,2]$.

9.解析 (1)当 $a^2-2\leqslant a$,即$-1\leqslant a\leqslant2$ 时,$A=\varnothing$,满足 $A\subseteq B$;

当 $a^2-2>a$,即 $a<-1$ 或 $a>2$ 时,若 $A\subseteq B$,

则$\begin{cases}a<-1\text{ 或 }a>2,\\a\geqslant1,\\a^2-2\leqslant5,\end{cases}$ 解得 $2<a\leqslant\sqrt{7}$.

综上,实数 a 的取值范围是$[-1,\sqrt{7}]$.

(2)$\because B\subsetneqq A,\therefore\begin{cases}a^2-2>a,\\a\leqslant1,\\a^2-2\geqslant5,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a<-1\text{ 或 }a>2,\\a\leqslant1,\\a\leqslant-\sqrt{7}\text{或 }a\geqslant\sqrt{7},\end{cases}$ 解得 $a\leqslant-\sqrt{7}$.

综上,实数 a 的取值范围为$(-\infty,-\sqrt{7}]$.

10.解析 $C=\dfrac{20t}{t^2+4}=\dfrac{20}{t+\dfrac{4}{t}}\leqslant\dfrac{20}{2\sqrt{t\times\dfrac{4}{t}}}=5$,

当且仅当 $t=\dfrac{4}{t}$,即 $t=2$ 时等号成立.

答:经过 2 小时后池水中药品浓度达到最大.

11.解析 $\because y=-2x+4,\therefore 2x+y=4$,

$\therefore xy=\dfrac{1}{2}\times2x\times y\leqslant\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2x+y}{2}\right)^2=2$,

当且仅当 $2x=y$ 且 $2x+y=4$,

即$\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$时,等号成立,此时点 P 的坐标为$(1,2)$.

12.解析 $\because x\in[0,1],\therefore y=x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2(1-x^2)}\leqslant\sqrt{\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$,

当且仅当 $x^2=1-x^2$,即 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时,等号成立,此时 y 取得最大值$\dfrac{1}{2}$.

13.解析 设水池底面一边的长为 x m,水池的总造价为 y 元,

$\because$ 底面积为$\dfrac{4\ 800}{3}=1\ 600(\text{m}^2)$,

$\therefore$ 池底的造价为

$1\ 600\times150=240\ 000$(元),

$\therefore y=240\ 000+\left(x+\dfrac{1\ 600}{x}\right)\times2\times3\times120$

$=240\ 000+720\left(x+\dfrac{1\ 600}{x}\right)\geqslant240\ 000+720\times2\sqrt{x\times\dfrac{1\ 600}{x}}=297\ 600$.

当且仅当 $x=\dfrac{1\ 600}{x}$,即 $x=40$ 时,等号成立,此时 y 取得最小值 297 600.

答:当水池的底面是边长为 40 m 的正方形时,水池的总造价最低,最低造价为 297 600 元.

14.解析 (1)设传令兵到达排头用的时间为 t_1,由排头返回排尾用的时间为 t_2,则有 $2v\times t_1=v\times t_1+L,\therefore t_1=\dfrac{L}{v}$,又$(v+2v)t_2=L,\therefore t_2=\dfrac{L}{3v}$,

$\therefore$ 传令兵走的总路程 $S=2v\times(t_1+t_2)=2v\left(\dfrac{L}{v}+\dfrac{L}{3v}\right)=\dfrac{8L}{3}$.

(2)设传令兵行进的速率为 v_2,传令兵从排尾到排头的时间为 t_3,从排头到排尾的时间为 t_4,队伍前进所用时间为 t,则有 $t=t_3+t_4$,

$\therefore\dfrac{L}{v}=\dfrac{L}{v_2-v}+\dfrac{L}{v_2+v}$,

$\therefore v_2^2-2vv_2-v^2=0$,

解得 $v_2=(\sqrt{2}+1)v$,($v_2=(1-\sqrt{2})v$ 舍去).

$\because vt=L,\therefore v_2t=(\sqrt{2}+1)vt=(\sqrt{2}+1)L$,

即传令兵行走的路程为$(\sqrt{2}+1)L$.

C 组

1.证明 $\because a>b>c$ 且 $a+b+c=0$,

$\therefore c<0,a>0$.

又 $a>b,\therefore a-c>b-c>0,\therefore 0<\dfrac{1}{a-c}<\dfrac{1}{b-c}$,

又 $c<0,\therefore\dfrac{c}{a-c}>\dfrac{c}{b-c}$.

2.证明 $x_1^3>x_2^3\Leftrightarrow x_1^3-x_2^3>0\Leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)>0\Leftrightarrow(x_1-x_2)\cdot\left[\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2\right]>0$,

若$\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2=0$,则 $x_1=x_2=0$,

与 $x_1^3>x_2^3$ 矛盾,故$\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2>0$,

$\therefore(x_1-x_2)\left[\left(x_1+\dfrac{x_2}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x_2^2\right]>0\Leftrightarrow x_1-x_2>0\Leftrightarrow x_1>x_2$,

即 $x_1^3>x_2^3\Leftrightarrow x_1>x_2$,

$\therefore x_1>x_2$ 是 $x_1^3>x_2^3$ 的充要条件.

3.解析 设前三位数组成的数是 x,第四位数是 y,后四位数组成的数是 z,

则有$\begin{cases}10x+y+z=14\ 741,①\\x+10\ 000y+z=59\ 453,②\end{cases}$

②-①得 $1\ 111y-x=4\ 968$.

$\because 100\leqslant x\leqslant999,0\leqslant y\leqslant9,0\leqslant z\leqslant9\ 999$,

$\therefore y=5,x=587,z=8\ 866$,

$\therefore$ 此电话号码对应的八位数是 58 758 866.

4.解析 (1)由原不等式组得$\begin{cases}x>-1,\\x\leqslant a.\end{cases}$

当 $a\leqslant-1$ 时,不等式组的解集为$\varnothing$;

当 $a>-1$ 时,不等式组的解集为$(-1,a]$.

(2)由原不等式组得$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{5}{4},\\x<\dfrac{b}{2}.\end{cases}$

当$\dfrac{b}{2}\leqslant\dfrac{5}{4}$,即 $b\leqslant\dfrac{5}{2}$时,不等式组的解集为$\varnothing$;

当$\dfrac{b}{2}>\dfrac{5}{4}$,即 $b>\dfrac{5}{2}$时,不等式组的解集为$\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{b}{2}\right)$.

5.解析 (1)当 $a=0$ 时,若 $b\geqslant0$,则不等式的解集为 $\varnothing$;

若 $b<0$,则不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

当 $a>0$ 时,不等式的解集为 $\left(\frac{b}{a},+\infty\right)$.

当 $a<0$ 时,不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{b}{a}\right)$.

(2)当 $a=0$ 时,若 $b\geqslant0$,则不等式的解集为 $\mathbf{R}$;

若 $b<0$,则不等式的解集为 $\varnothing$.

当 $a>0$ 时,不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{b}{a}\right]$.

当 $a<0$ 时,不等式的解集为 $\left[\frac{b}{a},+\infty\right)$.

第三章 函数

3.1 函数的概念与性质

3.1.1 函数及其表示方法

练习 A

1.解析 不是.A 中元素 0 在 B 中无与之对应的元素.

2.解析 是.定义域为 $\{0.5,1,2,3\}$,值域为 $\{1.3,1.5,2.1,2.75\}$.

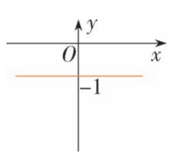
3.解析 $f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$, $f(3)=3^2+3=12$.

4.解析 $\because A=[-2,+\infty)$,$\therefore -5\notin A$, $7\in A$.

5.解析 (1)$\{x|x\neq5\}$.(2)$(-2,+\infty)$.(3)$[-3,0)\cup(0,+\infty)$.

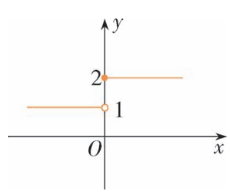
6.解析 第一、三、四个可能是函数的图像;第二个一定不是函数的图像,因为当 $x>0$ 时,对于 x 的每一个值,y 都有两个值与之对应.

7.解析 定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\{-1\}$,图像如图.



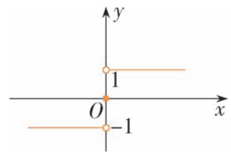
8.解析 (1)$f(x)=\begin{cases}1,x<0,\\2,x\geqslant0.\end{cases}$

定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\{1,2\}$,图像如图所示.



(2)$f(x)=\begin{cases}-1,x<0,\\0,x=0,\\1,x>0.\end{cases}$

定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\{-1,0,1\}$,图像如图所示.



练习 B

1.解析 (1)是.(2)是.(3)不是.

(4)不是.

注:"求非负平方根"即求算术平方根,只有一个值,而"求平方根"有两个值.

2.解析 $g(-1)=4$,$g(0)=5$,$g(2)=7$.

2 不是函数值域中的元素.

3.解析 定义域为 $\mathbf{R}$.

当 $x<2$ 时,函数 $f(x)=1-x>-1$,当 $x\geqslant2$ 时,函数 $f(x)=x\geqslant2$,$\therefore$ 值域为 $(-1,+\infty)$.

4.解析 (1)不是.因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同.

(2)是.

(3)不是.因为 $f(x)=|x|$,$g(x)=x$,对应关系不同.

5.解析 (1)$[2,8]$.(2)$(-\infty,0]$.

6.解析 $g(-5.3)=-5.3-[-5.3]=-5.3-(-6)=0.7$;

$g(-2.3)=-2.3-[-2.3]=-2.3-(-3)=0.7$;

$g(2.1)=2.1-[2.1]=2.1-2=0.1$;

$g(\sqrt{3})=\sqrt{3}-[\sqrt{3}]=\sqrt{3}-1$.

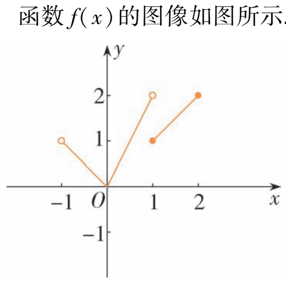
7.解析 $f(-x)=-2x^2-x$, $f(x+1)=-2(x+1)^2+(x+1)=-2x^2-4x-2+x+1=-2x^2-3x-1$.

8.解析 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$.

$\therefore f(t)=2(t-1)-3=2t-5$.

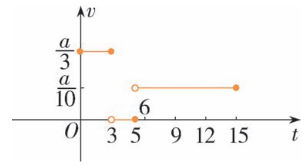
$\therefore f(x)=2x-5$, $f(4)=2\times4-5=3$.

9.解析 函数 $f(x)$ 的图像如图所示.

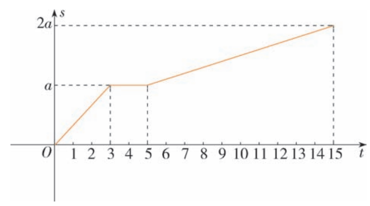


10.解析 设速率为 v,路程为 s,则

$$v=\begin{cases}\frac{a}{3},0\leqslant t\leqslant3,\\0,3<t\leqslant5,\\\frac{a}{10},5<t\leqslant15.\end{cases}$$



$$s=\begin{cases}\frac{a}{3}t,0\leqslant t\leqslant3,\\a,3<t\leqslant5,\\a+\frac{a}{10}(t-5),5<t\leqslant15.\end{cases}$$



3.1.2 函数的单调性

练习 A

1.解析 (1)真命题.(2)真命题.

2.解析 (1)增区间为 $[-1,0]$,$[1,2]$;减区间为 $[-2,-1]$,$[0,1]$.$f(x)$ 在区间 $[-1,0]$,$[1,2]$ 上是增函数,在区间 $[-2,-1]$,$[0,1]$ 上是减函数.

(2)增区间为 $[-1.5,1.5]$;减区间为 $[-3,-1.5]$,$[1.5,3]$.$g(x)$ 在区间 $[-1.5,1.5]$ 上是增函数;在区间 $[-3,-1.5]$,$[1.5,3]$ 上是减函数.

3.解析 $f(x)=5x+1$ 在 $[-2,7]$ 上是单调递增的,$f(x)_{\max}=f(7)=36$,

$f(x)_{\min}=f(-2)=-9$.

4.证明 任取 $x_1,x_2\in[2,+\infty)$,且 $x_2>x_1$, $f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)=(x_2-x_1)+\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}=(x_2-x_1)\cdot\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)=(x_2-x_1)\times\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2}$.

$\because x_2>x_1\geqslant2$,$\therefore x_2-x_1>0$,$x_1x_2>4$,$x_1x_2-1>0$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$,$\therefore f(x_2)>f(x_1)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是递增的.

5.解析 $y=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

任取 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$,且 $x_2>x_1$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$.

∵ $x_2>x_1\geqslant 0$,∴ $x_2-x_1>0$,$\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$,

∴ $f(x_2)-f(x_1)>0$,∴ $f(x_1)<f(x_2)$,

∴ $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增函数.

6. 解析　任取 $x_1,x_2\in(-\infty,1]$,且 $x_2<x_1$,则 $f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^2+2x_1)-(-x_2^2+2x_2)$

$=(x_2^2-x_1^2)+2(x_1-x_2)=(x_1-x_2)(2-x_1-x_2)$.

∵ $x_2<x_1$,∴ $x_1-x_2>0$,又∵ $x_2<1$,$x_1\leqslant 1$,

∴ $x_1+x_2<2$,∴ $2-x_1-x_2>0$,

∴ $f(x_1)>f(x_2)$,

∴ $f(x)=-x^2+2x$ 在 $(-\infty,1]$ 上是增函数.

同理可证,$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数,$f(x)_{\max}=f(1)=1$,没有最小值.

练习 B

1. 答案　(1)(3)(4)(5)

2. 解析　(1)假命题.(2)真命题.

3. 解析　∵ $-6\leqslant -x-1\leqslant 2$,∴ $-2\leqslant x+1\leqslant 6$,∴ $-3\leqslant x\leqslant 5$.

∴ 定义域 D 为 $[-3,5]$.

4. D

5. 解析　$f(x)$ 的减区间是 $\left[-5,-\frac{3}{2}\right]$,增区间是 $\left[-\frac{3}{2},3\right]$,

$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}$,$f(x)_{\max}=f(3)=36$.

6. 证明　假设 $(-\infty,2)$ 是函数 $f(x)=x^2$ 的单调区间.

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是减函数,则必有对任意的 x_1,x_2,且满足 $x_1<x_2<2$ 时,$f(x_1)>f(x_2)$.

取 $x_1=-1$,$x_2=1$,

而 $f(-1)=f(1)=1$,与函数单调性矛盾,∴ 假设不成立.

同理可证,若 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 上是增函数时,假设不成立.

所以 $(-\infty,2)$ 不是函数 $f(x)=x^2$ 的单调区间.

7. 证明　设任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_2>x_1$,

$g(x_2)-g(x_1)=kf(x_2)-kf(x_1)=k[f(x_2)-f(x_1)]$.

∵ $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

∴ $f(x_2)>f(x_1)$,

又 $k>0$,∴ $k[f(x_2)-f(x_1)]>0$,

∴ $g(x_2)>g(x_1)$,

∴ $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

8. 解析　存在.如 $f(x)=x^2$.

3.1.3　函数的奇偶性

练习 A

1. 解析　(1)假命题.(2)真命题.(3)真命题.

2. 解析　(1)奇函数.(2)偶函数.(3)非奇非偶函数.(4)非奇非偶函数.

3. 解析　(1)$f(3)>f(1)$.(2)$f(3)<f(1)$.

4. 解析　$f(x)$ 可能是奇函数,如 $f(x)=\frac{1}{x}$;

$f(x)$ 可能是偶函数,如 $f(x)=x^2+2$.

练习 B

1. 证明　证法一:∵ $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$,

∴ $y=f(x)$ 的图像是由 $y=x^2-9$ 的图像向右平移 3 个单位得到的,易证 $y=x^2-9$ 是偶函数,∴ $y=x^2-9$ 的图像关于 y 轴对称,

∴ $y=f(x)$ 的图像关于 $x=3$ 对称.

证法二:由 $f(x)=x^2-6x$,得

$f(3+x)=(3+x)^2-6(3+x)=9+6x+x^2-18-6x=x^2-9$,

$f(3-x)=(3-x)^2-6(3-x)=9-6x+x^2-18+6x=x^2-9$,

∴ $f(3+x)=f(3-x)$,

∴ $y=f(x)$ 的图像关于 $x=3$ 对称.

2. 解析　令 $g(x)=x^5+ax^3+bx$,易证 $g(x)$ 是奇函数,

∵ $f(x)=g(x)-8$,

∴ $f(-2)=g(-2)-8=10$,∴ $-g(2)-8=10$,∴ $g(2)=-18$,

∴ $f(2)=g(2)-8=-18-8=-26$.

3. 解析　(1)偶函数.(2)奇函数.(3)偶函数.

4. 解析　(1)∵ $h(-x)=f(-x)g(-x)=-f(x)g(x)=-h(x)$,

∴ $h(x)$ 是奇函数.

(2)∵ $h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)$,$h(-x)\neq h(x)$,

且 $h(-x)\neq -h(x)$,

∴ $h(x)$ 是非奇非偶函数.

5. 解析　$f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上是减函数.

6. 解析　$f(x)=0$,$x\in\mathbf{R}$ 既是奇函数又是偶函数.

7. 解析　$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$.

∵ $f(-x)=-x+\frac{9}{-x}=-\left(x+\frac{9}{x}\right)=-f(x)$,

∴ $f(x)$ 是奇函数.

设任意的 $x_1,x_2\in[3,+\infty)$,且满足 $x_2>x_1$,

$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\frac{9}{x_2}-x_1-\frac{9}{x_1}$

$=(x_2-x_1)+\frac{9(x_1-x_2)}{x_1x_2}=(x_2-x_1)\times\frac{x_1x_2-9}{x_1x_2}$.

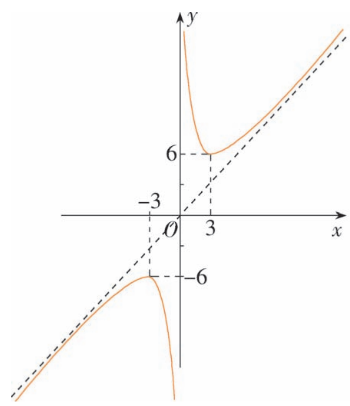
∵ $x_2>x_1\geqslant 3$,∴ $x_2-x_1>0$,$x_1x_2>9$,$x_1x_2-9>0$,

∴ $(x_2-x_1)\times\frac{x_1x_2-9}{x_1x_2}>0$,

∴ $f(x_2)>f(x_1)$,∴ $f(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上是增函数.

同理可证,$f(x)$ 在 $(0,3]$ 上是减函数.

图像如图.



◆习题 3-1A

1. 解析　$g(-2)=-1$,$g(0)=0$,$g(\sqrt{3})=1$.

2. 解析　$f(0)=0^3+2\times 0=0$,$f(-3)=(-3)^3+2\times(-3)=-27-6=-33$.

3. 解析　由 $\begin{cases}1-x\neq 0,\\x+1\geqslant 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\neq 1,\\x\geqslant -1.\end{cases}$

∴ 定义域为 $[-1,1)\cup(1,+\infty)$.

4. 解析　$f(-2)=-3$,$f(0)=1$,$f(15)=1-15^2=-224$,值域为 $(-\infty,1]$.

5. 解析　有一个公共点,如 $f(x)=2x-3$;

无公共点,如 $f(x)=\frac{1}{x}$.

6. 证明　设任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且 $x_2>x_1$,则

$f(x_2)+g(x_2)-[f(x_1)+g(x_1)]=[f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_2)-g(x_1)]$.

∵ $y=f(x)$,$y=g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数,

且 $x_2>x_1$,

∴ $f(x_2)>f(x_1)$,$g(x_2)>g(x_1)$,

∴ $[f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_2)-g(x_1)]>0$,

$\therefore f(x_2)+g(x_2)>f(x_1)+g(x_1)$,

$\therefore f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

7. 解析　$\because f(x)$ 在 $[1,6]$ 上是增函数，又 $f(x)$ 是奇函数，$\therefore f(x)$ 在 $[-6,-1]$ 上是增函数，且 $f(1)=4$，$f(6)=10$，

$\therefore$ 当 $x\in[-6,-1]$ 时，$f(x)_{\min}=f(-6)=-f(6)=-10$，

$f(x)_{\max}=f(-1)=-f(1)=-4$.

8. 解析　函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=-3$.

(1) $f(x)$ 在 $[-6,-3]$ 上是减函数，在 $[-3,7]$ 上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(-3)=-9$，

$f(x)_{\max}=f(7)=7^2+6\times7=91$.

(2) $f(x)$ 在 $[1,3]$ 上是增函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=7$，$f(x)_{\max}=f(3)=27$.

(3) $f(x)$ 在 $[-6,-4]$ 上是减函数，

$\therefore f(x)_{\min}=f(-4)=16-24=-8$，$f(x)_{\max}=f(-6)=0$.

9. 解析　(1)偶函数.(2)非奇非偶函数.(3)奇函数.(4)偶函数.

◆习题 3-1B

1. 解析　$a>0$.

2. 解析　若 $x^2=\frac{1}{4}$，则 $x=\pm\frac{1}{2}$；

若 $8x=\frac{1}{4}$，则 $x=\frac{1}{32}$(舍去)，$\therefore x=\frac{1}{2}$ 或 $x=-\frac{1}{2}$.

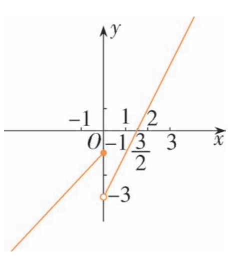
3. 解析　定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

4. 解析　$\because -10\leqslant 3x-4\leqslant 5$，

$\therefore -6\leqslant 3x\leqslant 9$，

$\therefore -2\leqslant x\leqslant 3$，$\therefore$ 定义域 D 为 $[-2,3]$.

5. 解析　$f(x)$ 的图像如图.



$\therefore f(x)>0$ 的解集为 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

6. 解析　(1)在 $(-\infty,2)$，$(2,+\infty)$ 上都是减函数，证明略.

(2)在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

证明：设任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_2>x_1$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{\sqrt{x_2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1}}=\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1x_2}}$

$=\frac{x_1-x_2}{\sqrt{x_1x_2}\times(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})}<0$，

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

7. 解析　$\because a>0$，函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=1$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，

在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(-3)=f(5)$，$f(-2)=f(4)$，

$\therefore f(-2)=f(4)$，$f(-3)>f(3)$.

8. 解析　$f(x)=x^2-2x+1+ax+2=x^2+(a-2)x+3$，

$\because f(x)$ 是偶函数，$\therefore -\frac{a-2}{2}=0$，$\therefore a=2$.

9. 证明　当 $x>0$ 时，$-x<0$，

则 $f(-x)=-(-x)-1=x-1=f(x)$，

当 $x<0$ 时，$-x>0$，

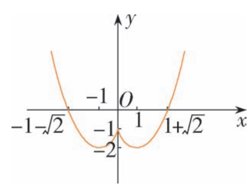
则 $f(-x)=(-x)-1=-x-1=f(x)$；

当 $x=0$ 时，$f(-0)=f(0)=-1$.

$\therefore f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数.

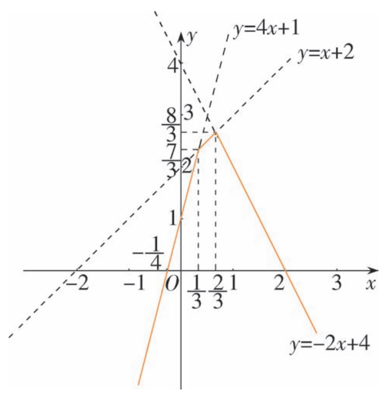
10. 解析　$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$\because f(-x)=(-x)^2-2|-x|-1=x^2-2|x|-1=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数，又 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，$\therefore f(x)$ 的最小值为 -2，此时 $x=1$.图像如图.



◆习题 3-1C

1. 解析　在同一坐标系内作出 $y=4x+1$，$y=x+2$，$y=-2x+4$ 的图像，如图.



$$\therefore f(x)=\begin{cases}4x+1, & x<\frac{1}{3},\\ x+2, & \frac{1}{3}\leqslant x<\frac{2}{3},\\ -2x+4, & x\geqslant\frac{2}{3}.\end{cases}$$

$f(x)_{\max}=f\left(\frac{2}{3}\right)=-2\times\frac{2}{3}+4=\frac{8}{3}$.

2. 解析　$\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数，且在 $(-\infty,0]$ 上是减函数，

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数.

又 $f(2)=0$，$\therefore f(-2)=0$.

$$f(x)<0\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ f(x)<f(2)\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x<0,\\ f(x)<f(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geqslant 0,\\ x<2\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x<0,\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow -2<x<2,$$

$\therefore$ 不等式的解集为 $(-2,2)$.

3. 证明　证法一：在函数 $f(x)$ 的图像上任取一点 $P(x,y)$，则点 P 关于 $(1,0)$ 的对称点 $P'(2-x,-y)$.

$\because -y=\frac{1}{(2-x)-1}=\frac{1}{1-x}$，$\therefore y=\frac{1}{x-1}$，

$\therefore$ 点 P' 在 $f(x)$ 的图像上，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称.

证法二：函数 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的图像是由 $y=\frac{1}{x}$ 的图像向右平移一个单位长度得到的，易证 $y=\frac{1}{x}$ 是奇函数，$\therefore y=\frac{1}{x}$ 的图像关于原点对称，$\therefore f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的图像关于 $(1,0)$ 对称.

4. 解析　函数 $f(x)$ 图像的对称轴为 $x=-a$.

当 $-a<1$，即 $a>-1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上是增函数，则 $f(x)_{\max}=f(3)=9+6a$，$f(x)_{\min}=f(1)=1+2a$.

当 $-a>3$，即 $a<-3$ 时，$f(x)$ 在 $[1,3]$ 上是减函数，则 $f(x)_{\max}=f(1)=1+2a$，$f(x)_{\min}=f(3)=9+6a$.

当 $1\leqslant -a<2$，即 $-2<a\leqslant -1$ 时，$f(x)_{\max}=f(3)=9+6a$，$f(x)_{\min}=f(-a)=-a^2$.

当 $2\leqslant -a\leqslant 3$，即 $-3\leqslant a\leqslant -2$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=1+2a$，$f(x)_{\min}=f(-a)=-a^2$.

3.2　函数与方程、不等式之间的关系

习题 3-2A

1. 解析　(1) $\frac{2}{3}$.(2) $1,\sqrt{2},-\sqrt{2}$.

2. 解析　由题图可知，$f(x)=0$ 的解集为 $\{-4,-2,1,3,4\}$，

$f(x)>0$ 的解集为 $(-2,1)\cup(1,3)\cup(4,6]$，

$f(x)\leqslant 0$ 的解集为 $[-6,-2]\cup\{1\}\cup[3,4]$.

3.解析　(1) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.

(2) **R**. (3) **R**.

4.解析　(1)真命题. (2)假命题.

5.解析　一定. ∵ $k\neq 0$, ∴ $f(x)$ 在 **R** 上是单调函数, 故 $f(x)$ 的图像与 x 轴必相交.

6.解析　由题意知, -3 和 -1 是 $x^2+ax+b=0$ 的两根.

$\therefore \begin{cases}-3-1=-a,\\-3\times(-1)=b,\end{cases}\ \therefore \begin{cases}a=4,\\b=3.\end{cases}$

7.解析　当 $m=0$ 时, $f(x)=-x$ 有一个零点 0;

当 $m\neq 0$ 时, 若函数 $f(x)$ 没有零点, 则 $\Delta=[-(1-m)]^2-4m\times m<0$, ∴ $3m^2+2m-1>0$, 解得 $m<-1$ 或 $m>\frac{1}{3}$.

综上, 当 $m\in(-\infty,-1)\cup\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$ 时, $f(x)$ 没有零点.

8.解析　$f(x)=\frac{1}{x}$. (答案不唯一)

9.解析　不可能. 因为定义域为 **R** 的奇函数必有 $f(0)=0$, 所以定义域为 **R** 的奇函数不可能没有零点.

10.解析　∵ 偶函数的图像关于 y 轴对称, ∴ $f(x)=0$ 的所有实根的和为 0.

习题 3-2B

1.解析　(1)由 $x^3-8x=0$ 得 $x=0$ 或 $x=-2\sqrt{2}$ 或 $x=2\sqrt{2}$, ∴ 函数的零点为 $-2\sqrt{2},0,2\sqrt{2}$.

(2)由 $-x^4+2x^2=0$ 得 $x^2(x^2-2)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$, ∴ 函数的零点为 $-\sqrt{2},0,\sqrt{2}$.

(3)当 $x\leqslant 1$ 时, 由 $x+1=0$ 得 $x=-1$; 当 $x>1$ 时, 由 $x^2-4x+1=0$ 得 $x=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$, ∵ $2-\sqrt{3}<1$, 故舍去.

∴ 函数的零点为 $-1,2+\sqrt{3}$.

2.解析　当 $m=0$ 时, $f(x)=-3x-1$, 不符合题意;

当 $m\neq 0$ 时, 由题意可得

$\begin{cases}m<0,\\\Delta=[-(m+3)]^2+4m<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0,\\m^2+10m+9<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0,\\-9<m<-1\end{cases}\Leftrightarrow -9<m<-1$,

∴ 实数 m 的取值集合为 $(-9,-1)$.

3.解析　由题意知

$\begin{cases}f(-1)=-1+a-b+c=0,\\f(1)=1+a+b+c=0,\end{cases}$

∴ $b=-1$, $a+c=0$, ∴ $f(x)=x^3-cx^2-x+c$.

∵ $f(x)=x^3-cx^2-x+c$

$=x^2(x-c)-(x-c)$

$=(x^2-1)(x-c)$

$=(x+1)(x-1)(x-c)$

∴ $f(x)$ 的零点为 $-1,1,c$,

∴ $c=x_0$.

又∵ $x_0\in(2,3)$, ∴ $2<c<3$,

∴ 实数 c 的取值范围是 $(2,3)$.

4.解析　真命题.

5.C　∵ 函数 $f(x)$ 的图像在 $(1,2)$ 上是连续不断的, 且 $f(1)=\frac{6}{1}-1=5>0$, $f(2)=\frac{6}{2}-2^2=-1<0$, ∴ $(1,2)$ 内有零点.

6.证明　易证 $f(x)$ 在 **R** 上是增函数, 又 $f(0)=-1<0$, $f(1)=1^3+1-1=1>0$,

∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内只有一个零点.

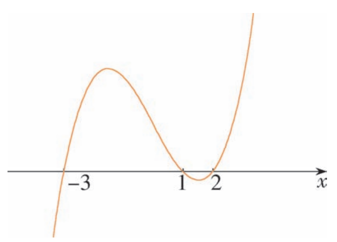
7.解析　∵ 函数 $f(x)$ 的图像是连续不断的, 且 $f(-2)=(-2)^3-(-2)^2+5=-8-4+5=-7<0$,

$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+5=-1-1+5=3>0$,

∴ $f(x)$ 在 $[-2,-1]$ 内有零点.

至少需要进行五次函数值的计算(计算 $f(-2)$, $f(-1.5)$, $f(-1.25)$, $f(-1.375)$, $f(-1)$ 的值).

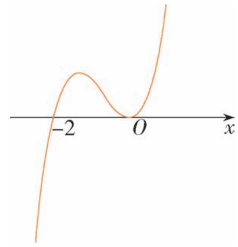
8.解析　(1) $f(x)$ 的零点有 $-3,1,2$. 画出函数图像的示意图如图所示.



由图可知, $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[-3,1]\cup[2,+\infty)$,

$f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-3)\cup(1,2)$.

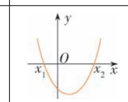
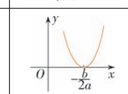
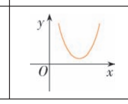
(2) $f(x)$ 的零点有 $-2,0$. 画出函数图像的示意图如图所示.



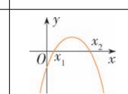
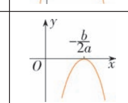
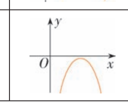
由图可知, $f(x)\geqslant 0$ 的解集为 $[-2,+\infty)$,

$f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,-2)$.

9.解析　当 $a>0$ 时,

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$f(x)$ 的图像	$f(x)>0$ 的解集	$f(x)\leqslant 0$ 的解集
$\Delta>0$		$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$[x_1,x_2]$
$\Delta=0$		$\left\{x\ \middle|\ x\neq-\frac{b}{2a}\right\}$	$\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta<0$		**R**	$\varnothing$

当 $a<0$ 时,

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$f(x)$ 的图像	$f(x)>0$ 的解集	$f(x)\leqslant 0$ 的解集
$\Delta>0$		(x_1,x_2)	$\{x\mid x\leqslant x_1$ 或 $x\geqslant x_2\}$
$\Delta=0$		$\varnothing$	**R**
$\Delta<0$		$\varnothing$	**R**

◆习题 3-2C

1.证明　令 $f(x)=x^4-4x-2$, $x\in[-1,2]$.

∵ $f(-1)=3$, $f(0)=-2$, $f(2)=6$,

∴ $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(2)<0$,

∴ $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,2)$ 上各至少有一个零点,

∴ 方程 $x^4-4x-2=0$ 在 $[-1,2]$ 上至少有两个实根.

2.解析　∵ $(1,2)\subseteq A$, ∴ $f(x)<0$ 的解集为 $A=(1,m)$, ∴ $m\geqslant 2$,

∴ m 的取值范围是 $[2,+\infty)$.

3.解析　∵ $\frac{3x^2+2x+2}{x^2+x+1}\geqslant m$, 且 $x^2+x+1>0$,

∴ $3x^2+2x+2\geqslant m(x^2+x+1)$,

即 $(3-m)x^2+(2-m)x+(2-m)\geqslant 0$ 恒成立.

显然当 $3-m=0$, 即 $m=3$ 时不符合题意;

当 $3-m\neq 0$ 时, 有

$\begin{cases}3-m>0,\\ \Delta=(2-m)^2-4(3-m)(2-m)\leqslant 0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}m<3,\\ m\leqslant 2 \text{ 或 } m\geqslant \dfrac{10}{3}.\end{cases}$

解得 $m\leqslant 2$，又 $\because m\in\mathbf{N}$，$\therefore m=0,1,2$.

4.解析　由题得

$\begin{cases}\Delta=[-(m+3)]^2-4(m+3)>0,\\ x_1+x_2=m+3>0,\\ x_1x_2=m+3>0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}m<-3 \text{ 或 } m>1,\\ m>-3,\\ m>-3,\end{cases}$　$\therefore m>1$.

$\therefore$ 实数 m 的取值组成的集合为 $\{m\mid m>1\}$.

5.解析　实数 m 的取值范围为 $-\dfrac{1}{8}<m<\dfrac{1}{2}$.

3.3　函数的应用（一）

◆习题 3-3A

1.解析　$y=x(1+2\%)(1-2\%)=0.999\,6x\ (x>0)$.

2.解析　$y=\dfrac{4\,320+160x}{2\,000+20x}(x\in\mathbf{N}_+)$，即 $y=\dfrac{216+8x}{100+x}(x\in\mathbf{N}_+)$.

3.B　将 $(3,0.7)$，$(4,0.8)$，$(5,0.5)$ 代入 $p=at^2+bt+c$ 得

$\begin{cases}9a+3b+c=0.7,\\ 16a+4b+c=0.8,\\ 25a+5b+c=0.5,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=-0.2,\\ b=1.5,\\ c=-2,\end{cases}$

$\therefore p=-0.2t^2+1.5t-2$，最佳加工时间

$t=-\dfrac{1.5}{2\times(-0.2)}=3.75$ min.

◆习题 3-3B

1.解析　(1)由题意知，$x\in[1,100]$，且 $x\in\mathbf{N}^*$，

$P(x)=R(x)-C(x)=-20x^2+2\,500x-4\,000$，

$MP(x)=P(x+1)-P(x)=-20(x+1)^2+2\,500(x+1)-4\,000-[-20x^2+2\,500x-4\,000]=2\,480-40x$.

(2) $P(x)=-20\left(x-\dfrac{125}{2}\right)^2+74\,125$，

$\therefore$ 当 $x=62$ 或 63 时，$P(x)$ 最大，最大值为 74 120 元.

$\because MP(x)=2\,480-40x$ 是减函数，

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$MP(x)$ 最大，最大值为 2 440，

$\therefore P(x)$ 与 $MP(x)$ 没有相同的最大值.

2.解析　(1)将 $(1,168.6)$，$(4,236.6)$ 代入 $y=ax+b$ 得 $\begin{cases}168.6=a+b,\\ 236.6=4a+b,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}a=\dfrac{68}{3},\\ b=\dfrac{2\,189}{15},\end{cases}$ $\therefore y=\dfrac{68}{3}x+\dfrac{2\,189}{15}$.

当 $x=9$ 时，$y=\dfrac{68}{3}\times 9+\dfrac{2\,189}{15}\approx 349.9$.

将 $(1,168.6)$，$(4,236.6)$ 代入 $y=c\sqrt{x}+d$ 得

$\begin{cases}168.6=c+d,\\ 236.6=2c+d,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}c=68,\\ d=100.6,\end{cases}$

$\therefore y=68\sqrt{x}+100.6$.

当 $x=9$ 时，$y=68\times\sqrt{9}+100.6=304.6$，

$\therefore y=c\sqrt{x}+d$ 更适宜作为 y 与 x 的函数模型.

(2) $\because z=2y-10x$，$y=68\sqrt{x}+100.6$，

$\therefore z=2(68\sqrt{x}+100.6)-10x$

$=-10x+136\sqrt{x}+201.2$.

当 $\sqrt{x}=-\dfrac{136}{2\times(-10)}=\dfrac{34}{5}$，即 $x=\dfrac{1\,156}{25}$ 时，年利润最大.

复习题

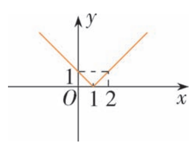
A 组

1.解析　$f(t)=3t^2+t=2$，$t\in\mathbf{Z}$，

解得 $t=-1$，$t=\dfrac{2}{3}$（舍去）.

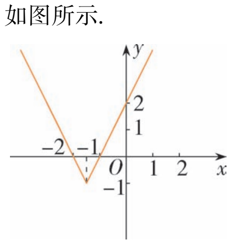
2.解析　(1) $y=|x-1|=\begin{cases}x-1, x\geqslant 1,\\ -x+1, x<1.\end{cases}$

定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[0,+\infty)$. 作出函数图像如图所示.



(2) $y=|2x+3|-1=\begin{cases}2x+2, x\geqslant -\dfrac{3}{2},\\ -2x-4, x<-\dfrac{3}{2}.\end{cases}$

定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $[-1,+\infty)$. 画出函数图像，如图所示.



3.解析　$f(x)=\begin{cases}2x+2, -1\leqslant x<0,\\ -x+2, 0\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

4.解析　由题意得 $f(x)$ 在 $[3,6]$ 上是增函数，且 $f(3)=-1$，$f(6)=8$.

$\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore 2f(-6)+f(-3)=-2f(6)-f(3)=-2\times 8+1=-15$.

5.解析　(1)非奇非偶函数. (2)奇函数. (3)偶函数. (4)非奇非偶函数. (5)偶函数. (6)奇函数.

6.解析　$\because f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数，$\therefore f(-1)=-f(1)=2$，$f(-3)=-f(3)=-1$，

$\therefore f(-1)>f(-3)$.

7.解析　(1)令 $-x^2-x+20=0$ 得 $x_1=-5$，$x_2=4$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点为 -5，4.

(2)令 $(x^2-2)(x^2-3x+2)=0$

得 $x_1=-\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2}$，$x_3=1$，$x_4=2$，$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的零点为 $-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，1，2.

8.解析　由题意得 $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=1,\\ 7=a-b,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=\dfrac{7}{3},\\ b=-\dfrac{14}{3}.\end{cases}$

9.证明　(1) $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 1$ 且 $x\neq -1\}$，关于原点对称.

$\because f(-x)=\dfrac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$，

$\therefore f(x)$ 是偶函数.

(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}{1-\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\dfrac{1+x^2}{1-x^2}=-f(x)$，$\therefore f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

10.证明　$\because f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ 且图像是连续的，

又 $f(2)=\dfrac{2\times 2-5}{2^2+1}=-\dfrac{1}{5}$，$f(3)=\dfrac{2\times 3-5}{3^2+1}=\dfrac{1}{10}$，$f(2)f(3)<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(2,3)$ 上至少有一个零点.

B 组

1.解析　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x+2, -3\leqslant x<0,\\ -x+2, 0\leqslant x<2,\\ x-2, 2\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

(1) $f(0)=2$，$f(1)=1$，$f(2.5)=0.5$.

(2) $f(-2)=\dfrac{2}{3}$，$f(0.5)=1.5$，$f(-0.5)=\dfrac{5}{3}$，$f(2.2)=0.2$.

(3)定义域为$[-3,3]$,值域为$[0,2]$.

2.解析　(1)$[1,+\infty)$.(2)$[0,+\infty)$.

3.证明　设任意的$x_1,x_2\in\mathbf{R}$,且$x_2>x_1$,

$[f(x_2)-g(x_2)]-[f(x_1)-g(x_1)]$

$=[f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_1)-g(x_2)]$.

$\because y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$,

$\because y=g(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数,

$\therefore g(x_1)-g(x_2)>0$,

$\therefore [f(x_2)-f(x_1)]+[g(x_1)-g(x_2)]>0$,

$\therefore f(x_2)-g(x_2)>f(x_1)-g(x_1)$,

$\therefore f(x)-g(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数.

4.解析　由题意知$-\dfrac{2(a-1)}{2}\geqslant 4$,

$\therefore a\leqslant -3$.

5.解析　当$x<0$时,$-x>0$,$\therefore f(-x)=(-x)^2+2\times(-x)=x^2-2x$,又$\because f(x)$是奇函数,$\therefore f(-x)=-f(x)$,

$\therefore -f(x)=x^2-2x$,$\therefore f(x)=-x^2+2x$,

$\therefore f(x)=-x^2+2x(x<0)$.

6.解析　任取$x_1,x_2\in(-\infty,-2]$,且满足$x_1<x_2$,则$-x_1>-x_2\geqslant 2$,

$\therefore -4-x_1>-4-x_2\geqslant -2$.

$\because f(x)$在$[-2,+\infty)$上是增函数,

$\therefore f(-4-x_1)>f(-4-x_2)$.

$\because f(x)$的图像关于点$(-2,1)$对称,

$\therefore$点$(x_1,f(x_1))$、$(x_2,f(x_2))$关于点$(-2,1)$的对称点分别为$(-4-x_1,2-f(x_1))$,$(-4-x_2,2-f(x_2))$,

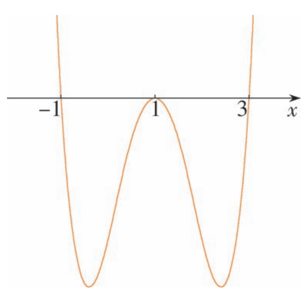
$\therefore f(-4-x_1)=2-f(x_1)$,$f(-4-x_2)=2-f(x_2)$,

$\therefore 2-f(x_1)>2-f(x_2)$,$\therefore f(x_1)<f(x_2)$,

$\therefore f(x)$在区间$(-\infty,-2]$上是增函数.

7.解析　令$f(x)=0$得$x_1=-1$,$x_2=x_3=1$,$x_4=3$,$\therefore f(x)$的零点有$-1,1,3$.

画出函数图像的示意图如图所示.



由图可知,$f(x)>0$的解集为$(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$,$f(x)\leqslant 0$的解集为$[-1,3]$.

8.解析　(1)$f(x)=4$的解集为$\{-2,2\}$,$f(x)\geqslant 4$的解集为$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

(2)$f(x)=g(x)$的解集为$\{-1,2\}$,$f(x)>g(x)$的解集为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$,$f(x)\leqslant g(x)$的解集为$[-1,2]$.

9.解析　$\because f(x)$是偶函数,

$\therefore f(-x)=f(x)=f(|x|)$.

又2是$f(x)$的一个零点,

$\therefore f(2)=0$,

$\therefore f(x-1)=f(|x-1|)>f(2)$,

$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,

$\therefore |x-1|<2$,

$\therefore -2<x-1<2$,$\therefore -1<x<3$,

$\therefore f(x-1)>0$的解集为$(-1,3)$.

10.解析　$\because f(x)$在$\mathbf{R}$上是偶函数,且在$(-\infty,0)$上是增函数,$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数.

$\because a^2-2a+4=(a-1)^2+3\geqslant 3$,

$\therefore f(a^2-2a+4)\leqslant f(3)<f(2)=f(-2)$,

$\therefore f(-2)>f(a^2-2a+4)$.

11.证明　令$f(x)=0$得$x+\dfrac{1}{x}-4=0$,即$x^2-4x+1=0$,$\therefore x_{1,2}=2\pm\sqrt{3}$,

即$f(x)$有且只有两个零点$2-\sqrt{3}$和$2+\sqrt{3}$.

12.证明　令$f(x)=x^n$,$g(x)=a$.

(1)当n是大于1的正奇数时,$f(x)=x^n$在$\mathbf{R}$上是单调递增的,且$f(x)$的值域是$(-\infty,+\infty)$,$f(x)=x^n$的图像与$g(x)=a$的图像有且只有一个交点,

$\therefore$方程$x^n=a$的解集中只有一个元素.

(2)当n是大于1的偶数时,函数$f(x)=x^n$是偶函数且在$[0,+\infty)$上是增函数,$(-\infty,0]$上是减函数,其值域为$[0,+\infty)$,$f(x)=x^n$的图像与$g(x)=a(a>0)$的图像必有两个交点,$\therefore$方程$x^n=a$的解集中只有两个元素.

C 组

1.解析　设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

$\because f(x)$满足$f(-2+k)=f(-2-k)(k\in\mathbf{R})$,

$\therefore f(x)$的图像的对称轴为$x=-2$,

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=-2$,$\therefore b=4a$.①

又$\because$图像过$(0,1)$点,$\therefore f(0)=1$,$\therefore c=1$.②

设$f(x)$的图像与x轴交于点$(x_1,0)$,$(x_2,0)$,

则有$x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$,$x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

$\because |x_2-x_1|=2\sqrt{2}$,$\therefore (2\sqrt{2})^2=(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{4c}{a}$,$\therefore b^2-4ac=8a^2$.③

联立①②③,解得$a=\dfrac{1}{2}$,$b=2$,$c=1$,

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x+1$.

2.解析　(1)$\because 1<2x-1\leqslant 2$,$\therefore 2<2x\leqslant 3$,

$\therefore 1<x\leqslant\dfrac{3}{2}$,

$\therefore g(x)$的定义域是$\left(1,\dfrac{3}{2}\right]$,值域是$[-5,+\infty)$.

(2)$\because 1<x\leqslant 2$,$\therefore 2<2x\leqslant 4$,$\therefore 1<2x-1\leqslant 3$,

$\therefore f(x)$的定义域为$(1,3]$.

由$f(2x-1)+1\geqslant -5$,得$f(2x-1)\geqslant -6$,

$\therefore f(x)$的值域为$[-6,+\infty)$.

3.解析　令$f(x)=7x^2-(a+13)x+a^2-a-2$,

根据题意得$\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)<0,\\f(2)>0,\end{cases}$

即$\begin{cases}a^2-a-2>0,\\7-(a+13)+a^2-a-2<0,\\28-2(a+13)+a^2-a-2>0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a<-1\text{ 或 }a>2,\\-2<a<4,\\a<0\text{ 或 }a>3,\end{cases}$

解得$-2<a<-1$或$3<a<4$,

$\therefore$实数a的取值范围是$(-2,-1)\cup(3,4)$.