教材习题答案

第一章 空间向量与立体几何

1.1 空间向量及其运算

1.1.1 空间向量及其运算

练习 A

1.解析 (1)共面.

(2)共面.

(3)不共面.

2.解析 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})+5\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}\right)-3(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\frac{5}{6}\boldsymbol{a}+\frac{9}{2}\boldsymbol{b}-\frac{7}{6}\boldsymbol{c}$.

3.解析 (1)90°.(2)45°.

4.解析 不能.否则,三个向量共面.

5.解析 (1)恒成立.(2)恒成立.(3)恒成立.

练习 B

1.解析 成立.当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时,左边等号成立;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时,右边等号成立.

2.解析 (1)$\overrightarrow{AD}$.(2)$\overrightarrow{MN}$.

3.解析 (1)$\overrightarrow{AC}$(或$\overrightarrow{A'C'}$).

(2)$\overrightarrow{DB}$(或$\overrightarrow{D'B'}$).

(3)$\overrightarrow{DB'}$.

(4)$\overrightarrow{BD'}$.

(5)$\overrightarrow{AC'}$.

4.解析 (1)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B'C'}=0$.

(2)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'C'}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{D'C'}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\rangle=1\times1\times1=1$.

(3)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}=1$.

(4)$\overrightarrow{B'D}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-1$.

5.解析 等式两边同时平方,得 $|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$,

∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

6.解析 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=-2$.

1.1.2 空间向量基本定理

练习 A

1.解析 是.

2.解析 是.

3.解析 是.

4.解析 $x=1,y=-3$.

5.解析 $x=3,y=-2,z=1$.

练习 B

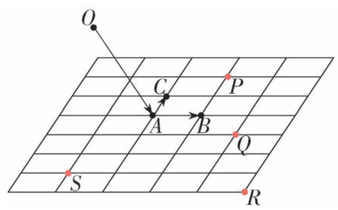
1.解析 不一定.

2.解析 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\frac{1}{4}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{4}\boldsymbol{c}$.

3.解析



4.解析 (1)$x=1$.(2)$x=y=\frac{1}{2}$.

5.解析 $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{CC_1}=-1+0+0+1=0$.

1.1.3 空间向量的坐标与空间直角坐标系

练习 A

1.解析 (1)$\boldsymbol{p}=(-1,1,-2)$.(2)$\boldsymbol{q}=(1,-1,0)$.(3)$\boldsymbol{r}=(0,2,3)$.

2.解析 (1)$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(13,-4,3)$.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=15-6-2=7$.

(3)∵ $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(6,4,-2)+(5,-3,2)=(11,1,0)$,$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(3,2,-1)-(15,-9,6)=(-12,11,-7)$,∴ $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=11\times(-12)+1\times11+0=-121$.

3.解析 (1)平行.(2)平行.

4.解析 (1)垂直.(2)垂直.

5.解析 (1)第Ⅱ卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z>0\}$,

第Ⅲ卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z>0\}$,

第Ⅵ卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y>0,z<0\}$,

第Ⅶ卦限:$\{(x,y,z)\mid x<0,y<0,z<0\}$,

第Ⅷ卦限:$\{(x,y,z)\mid x>0,y<0,z<0\}$.

(2) y 轴上:$\{(x,y,z)\mid x=0,z=0,y\in\mathbf{R}\}$,

xOy 平面上:$\{(x,y,z)\mid z=0,x,y\in\mathbf{R}\}$,

yOz 平面上:$\{(x,y,z)\mid x=0,y,z\in\mathbf{R}\}$.

6.解析 $OM=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

7.解析 $\left(2,3,\frac{7}{2}\right)$.

8.解析 (1)设 $\boldsymbol{x}=(a,b,c)$,

则 $\begin{cases}4a-2=2,\\4b+10=14,\\4c+2=-2,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}a=1,\\b=1,\\c=-1.\end{cases}$

∴ $\boldsymbol{x}=(1,1,-1)$.

(2)由已知可得 $3\boldsymbol{x}=(6,10,4)-(3,7,1)=(3,3,3)$,所以 $\boldsymbol{x}=(1,1,1)$.

9.解析 (1)$\overrightarrow{AB}=(-8,8,4)$.

(2)$\overrightarrow{AB}=(-6,-9,-2)$.

练习 B

1.解析 ∵ $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,

∴ (1)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=0$.

(2)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$.

(3)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$.

(4)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

(5)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{5\pi}{6}$.

(6)$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$.

2.解析 (1)$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=9$.

(2)易得 $\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=(14,-3,19)$,$\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}=(-10,-3,-17)$,

∴ $(\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b})=-140+9-323=-454$.

3.解析 (1)$\frac{1}{2}$.(2)$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

4.解析 (1)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\sqrt{145}}{145}$.

(2)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{10}}{25}$.

5.解析 ∵ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,∴ $\frac{-3}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{1}{x}$.

∴ $x=-\frac{5}{3},y=\frac{6}{5}$.

6.解析 ∵ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=16+xy=0$,

∴ $xy=-16$.

7.解析 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=307$;$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=107$.

8.解析 ∵ $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}=(-2+\lambda,1-2\lambda,3-\lambda)$,

$\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$,

∴ $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})=4-2\lambda+1-2\lambda+9-3\lambda=0$,

∴ $\lambda=2$.

9.解析 $\boldsymbol{n}=k(1,1,1)(k\neq0)$.

◆习题 1-1A

1.B $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

2.解析 (1)$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{-1}{\sqrt{35}\times\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{455}}{455}$.

(2)$\cos\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}\rangle=\frac{33}{\sqrt{35}\times\sqrt{153}}=\frac{11\sqrt{595}}{595}$.

3.解析 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$,

$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right).$

4. 解析 (1)0.(2)1.(3)1.(4)$\sqrt{3}$.

5. 解析 $\because \overrightarrow{AB}=(0,1,0),\overrightarrow{AC}=(-4,1,4)$,

$\therefore |\overrightarrow{AB}|=1,|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-4)^2+1+4^2}=\sqrt{33}$.

6. 解析 (1) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{38}$,

$\therefore$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{\sqrt{38}}{19},-\frac{3\sqrt{38}}{38},\frac{5\sqrt{38}}{38}\right)$.

(2) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}=5$,

$\therefore$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为 $\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(0,-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.

7. 答案 ④

解析 点 P 关于 x 轴的对称点是 $P_1(x,-y,-z)$,故错误;

点 P 关于 yOz 平面的对称点是 $P_2(-x,y,z)$,故错误;

点 P 关于 y 轴的对称点是 $P_3(-x,y,-z)$,故错误;

④正确.

8. 解析 $AB=\sqrt{(1-1)^2+(5-2)^2+(1-1)^2}=3$,

$AC=\sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(7-1)^2}=6$,

$AD=\sqrt{(3-1)^2+(2-2)^2+(1-1)^2}=2$,

体对角线长:$\sqrt{3^2+6^2+2^2}=7$.

9. 解析 图略.

(1) $\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AM}$($M$ 为 BC 的中点).

(2) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AM}$($M$ 为 AC' 的中点).

(3) $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AM}$($M$ 为 $A'C'$ 的中点).

◆习题 1-1B

1. 解析 (1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AG}$.

(2) $\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$.

2. 解析 $\langle 2\boldsymbol{a},-3\boldsymbol{b}\rangle=\frac{3\pi}{4}$.

3. 解析 $\because |\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9|\boldsymbol{b}|^2=1+6\times1\times1\times\frac{1}{2}+9=13$,

$\therefore |\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$.

4. 解析 不一定,因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可能共面.

5. 解析 由题可知,A_1C,B_1D,AC_1,BD_1 的中点均为 M.

$\therefore A_1(-1,-2,0),B_1(3,-1,-2),C_1(4,1,-1),D_1(0,0,1)$.

6. 解析 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1N}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{DD_1}+\frac{1}{2}\overrightarrow{B_1D_1}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{D_1C}+\overrightarrow{DD_1}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DD_1})+\overrightarrow{DD_1}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC})$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1}$

$=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$.

7. 解析 (1) $\because \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-1$,

$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\pi$.

(2) $\because |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$,

$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2$,

即 $2|\boldsymbol{a}|^2\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{a}|^2$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$,

$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

(3) $\because |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{b}|^2$,$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2$,

即 $2|\boldsymbol{a}|^2\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-|\boldsymbol{a}|^2$,

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,

$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

(4) 等式两边同时平方得

$|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,$\therefore \langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{2}$.

8. 解析 (1) 证明:$\because \boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$,

$\therefore \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}=a_2,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}=a_3$.

(2) $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}\rangle=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$,

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}\rangle=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$,

$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}\rangle=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$.

9. 解析 设点 P 的坐标为 (x,y,z),

$\because B(1,1,0),D_1(0,0,1)$,

$\therefore \overrightarrow{BP}=(x-1,y-1,z),\overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$.

又 $\because \overrightarrow{BP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD_1}$,

$\therefore \begin{cases}x-1=-\frac{1}{3},\\ y-1=-\frac{1}{3},\\ z=\frac{1}{3},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=\frac{2}{3},\\ z=\frac{1}{3}.\end{cases}$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

10. 解析 $\overrightarrow{AB}=(6,-5,5),\overrightarrow{AC}=(1,-3,6)$,假设存在实数 x,使 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$ 垂直,

则 $6\times(6+x)-5\times(-5-3x)+5\times(5+6x)=0$,

解得 $x=-\frac{86}{51}$.

$\therefore$ 存在实数 x,使 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AB}+x\overrightarrow{AC}$ 垂直,此时 $x=-\frac{86}{51}$.

11. 解析 设点 $D(x,y,z)$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\because A(4,1,3),B(2,-5,1),C(-3,7,-5),D(x,y,z)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-2,-6,-2),\overrightarrow{DC}=(-3-x,7-y,-5-z)$,

$\therefore (-2,-6,-2)=(-3-x,7-y,-5-z)$,

即 $-2=-3-x,-6=7-y,-2=-5-z$,

解得 $x=-1,y=13,z=-3$,

故点 $D(-1,13,-3)$.

12. 解析 (1) $\because \overrightarrow{AB}=(0,3,3),\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$,$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3,|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{2},|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$,

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

$\therefore \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

(2) $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影的数量为 $|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. 解析 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AA'}=\boldsymbol{c}$,

则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|=2,|\boldsymbol{b}|=4,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=0$.

(1) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{ED'}=\boldsymbol{b}\cdot\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{b}\right]=|\boldsymbol{b}|^2=4^2=16$.

(2) $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB'}=\left(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right)\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2=0$.

(3) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FC'}=\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}\right]\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=-\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|^2+\frac{1}{4}|\boldsymbol{b}|^2=2$.

◆习题 1-1C

1. 解析 向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 一定共面.因为存在不全为 0 的 x,y,z 满足 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=0$,

所以不妨设 $x\neq0$，则 $\boldsymbol{a}=-\frac{y}{x}\boldsymbol{b}-\frac{z}{x}\boldsymbol{c}$，

所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

2. 解析　假设 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$ 三个向量共面，则这三个向量必线性相关，即存在实数 x,y，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{q}+y\boldsymbol{r}$，

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+y(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+(x-y)\boldsymbol{c}$，从而有 $x=y=1$，$x-y=0$，即存在 $x=y=1$，使 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$ 线性相关.

$\therefore \boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{r}$ 三个向量共面.

3. 解析　向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 都与 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 和 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 共面，只有 $\overrightarrow{OC}$ 满足要求.

4. 解析　若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y+z=1$，

则 $\overrightarrow{AP}=(x-1)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=y(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+z(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AC}$.

由共面向量定理可知，$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 三个向量共面，

所以点 P 在平面 ABC 内.

反之，如果点 P 在平面 ABC 内，类似地可以证明存在 $x,y,z\in\mathbf{R}$，$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$ 且 $x+y+z=1$，方法同上.

5. 解析　由已知得该四面体为正四面体.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=a\times a\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$.

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}a^2$.

(3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=-\frac{a^2}{2}$.

(4) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{4}$.

(5) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{BA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\times\frac{a^2}{2}=-\frac{a^2}{4}$.

(6) $\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{GF}=(\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE})\cdot\overrightarrow{GF}=|\overrightarrow{GF}|^2-\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{GF}=\frac{a^2}{4}-0=\frac{a^2}{4}$.

1.2　空间向量在立体几何中的应用

1.2.1　空间中的点、直线与空间向量

练习 A

1. 解析　$(1,-1,0)$（答案不唯一）.

2. 解析　(1) $\because \boldsymbol{v}_2=-3\boldsymbol{v}_1$，且 l_1 与 l_2 不重合，

$\therefore l_1/\!/l_2$.

(2) $\because \boldsymbol{v}_2=3\boldsymbol{v}_1$，且 l_1 与 l_2 不重合，

$\therefore l_1/\!/l_2$.

3. 解析　$\because \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2=-2+6-4=0$，

$\therefore \boldsymbol{v}_1\perp\boldsymbol{v}_2$，

$\therefore$ 直线 l_1,l_2 所成角的大小为 $\frac{\pi}{2}$.

4. 解析　设 $C(x,y,z)$，$\because \overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OA}$，

$\therefore \overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，

把坐标代入上式得 $(x,y,z)=2(3,4,5)+(3,4,0)=(9,12,10)$，

$\therefore x=9,y=12,z=10$，

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(9,12,10)$.

5. 解析　是.

练习 B

1. 解析　是.理由如下：

$\because \boldsymbol{v}_1/\!/l,\boldsymbol{v}_2/\!/l$，

$\therefore \boldsymbol{v}_1/\!/\boldsymbol{v}_2$，又 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ 为非零向量，

$\therefore$ 存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{v}_2=\lambda\boldsymbol{v}_1$.

2. 解析　设 $P(x,y,z)$，

则 $\overrightarrow{AP}=(x+2,y-3,z)$，$\overrightarrow{PB}=(1-x,3-y,2-z)$.

由题意得 $3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$，所以 $3(x+2,y-3,z)=2(1-x,3-y,2-z)$，

解得 $x=-\frac{4}{5},y=3,z=\frac{4}{5}$，

$\therefore P\left(-\frac{4}{5},3,\frac{4}{5}\right)$.

3. 解析　(1) $CD,C'D',BC,B'C'$.

(2) $\because AA'\perp AB$，$|\overrightarrow{AA'}|=1$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$，

$\therefore \tan\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AA'}\rangle=\sqrt{3}$，

$\therefore \langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{AA'}\rangle=\frac{\pi}{3}$，又 $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}$，

$\therefore \langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{CC'}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

易得 $\langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{B'A'}\rangle=\frac{\pi}{6}$，$\because \overrightarrow{D'C'}=-\overrightarrow{B'A'}$，

$\therefore \langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{D'C'}\rangle=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.

$\because \overrightarrow{BA'}\cdot\overrightarrow{B'C'}=(\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'A'})\cdot\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}\cdot\overrightarrow{B'C'}=0$，

$\therefore \overrightarrow{BA'}\perp\overrightarrow{B'C'}$，$\therefore \langle\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{B'C'}\rangle=\frac{\pi}{2}$.

4. 解析　以 D 为原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，DD_1 的长度为单位长度，建立空间直角坐标系（图略）.则 $A(2,0,0)$，$D_1(0,0,1)$，$B(2,2,0)$，$D(0,0,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AD_1}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{BD}=(-2,-2,0)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$.

假设满足条件的 M,N 存在，且 $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AD_1}=(-2t,0,t)$，$\overrightarrow{BN}=s\overrightarrow{BD}=(-2s,-2s,0)$，

则 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=(2t-2s,2-2s,-t)$.

$\because MN\perp AD_1$，$MN\perp BD$，

$\therefore \overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AD_1}$，$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BD}$，

从而 $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BD}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2(2t-2s)-t=0,\\ -2(2t-2s)-2(2-2s)=0,\end{cases}$

解得 $t=\frac{2}{3},s=\frac{5}{6}$，

因此，满足条件的 M,N 是存在的.

5. 证明　$\because \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，

$\therefore AC\perp BD$.

1.2.2　空间中的平面与空间向量

练习 A

1. 解析　(1) $\because \boldsymbol{n}_2=-3\boldsymbol{n}_1$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，

$\therefore \alpha/\!/\beta$.

(2) $\because \boldsymbol{n}_2=3\boldsymbol{n}_1$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$，

$\therefore \alpha/\!/\beta$.

2. 解析　$\because \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=-6-4+10=0$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，

$\therefore \alpha\perp\beta$.

3. 解析　是.

练习 B

1. 解析　是.理由如下：

$\because \boldsymbol{n}_1\perp\alpha,\boldsymbol{n}_2\perp\alpha$，

$\therefore \boldsymbol{n}_1/\!/\boldsymbol{n}_2$.

易知 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 为非零向量，

$\therefore$ 存在非零实数 λ，使得 $\boldsymbol{n}_2=\lambda\boldsymbol{n}_1$.

2. 证明　设两平面分别为 α,β，a,b 是平面 α 内的两条相交直线，且 $a/\!/\beta,b/\!/\beta$，$\boldsymbol{n}$ 是平面 β 的法向量，则 $\boldsymbol{n}\perp a,\boldsymbol{n}\perp b$.

若记表示 $\boldsymbol{n}$ 的有向线段所在的直线为 l.

则有 $l\perp a,l\perp b$，

又 $\because a,b$ 相交，

$\therefore l\perp\alpha$，

$\therefore \boldsymbol{n}\perp\alpha$，$\therefore \alpha/\!/\beta$.

3. 解析　易得 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-3,0,5)$.

设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-3x+4y=0$，$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-3x+5z=0$，$\therefore y=\frac{3}{4}x,z=\frac{3}{5}x$.

令 $x=20$，则 $y=15,z=12$.

$\therefore \boldsymbol{n}=(20,15,12)$.

4. 证明　因为 $PA\perp$ 底面 AC，所以 AB 为 PB 在底面 AC 内的射影.

又 $BC\perp PB$，所以由三垂线定理的逆定

理可得 $BC\perp AB$.

又因为底面 $ABCD$ 是平行四边形,

所以四边形 $ABCD$ 是矩形.

5.解析　因为 $AC=BC$,D 为 AB 的中点,所以 $CD\perp AB$,即 $OC\perp AB$.

因为 $PO\perp$ 平面 ABC,所以 OC 为 PC 在平面 ABC 内的射影,所以由三垂线定理可得 $AB\perp PC$.

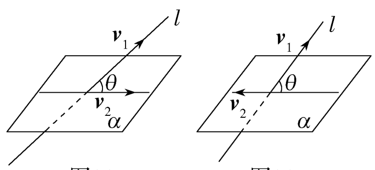
1.2.3　直线与平面的夹角

练习 A

1.解析　$0°\leqslant\theta\leqslant 90°$.

2.解析　(1)$3\sqrt{3}$.　(2)$5\sqrt{2}$.

3.解析



图(1)　图(2)

如图(1)所示,可以看出,$\theta=\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle$.

如图(2)所示,可以看出,$\theta=\pi-\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle$.

练习 B

1.解析　对角线 BD_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle DBD_1$,与平面 ABB_1A_1 所成的角为 $\angle A_1BD_1$,与平面 BCC_1B_1 所成的角为 $\angle C_1BD_1$,这些角的余弦值都是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2.解析　设斜线与平面 α 所成的角为 θ,根据三余弦定理可得

$\cos 60°=\cos 45°\times\cos\theta$,

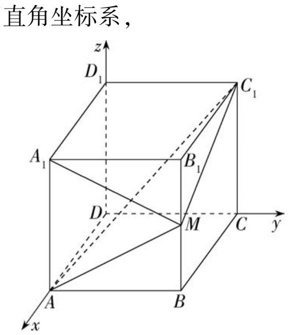
即 $\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\cos\theta$,

则 $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $\theta=45°$.

故答案为 45°.

3.解析　以边 DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



设正方体的棱长为 2,则 $A(2,0,0)$,$A_1(2,0,2)$,$M(2,2,1)$,$C_1(0,2,2)$,

$\therefore \overrightarrow{AM}=(0,2,1)$,$\overrightarrow{AC_1}=(-2,2,2)$,$\overrightarrow{A_1M}=(0,2,-1)$.

设平面 AMC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AM}$,$\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{AC_1}$,

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=2y_1+z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC_1}=-2x_1+2y_1+2z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,2)$.

设 A_1M 与平面 AMC_1 所成的角为 θ,则

$\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{A_1M}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1M}|}{|\boldsymbol{n}_1||\overrightarrow{A_1M}|}=\frac{4}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$.

1.2.4　二面角

练习 A

1.解析　$\because \frac{S_{\triangle ABP'}}{S_{\triangle ABP}}=\cos\frac{\pi}{6}$,

$\therefore S_{\triangle ABP'}=S_{\triangle ABP}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

2.解析　因为 $AC\perp AB$,$BD\perp AB$,AC、BD 分别在二面角的两个半平面内,且二面角为 90°,所以 $AC\perp BD$,即 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

$|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{|\overrightarrow{CD}|^2}=\sqrt{(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})^2}$

$=\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2}=7\sqrt{2}$,

所以 CD 的长为 $7\sqrt{2}$.

3.解析　$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|$.

练习 B

1.解析　由题易得 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$.设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+2y=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x+3z=0$,

令 $x=6$,则 $y=3$,$z=2$.

所以平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,3,2)$.易得平面 xOy 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$,平面 yOz 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,0,0)$,平面 xOz 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_3=(0,1,0)$,

$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_1\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{n}_1|}=\frac{2}{7\times1}=\frac{2}{7}$,

同理可得 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{6}{7}$,$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}_3\rangle=\frac{3}{7}$,

所以平面 ABC 与平面 xOy、yOz、xOz 所成角的余弦值分别为 $\frac{2}{7},\frac{6}{7},\frac{3}{7}$.

2.解析　因为三个侧面在底面上的射影完全相同,都是底面正三角形面积的 $\frac{1}{3}$,且正三棱锥 $S-ABC$ 的四个面面积相同,由 $\cos\theta=\frac{S_{射影}}{S_{斜面}}$ 知,侧面和底面所成二面角(显然为锐角)的余弦值为 $\frac{1}{3}$.

3.解析　$\because PA\perp$ 平面 ABM,$\therefore AM$ 为 PM 在平面 ABM 内的射影.

$\because AB$ 为圆的直径,$\therefore AM\perp BM$.

$\therefore PM\perp BM$.

$\therefore \angle PMA$ 为二面角 $A-BM-P$ 的平面角.$AM=AB\cdot\sin 30°=2$,$\therefore \tan\angle PMA=\sqrt{3}$,

$\therefore \angle PMA=\frac{\pi}{3}$.

$\therefore$ 二面角 $A-BM-P$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$.

1.2.5　空间中的距离

练习 A

1.解析　$0<d\leqslant 5$.

2.解析　是两个平行于平面 α 的平面,且分别位于 α 的两侧.

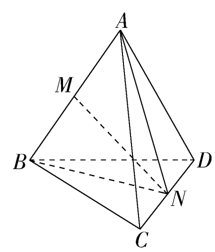
3.解析　距离平面 α 和 β 都是 2 cm 的一个平面.

4.解析　$\sqrt{2}$.

5.解析　连接 CD.$\because OC\perp\alpha$,$\therefore OC\perp AC$,$OC\perp BC$,$OC\perp CD$,由勾股定理可得 $OA=6\sqrt{5}$ cm,$OB=4\sqrt{13}$ cm,$CD=\frac{1}{2}AB=5$ cm,$OD=13$ cm.

练习 B

1.解析　如图,连接 AN、BN.$\because N$ 是 CD 的中点,$\therefore AN=BN=\frac{\sqrt{3}}{2}$.$\because M$ 是 AB 的中点,$\therefore MN\perp AB$,$BM=\frac{1}{2}$,$\therefore MN=\sqrt{BN^2-BM^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



2.解析　连接 CO 并延长交 AB 于 D,$\because O$ 为正三角形 ABC 的中心,$\therefore CD\perp AB$,连接 PD.

$\because PO\perp$ 平面 ABC,

$\therefore OD$ 为 PD 在平面 ABC 内的射影,

$\therefore PD\perp AB$,$\therefore PD$ 的长为 P 到边 AB 的距离.

$OD=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm,$OP=1$ cm,

$\therefore PD=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

同理可得 P 到 BC、AC 的距离均为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.

3.解析　$\because OA,OB,OC$ 两两垂直,且 OA

$=OB=OC=2$,

$\therefore AB=AC=BC=2\sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2})^2=2\sqrt{3}$.

设 O 到平面 ABC 的距离为 h,

则$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times2\times2=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times h$,

解得 $h=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$ O 到平面 ABC 的距离为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 解析 $\overrightarrow{AB}=(-1,2,2)$,$\overrightarrow{AC}=(-2,-2,5)$,$\overrightarrow{OA}=(2,2,0)$,设平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+2y+2z=0$,$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-2x-2y+5z=0$,

令 $x=7$,则 $y=\dfrac{1}{2}$,$z=3$.

$\therefore \boldsymbol{n}=\left(7,\dfrac{1}{2},3\right)$.

$\therefore$ O 到面 ABC 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{OA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{15}{\frac{\sqrt{233}}{2}}=\dfrac{30\sqrt{233}}{233}$.

5. 解析 (1)以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD'}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向,建立空间直角坐标系(图略),则 $D(0,0,0)$,$B(1,1,0)$,$B'(1,1,1)$,$\therefore \overrightarrow{B'B}=(0,0,-1)$.

易知$\overrightarrow{DB'}=(1,1,1)$是平面 $A'C'B$ 的一个法向量.

$\because \dfrac{|\overrightarrow{B'B}\cdot\overrightarrow{DB'}|}{|\overrightarrow{DB'}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore$ B'到平面 $A'C'B$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)易得平面 $A'C'B$∥平面 $D'AC$,

则直线 $B'D$ 为平面 $A'C'B$ 与平面 $D'AC$ 的公垂线.

由(1)知 B'到平面 $A'C'B$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

同理可得 D 到平面 $D'AC$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

又 $B'D=\sqrt{3}$,

$\therefore$ 平面 $A'C'B$ 与平面 $D'AC$ 之间的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

◆习题 1-2A

1. 解析 90°.

2. 解析 由已知可得$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$.

设平面 ABC 的一个单位法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-x+y-z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-x=0,\\ \boldsymbol{n}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1,\end{cases}$

解得 $x=0$,$|y|=|z|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,且 $y=z$.

所以 $\boldsymbol{n}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$是平面 ABC 的一个单位法向量.

3. 解析 $AB=\dfrac{3}{\cos\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{3}$.

4. 解析 (1)AB, AC, BC, AD, BD, CD.

(2)BC.

(3)$\triangle ABC$, $\triangle ACP$, $\triangle BCP$, $\triangle PCD$, $\triangle ADC$, $\triangle BDC$, $\triangle ADP$, $\triangle BDP$.

5. 解析 $\overrightarrow{BC}$是平面 ADM 的一个法向量,平面 $ADM\perp$平面 ABC,平面 $ADM\perp$平面 BCD.

6. 解析 设直线 AB 和平面 α 所成的角为 θ,则 $\cos\theta=\dfrac{A'B'}{AB}$.

(1)$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,$\therefore \theta=60°$.

(2)$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,$\therefore \theta=45°$.

(3)$\cos\theta=1$,$\therefore \theta=0°$.

(4)$\cos\theta=0$,$\therefore \theta=90°$.

7. 解析 以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD'}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向,建立空间直角坐标系(图略).设正方体的棱长为 1,则 $A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,0)$,$A'(1,0,1)$,$\therefore \overrightarrow{DA'}=(1,0,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$.

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DA'}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{DA'}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2}$,$\therefore \langle\overrightarrow{DA'},\overrightarrow{AC}\rangle=120°$,$\therefore$ 直线 DA' 与直线 AC 所成角的大小为 60°.

8. 解析 $\because \cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABP'}}$,

$\therefore S_{\triangle ABP'}=\dfrac{5}{\cos\frac{\pi}{4}}=5\sqrt{2}$.

◆习题 1-2B

1. 解析 设 $\boldsymbol{v}\parallel l$,则由$\overrightarrow{A'A}\perp\alpha$,且 $l\parallel\alpha$ 可知$\overrightarrow{A'A}\perp\boldsymbol{v}$,即$\overrightarrow{A'A}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

(1)若 $l\perp A'B$,则 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{A'B}$,$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{A'B}=0$.

$\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}=-\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B}$,$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}=(-\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{A'B})\cdot\boldsymbol{v}=-\overrightarrow{A'A}\cdot\boldsymbol{v}+\overrightarrow{A'B}\cdot\boldsymbol{v}=0$,

$\therefore \boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{AB}$,

$\therefore l\perp AB$.

(2)若 $l\perp AB$,则 $\boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{AB}$,$\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

$\because \overrightarrow{A'B}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}$,

$\therefore \overrightarrow{A'B}\cdot\boldsymbol{v}=(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB})\cdot\boldsymbol{v}=\overrightarrow{A'A}\cdot\boldsymbol{v}+\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{v}=0$,$\therefore \boldsymbol{v}\perp\overrightarrow{A'B}$.

$\therefore l\perp A'B$.

2. 解析 AB 与 A_1D_1,AD 与 D_1C_1,A_1C_1 与 BD 的公垂线段分别为 AA_1,DD_1,EF(E 为 BD 的中点,F 为 A_1C_1 的中点).

3. 解析 (1)$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中,$AB\parallel CD$,

$\therefore \angle PCD$ 为 PC 与 AB 所成的角.$\because PD\perp$平面 $ABCD$,$\therefore PD\perp CD$,$PC=\sqrt{34}$,

$\therefore \cos\angle PCD=\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$,$\therefore PC$ 与 AB 所成角的余弦值为$\dfrac{5\sqrt{34}}{34}$.

(2)$\because PD\perp$平面 $ABCD$,$AB\subset$平面 $ABCD$,$\therefore PD\perp AB$,

$\therefore PD$ 与 AB 所成角的大小为 90°,余弦值为 0.

(3)$\because$ 在矩形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,

$\therefore \angle PAD$ 为 PA 与 BC 所成的角.

$\because PD\perp$平面 $ABCD$,$\therefore PD\perp AD$,$PA=5$,

$\therefore \cos\angle PAD=\dfrac{4}{5}$,$\therefore PA$ 与 BC 所成角的余弦值为$\dfrac{4}{5}$.

4. 解析 易得 CA, CB, CC_1 两两互相垂直.

以 C 为原点,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{CB}$,$\overrightarrow{CC_1}$的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系(图略),则 $C(0,0,0)$,$A(3,0,0)$,$B(0,3,0)$,$B_1(0,3,3)$,$C_1(0,0,3)$,

$\therefore \overrightarrow{AC_1}=(-3,0,3)$,$\overrightarrow{CB_1}=(0,3,3)$,$\overrightarrow{CA}=(3,0,0)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,3,0)$.

易得 $AB=3\sqrt{2}$,$\therefore \overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$,则$\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AM}=(2,1,0)$.

设平面 B_1MC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=3y+3z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=2x+y=0,\end{cases}$

令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,-2,2)$.

设直线 AC_1 与平面 B_1MC 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC_1},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AC_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

5. 解析 (1)以 B 为坐标原点,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{BA}$,$\overrightarrow{BE}$的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向,建立空间直角坐标系 $Bxyz$(图略),则 $B(0,0,0)$,$C(6,0,0)$,$D(3,6,0)$,$E(0,0,6)$,$\overrightarrow{CD}=(-3,6,0)$,$\overrightarrow{CE}=(-6, 0,6), $\overrightarrow{BC}=(6,0,0)$. 设平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$, 则 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=-3x+6y=0$, $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=-6x+6z=0$,

令 $x=2$, 则 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$,

∴ 点 B 到平面 CDE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=4$.

(2) 易知平面 ACD 的一个法向量为 $\overrightarrow{BE}=(0,0,6)$,

由(1)知平面 CDE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$, ∴ $\cos\langle\overrightarrow{BE},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BE}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{3}$.

易知二面角 $A-CD-E$ 为锐二面角,

∴ 二面角 $A-CD-E$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

◆习题 1-2C

1. 解析　易得 $\overrightarrow{AB}=(-3,3,-3)$, 设点 $C(x,y,z)$ 满足 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$, 且 $PC\perp AB$,

由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}$ 得

$(x-3,y-3,z-3)=(-3\lambda,3\lambda,-3\lambda)$,

∴ $\begin{cases}x=3-3\lambda,\\y=3+3\lambda,\\z=3-3\lambda,\end{cases}$

即 $C(3-3\lambda,3+3\lambda,3-3\lambda)$,

∴ $\overrightarrow{PC}=(3-3\lambda,3+3\lambda,-3-3\lambda)$.

又∵ $PC\perp AB$,

∴ $\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$, 即

$-3(3-3\lambda)+3(3+3\lambda)-3(-3-3\lambda)=0$,

解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$,

因此 $\overrightarrow{PC}=(4,2,-2)$,

从而可知点 P 到直线 l 的距离为 $|\overrightarrow{PC}|=\sqrt{4^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{6}$.

2. 解析　(1) 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DD'}$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴正方向, 正方体的棱长为单位长度, 建立空间直角坐标系(图略), 则 $A'(1,0,1)$, $D'(0,0,1)$, $F\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$, $B(1,1,0)$, $E\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$,

∴ $\overrightarrow{D'A'}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{D'F}=\left(0,\dfrac{1}{2},-1\right)$, $\overrightarrow{BE}=\left(0,-\dfrac{1}{2},1\right)$. 设平面 $A'FD'$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D'A'}=x=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D'F}=\dfrac{1}{2}y-z=0,\end{cases}$

令 $y=2$, 则得 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$.

∵ $\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0$,

∴ $\overrightarrow{BE}\perp\boldsymbol{n}$,

又∵ 点 B 显然不在平面 $A'FD'$ 内,

∴ $BE\parallel$ 平面 $A'FD'$.

(2) 结合(1)可得 $\overrightarrow{A'E}=\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$,

∴ $\dfrac{|\overrightarrow{A'E}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$,

∴ BE 到平面 $A'FD'$ 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

3. 解析　由题可知 $\overrightarrow{AB}=(2,1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(-2,0,1)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$.

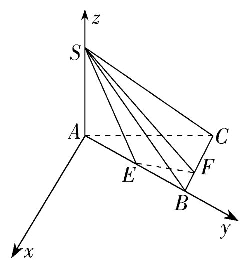
设平面 β 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-2x+z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=-x-y=0,\end{cases}$

令 $x=1$, 则得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$,

∴ α 与 β 之间的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

4. 解析　如图, 以 A 为原点, 在平面 ABC 内过 A 作 CB 的平行线为 x 轴, AB 所在直线为 y 轴, AS 所在直线为 z 轴建立空间直角坐标系,



则 $A(0,0,0)$, $S(0,0,4)$, $B(0,4,0)$, $C(-3,4,0)$, $E(0,2,0)$, $F(-1,4,0)$,

∴ $\overrightarrow{AE}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{SE}=(0,2,-4)$, $\overrightarrow{EF}=(-1,2,0)$.

设平面 SEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SE}=2y-4z=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=-x+2y=0,\end{cases}$

令 $x=4$, 得 $\boldsymbol{n}=(4,2,1)$.

∵ $\dfrac{|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{4^2+2^2+1}}=\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$,

∴ 点 A 到平面 SEF 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{21}}{21}$.

复习题

A 组

1. 解析　(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(-3,2,5)+(1,-3,0)+(7,-2,1)=(5,-3,6)$.

(2) ∵ $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-2,-1,5)$, ∴ $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-2,-1,5)\cdot(7,-2,1)=-7$.

(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2=5^2+(-3)^2+6^2=70$.

(4) ∵ $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{38}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$, $|\boldsymbol{c}|=3\sqrt{6}$,

∴ $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|=\sqrt{38}+\sqrt{10}+3\sqrt{6}$.

2. 解析　∵ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为共线向量,

∴ 存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,

∴ $\begin{cases}2x=\lambda,\\1=-2\lambda y,\\3=9\lambda,\end{cases}$

解得 $x=\dfrac{1}{6}$, $y=-\dfrac{3}{2}$.

3. 解析　易得 $\overrightarrow{AB}=(-2,-1,3)$, $\overrightarrow{CA}=(-1,3,-2)$,

∴ $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\rangle$

$=\dfrac{(-2)\times(-1)+(-1)\times3+3\times(-2)}{\sqrt{14}\times\sqrt{14}}$

$=-\dfrac{7}{14}=-\dfrac{1}{2}$,

∴ $\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\rangle=120°$.

4. 解析　设 $P(x,y,z)$, ∴ $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-2,z-1)$, $\overrightarrow{PB}=(-1-x,3-y,4-z)$.

由 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$, 得点 P 坐标为 $\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{8}{3},3\right)$.

又 $D(1,1,1)$, ∴ $|\overrightarrow{PD}|=\dfrac{\sqrt{77}}{3}$.

5. 解析　$(-2,-1,-4)$, $(-2,1,-4)$, $(2,-1,-4)$.

6. D　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{29}$, $|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{29}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{29}$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$, 所以 A、B、C 三点共线, 构不成三角形.

7. 解析　设 $P(x,y,z)$ 为满足条件的任一点, 则由题意得 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$.

∵ $|\overrightarrow{PA}|=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-0)^2}$,

$|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{(x-5)^2+(y-1)^2+(z-0)^2}$,

∴ 平方后化简得 $6x-4y-13=0$.

∴ $6x-4y-13=0$ 即为所求点所满足的条件.

8. 解析　设 $P(0,0,z)$, 由 $PA=PB$, 可得 $1+4+(z-1)^2=4+4+(z-2)^2$, 解得 $z=3$, 故点 P 的坐标为 $(0,0,3)$.

9. 解析　∵ $A(0,0,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,3,5)$,

∴ $\overrightarrow{AC}=(1,3,5)$, $\overrightarrow{AB}=(2,5,0)$,

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+5^2+0^2}=\sqrt{29}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times2+3\times5+5\times0=17$.

∴ $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上投影的数量为 $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|}$

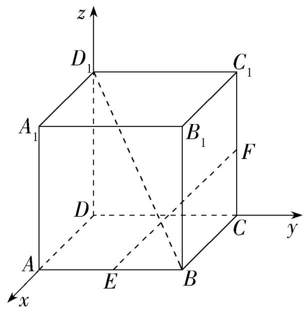
$=\dfrac{17\sqrt{29}}{29}$.

10. 解析　$\overrightarrow{BD_1}$.

11. 解析　过三角形外心且垂直于三角形所在平面的一条直线.

12. 解析　如图, 以 D 为原点建立空间直

角坐标系.



设正方体的棱长为2,则 $E(2,1,0)$, $F(0,2,1)$, $B(2,2,0)$, $D_1(0,0,2)$,

$\therefore \overrightarrow{EF}=(-2,1,1)$, $\overrightarrow{BD_1}=(-2,-2,2)$,

$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{BD_1}\rangle|=\left|\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{BD_1}|}\right|$

$=\left|\dfrac{(-2)\times(-2)+1\times(-2)+1\times2}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}\times\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+2^2}}\right|$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore$ 直线 EF 与 BD_1 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

B 组

1. A $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{PG}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC})+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD})$. 因为四边形 $ABCD$ 是正方形,G 是它的中心,所以 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\mathbf{0}$,故原式$=4\overrightarrow{PG}$.

2. 解析 因为 $\boldsymbol{a}=(1,1,0)$, $\boldsymbol{b}=(-1,0,2)$,所以 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k(1,1,0)+(-1,0,2)=(k-1,k,2)$, $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,2,-2)$,又 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直,所以 $3(k-1)+2k-4=0$,解得 $k=\dfrac{7}{5}$.

3. 解析 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{OM}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN})$

$=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\left[-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\right]$

$=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{2}{3}\boldsymbol{c}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$

$=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{c}$.

4. 解析 以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD'}$ 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴正方向,建立空间直角坐标系(图略),则 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(1,1,0)$, $D'(0,0,1)$, $B'(1,1,1)$, $C'(0,1,1)$,

$\therefore \overrightarrow{BD'}=(-1,-1,1)$, $\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$, $\overrightarrow{AC'}=(-1,1,1)$, $\overrightarrow{DB'}=(1,1,1)$.

$\therefore \overrightarrow{BD'}\cdot\overrightarrow{AD}=1$,

$\cos\langle\overrightarrow{AC'},\overrightarrow{DB'}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{DB'}}{|\overrightarrow{AC'}||\overrightarrow{DB'}|}=\dfrac{1}{3}$.

5. 解析 $\because |\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,

$\therefore |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=1$.

$\therefore 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$.

$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$.

$\therefore |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$.

6. 解析 设点 $D(x,y,z)$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

$\because A(3,4,0)$, $B(2,5,5)$, $C(0,3,5)$, $D(x,y,z)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-1,1,5)$, $\overrightarrow{DC}=(-x,3-y,5-z)$,

$\therefore (-1,1,5)=(-x,3-y,5-z)$,

即 $-1=-x$, $1=3-y$, $5=5-z$,

解得 $x=1$, $y=2$, $z=0$,

故点 D 的坐标为$(1,2,0)$.

7. 证明 以 D 为原点,$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向,正方体的棱长是单位长度,建立空间直角坐标系(图略),则 $D(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $M\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$, $N\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $\therefore \overrightarrow{MN}=\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$, $\overrightarrow{BD}=(-1,-1,0)$,

易得 $MN/\!/BD$,且 $MN=\dfrac{1}{2}BD$.

8. 解析 由题意可设点 D 的坐标为$(x,0,z)$,

则 $\overrightarrow{BD}=(x-2,-2,z)$, $\overrightarrow{CA}=(0,-2,5)$.

$\because BD/\!/CA$, $\therefore \begin{cases}x-2=0,\\z=5,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x=2,\\z=5,\end{cases}$

$\therefore$ 点 D 的坐标为$(2,0,5)$.

9. 解析 因为 $\angle AOB=\angle BOC=\angle AOC=60°$,

所以可得 A 在平面 OBC 的射影在 $\angle BOC$ 的角平分线上,设射影是 P,连接 OP, $\angle AOP$ 就是直线 OA 与平面 BOC 所成角,

作 $PD\perp OB$ 于 D,连接 AD,

设 $OD=1$,则 $AO=2$, $AD=\sqrt{3}$, $PD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

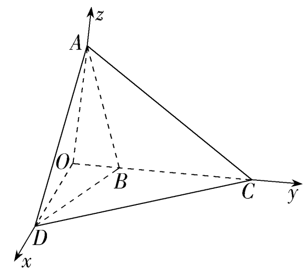
$PO=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\cos\angle AOP=\dfrac{PO}{AO}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故直线 OA 与平面 BOC 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 解析 (1)作 $AO\perp BC$ 于点 O,连接 DO,易得 OD, OC, OA 两两互相垂直.

以 O 为原点,$\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向,建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $AB=1$,则 $O(0,0,0)$, $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$, $B\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$, $C\left(0,\dfrac{3}{2},0\right)$, $A\left(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\therefore \overrightarrow{AD}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 显然 $\boldsymbol{n}_1=(0,0,1)$ 为平面 BCD 的一个法向量,

$\therefore |\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\left|\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}\times1}\right|=\left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore$ 直线 AD 与平面 BCD 所成角的大小为 $90°-45°=45°$.

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot(0,1,0)=0$, $\therefore \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$,

$\therefore AD$ 与 BC 所成角的大小为 $90°$.

(3)设平面 ABD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,1)$,则 $(x,y,1)\cdot\overrightarrow{AB}=(x,y,1)\cdot\left(0,\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$,

$(x,y,1)\cdot\overrightarrow{AD}=(x,y,1)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$,

解得 $x=1$, $y=\sqrt{3}$,

则 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},1)$.

设二面角 $A-BD-C$ 的大小为 θ,则

$|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

11. 解析 作 $BD\perp$ 平面 α,垂足为 D, $CE\perp$ 平面 α,垂足为 E,连接 AE, AD, DE,则 $\angle BAD=30°$, $\angle CAE=60°$, $\angle EAD=90°$.

易得 $BD=3$, $AE=4$, $CE=4\sqrt{3}$, $DE=\sqrt{43}$.

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}$,

$\therefore |\overrightarrow{BC}|^2=(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})^2=|\overrightarrow{BD}|^2+$

$|\overrightarrow{DE}|^2+|\overrightarrow{EC}|^2+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}=3^2+(\sqrt{43})^2+(4\sqrt{3})^2\pm2\times3\times4\sqrt{3}=100\pm24\sqrt{3}$.

$\therefore|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{100\pm24\sqrt{3}}$，即 BC 的长为 $\sqrt{100\pm24\sqrt{3}}$ cm.

12. 解析　过点 A 作 $AD\perp OC$ 于 D，

根据三余弦定理可得

$\cos\angle AOD=\cos 60°\times\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

$\therefore \sin\angle AOD=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$.

$\because AO=6$，且 $AD\perp OC$，

$\therefore AD=OA\times\sin\angle AOD=6\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$，

即点 A 到直线 OC 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$.

C 组

1. 证明　设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 $\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=(-\lambda-3\mu)\boldsymbol{i}+(3\lambda+7\mu)\boldsymbol{j}+2\lambda\boldsymbol{k}$.

$\because$ 向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不共面，

$\therefore\begin{cases}-\lambda-3\mu=1,\\3\lambda+7\mu=-2,\\2\lambda=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\dfrac{1}{2},\\ \mu=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

故存在实数 $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$，使得 $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{c}$，

故向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

2. 解析　共面.理由如下：

假设存在实数 λ,μ，使 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{q}+\mu\boldsymbol{r}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=(2\lambda-7\mu)\boldsymbol{a}+(-3\lambda+18\mu)\boldsymbol{b}+(-5\lambda+22\mu)\boldsymbol{c}$，

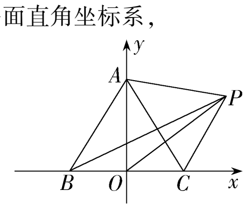
$\because \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，

$\therefore\begin{cases}2\lambda-7\mu=1,\\-3\lambda+18\mu=1,\\-5\lambda+22\mu=-1,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}\lambda=\dfrac{5}{3},\\ \mu=\dfrac{1}{3},\end{cases}$

即存在实数 $\lambda=\dfrac{5}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$，

使 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{q}+\mu\boldsymbol{r}$，故 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 共面.

3. 解析　以 BC 所在直线为 x 轴，以 BC 边上的高所在直线为 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



则 $A(0,\sqrt{3})$，设 $P(x,y)$，则

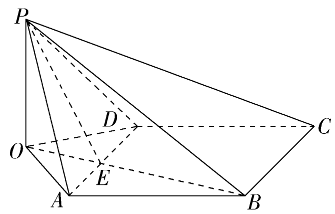
$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PO}=(-2x,-2y)$，$\overrightarrow{PA}=(-x,\sqrt{3}-y)$，

$\therefore\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2x^2+2y^2-2\sqrt{3}y$，

$=2x^2+2\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$ 当 $x=0,y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 取得最小值 $-\dfrac{3}{2}$.

4. 解析　(1)如图，作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为点 O.连接 OB、OA、OD，设 OB 与 AD 交于点 E，连接 PE.



$\because AD\perp PB$，$\therefore AD\perp OB$.

$\because PA=PD$，$\therefore OA=OD$，

于是 OB 平分 AD，点 E 为 AD 的中点，

$\therefore PE\perp AD$.由此知 $\angle PEB$ 为面 PAD 与面 $ABCD$ 所成二面角的平面角，

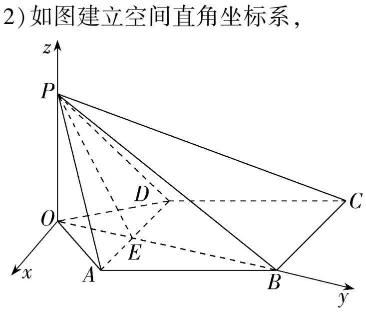
$\therefore\angle PEB=120°$，$\angle PEO=60°$，

由已知可求得 $PE=\sqrt{3}$，

$\therefore PO=PE\cdot\sin 60°=\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$，

即点 P 到平面 $ABCD$ 的距离为 $\dfrac{3}{2}$.

(2)如图建立空间直角坐标系，



则 $P\left(0,0,\dfrac{3}{2}\right)$，$B\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，$A\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(-2,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$，$PB$ 中点 G 的坐标为 $\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{4},\dfrac{3}{4}\right)$.连接 AG，

$\overrightarrow{GA}=\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{4},-\dfrac{3}{4}\right)$，$\overrightarrow{PB}=\left(0,\dfrac{3\sqrt{3}}{2},-\dfrac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,0,0)$.

于是有 $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，

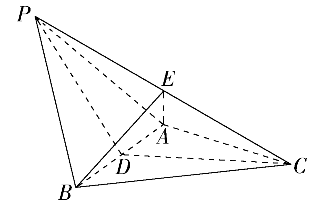
$\therefore\overrightarrow{GA}\perp\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{PB}$，$\therefore\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{BC}$ 的夹角 θ 等于所求二面角的平面角，

于是 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{GA}||\overrightarrow{BC}|}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

$\therefore$ 面 APB 与面 CPB 所成二面角的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

5. 解析　(1)证明：因为 $\triangle PAB$ 是等边三角形，所以 $PA=PB$，又 $PC=PC$，$\angle PAC=\angle PBC=90°$，所以 $\text{Rt}\triangle PBC\cong\text{Rt}\triangle PAC$，所以 $AC=BC$.

如图，取 AB 中点 D，连接 PD，CD，则 $PD\perp AB$，$CD\perp AB$，又 $PD\cap CD=D$，所以 $AB\perp$ 平面 PDC，所以 $AB\perp PC$.



(2)作 $BE\perp PC$，垂足为 E，连结 AE.

因为 $\text{Rt}\triangle PBC\cong\text{Rt}\triangle PAC$，所以 $AE\perp PC$，$AE=BE$.易得 $PC\perp$ 平面 ABE.

因为平面 $PAC\perp PBC$，所以 $\angle AEB=90°$.

设 $AB=PA=PB=a$，则 $AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中，由 $PA\cdot AC=PC\cdot AE$ 得

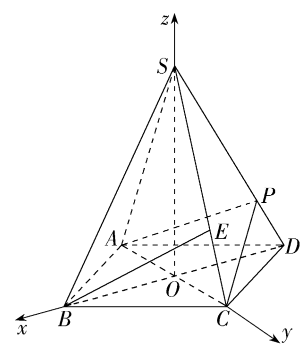
$a\cdot\sqrt{16-a^2}=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，解得 $a=2\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{16-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}=PA$.

可得 E 为 PC 中点.

由 $PC=4$，得 $AE=BE=2$，所以 $S_{\triangle AEB}=2$.

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\times S_{\triangle AEB}\times PC=\dfrac{8}{3}$.

6. 解析　(1)如图，连接 BD，AC，设 AC 交 BD 于 O，连接 SO，由题易知 $SO\perp$ 平面 $ABCD$.



以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OS}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，

设底面边长为 a，则 $SO=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a$，

于是 $S\left(0,0,\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$，$C\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{OC}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$，$\overrightarrow{SD}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,0,-\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\right)$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{SD}=0$，所以 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{SD}$，从而 $AC\perp SD$.

(2)由题设知，平面 PAC 的一个法向量

为$\overrightarrow{DS}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

平面 DAC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OS}=\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

设所求二面角为 θ,则

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{DS}}{|\overrightarrow{OS}||\overrightarrow{DS}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\theta=30°$.

即二面角 $P-AC-D$ 的大小为 $30°$.

(3)假设在棱 SC 上存在一点 E 使 BE //平面 PAC.

由(2)知$\overrightarrow{DS}$是平面 PAC 的一个法向量.

且$\overrightarrow{DS}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

$\overrightarrow{CS}=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)$,

$\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$,

设$\overrightarrow{CE}=t\overrightarrow{CS}$,

则$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{CS}$

$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-t),\frac{\sqrt{6}}{2}at\right)$.

易得$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{DS}=0$,所以 $t=\frac{1}{3}$,

即当 $SE:EC=2:1$ 时,BE//平面 PAC.

综上所述,侧棱 SC 上存在一点 E,使得 BE//平面 PAC,此时 $SE:EC=2:1$.

第二章　平面解析几何

2.1　坐标法

习题 2-1A

1.解析　$|AB|=|10-(-2)|=12$,AB 的中点记为 C,则 $C(4)$.

2.解析　$|AB|=\sqrt{(3-0)^2+(0+4)^2}=5$,$AB$ 的中点坐标为$\left(\frac{3}{2},-2\right)$.

3.证明　$\because |AB|=\sqrt{(3+1)^2+(3-3)^2}=4$,$|BC|=\sqrt{(3-1)^2+(3-2\sqrt{3}-3)^2}=4$,

$|AC|=\sqrt{(1+1)^2+(2\sqrt{3}+3-3)^2}=4$,

$\therefore |AB|=|AC|=|BC|$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

4.解析　设 AB,BC,AC 的中点分别为 D,E,F,则由中点公式可得 $D(0,2)$,$E(-1,1)$,$F(1,0)$,所以三条中线的长分别为 $|CD|=\sqrt{(0-0)^2+(-1-2)^2}=3$,$|AE|=\sqrt{(2+1)^2+(1-1)^2}=3$,$|BF|=\sqrt{(-2-1)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$.

5.解析　由 $|AB|=|BC|$ 知,$C(5)$.

习题 2-1B

1.解析　易知 $|PA|=2|PB|$,设 $P(x)$,则 $|x-(-9)|=2|x-(-3)|$,

$\therefore x=3$ 或 $x=-5$,$\therefore P(3)$ 或 $P(-5)$.

2.解析　$|AB|=\sqrt{(a-0)^2+(0-10)^2}=17$,$\therefore a=\pm3\sqrt{21}$.

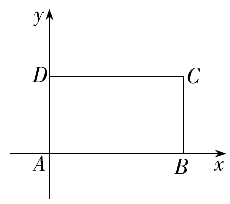
3.解析　设 $P(0,b)$,$\because PA\perp PB$,$\therefore |PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$,

$\therefore (3-0)^2+(1-b)^2+(0+2)^2+(b-2)^2=(3+2)^2+(1-2)^2$,

$\therefore b^2-3b-4=0$,$\therefore b=-1$ 或 $b=4$,

$\therefore P(0,-1)$ 或 $P(0,4)$ 即为所求.

4.证明　设 $|AB|=a$,$|AD|=b$,以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴,AD 所在直线为 y 轴,建立平面直角坐标系,如图所示,则 $A(0,0)$,$B(a,0)$,$C(a,b)$,$D(0,b)$.设任一点 $M(x,y)$,则 $AM^2=x^2+y^2$,$CM^2=(x-a)^2+(y-b)^2$,$AM^2+CM^2=2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2$.又 $BM^2=(a-x)^2+(0-y)^2$,$DM^2=x^2+(y-b)^2$,$BM^2+DM^2=2x^2+2y^2-2ax-2by+a^2+b^2$,故 $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.



5.解析　设所求函数的图像上任一点 $P(x,y)$,且 $P(x,y)$ 关于 $M(2,0)$ 对称的点为 $P_0(x_0,y_0)$,所以 $\begin{cases}\frac{x+x_0}{2}=2,\\ \frac{y+y_0}{2}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_0=4-x,\\ y_0=-y.\end{cases}$ 因为 $P_0(x_0,y_0)$ 在函数 $y=x^2+1$ 的图像上,所以 $-y=(4-x)^2+1$,故所求函数的解析式为 $y=f(x)=-(x-4)^2-1$.

习题 2-1C

1.解析　(1)证明:如图①~⑤,$d(A,B)=|AB|$.

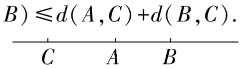
$d(A,C)=|AC|$,

$d(B,C)=|BC|$.

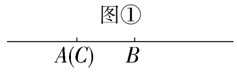
图①⑤中,$|AB|<|AC|+|BC|$;

图②③④中,$|AB|=|AC|+|BC|$,

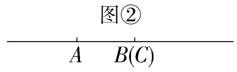
$\therefore d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$.



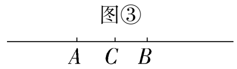
图①



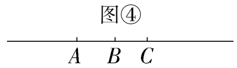
图②



图③



图④



图⑤

(2)设 C 的坐标为 x,则当 $-3\leqslant x\leqslant2$ 时,$d(A,B)=d(A,C)+d(B,C)$;

当 $x<-3$ 或 $x>2$ 时,$d(A,B)<d(A,C)+d(B,C)$.

2.解析　(1)证明:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,则 $d(A,C)+d(B,C)=|x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|x_2-x_3|+|y_2-y_3|$,

$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$,

$\because |x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|x_2-x_3|+|y_2-y_3|\geqslant|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$,

$\therefore d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$.

(2)(1)中不等式等号成立时,点 C 的横坐标介于 x_1 和 x_2 之间(包含 x_1,x_2),且点 C 的纵坐标介于 y_1 和 y_2 之间(包含 y_1,y_2),否则,等号不成立.

2.2　直线及其方程

2.2.1　直线的倾斜角与斜率

练习 A

1.解析　(1)$90°$.(2)$0°$.(3)$45°$.(4)$135°$.

2.解析　(1)存在,斜率为 0.

(2)存在,斜率为$\sqrt{3}$.

(3)不存在.

(4)存在,斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3.解析　直线 l 的一个方向向量$\overrightarrow{AB}=(-3,3)$,

斜率 $k=\frac{3-0}{-5-(-2)}=-1$,倾斜角 $\theta=135°$.

4.解析　$\because k_{AB}=\frac{-1-(-3)}{0-(-1)}=2$,$k_{BC}=\frac{2-(-1)}{1-0}=3$,$k_{AB}\neq k_{BC}$,$\therefore A,B,C$ 不共线.

$\because k_{BD}=\frac{5-(-1)}{3-0}=2$,$k_{AB}=k_{BD}$,且直线 AB 与直线 BD 有一个公共点 B,$\therefore A$、B、D 三点共线.

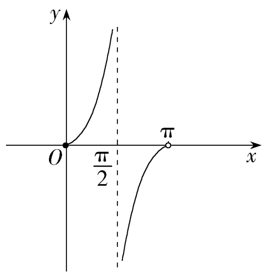
5.解析　真命题.

练习 B

1.解析　(1)$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,当 θ 增大时,直线的斜率 k 也增大;

$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,当 θ 增大时,斜率 k 也增大.

(2)不能,因为 $k=\tan\theta\left(\theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$,如图,$k$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$和$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上分别递增,但其图像是不连续的,所以不能说直线的倾斜角增大时斜率也增大.



2. 解析　(1)存在，$k=0$，$\alpha=0°$.

(2)存在，$k=-\sqrt{3}$，$\alpha=120°$.

(3)存在，$k=\dfrac{3-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}+3}=1$，$\alpha=45°$.

(4)直线的斜率不存在，$\alpha=90°$.

3. 解析　$k_1=-1$，

$\therefore \alpha_1=135°$，

$\therefore \alpha_2=\alpha_1-30°=105°$，

$\therefore k_2=\tan 105°=-2-\sqrt{3}$.

4. 解析　由题意得 $k_{AB}=\dfrac{a+1-(-1)}{2-a}=3$，

$\therefore a=1$.

5. 解析　$\because |k|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore k=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore \alpha=30°$或$\alpha=150°$.

2.2.2　直线的方程

练习 A

1. 解析　A、C 在直线上，B 不在直线上.

2. 解析　将两点分别代入，得 $1=-3a+1$，$b=-3\times(-1)+1=4$，

$\therefore a=0$，$b=4$.

3. 解析　(1)$y-5=4(x-2)$.

(2)$y-2=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$.

4. 解析　(1)$y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-2$. (2)$y=-x+3$.

5. 解析　(1)l_1：$y=-2x-1$. (2)$y=-1$. (3)$x=1$.

6. 解析　(1)$y=-\dfrac{4}{3}x-2$. (2)$y=-\dfrac{2}{3}x+2$.

7. 解析　(1)$\begin{cases}k=1,\\ b=3.\end{cases}$ (2)$\begin{cases}k=\sqrt{3},\\ b=-2\sqrt{3}-4.\end{cases}$

(3)$\begin{cases}k=-4,\\ b=3.\end{cases}$

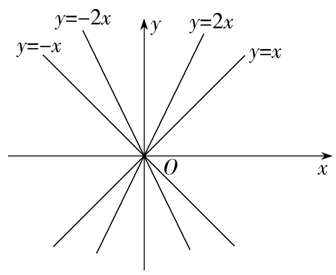
练习 B

1. 解析　(1)真. (2)真. (3)真.

2. 解析　直线 l_2 的倾斜角为 120°.

3. 解析　不是直线方程，$\because x\neq3$，$\therefore$ 取不到点(3,2).

4. 解析　如图. 斜率分别为 k 和 $-k$ 的两条直线的倾斜角互补.



5. 解析　(1)$k=-2$，$\therefore l$：$y+2=-2(x+1)$，即 l：$y=-2x-4$.

(2)$k=\dfrac{v}{u}$，$\therefore l$：$y-y_0=\dfrac{v}{u}(x-x_0)$，

即 l：$y=\dfrac{v}{u}x-\dfrac{v}{u}x_0+y_0$.

6. 解析　(1)$k=3$，$\therefore l$：$y-3=3(x-1)$，即 l：$y=3x$.

(2)$k=-\dfrac{u}{v}$，$\therefore l$：$y-y_0=-\dfrac{u}{v}(x-x_0)$，即 $y=-\dfrac{u}{v}x+\dfrac{u}{v}x_0+y_0$.

2.2.3　两条直线的位置关系

练习 A

1. 解析　(1)平行. (2)平行. (3)平行. (4)不平行.

2. 解析　(1)不相交.

(2)相交. 交点$\left(-\dfrac{5}{4},\dfrac{1}{4}\right)$.

3. 解析　(1)$x-3y+10=0$. (2)$x+5y+22=0$. (3)$2x+y-7=0$.

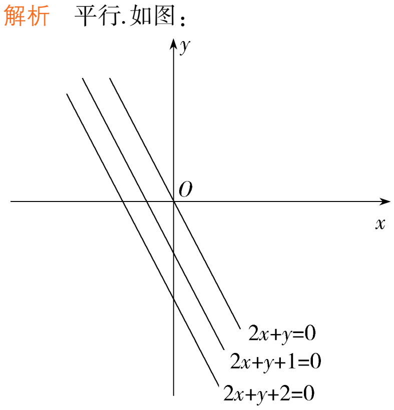
4. 解析　(1)垂直. (2)不垂直.

5. 解析　(1)$5x-y-23=0$. (2)$x-y-8=0$. (3)$x-y+1=0$.

练习 B

1. 解析　易知 $2(1-a)-3=0$，$\therefore a=-\dfrac{1}{2}$.

2. 解析　平行. 如图：



3. 解析　易知 $a\neq8$. 设交点为 P，

联立 $\begin{cases}2x+ay-1=0,\\ x+4y-2=0\end{cases}\Rightarrow P\left(\dfrac{4-2a}{8-a},\dfrac{3}{8-a}\right)$，

$\because P$ 在第一象限，$\therefore \begin{cases}\dfrac{4-2a}{8-a}>0,\\ \dfrac{3}{8-a}>0,\end{cases}$

$\therefore a\in(-\infty,2)$.

4. 解析　$\begin{cases}2x+y-8=0,\\ x-2y+1=0\end{cases}\Rightarrow$交点为(3,2)，

$\therefore$ 所求直线方程为 $4x-3y-6=0$.

5. 解析　$\because$ 两直线垂直，$\therefore a\times2+2\times(-3)=0$，$\therefore a=3$.

6. 解析　$\because k_{AB}=-1$，$\therefore$ 所求直线的斜率 $k=1$. 又$\because$ 所求直线过 $C(1,5)$，

$\therefore$ 所求直线方程为 $y-5=x-1$，即 $x-y+4=0$.

2.2.4　点到直线的距离

练习 A

1. 解析　(1)$d=\dfrac{|10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$. (2)$d=\dfrac{|2-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.

2. 解析　$d=\dfrac{|m+n-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=0$，$\therefore m+n=1$.

3. 解析　$d=\dfrac{|5-(-8)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$.

4. 解析　$d\in[0,3]$.

练习 B

1. 解析　P 到 $x=a$ 的距离为 $|x_0-a|$，P 到 $y=b$ 的距离为 $|y_0-b|$.

2. 解析　直线方程为 $3x-y+6=0$，$d=\dfrac{|3m-6+6|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=3$，$\therefore m=\pm\sqrt{10}$.

3. 解析　$\dfrac{7\sqrt{13}}{26}$.

4. 解析　$|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$，$l_{AB}$：$2x+y-5=0$，点 C 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|2\times(-1)+0-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{7\sqrt{5}}{5}=\dfrac{7}{2}$.

习题 2-2A

1. 解析　易知 $k_{AB}=\dfrac{7-3}{3-1}=2$，$k_{AC}=\dfrac{9-3}{4-1}=2$，

$\because k_{AB}=k_{AC}$且直线 AB 与直线 AC 有公共点 A，$\therefore A$、B、C 三点共线.

2. 解析　(1)$\alpha=60°$. (2)$\alpha=150°$. (3)$\alpha=90°$. (4)$\alpha=0°$.

3. 解析　(1)$y=2$. (2)$x=-\dfrac{1}{2}$. (3)$9x-2y+6=0$.

4. 解析　(1)$3x-y-13=0$. (2)$3x+y+5=0$.

5. 解析　$k_{AB}=\dfrac{1-0}{3-(-1)}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore l_{AB}$：$y=\dfrac{1}{4}(x+1)$，即 l_{AB}：$x-4y+1=0$.

$k_{BC}=\dfrac{5-1}{0-3}=-\dfrac{4}{3}$，$\therefore l_{BC}$：$y-1=-\dfrac{4}{3}(x-3)$，即 l_{BC}：$4x+3y-15=0$.

$k_{AC}=\dfrac{5-0}{0-(-1)}=5$，$\therefore l_{AC}$：$y=5(x+1)$，即

$l_{AC}:5x-y+5=0$.

6. 解析　(1)相交,交点(3,5).(2)相交,交点(3,0).

7. 解析　(1)$d=\dfrac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$.

(2)$d=\dfrac{|1-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

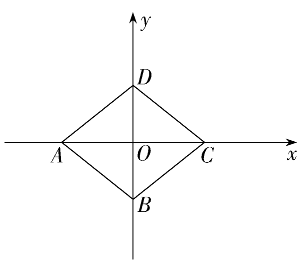
(3)$d=\dfrac{|3|}{\sqrt{9+1}}=\dfrac{3}{10}\sqrt{10}$.

(4)$d=\dfrac{|2-7|}{\sqrt{0^2+1^2}}=5$.

8. 解析　设所求点的坐标为$(0,b)$,则 $5=\dfrac{|0+4b+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}$,∴ $4b+5=25$ 或 $4b+5=-25$,∴ $b=5$ 或 $b=-\dfrac{15}{2}$,

∴ 所求点的坐标为$(0,5)$或$\left(0,-\dfrac{15}{2}\right)$.

9. 解析　如图,$AC=8$,$BD=6$,



∴ $A(-4,0)$,$B(0,-3)$,$C(4,0)$,$D(0,3)$,

∴ $l_{AB}:3x+4y+12=0$,

$l_{BC}:3x-4y-12=0$,

$l_{DC}:3x+4y-12=0$,

$l_{AD}:3x-4y+12=0$.

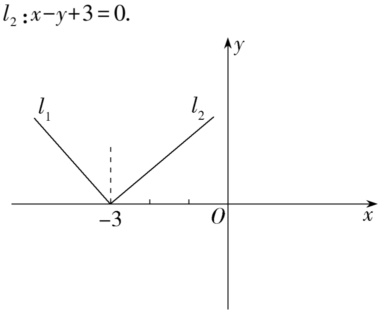
10. 解析　直线 $3x-4y-5=0$ 关于 x 轴对称的直线方程为 $3x+4y-5=0$,

关于 y 轴对称的直线方程为 $3x+4y+5=0$.

11. 解析　$A(1,3)$关于 $l:y=x-3$ 的对称点为 $B(6,-2)$,点 B 到 l 的距离 $d=\dfrac{|6+2-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

12. 解析　如图,$l_1:x+y+3=0$,

$l_2:x-y+3=0$.



习题 2-2B

1. 解析　(1)$\alpha=0°$.(2)$\alpha=90°$.(3)$k=\dfrac{b+c-(c+a)}{b-a}=1$,∴ $\alpha=45°$.

2. 解析　∵ A,B,C 三点共线,∴ 直线 AC、BC 的斜率存在,且 $k_{AC}=k_{BC}$,

∵ $k_{AC}=\dfrac{2-a}{-1+2}=2-a$,$k_{BC}=\dfrac{3-2}{a+1+1}=\dfrac{1}{a+2}$,

∴ $2-a=\dfrac{1}{a+2}$,∴ $a=\pm\sqrt{3}$.

3. 解析　都过点$(-1,1)$.

4. 解析　直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 的倾斜角为 $30°$,则 l 的倾斜角为 $60°$,∴ $k_l=\sqrt{3}$,

∴ $l:y+3=\sqrt{3}(x-2)$,

∴ $l:\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}-3=0$.

5. 解析　AB 中点坐标为$(-1,-1)$,$k_{AB}=\dfrac{2+4}{-3-1}=-\dfrac{3}{2}$,∴ 所求直线斜率 $k=\dfrac{2}{3}$,

∴ 所求方程为 $y+1=\dfrac{2}{3}(x+1)$,即 $2x-3y-1=0$.

6. 解析　设直线为 $y=kx$ 或 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$,

∵ 直线过 $A(3,2)$,

∴ $l:y=\dfrac{2}{3}x$ 或 $x+y-5=0$.

7. 解析　$k_{AB}=\dfrac{2-1}{-1-2}=-\dfrac{1}{3}$,$k_{BC}=\dfrac{4-1}{0-2}=-\dfrac{3}{2}$,$k_{AC}=\dfrac{4-2}{0-(-1)}=2$,

∴ 直线 AB 边上的高所在直线方程为 $3x-y+4=0$,

直线 BC 边上的高所在直线方程为 $y-2=\dfrac{2}{3}(x+1)$,即 $2x-3y+8=0$,

直线 AC 边上的高所在直线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-2)$,即 $x+2y-4=0$.

8. 解析　∵ $l_1\perp l_2$,∴ $(m+2)\times3+[-(m-2)]\times m=0$,∴ $m=-1$ 或 $m=6$.

9. 解析　$d=\sqrt{5}=\dfrac{|c-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|c-2|}{\sqrt{5}}$,

∴ $c=7$ 或 $c=-3$.

10. 解析　(1)$C=0$.(2)A,B 均不为 0.(3)$A=0$,且 $C\neq0$.(4)$B=0$,且 $C\neq0$.(5)$B=0$.(6)$A=0$.

11. 解析　是.

12. 解析　(1)$k=2$,∴ $l:y+5=2(x-3)$,即 $l:2x-y-11=0$.

(2)$k=-\dfrac{4}{3}$,∴ $l:y-5=-\dfrac{4}{3}x$,即 $l:4x+3y-15=0$.

13. 解析　(1)$k=\dfrac{3}{4}$,∴ $l:y-2=\dfrac{3}{4}(x-1)$,即 $l:3x-4y+5=0$.

(2)$k=-\dfrac{3}{4}$,∴ $l:y-2=-\dfrac{3}{4}(x+1)$,即 $l:3x+4y-5=0$.

习题 2-2C

1. 解析　设 l_2 与 $l_1:x-3y-5=0$ 平行,且 $l_2:x-3y+c_1=0(c_1\neq-5)$.∵ G 到 l_1 的距离等于 G 到 l_2 的距离,

∴ $d=\dfrac{|-1-5|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{|-1+c_1|}{\sqrt{1+9}}$,∴ $c_1=7$,

∴ $l_2:x-3y+7=0$.

设 l_3 与 l_1 垂直,且 $l_3:3x+y+c_2=0$,同理,$d=\dfrac{|-3+c_2|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{|-1-5|}{\sqrt{1+9}}$,

∴ $c_2=-3$ 或 $c_2=9$,∴ $l_3:3x+y-3=0$ 或 $3x+y+9=0$.

综上,这个正方形其他三条边所在直线的方程分别为 $x-3y+7=0$,$3x+y-3=0$,$3x+y+9=0$.

2. 解析　由题知,l 的斜率存在,设 $l:y-1=k(x-2)$,∴ $l:kx-y-2k+1=0$.

∵ A,B 到 l 的距离相等,

∴ $\dfrac{|2k-3-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{|4k+5-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$,

∴ $k=-2$ 或 $k=-4$,∴ $l:2x+y-5=0$ 或 $4x+y-9=0$.

3. 解析　$(0,4)$.

2.3　圆及其方程

2.3.1　圆的标准方程

练习 A

1. 解析　(1)$x^2+y^2=4$.(2)$x^2+(y-1)^2=4$.(3)$(x+2)^2+(y-1)^2=3$.

2. 解析　(1)$C(0,0)$,$r=\sqrt{5}$.

(2)$C(3,0)$,$r=2$.

(3)$C(0,-1)$,$r=\sqrt{2}$.

(4)$C(-2,1)$,$r=\sqrt{3}$.

3. 解析　∵ $1^2+1^2<4$,∴ A 在圆内;

∵ $1^2+3=4$,∴ B 在圆上;

∵ $1^2+2^2=5>4$,∴ C 在圆外.

4. 解析　∵ 点 $C(3,4)$ 到 $O(0,0)$ 距离 $|CO|=5=r$,∴ 圆的方程:$(x-3)^2+(y-4)^2=25$.

5. 解析　$x^2+y^2=r^2$.

练习 B

1. 解析　(1)AB 中点记为 C,则 $C(3,6)$ 为圆心,$r=\dfrac{1}{2}|AB|=\sqrt{10}$,∴ 圆 $C:(x-3)^2+(y-6)^2=10$.

(2)设 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=1$.将点$(0,1)$和$(0,3)$代入 C,得 $a=0$,$b=2$.

∴ 圆 $C:x^2+(y-2)^2=1$.

2. 解析　设圆心 $C(a,-a)$.设 $C:(x-a)^2+(y+a)^2=r^2(r>0)$,将 $A(1,0)$,$B(0,1)$代入 C,得 $a=0$,$r=1$,∴ 圆 $C:x^2+y^2=1$ 即为所求.

3. 解析　圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 中,$C(2,3)$为圆心,$r=1$.

$|PC|=\sqrt{(2+1)^2+(3+1)^2}=5$,
$\therefore |PQ|$ 的最大值为 $|PC|+r=6$.

2.3.2 圆的一般方程

练习 A

1. 解析 (1)圆心为 $(3,0)$,$r=3$.(2)圆心为 $(1,-2)$,$r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

2. 解析 (1)不是圆的方程,圆的半径 $r>0$,它表示原点.
(2)圆心 $(1,-2)$,$\sqrt{11}$ 为半径.
(3)圆心 $(1,1)$,半径 $r=\sqrt{5}$.

3. 解析 将 $A(0,0)$ 代入圆的方程得 $-4<0$,$\therefore A$ 在圆内;将 $B(-1,5)$ 代入圆的方程,得 $1+25-2-20-4=0$,$\therefore B$ 在圆上;将 $C(1,-2)$ 代入圆的方程,得 $1+4+2+8-4>0$,$\therefore C$ 在圆外.

练习 B

1. 解析 原方程可化为 $(x^2+2ax+a^2)+y^2=a^2+b^2$,当 $a=b=0$ 时,$x^2+y^2=0$,不是圆的方程,它表示原点;
当 a,b 不同时为零时,表示圆心为 $(-a,0)$,半径为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 的圆.

2. 解析 $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{a}{2}\right)^2=5+\dfrac{a^2}{4}=9$,
$\therefore a=\pm4$.

3. 解析 $\left(x+\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{a}{4}\right)^2=\dfrac{9+a^2}{16}$,
$\therefore$ 圆心 $\left(-\dfrac{3}{4},\dfrac{a}{4}\right)$,半径为 $\dfrac{\sqrt{a^2+9}}{4}$.

4. 解析 $\because (0,0)$ 不在圆的内部,$\therefore$ 将 $(0,0)$ 代入圆的方程,得 $a-1\geqslant0$,$\therefore a\geqslant1$.

5. 解析 设圆 $M:x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,将 A,B,C 代入 M 得
$\begin{cases}F=0,\\4-2D+F=0,\\4+2E+F=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}F=0,\\D=2,\\E=-2,\end{cases}$ $\therefore$ 圆 $M:x^2+y^2+2x-2y=0$.

2.3.3 直线与圆的位置关系

练习 A

1. 解析 (1) $d=\dfrac{|2\times1-2-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$.(2)因为 $d=\sqrt{5}$,$r=\sqrt{6}$,$d<r$,所以直线与圆相交.

2. 解析 因为圆心到直线的距离 $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{13}$,所以直线与圆相交. 由 $\begin{cases}x-y-1=0,\\x^2+y^2=13,\end{cases}$ 可得交点为 $(3,2)$ 和 $(-2,-3)$.

3. 解析 (1)因为圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|4\times4-3\times(-1)+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5=r$,所以直线与圆相切.(2)因为圆心到直线的距离 $d=\dfrac{|2\times2-0+5|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}>r=1$,所以直线与圆相离.

4. 解析 $C(0,0)$,$r=\dfrac{|-1|}{\sqrt{16+4}}=\dfrac{1}{\sqrt{20}}$,
$\therefore C:x^2+y^2=\dfrac{1}{20}$.

5. 解析 $l:mx-y+4=0$,$C(0,0)$,$r=2=\dfrac{|4|}{\sqrt{m^2+1}}$,$\therefore m=\pm\sqrt{3}$.

练习 B

1. 解析 (1)易知所求切线的斜率存在. 设 $l:y-1=k(x+1)$,$\therefore kx-y+k+1=0$,$r=\sqrt{2}=\dfrac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$,
$\therefore k=1$,$\therefore l:x-y+2=0$.
(2)证明:假设所求切线的斜率存在.设 $l:y-y_0=k(x-x_0)$ 为圆的切线,$\therefore l:kx-y-kx_0+y_0=0$.
圆心 $(0,0)$ 到 l 的距离 $d=r=\dfrac{|-kx_0+y_0|}{\sqrt{1+k^2}}$,$\therefore (ky_0+x_0)^2=0$,
$\therefore k=-\dfrac{x_0}{y_0}$,代入 l 得 $yy_0-y_0^2=-x_0x+x_0^2$,
$\therefore x_0x+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$.
易证明当斜率不存在时也成立.

2. 解析 把 $y=x-C$ 代入圆 $x^2+y^2=4$,得 $2x^2-2Cx+C^2-4=0$,$\Delta=4C^2-8(C^2-4)=32-4C^2$. 当 $\Delta>0$,即 $-2\sqrt{2}<C<2\sqrt{2}$ 时,有两个公共点;当 $\Delta=0$,即 $C=\pm2\sqrt{2}$ 时,有一个公共点;当 $\Delta<0$,即 $C>2\sqrt{2}$ 或 $C<-2\sqrt{2}$ 时,无公共点.

3. 解析 设所求直线方程为 $y=2x+b$,代入 $x^2+y^2-2y-4=0$,整理,得 $5x^2+4bx-4x+b^2-2b-4=0$. 由 $\Delta=0$,得 $(4b-4)^2-20(b^2-2b-4)=0$,所以 $b^2-2b-24=0$,解得 $b=6$ 或 $b=-4$. 故所求直线方程为 $y=2x+6$ 或 $y=2x-4$.

4. 解析 $k_{AB}=1$,$C:(x-2)^2+(y-1)^2=5-m$,$\therefore C(2,1)$,$r=\sqrt{5-m}$.
(1)线段 AB 的垂直平分线方程为 $l:y-1=-(x-2)$,$\therefore l:x+y-3=0$.
(2) C 到 l_{AB} 的距离 $d=\dfrac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$,
$\therefore r^2=2+2=5-m$,$\therefore m=1$.
(3) $C:(x-2)^2+(y-1)^2=4$,易知 P 在圆外. ①当所求切线的斜率存在时,设过 P 的圆 C 的切线方程为 $l:y-4=k(x-4)$,$\therefore l:kx-y-4k+4=0$.
$C(2,1)$ 到 l 的距离 $d=r=2=\dfrac{|2k-1-4k+4|}{\sqrt{k^2+1}}$,$\therefore k=\dfrac{5}{12}$,
$\therefore l:5x-12y+28=0$.
②当所求切线的斜率不存在时,切线方程为 $x=4$.
综上,所求切线方程为 $x=4$ 或 $5x-12y+28=0$.

5. 解析 圆心 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$ 关于 $x-y+1=0$ 对称的点为 $\left(-2,\dfrac{3}{2}\right)$,
$\therefore$ 对称圆的方程为 $(x+2)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{5}{4}$.

2.3.4 圆与圆的位置关系

练习 A

1. 解析 由 $\begin{cases}x^2+y^2-2x-3=0,\\x^2+y^2-4x+2y+3=0,\end{cases}$ 得交点坐标为 $(1,-2)$,$(3,0)$.

2. 解析 (1)因为圆心分别为 $C_1(2,3)$,$C_2(-6,-3)$,半径分别为 $r_1=2$,$r_2=8$,所以圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{(2+6)^2+(3+3)^2}=10=r_1+r_2$,所以两圆外切.(2)因为圆心分别为 $C_1(-1,1)$,$C_2(2,3)$,半径分别为 $r_1=2$,$r_2=4$,所以圆心距 $|C_1C_2|=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$,因为 $r_2-r_1<|C_1C_2|<r_2+r_1$,所以两圆相交.

3. 解析 设圆 $C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=r_1^2$,圆 $C_2:x^2+y^2=1$. $\therefore C_2(0,0)$,$r_2=1$.
$\because C_1$ 与 C_2 外切,$\therefore |C_1C_2|=r_1+r_2$,
$\therefore \sqrt{3^2+4^2}=r_1+1$,$\therefore r_1=4$.
$\therefore C_1:(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

4. 解析 设 $C_1(0,0)$,半径为 r_1,$C(2,0)$,$r=3$.
$\because C_1$ 与 C 内切,$\therefore |CC_1|=|r-r_1|$,$\therefore 2=|3-r_1|$,$\therefore r_1=5$ 或 $r_1=1$,
$\therefore x^2+y^2=25$ 或 $x^2+y^2=1$ 为所求.

5. 解析 $C_1(0,0)$,$r_1=1$,$C_2(-a,-a)$,$r_2=1$,$\because C_1$ 与 C_2 外切,$\therefore |C_1C_2|=r_1+r_2$,
$\therefore |C_1C_2|=\sqrt{2}|a|=2$,$\therefore a=\pm\sqrt{2}$.

练习 B

1. 解析 $C_1:x^2+y^2+4x-6y+12=0$,
$\therefore C_1(-2,3)$,$r_1=1$,
$C_2:x^2+y^2-2x-14y+k=0$,$\therefore C_2(1,7)$,$r_2=\sqrt{50-k}>0$,$\therefore k<50$,
$|C_1C_2|=\sqrt{(1+2)^2+(7-3)^2}=5$.
(1) C_1 与 C_2 外离,$\therefore |C_1C_2|>r_1+r_2$,$\therefore 5>1+\sqrt{50-k}$,$\therefore 34<k<50$.
(2) C_1 与 C_2 外切,$\therefore |C_1C_2|=r_1+r_2$,
$\therefore 5=1+\sqrt{50-k}$,
$\therefore k=34$.
(3) C_1 与 C_2 相交,$\therefore |r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$,$\therefore |1-\sqrt{50-k}|<5<1+\sqrt{50-k}$,

$\therefore 14<k<34.$

(4) C_1 与 C_2 内切，$\therefore |C_1C_2|=|r_1-r_2|$，

$\therefore 5=|1-\sqrt{50-k}|$，$\therefore k=14.$

(5) C_1 与 C_2 内含，$\therefore |C_1C_2|<|r_1-r_2|$，

$\therefore |1-\sqrt{50-k}|>5$，$\therefore k<14.$

2. 解析　因为圆心分别为 $C_1(0,0)$，$C_2(-4,a)$，半径分别为 $r_1=1,r_2=5$，所以 $|C_1C_2|=\sqrt{16+a^2}$. ①若两圆外切，则 $|C_1C_2|=r_1+r_2$，即 $\sqrt{16+a^2}=1+5$，解得 $a=\pm2\sqrt{5}$. ②若两圆内切，则 $|C_1C_2|=r_2-r_1$，即 $\sqrt{4^2+a^2}=5-1$，解得 $a=0$.

综上，$a=\pm5$ 或 $a=0$.

3. 解析　$C_1(0,0)$，$C_2(2,0)$，$\therefore l_{C_1C_2}:y=0$.

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=2,\\x^2-4x+y^2=4,\end{cases}$ 整理得 $l_{AB}:x=-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \begin{cases}l_{C_1C_2}:y=0,\\l_{AB}:x=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore AB$ 中点坐标为 $\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$.

4. 解析　联立 $\begin{cases}x^2+y^2+6x=0,\\x^2+y^2+6y=0,\end{cases}$ 整理得公共弦所在直线 l 的方程为 $x-y=0$，C_1 的圆心为 $(-3,0)$，其到 l 的距离 $d=\dfrac{|-3-0|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，圆 C_1 的半径为 3，$\therefore |AB|=2\sqrt{9-\dfrac{9}{2}}=3\sqrt{2}$.

习题 2-3A

1. 解析　$C(1,0)$，$r=\dfrac{1}{2}$，$|CO|=1$. P 到原点的距离的最大值为 $|CO|+r=\dfrac{3}{2}$，P 到原点的距离的最小值为 $|CO|-r=\dfrac{1}{2}$.

2. 解析　$(x^2+2x+1)+(y^2-2ay+a^2)=5+a^2$，$\therefore (x+1)^2+(y-a)^2=5+a^2$，

$\therefore r^2=5+a^2$，$\therefore a=0$ 时，r 取得最小值，为 $\sqrt{5}$.

3. 解析　由圆 $(x-4)^2+(y+1)^2=25$ 得圆心坐标为 $(4,-1)$，$r=5$，因为圆心到直线 $4x-3y+6=0$ 的距离 $d=\dfrac{|16+3+6|}{5}=5$，所以 $d=r$，所以直线与圆相切.

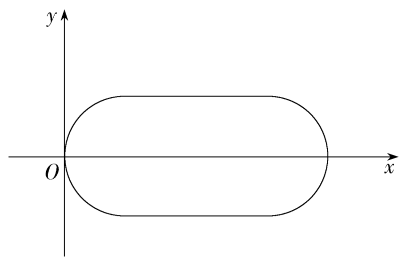
4. 解析　$C(3,0)$ 到 $l:x-y+1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，圆的半径 $r=1$.

$\therefore P$ 到 $l:x-y+1=0$ 距离的最大值为 $2\sqrt{2}+1$，最小值为 $2\sqrt{2}-1$.

5. 解析　$3x-4y+12=0$.

6. 解析　(1) $(400-\pi\times36\times2)\div2=(200-36\pi)$ m.

(2) 建立如图所示的平面直角坐标系，则当 $0\leqslant x\leqslant36$ 时，$f(x)=\sqrt{-(x-36)^2+36^2}=\sqrt{-x^2+72x}$；当 $36<x<236-36\pi$ 时，$f(x)=36$；当 $236-36\pi<x<272-36\pi$ 时，$f(x)=\sqrt{-(x-236+36\pi)^2+36^2}$



习题 2-3B

1. 解析　设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$，将 $(8,1)$ 代入，得 $(8-a)^2+(1-a)^2=a^2$，解得 $a=13$ 或 $a=5$. 故所求圆的方程为 $(x-13)^2+(y-13)^2=169$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

2. 解析　易知切线的斜率存在. 设切线方程为 $y-8=k(x-6)$，即 $kx-y+8-6k=0$，因为直线与圆相切，所以 $\dfrac{|3k-4+8-6k|}{\sqrt{k^2+1}}=5$，所以 $k=-\dfrac{3}{4}$，所以所求切线方程为 $3x+4y-50=0$.

3. 解析　$C_1:(x-a)^2+(y-1)^2=16$，$C_1(a,1)$，$r_1=4$；

$C_2:(x-2a)^2+(y-1)^2=1$，$C_2(2a,1)$，$r_2=1$，$|C_1C_2|=\sqrt{(2a-a)^2+(1-1)^2}=\sqrt{a^2}=|a|=a(a>0)$.

(1) 两圆外离时，$|C_1C_2|>r_1+r_2$，$\therefore a>5$.

(2) 两圆外切时，$|C_1C_2|=r_1+r_2$，$\therefore a=5$.

(3) 两圆相交时，$|r_1-r_2|<|C_1C_2|<r_1+r_2$，$\therefore 3<a<5$.

(4) 两圆内切时，$|C_1C_2|=|r_1-r_2|$，$\therefore a=3$.

(5) 两圆内含时，$|C_1C_2|<|r_1-r_2|$，$\therefore 0<a<3$.

4. 解析　设圆心为 $(0,r)$，则半径为 r，

$\therefore (-2-0)^2+(2-r)^2=r^2$，$\therefore r=2$.

$\therefore$ 圆的方程：$x^2+(y-2)^2=4$.

5. 解析　圆心 $C(2,0)$，$A(1,1)$，$k_{AC}=\dfrac{1-0}{1-2}=-1$，$\therefore$ 所求直线的斜率 $k=1$，又其过点 $A(1,1)$，

$\therefore x-y=0$ 即为所求.

6. 证明　设 $P(x,y)$ 为圆上一动点，则 $|PA|^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$，$|PB|^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$，$|AB|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$. 因为 $|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$，所以代入，化简得 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

7. 解析　设圆心为 $(3t,t)$，半径为 $r=|3t|$，圆心到 $y=x$ 的距离 $d=\dfrac{|3t-t|}{\sqrt{2}}=|\sqrt{2}t|$，

$\therefore \left(\dfrac{2\sqrt{7}}{2}\right)^2=r^2-d^2$，$\therefore 9t^2-2t^2-7=0$，

$\therefore t=\pm1$.

$\therefore$ 圆心为 $(3,1)$，$r=3$ 或圆心为 $(-3,-1)$，半径为 3，

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$ 或 $(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

习题 2-3C

1. 解析　设 $BC=x$，$AC=2x$，易得 $1<x<3$，

则 $\cos B=\dfrac{9-3x^2}{6x}$，

$\sin B=\sqrt{1-\dfrac{9x^4-54x^2+81}{36x^2}}$，

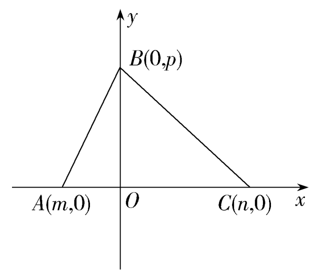
$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot|AB|\cdot\sin B$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{-9x^4+90x^2-81}$

$=\dfrac{1}{4}\sqrt{-9(x^2-5)^2+144}$，

$\therefore$ 当 $x=\sqrt{5}$ 时，$S_{\triangle ABC}$ 有最大值，为 3.

2. 证明　如图：



设 $\triangle ABC$ 的外接圆的一般方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则圆心的横坐标为 $-\dfrac{D}{2}=\dfrac{m+n}{2}$，即 $D=-m-n$，

$\therefore x^2+y^2+(-m-n)x+Ey+F=0$.

将 $B(0,p)$，$C(n,0)$ 代入可得

$\begin{cases}p^2+Ep+F=0,\\n^2+(-m-n)n+F=0,\end{cases}$

$\therefore F=mn$，$E=-p-\dfrac{mn}{p}$，

$\therefore x^2+y^2-(m+n)x+\left(-p-\dfrac{mn}{p}\right)y+mn=0$.

$\therefore R^2=\left(-\dfrac{m+n}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{p+\dfrac{mn}{p}}{2}\right)^2-mn$

$=\dfrac{m^2+n^2+p^2+\dfrac{m^2n^2}{p^2}}{4}$，

又 $S=\dfrac{1}{2}(n-m)\cdot p$，

$\therefore 16R^2S^2=16\cdot\dfrac{m^2+n^2+p^2+\dfrac{m^2n^2}{p^2}}{4}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot(n-m)^2\cdot p^2=(n-m)^2\cdot$

$p^2\left(m^2+n^2+p^2+\frac{m^2n^2}{p^2}\right)$

$=(n-m)^2(p^2m^2+p^2n^2+p^4+m^2n^2)$

$=(n-m)^2(p^2+n^2)(m^2+p^2)$,

∵ $a=\sqrt{p^2+n^2}$, $b=n-m$, $c=\sqrt{m^2+p^2}$,

∴ $a^2b^2c^2=(n-m)^2(p^2+n^2)(m^2+p^2)$,

∴ $16R^2S^2=a^2b^2c^2$,

∴ $4RS=abc$, ∴ $R=\frac{abc}{4S}$.

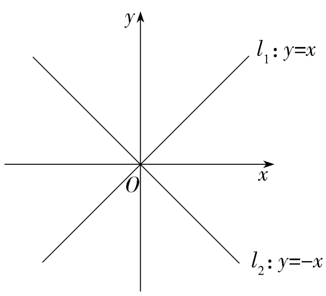
2.4 曲线与方程

习题 2-4A

1. 解析 P 在曲线上, Q 不在曲线上.

2. 解析 $r^2=5$.

3. 解析 不是,因为到两坐标轴距离相等的点的轨迹是两条直线 l_1 和 l_2(如图所示),其中 $l_1: y=x$, $l_2: y=-x$,直线 l_1 上所有点的坐标都是方程 $y=x$ 的解,但是直线 l_2 上的点(原点除外)的坐标都不是方程 $y=x$ 的解,因此它不是要求的轨迹方程.



4. 解析 由直线 $2x+5y-15=0$ 和曲线 $y=-\frac{10}{x}$ 联立,得 $\begin{cases}2x+5y-15=0,\\ y=-\frac{10}{x},\end{cases}$ 消去 y 并整理,得 $2x^2-15x-50=0$,解得 $x=10$ 或 $x=-\frac{5}{2}$,分别代入直线方程得 $y=-1$ 或 $y=4$.

∴ 直线与曲线的交点坐标为 $(10,-1)$ 或 $\left(-\frac{5}{2},4\right)$.

5. 解析 ∵ AB 中点坐标为 $(1,3)$, $k_{AB}=\frac{-1-7}{-1-3}=2$, ∴ 线段 AB 的垂直平分线的斜率为 $k=-\frac{1}{2}$,

∴ 线段 AB 的垂直平分线方程是 $y-3=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y-7=0$.

6. 解析 $x=4$ 或 $x=-4$.

习题 2-4B

1. 解析 设 $M(x,y)$ 是曲线上的任意一点,则 M 满足条件 $\frac{|MA|}{|MB|}=\sqrt{2}$, ∴ $|MA|=\sqrt{2}|MB|$,

∴ $\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$, ∴ $x^2+y^2-14x-4y+21=0$,

即满足题意的点的轨迹方程为 $(x-7)^2+(y-2)^2=32$.

2. 解析 以线段 AB 所在直线为 x 轴,线段 AB 的垂直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系,则 $A(-3,0)$, $B(3,0)$. 设 $M(x,y)$,则 $\overrightarrow{MA}=(-3-x,-y)$, $\overrightarrow{MB}=(3-x,-y)$, ∴ $\overrightarrow{MA}\cdot(2\overrightarrow{MB})=2(-3-x)(3-x)+2y^2=-1$,化简整理得 $x^2+y^2=\frac{17}{2}$,

∴ 点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2=\frac{17}{2}$.

3. 解析 设 $M(x,y)$. 由题意得 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2\sqrt{(x-b)^2+y^2}$,

∴ $3x^2+(2a-8b)x+3y^2+4b^2-a^2=0$,即 $\left(x+\frac{a-4b}{3}\right)^2+y^2=\frac{4(a-b)^2}{9}(a\neq b)$.

∴ M 是圆心为 $\left(\frac{4b-a}{3},0\right)$,半径为 $\frac{2|a-b|}{3}$ 的圆.

4. 解析 设 $M(x,y)$,则点 M 到 x 轴的距离为 $d=|y|$, $|MF|=\sqrt{x^2+(y-4)^2}$,点 M 的集合 $P=\{M\,|\,|MF|=d\}$,

∴ $\sqrt{x^2+(y-4)^2}=|y|$,两边平方,得 $x^2+y^2-8y+16=y^2$,即 $x^2=8y-16$, ∴ 方程的曲线关于 y 轴对称, $x^2=8y-16\geqslant 0$, ∴ $y\geqslant 2$, ∴ 曲线在直线 $y=2$ 的非下方.

5. 解析 设顶点 A 的坐标为 (x,y), ∵ $AC\perp AB$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,又 $\overrightarrow{AC}=(3-x,2-y)$, $\overrightarrow{AB}=(-2-x,1-y)$, ∴ $(3-x)\cdot(-2-x)+(2-y)(1-y)=0$,即 $x^2+y^2-x-3y-4=0$. 又点 A 与 BC 不共线, ∴ $(-2,1)$, $(3,2)$ 两点应剔除, ∴ 直角顶点 A 的轨迹方程为 $x^2+y^2-x-3y-4=0$(除去 $(-2,1)$, $(3,2)$ 两点).

6. 解析 轨迹方程为 $x^2+y^2=k$,表示以 $(0,0)$ 为圆心, $\sqrt{k}$ 为半径的圆.(以两条互相垂直的直线为坐标轴,建立平面直角坐标系)

7. 解析 易知所求圆的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=9$.

习题 2-4C

1. 证明 两圆 C_1, C_2 的交点坐标同时满足方程 $x^2+y^2+6x-16=0$ 和 $x^2+y^2-4x-5=0$,

∴ 满足 $x^2+y^2+6x-16+\lambda(x^2+y^2-4x-5)=0(\lambda\neq-1)$,变形,得 $(1+\lambda)(x^2+y^2)+(6-4\lambda)x-(16+5\lambda)=0$.

∵ $\lambda\neq-1$, ∴ 该式表示圆,所以该式是通过两个已知圆交点的圆的方程.

2. 解析 设 $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $P(x,y)$, $|PA|=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$, $|PB|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$.

(1)存在. 理由如下:

∵ $|PA|+|PB|=6$, ∴ $\sqrt{(x+3)^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2}=6$,化简得 $y=0(-3\leqslant x\leqslant 3)$,

∴ P 的轨迹是线段 AB.

(2)存在. 当 $|PA|-|PB|=6$ 时, P 在以 B 为端点向右的射线上.

(3)存在. 当 $|PB|-|PA|=6$ 时, P 在以 A 为端点向左的射线上.

(4)不存在.

(5)不存在.

3. 解析 设 $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $P(x,y)$.

(1)∵ $|PA|^2+|PB|^2=36$, ∴ $(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=36$, ∴ $x^2+y^2=9$,

∴ P 的轨迹是以 $(0,0)$ 为圆心,3 为半径的圆.

(2)∵ $|PA|^2+|PB|^2=10$, ∴ $(x+3)^2+y^2+(x-3)^2+y^2=10$, ∴ $x^2+y^2=-4$, ∴ P 的轨迹不存在.

2.5 椭圆及其方程

2.5.1 椭圆的标准方程

练习 A

1. 解析 $|PF_1|+|PF_2|=2a=2\sqrt{2}$.

2. 解析 ∵ $|MF_1|+|MF_2|=10$, ∴ M 到 F_2 的距离为 6.

3. 解析 (1) $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. (2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

4. 解析 (1) $(4,0)$, $(-4,0)$.

(2) $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

5. 解析 可添加的条件为①$a=5$;②$b=3$;③椭圆上一点的坐标为 $(5,3)$.

练习 B

1. 解析 (1) $c=5$, $2a=26$, ∴ $a=13$, $b=12$, ∴ 椭圆方程: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

(2) $c=2\sqrt{3}$,设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$,

$a^2=b^2+c^2=b^2+12$,

∴ $\frac{y^2}{b^2+12}+\frac{x^2}{b^2}=1$, ∵ 椭圆过点 $(-\sqrt{6},\sqrt{5})$, ∴ $b^4+b^2-72=0$, ∴ $b^2=8$ 或 $b^2=-9$(舍去),

∴ $a^2=20$, ∴ 椭圆方程: $\frac{y^2}{20}+\frac{x^2}{8}=1$.

2. 解析 $4a$.

3. 解析 易知 $a=3$, $b=2$, ∴ 椭圆标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

4. 解析 椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,其焦点坐标为 $(\pm\sqrt{5},0)$.

又所求椭圆经过点$(3,-2)$，则有 $2a=|PF_1|+|PF_2|=\sqrt{(3-\sqrt5)^2+(-2)^2}+\sqrt{(3+\sqrt5)^2+(-2)^2}=2\sqrt{15}$，

∴ $a=\sqrt{15}$，$c=\sqrt5$，∴ $b^2=a^2-c^2=10$，

∴ 椭圆：$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$ 为所求.

5. 解析　设点 M 的坐标为(x,y)，P 坐标为(x_0,y_0)，∵ M 是线段 PP' 的中点，

∴ 由中点坐标公式得 $x=x_0$，$y=\frac{y_0}{2}$，

即$\begin{cases}x_0=x,① \\ y_0=2y,②\end{cases}$

∵ $P(x_0,y_0)$在圆 $x^2+y^2=4$ 上，

∴ 将①②代入圆的方程得 $x^2+4y^2=4$，

∴ $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，∴ M 点的轨迹是一个椭圆，其方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

2.5.2　椭圆的几何性质

练习 A

1. 解析　(1) $2a=18$，$2b=6$，$F_1(-6\sqrt2,0)$，$F_2(6\sqrt2,0)$，$A_1(-9,0)$，$A_2(9,0)$，$B_1(0,-3)$，$B_2(0,3)$，$e=\frac{2\sqrt2}{3}$.

(2) $2a=10$，$2b=6$，$F_1(0,-4)$，$F_2(0,4)$，$A_1(0,-5)$，$A_2(0,5)$，$B_1(-3,0)$，$B_2(3,0)$，$e=\frac{4}{5}$.

(3) $2a=1$，$2b=\frac{2\sqrt5}{5}$，$F_1\left(-\frac{\sqrt5}{10},0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt5}{10},0\right)$，$A_1\left(-\frac12,0\right)$，$A_2\left(\frac12,0\right)$，$B_1\left(0,-\frac{\sqrt5}{5}\right)$，$B_2\left(0,\frac{\sqrt5}{5}\right)$，$e=\frac{\sqrt5}{5}$.

2. 解析　(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. (2) $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$.

3. 解析　$\begin{cases}a-c=2,\\ a+c=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=8,\\ c=6,\end{cases}$ ∴ $a^2=64$，$b^2=a^2-c^2=64-36=28$，

∴ 椭圆标准方程：$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ 或 $\frac{y^2}{64}+\frac{x^2}{28}=1$.

4. 解析　由 $\triangle FB_1B_2$ 是等边三角形得 $|FB_1|=|B_1B_2|=2b=\frac{|OF|}{\sin 60^\circ}=4\sqrt3$，∴ $a=4\sqrt3$，$b=2\sqrt3$，

∴ $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{12}=1$ 为所求.

练习 B

1. 解析　(1) $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{36}=1$. (2) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.

2. 解析　(1) 无数个，如$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{10}=1$，$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{11}=1$（答案不唯一）. (2) 一个. 设椭圆的方程为$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>b>0)$，由条件得$\begin{cases}a^2-b^2=5,\\ \frac{16}{b^2}+\frac{5}{a^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=25,\\ b^2=20\end{cases}$（负值舍去）.

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$.

3. 解析　∵ P 是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ 上一点，

∴ 设 $P(2\cos\theta,6\sin\theta)$，又 $A(0,5)$，

∴ $|PA|^2=(2\cos\theta-0)^2+(6\sin\theta-5)^2=4\cos^2\theta+36\sin^2\theta-60\sin\theta+25=32\sin^2\theta-60\sin\theta+29=32\left[\sin^2\theta-\frac{15}{8}\sin\theta+\left(\frac{15}{16}\right)^2\right]-32\times\left(\frac{15}{16}\right)^2+29$

$=32\left(\sin\theta-\frac{15}{16}\right)^2+\frac78$，当∴ $\sin\theta=\frac{15}{16}$ 时，$|PA|_{\min}=\sqrt{\frac78}=\frac{\sqrt{14}}{4}$；

当 $\sin\theta=-1$ 时，$|PA|_{\max}=11$.

4. 解析　$\frac{x^2}{\frac{1}{m^2}}+\frac{y^2}{\frac{1}{4m^2}}=1$，∴ $a=\frac1m$，$b=\frac{1}{2m}$，$c^2=\frac{3}{4m^2}$，$c=\frac{\sqrt3}{2m}$，

∴ $F_1\left(-\frac{\sqrt3}{2m},0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt3}{2m},0\right)$，$e=\frac ca=\frac{\sqrt3}{2}$.

5. 解析　设 $M(x,y)$，由题意得$\frac{|MF|}{\left|x-\frac92\right|}=\frac23$，∴ $3\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\left|x-\frac92\right|$，

化简得$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

习题 2-5A

1. 解析　$|AB|=10=2c$，∴ $c=5$，$|PA|+|PB|=14=2a>2c$，∴ $a=7$，

∴ $b^2=a^2-c^2=49-25=24$，∴ C：$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$，是椭圆.

2. 解析　$2a=8$，$2b=5$，$F_1\left(0,-\frac{\sqrt{39}}{2}\right)$，$F_2\left(0,\frac{\sqrt{39}}{2}\right)$，$A_1(0,-4)$，$A_2(0,4)$，$B_1\left(-\frac52,0\right)$，$B_2\left(\frac52,0\right)$.

3. 解析　∵ $a^2=45$，$b^2=20$，∴ $c^2=25$，∴ 以原点为圆心，5 为半径的圆的方程为 $x^2+y^2=25$，联立$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\ \frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x^2=9,\\ y^2=16,\end{cases}$ ∴ P 的坐标为$(-3,-4)$或$(-3,4)$或$(3,-4)$或$(3,4)$.

4. 解析　易得椭圆为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，

则 $A(-2,0)$是直角顶点，易知两直角边的斜率分别是 1 和 −1，不妨设直线 AB 的斜率为 1，

∴ $\begin{cases}l_{AB}:y=x+2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow 3x^2+8x+4=0$，∴ $x=-\frac23$ 或 $x=-2$（舍），

∴ $y=-\frac23+2=\frac43$，

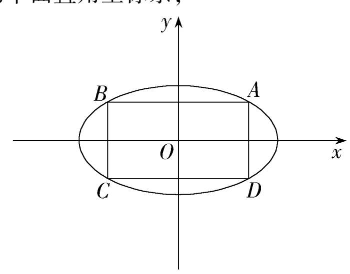
∴ 椭圆交点 $B\left(-\frac23,\frac43\right)$，$|AB|=\sqrt{\left(-2+\frac23\right)^2+\left(0-\frac43\right)^2}=\frac{4\sqrt2}{3}$，

∴ $|BC|=\sqrt2|AB|=\frac83$，∴ 斜边 BC 的长为$\frac83$.

5. 解析　设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1(m>0,n>0,m\neq n)$，将 P,Q 代入得

$\begin{cases}3m+4n=1,\\ 12m+n=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}m=\frac{1}{15},\\ n=\frac15,\end{cases}$ ∴ 所求椭圆方程为$\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{5}=1$.

6. 解析　以椭圆的长轴，短轴各自所在的直线分别为 x 轴和 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系，



∵ 矩形 $ABCD$ 的各顶点都在椭圆上，而矩形是中心对称图形，

∴ 矩形 $ABCD$ 关于原点 O 及 x 轴，y 轴都对称.

已知椭圆长轴长 $2a=100(\mathrm{m})$，短轴长 $2b=60(\mathrm{m})$，

∴ 椭圆方程为$\frac{x^2}{50^2}+\frac{y^2}{30^2}=1$，设 $A(x_0,y_0)$ $(x_0>0,y_0>0)$，

则$\frac{x_0^2}{50^2}+\frac{y_0^2}{30^2}=1$，∴ $y_0^2=\frac{30^2}{50^2}(50^2-x_0^2)$.

由矩形的对称性，得矩形 $ABCD$ 的面积 $S=4x_0y_0$，

∵ $x_0^2y_0^2=x_0^2\times\frac{30^2}{50^2}\times(50^2-x_0^2)$

$=\frac{30^2}{50^2}(-x_0^4+50^2x_0^2)$

$=\frac{30^2}{50^2}\left[-\left(x_0^2-\frac{50^2}{2}\right)^2+\frac{50^4}{4}\right]$，∴ 当 $x_0^2=\frac{50^2}{2}$，$x_0^2y_0^2$ 取得最大值，

∴ $S=4x_0y_0$ 也取得最大值，

此时 $x_0=25\sqrt{2}$，$y_0=15\sqrt{2}$，

矩形 $ABCD$ 的周长为 $4(x_0+y_0)=4\times(25\sqrt{2}+15\sqrt{2})=160\sqrt{2}$(m).

∴ 在椭圆形溜冰场的两侧分别画一条与短轴平行且与短轴相距 $25\sqrt{2}$ m 的直线，这两条直线与椭圆的交点就是所划定的矩形区域的顶点，这个矩形区域的周长为 $160\sqrt{2}$ m(约 226.27 m).

习题 2−5B

1. 解析　$c=2\sqrt{2}$，$4a=12$，∴ $a=3$，$b=1$，

∴ $\frac{x^2}{9}+y^2=1$ 为所求.

2. 解析　∵ $a=3$，$b=\sqrt{5}$，∴ $c=2$，

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}$

$=\frac{36-2|PF_1||PF_2|-16}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{1}{2}$，

∴ $|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{20}{3}$，

∴ $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{20}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

3. 解析　$F(-c,0)$，设 $P(x,y)$.

∵ $y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\cdot b^2$

$=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)(a^2-c^2)$，

∴ $\frac{|PF|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}$

$=\frac{\sqrt{(x+c)^2+\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)(a^2-c^2)}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}$

$=\frac{\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx+a^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{\left|\frac{c}{a}x+a\right|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}$

$=\frac{\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}$

$=\frac{c}{a}=e$，

∴ P 到 F 的距离与 P 到直线 l 的距离之比为 e.

习题 2−5C

1. 解析　设 $M(x,y)$，则 $\frac{|MF|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}$，

∴ $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$，

∴ $(x+c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)^2$，∴ $\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$，∴ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 为所求.

结论：椭圆上的动点 M 到左焦点的距离与它到直线 $l:x=-\frac{a^2}{c}$ 的距离之比为 e.

书 2.5.2 一节例 3 中，$|PF|=e\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$ 也是应用这个结论.

2. 解析　设 A 点坐标为 (x,y)，则 $\frac{y}{x-6}\cdot\frac{y}{x+6}=-\frac{4}{9}\Rightarrow\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1(x\neq\pm6)$，∴ 点 A 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1(x\neq\pm6)$，是去掉长轴两个端点的椭圆.

3. 解析　记 F_2 为椭圆的右焦点，则 $|PF_1|+|PA|=(2a-|PF_2|)+|PA|=2a-(|PF_2|-|PA|)\geqslant2a-|AF_2|=6-\sqrt{2}$(当且仅当 F_2,P,A 共线且点 A 位于点 P，F_2 之间时取等号). $|PF_1|+|PA|=(2a-|PF_2|)+|PA|\leqslant2a+|AF_2|=6+\sqrt{2}$(当且仅当 P,F_2,A 共线且 F_2 位于 A,P 之间时取等号).

2.6　双曲线及其方程

2.6.1　双曲线的标准方程

练习 A

1. 解析　(1)$F_1(0,-6)$，$F_2(0,6)$.(2)16.

2. 解析　(1)$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.(2)$\frac{y^2}{20}-\frac{x^2}{16}=1$.

3. 解析　椭圆的焦点为 $(2\sqrt{3},0)$，$(-2\sqrt{3},0)$，∴ $2m=12$，$m=6$.

4. 解析　∵ $a^2=144$，$b^2=25$，∴ $c^2=a^2+b^2=169$，∴ $a=12$，$b=5$，$c=13$，

∴ 焦点 $F_1(-13,0)$，$F_2(13,0)$，过 F_2 作直线 l 垂直于 x 轴，交双曲线于 A,B，不妨设 A 在第一象限，联立 $\begin{cases}x=13,\\\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1,\end{cases}$ ∴ $y_A=\frac{25}{12}$，∴ $|AF_2|=\frac{25}{12}$，

由双曲线定义得，$|AF_1|-|AF_2|=2a$，

∴ $|AF_1|=24+\frac{25}{12}=\frac{313}{12}$，∴ 交点到右、左焦点的距离分别为 $\frac{25}{12}$，$\frac{313}{12}$.

5. 解析　$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 或 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

练习 B

1. 解析　由题意可得双曲线的顶点为 $(\pm5,0)$，焦点为 $(\pm7,0)$，∴ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

2. 解析　$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{3}{m}}=1$，∴ $c^2=\frac{4}{m}=4$，∴ $m=1$.

3. 解析　设双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，∵ 其经过 $P(4,2)$，$Q(2\sqrt{6},2\sqrt{2})$，

∴ $\begin{cases}\frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1,\\\frac{24}{a^2}-\frac{8}{b^2}=1,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\frac{1}{a^2}=\frac{1}{8},\\\frac{1}{b^2}=4,\end{cases}$ ∴ $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1$ 为所求.

4. 解析　以线段 AB 的中点为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$ 方向为 x 轴的正方向，建立平面直角坐标系 xOy. 由题意可得，$|PB|-|PA|=340\times4=1\ 360$(m)，即 $2a=1\ 360\Rightarrow a=680$，$2c=1\ 400\Rightarrow c=700$，所以 $b^2=27\ 600$，所以方程为 $\frac{x^2}{462\ 400}-\frac{y^2}{27\ 600}=1(x\leqslant-680)$.

2.6.2　双曲线的几何性质

练习 A

1. 解析　∵ $a^2=1$，$b^2=24$，∴ $c^2=25$，$2a=2$，$2b=4\sqrt{6}$，焦点坐标为 $(\pm5,0)$，渐近线方程为 $y=\pm2\sqrt{6}x$.

2. 解析　$|PF|_{\min}=1$.

3. 解析　①若焦点在 x 轴上，则 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，$e^2=1+\frac{b^2}{a^2}=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$，∴ $e=\frac{5}{4}$；

②若焦点在 y 轴上，则 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$，∴ $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，$e^2=1+\frac{16}{9}=\frac{25}{9}$，$e=\frac{5}{3}$. 综上，$e=\frac{5}{4}$ 或 $\frac{5}{3}$.

练习 B

1. 解析　$2a=18$，$2b=6$，$F(0,\pm3\sqrt{10})$，$e=\frac{\sqrt{10}}{3}$，渐近线方程为 $y=\pm3x$.

2. 解析　由焦点坐标得 $c=5$ 且焦点在 x 轴上，由 $3x-4y=0$，可得 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，则 $\begin{cases}a^2+b^2=25,\\\frac{b}{a}=\frac{3}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=4,\\b=3,\end{cases}$ 故双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$，离心率 $e=\frac{5}{4}$.

3. 解析　这些双曲线的共同点是有相同的渐近线.

4. 解析　$2a=6$，∴ $a=3$，∴ $2c=12$，∴ $c=6$，

∴ $b^2=c^2-a^2=36-9=27$，

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 或 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$.

5. 证明　设双曲线的焦点为 $F(c,0)$，渐近线方程为 $bx\pm ay=0$，

$\therefore F$ 到渐近线的距离 $d=\frac{|bc+0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b$.

习题 2-6A

1. 解析　$2c=10,2a=6,\therefore a=3,c=5,b=4$，$\therefore$ 曲线的形状为双曲线.

2. 解析　(1) $2a=\frac{8}{3}$，$2b=4$，$F_1\left(-\frac{2\sqrt{13}}{3},0\right)$，$F_2\left(\frac{2\sqrt{13}}{3},0\right)$，$A_1\left(-\frac{4}{3},0\right)$，$A_2\left(\frac{4}{3},0\right)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{2}x$.

(2) $2a=4,2b=2\sqrt{m}$，$F_1(-\sqrt{4+m},0)$，$F_2(\sqrt{4+m},0)$，$A_1(-2,0)$，$A_2(2,0)$，渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{m}}{2}x$.

3. 解析　双曲线的焦点为 $(\pm\sqrt{10},0)$，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，则 $a^2+b^2=10$，易知 $\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，$\therefore a=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，$b=\frac{3\sqrt{10}}{5}$，$\therefore \frac{5x^2}{32}-\frac{5y^2}{18}=1$.

4. 解析　设双曲线方程为 $9x^2-4y^2=\lambda(\lambda\neq 0)$，又 $F_1(-4,0)$，$\therefore \lambda>0$，$\therefore \frac{x^2}{\frac{\lambda}{9}}-\frac{y^2}{\frac{\lambda}{4}}=1$，$\therefore \frac{\lambda}{9}+\frac{\lambda}{4}=16$，$\therefore \lambda=\frac{16\times 36}{13}$，$\therefore \frac{13x^2}{64}-\frac{13y^2}{144}=1$.

4. 解析　$a=2\sqrt{3}$，$\therefore a^2=12$. 双曲线 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 $(\pm 2\sqrt{5},0)$，$\therefore c^2=20,b^2=8$，$\therefore$ 双曲线标准方程：$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$.

习题 2-6B

1. 解析　(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1$，$y^2-\frac{25x^2}{9}=1$(答案不唯一). (2) $\frac{9y^2}{56}-\frac{25x^2}{56}=1$.

2. 解析　设 $P(x_0,y_0)$. $|PA|=\sqrt{(x_0-3)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-3)^2+3x_0^2-3}=\sqrt{4\left(x_0-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{4}}$，

$\because x_0\geqslant 1$ 或 $x_0\leqslant -1$，$\therefore$ 当 $x_0=1$ 时，$|PA|_{\min}=2$.

3. 解析　设 $M(x,y)$，$\therefore \frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{4}{3}\right|}=\frac{3}{2}$，$\therefore (x-3)^2+y^2=\frac{9}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2$，

$\therefore \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 为所求.

4. 解析　易知 $F(-c,0)$，设 $P(x,y)$，

$$\therefore \frac{|PF|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{\sqrt{(x+c)^2+b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}.$$

5. 解析　$||MF_1|-|MF_2||=2a=6$，$\therefore (|MF_1|-|MF_2|)^2=36$. 又 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=(2c)^2=100$，$\therefore |MF_1||MF_2|=32$，$\therefore S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}\times 32=16$.

习题 2-6C

1. 解析　(1) 设点 M 的坐标为 (x,y)，则 $\frac{y}{x+6}\cdot\frac{y}{x-6}=a$，$\therefore$ 点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36a}=1(x\neq\pm 6)$. (2) 由 (1) 可知轨迹方程为 $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{36a}=1(x\neq\pm 6)$，当 $a>0$ 时，曲线表示焦点在 x 轴上，除去顶点的双曲线；当 $-1<a<0$ 时，曲线表示焦点在 x 轴上，除去 x 轴上的顶点的椭圆；当 $a=-1$ 时，曲线表示以原点为圆心，6 为半径的圆，除去点 $(\pm 6,0)$；当 $a<-1$ 时，曲线表示焦点在 y 轴上，除去 x 轴上的顶点的椭圆.

2. 解析　由题意可得 $\frac{|MF|}{\left|x+\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}$，

$\therefore \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=\frac{c}{a}\left|x+\frac{a^2}{c}\right|$，化简得 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

$\therefore M$ 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

结论：双曲线上的点到左焦点的距离与它到直线 $l:x=-\frac{a^2}{c}$ 的距离之比为 $\frac{c}{a}$. 书中 2.6.2 一节中的例 3 应用了此结论.

2.7　抛物线及其方程

2.7.1　抛物线的标准方程

练习 A

1. 解析　M 到抛物线的准线的距离为 3.
2. 解析　(1) $y^2=8x$. (2) $y^2=6x$.
3. 解析　$F(a,0)$.

练习 B

1. 解析　$y^2=24x$.

2. 解析　(1) $F\left(0,\frac{1}{8}\right)$，准线方程：$y=-\frac{1}{8}$.

(2) $F\left(0,\frac{1}{4a}\right)$，准线方程：$y=-\frac{1}{4a}$.

3. 解析　设抛物线方程为 $y^2=2px$，$\because$ 其过 $M(2,-4)$，$\therefore 16=2p\times 2$，$\therefore 2p=8$，$\therefore y^2=8x$ 为所求.

4. 解析　点 M 到焦点的距离等于它到准线的距离，设 $M(x_M,y_M)(x_M>0)$，准线方程为 $x=-3$，$\therefore |x_M+3|=9$，$x_M=6$，$\therefore y_M=\pm 6\sqrt{2}$，$\therefore M(6,6\sqrt{2})$ 或 $M(6,-6\sqrt{2})$.

5. 解析　由题意知，点 M 到直线 $x+4=0$ 的距离与到点 $F(4,0)$ 的距离相等，所以点 M 的轨迹是以 $(4,0)$ 为焦点，$x=-4$ 为准线的抛物线，所以 $p=8$，所以点 M 的轨迹方程为 $y^2=16x$.

2.7.2　抛物线的几何性质

练习 A

1. 解析　$x^2=\frac{1}{4}y$ 的焦点为 $\left(0,\frac{1}{16}\right)$，准线方程为 $y=-\frac{1}{16}$，$\therefore M$ 到焦点的距离 $=1+\frac{1}{16}=\frac{17}{16}$.

2. 解析　焦点为 $F(2,0)$，其到 $x-\sqrt{3}y=0$ 的距离 $d=\frac{|2|}{\sqrt{1+3}}=1$.

3. 解析　椭圆的右焦点 $F(2,0)$，$\therefore p=4$.

4. 解析　因为正三角形 AOB 的顶点 A,B 在抛物线上，所以 A,B 关于 x 轴对称，设 $A(6t^2,6t)$，则 $B(6t^2,-6t)$. 由题意得 $|OA|=|AB|$，所以 $\sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2}=\sqrt{(6t^2-6t^2)+(-6t-6t)^2}$，解得 $t=\pm\sqrt{3}$，所以 $\triangle AOB$ 的边长为 $12\sqrt{3}$.

5. 解析　(1) $\left(\frac{3}{2},0\right)$，$x=-\frac{3}{2}$. (2) $\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，$y=\frac{5}{2}$. (3) $\left(0,\frac{2}{3}\right)$，$y=-\frac{2}{3}$. (4) $\left(-\frac{a}{4},0\right)$，$x=\frac{a}{4}$.

6. 解析　在 $y^2=8x$ 中，$\frac{p}{2}=2$，$\therefore |PF|=4+2=6$.

练习 B

1. 解析　$y^2=-4x$ 或 $x^2=\sqrt{2}y$.

2. 解析　由定义，点 M 到准线的距离也是 $2p$，设 $M(x_0,y_0)$，则 M 到准线的距离 $d=x_0+\frac{p}{2}$，

$\therefore x_0+\frac{p}{2}=2p, x_0=\frac{3}{2}p, y_0=\pm\sqrt{3}p,$

$\therefore M\left(\frac{3}{2}p,\pm\sqrt{3}p\right).$

3. 解析　设点 $M(x_0,y_0)$ 为抛物线上任一点，过点 M 向 x 轴作垂线，垂足为 H，设垂线段 MH 的中点为 $N(x,y)$，则 $\begin{cases}x=x_0,\\ y=\frac{y_0}{2},\end{cases}\therefore\begin{cases}x_0=x,\\ y_0=2y,\end{cases}$ 代入 $y^2=2px$ 中得 $4y^2=2px$，$\therefore y^2=\frac{p}{2}x$，$\therefore$ 垂线段中点的轨迹方程为 $y^2=\frac{p}{2}x(p>0)$，它是顶点在原点，焦点为 $\left(\frac{p}{8},0\right)$，开口向右的抛物线.

4. 解析　由题意，设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，点 $A(2,y_0)$，则 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，从而 $\overrightarrow{FA}=\left(2-\frac{p}{2},y_0\right)$，$\overrightarrow{OA}=(2,y_0)$，故 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{OA}=4-p+y_0^2=16$. 又 $y_0^2=4p$，所以 $p=4$，所以抛物线方程为 $y^2=8x$.

5. 解析　设 $M(x_0,y_0)$，$|MA|=\sqrt{(x_0-4)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0-4)^2+16x_0}=\sqrt{(x_0+4)^2}=|x_0+4|(x_0\geqslant0)$，

$\therefore x_0=0$ 时，$|MA|_{\min}=4$，此时 $M(0,0)$.

6. 解析　设 $M(x_0,y_0)$，$\therefore |MF|=\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+y_0^2}=\sqrt{\left(x_0-\frac{p}{2}\right)^2+2px_0}=\sqrt{\left(x_0+\frac{p}{2}\right)^2}=x_0+\frac{p}{2}(x_0\geqslant0)$，

$\therefore |MF|=x_0+\frac{p}{2}.$

结论：对于 $y^2=-2px(p>0)$，$|MF|=\frac{p}{2}-x_0$；

对于 $x^2=2py(p>0)$，$|MF|=y_0+\frac{p}{2}$；

对于 $x^2=-2py(p>0)$，$|MF|=\frac{p}{2}-y_0$.

习题 2-7A

1. 解析　所得曲线为抛物线.

2. 解析　$y^2=8x$.

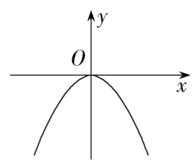
3. 解析　双曲线 $x^2-y^2=1$ 的焦点为 $(\pm\sqrt{2},0)$，$\therefore y^2=2px$ 的准线方程为 $x=-\sqrt{2}=-\frac{p}{2}$，$\therefore p=2\sqrt{2}$.

4. 解析　$x^2=\frac{1}{4}y$ 中，$|FM|=1=y_0+\frac{p}{2}=y_0+\frac{1}{16}$，$\therefore y_0=\frac{15}{16}$.

5. 解析　解法一：以题图中水面所在的直线为 x 轴，这座抛物线型拱桥的对称轴为 y 轴，建系，设抛物线方程为 $y=ax^2+k$，其过 $(0,4)$，$\therefore k=4$. 又过 $(6,0)$，$\therefore 0=36a+4$，$\therefore a=-\frac{1}{9}$，$\therefore y=-\frac{1}{9}x^2+4$，当水位上升 1 m 时，令 $1=-\frac{1}{9}x^2+4$，得 $x=3\sqrt{3}$ 或 $x=-3\sqrt{3}$，

$\therefore$ 此时水面宽度为 $6\sqrt{3}$ m.

解法二：建立如图所示的平面直角坐标系，设抛物线方程为 $x^2=-2py(p>0)$，过点 $(6,-4)$，所以 $p=\frac{9}{2}$，所以抛物线方程为 $x^2=-9y$，若水位上升 1 m，即当 $y=-3$ 时，$x=\pm3\sqrt{3}$，所以此时水面宽度为 $6\sqrt{3}\text{ m}\approx10.4$ m.

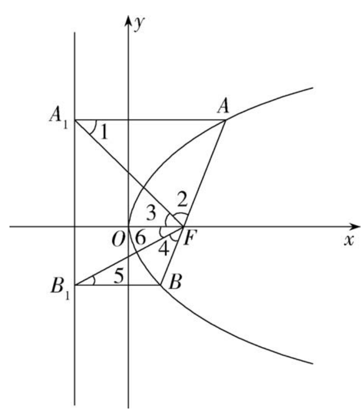


6. 解析　$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，$\because A(x_0,y_0)$ 是 C 上一点，$|AF|=\frac{5}{4}x_0=x_0+\frac{1}{4}$，$\therefore x_0=1$.

7. 证明　如图，$|AA_1|=|AF|$，故 $\angle1=\angle2$，又 $\because AA_1\parallel x$ 轴，

$\therefore \angle1=\angle3$，从而 $\angle2=\angle3$，同理可证 $\angle4=\angle6$，

$\therefore \angle A_1FB_1=\angle3+\angle6=\frac{\pi}{2}$.



习题 2-7B

1. 解析　设 Q 到 l 的距离为 d，则 $|QF|=d$，$\because \overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，$\therefore |PQ|=3d$，由三角形相似易知 $x_Q=1$，代入 $y^2=8x$ 中得 $y=\pm2\sqrt{2}$. $\therefore |QF|=\sqrt{(1-2)^2+(2\sqrt{2})^2}=3$.

2. 解析　$F\left(\frac{1}{4},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{1}{4}$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

$\therefore |AF|+|BF|=x_1+\frac{1}{4}+x_2+\frac{1}{4}=3$，$\therefore x_1+x_2=\frac{5}{2}$，$\therefore$ 线段 AB 中点的横坐标为 $\frac{5}{4}$，

$\therefore$ 线段 AB 的中点到 y 轴的距离为 $\frac{5}{4}$.

3. 解析　记 $A(0,2)$，$\because$ 以 MF 为直径的圆过点 $A(0,2)$，$\therefore$ 点 M 在第一象限，由 $|MF|=x_M+\frac{p}{2}=5$ 得 $M\left(5-\frac{p}{2},\sqrt{2p\left(5-\frac{p}{2}\right)}\right)$，从而以 MF 为直径的圆的圆心 N 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\sqrt{2p\left(5-\frac{p}{2}\right)}\right)$，

又圆的直径 $d=5$，

$\therefore N$ 的横坐标恰好等于圆的半径，

$\therefore$ 圆与 y 轴切于点 $A(0,2)$，$\therefore 2=\frac{1}{2}\sqrt{2p\left(5-\frac{p}{2}\right)}$，

$\therefore p^2-10p+16=0$，$\therefore p=2$ 或 $p=8$，$\therefore y^2=4x$ 或 $y^2=16x$.

4. 解析　设 $x^2=2y$ 上任意一点 $P\left(x,\frac{1}{2}x^2\right)$，

由 $|PM|=\sqrt{x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-2\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-2)^2+3}$，$\therefore x^2=2$ 时，$|PM|$ 最小.

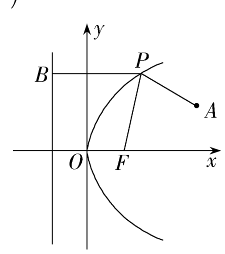
此时，$x=\pm\sqrt{2}$，$y=1$，$\therefore P(\pm\sqrt{2},1)$.

5. 解析　因为 P 在抛物线 $y=x^2$ 上，所以可设 P 点坐标为 $(t,t^2)(t\in\mathbf{R})$，由点到直线的距离公式，得 P 到直线 $2x-y-4=0$ 的距离 $d=\frac{|2t-t^2-4|}{\sqrt{5}}=\frac{(t-1)^2+3}{\sqrt{5}}$，

因此，当 $t=1$ 时，d 取得最小值，故点 P 的坐标为 $(1,1)$.

习题 2-7C

1. 解析　易知点 A 在抛物线内部，过 P 作 PB 垂直抛物线的准线于点 B，如图所示，由抛物线的定义知 $|PF|=|PB|$，所以 $|PF|+|PA|=|PB|+|PA|$，当 B,P,A 三点共线时 $|PF|+|PA|$ 有最小值，为 7，此时 $y_p=3$，$x_p=\frac{9}{4}$，即点 P 的坐标为 $\left(\frac{9}{4},3\right)$.



(2) 设点 P 的坐标为 $(t^2,2t)(t\in\mathbf{R})$，则 $|PM|^2=(t^2-m)^2+(2t-0)^2$. 令 $t^2=u(u\geqslant0)$，则 $|PM|^2=u^2+(4-2m)u+m^2=[u+(2-m)]^2+m^2-(2-m)^2$. ①当 $m<2$ 时，

该函数在 $[0,+\infty)$ 上为增函数,当 $u=0$ 时,$|PM|_{\min}=|m|$,此时点 P 的坐标为 $(0,0)$;②当 $m\geqslant 2$ 时,该函数在 $[0,m-2]$ 上为减函数,在 $[m-2,+\infty)$ 上为增函数,所以 $u=m-2$ 时,$|PM|_{\min}=2\sqrt{m-1}$,此时点 P 的坐标为 $(m-2,\pm 2\sqrt{m-2})$.

2.解析 $\because F(-3,0)$,$\therefore y^2=-12x$,

设 $M(x,y)(x\leqslant 0)$,

$\therefore |AM|^2=(x-a)^2+y^2=x^2-(2a+12)x+a^2$,

$\therefore$ ①$a+6\geqslant 0$,即 $a\geqslant -6$ 时,$|AM|^2$ 随 x 的增大而减小,$\therefore x=0$ 时,$|AM|^2_{\min}=a^2$,此时,$f(a)=|a|$;

②$a+6<0$,即 $a<-6$ 时,$|AM|^2=x^2-(2a+12)x+a^2=(x-a-6)^2-12a-36$,

$\therefore$ 当 $x=a+6$ 时,$|AM|^2_{\min}=-12a-36$,此时 $f(a)=\sqrt{-12a-36}$.

2.8 直线与圆锥曲线的位置关系

习题 2-8A

1.解析 $\begin{cases}y=-2x+4,\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow y^2+2y-8=0$,

$\therefore \begin{cases}y=2,\\ x=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=-4,\\ x=4,\end{cases}$ $\therefore$ 记公共点坐标为 $A(1,2)$,$B(4,-4)$,$|AB|=\sqrt{(4-1)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

2.解析 $\begin{cases}x-2y+2=0,\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-2,\\ y=0,\end{cases}$ $\therefore$ 不妨令 $A(0,1)$,$B(-2,0)$,

$\therefore |AB|=\sqrt{5}$.

3.解析 例如 $y^2=4x$ 与直线 $y=1$ 只有一个公共点,但它们相交.

4.解析 由题意,联立 $\begin{cases}y=kx+2,\\ \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y,得 $(2+3k^2)x^2+12kx+6=0$,$\Delta=144k^2-24(2+3k^2)=72k^2-48$.(1)当 $\Delta>0$,即 $k>\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时,直线与椭圆有两个公共点.

(2)当 $\Delta=0$,即 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $k=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时,直线与椭圆只有一个公共点.

(3)当 $\Delta<0$,即 $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}<k<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 时,直线与椭圆没有公共点.

5.解析 $\begin{cases}y=kx-1,\\ x^2-y^2=4\end{cases}\Rightarrow(1-k^2)x+2kx-5=0$,$\because$ 直线与双曲线没有公共点,

$\therefore \begin{cases}1-k^2\neq 0\\ \Delta<0\end{cases}$,$\therefore k>\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

6.解析 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$,$\because l$ 过原点且与双曲线交于两点,$\therefore k_l\in\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.解析 抛物线 $y^2=2x$ 的准线方程为 $x=-\dfrac{1}{2}$,设圆心 (x_0,y_0),由题知,$x_0+\dfrac{1}{2}=|y_0|$①,$y_0^2=2x_0$②,

由①②得 $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2},\\ y_0=\pm 1,\\ r=1,\end{cases}$

$\therefore$ 所求方程为 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y\pm 1)^2=1$.

8.解析 $F(1,0)$,联立 $\begin{cases}y=x-1,\\ y^2=4x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-6x+1=0,\\ y^2-4y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=1,\\ y_1y_2=-4,\end{cases}$ $\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3$.

9.证明 设 $\begin{cases}l:x=my+\dfrac{p}{2},\\ C:y^2=2px,\end{cases}$ 消去 x,得 $y^2-2mpy-p^2=0$,$\therefore y_1y_2=-p^2$.

习题 2-8B

1.解析 焦点 $F(2,0)$,准线方程为 $x=-2$.联立 $\begin{cases}l_{AB}:y=2(x-2),\\ C:y^2=8x,\end{cases}$ 得 $x^2-6x+4=0$,$\therefore \begin{cases}x_A+x_B=6,\\ x_A\cdot x_B=4,\\ \Delta>0,\end{cases}$

$\therefore |AB|=x_A+x_B+p=8$.

2.解析 联立 $\begin{cases}y=x-3,\\ x^2=-8y,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2+8x-24=0,\\ y^2+14y+9=0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x_1+x_2=-8,\\ x_1x_2=-24,\\ y_1y_2=9,\\ y_1+y_2=-14,\end{cases}$

(1)$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{64+4\times 24}=8\sqrt{5}$,

$\therefore$ 线段 AB 的中点坐标为 $(-4,-7)$.

(2)由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=-24+9\neq 0$ 可知 $\overrightarrow{OA}$ 不垂直于 $\overrightarrow{OB}$.

3.证明 设 $\begin{cases}l:y=\dfrac{b}{a}x+m,\\ C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 化简得 $-2mabx=a^2m^2+a^2b^2$,即 $2mabx=-a^2b^2-a^2m^2$,

$\therefore m=0$ 时,l 与双曲线 C 无公共点;

$m\neq 0$ 时,l 与双曲线 C 有一个公共点.

4.解析 易知 $y=p$ 或 $x=0$ 成立,当斜率 k 存在时,设直线方程为 $y=kx+p$,

联立 $\begin{cases}y=kx+p,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 得 $k^2x^2+(2kp-2p)x+p^2=0$,

$\because$ 只有一个公共点,$\therefore \Delta=0$,

即 $\Delta=(2kp-2p)^2-4k^2\cdot p^2=0$,$\therefore k=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore y=\dfrac{1}{2}x+p$.

综上,$y=p$ 或 $x=0$ 或 $y=\dfrac{1}{2}x+p$ 为所求.

5.解析 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,直线 l 的方程为 $y=2x+b$,代入 $y^2=4x$,得 $4x^2+(4b-4)x+b^2=0$,所以 $x_1+x_2=1-b$,$x_1x_2=\dfrac{b_2}{4}$,所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_2x_2}=\sqrt{5}\sqrt{(1-b)^2-b^2}=5$,解得 $b=-2$,即直线 l 的方程为 $y=2x-2$.

6.解析 $F(2,0)$,$A(8,8)$,$k_{AB}=\dfrac{8}{8-2}=\dfrac{4}{3}$,联立 $\begin{cases}l_{AB}:y=\dfrac{4}{3}(x-2),\\ C:y^2=8x,\end{cases}$ 得 $2x^2-17x+8=0$,

$\therefore \begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{17}{2},\\ x_1x_2=4,\end{cases}$ 准线方程为 $x=-2$,$\therefore$ 线段 AB 的中点到准线距离为 $\dfrac{17}{4}+2=\dfrac{25}{4}$.

7.解析 设 $l_{AB}:x=a(a>0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,所以 $y_1=2\sqrt{a}$,$y_2=-2\sqrt{a}$,所以 $|AB|=|y_1-y_2|=4\sqrt{a}=4\sqrt{3}$,所以 $a=3$,即直线 AB 的方程为 $x=3$.

8.证明 不妨设抛物线的方程为 $y^2=2px$,则抛物线的焦点为 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.设过点 F 的直线 PQ 的方程为 $x=my+\dfrac{p}{2}$,代入抛物线方程得 $y^2-2pmy-p^2=0$.设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $y_1y_2=-p^2$.设点 M 的坐标为 $\left(-\dfrac{p}{2},y'\right)$,直线 OP 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$,当 $x=-\dfrac{p}{2}$ 时,$y=-\dfrac{py_1}{2x_1}=-\dfrac{py_1}{2\times\dfrac{y_1^2}{2p}}=-\dfrac{p^2}{y_1}=y_2$,

所以 $M\left(-\dfrac{p}{2},y_2\right)$,所以直线 MQ 的方程为 $y=y_2$,所以 MQ 平行于此抛物线的对称轴,即 x 轴.

9.证明 设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$,

$\therefore F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$.

设 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,

$\therefore$ 以 P_1P_2 为直径的圆的半径 $r=\frac{|P_1P_2|}{2}$，圆心为 P_1P_2 中点，

又 $|FP_1|=x_1+\frac{p}{2}$，$|FP_2|=x_2+\frac{p}{2}$，

$\therefore |P_1P_2|=|FP_1|+|FP_2|=x_1+x_2+p$，

$\therefore r=\frac{x_1+x_2+p}{2}$，

又 P_1P_2 中点到准线的距离 $d=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=r$，

$\therefore$ 以 P_1P_2 为直径的圆与该抛物线的准线相切.

10. 解析 $F(1,0)$，联立 $\begin{cases}l:y=x-1,\\C:y^2=4x,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x^2-6x+1=0,\\y^2-4y-4=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x_1+x_2=6,\\x_1x_2=1,\\y_1+y_2=4,\end{cases}$ $\therefore |AB|=x_1+x_2+p=8=2r$，

$\therefore AB$ 的中点到准线的距离为 $\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{p}{2}=4=r$，且圆心坐标为 $(3,2)$，

$\therefore$ 所求方程为 $(x-3)^2+(y-2)^2=16$.

复习题

A 组

1. 解析 (1) $k=\frac{3-(-2)}{2-(-1)}=\frac{5}{3}$，

$\therefore l:5x-3y-1=0$.

(2) $y=\frac{5}{4}x$，$\therefore l:5x-4y=0$.

(3) $\frac{x}{-2}+\frac{y}{-5}=1$，$\therefore l:5x+2y+10=0$.

(4) $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{-\frac{1}{2}}=1$，$\therefore l:2x+2y+1=0$.

2. 解析 $x+3y-5=0$，$3x-y-5=0$.

3. 解析 设 $l:x-y+c=0(c\neq-2)$，$d=\frac{|c+2|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，$\therefore c=2$ 或 $c=-6$，

$\therefore l:x-y+2=0$ 或 $x-y-6=0$.

4. 解析 假命题. 反例：当 $a,b\neq0$ 时，$l:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$\therefore y=b-\frac{b}{a}x$，$\therefore k=-\frac{b}{a}$.

5. 解析 $A'(1,2)$，$B'(-1,-5)$，$C'(-2,3)$，$D'(4,-3)$.

6. 解析 设所求圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=25$，由题意可得 $|b|=5$ 且 $(1-a)^2+(2-b)^2=25$，

$\therefore \begin{cases}a=-3,\\b=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\b=5,\end{cases}$

$\therefore$ 所求圆的方程为 $(x+3)^2+(y-5)^2=25$ 或 $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

7. 解析 A,C 在曲线上，B,D 不在曲线上.

8. 解析 不是. 中线 AO 的方程是 $x=0(0\leqslant y\leqslant3)$，中线是线段.

9. 解析 设 $C(x,y)$，则 $|AC|=|AB|$

$\therefore \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(3-4)^2+(5-2)^2}=\sqrt{10}$，

$\therefore (x-4)^2+(y-2)^2=10$①，

$l_{AB}:3x+y-14=0$②，由①②可得 $\begin{cases}x=3,\\y=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=5,\\y=-1,\end{cases}$ $\therefore$ 点 C 的轨迹方程为 $(x-4)^2+(y-2)^2=10$（除去点 $(3,5)$，$(5,-1)$）.

10. A $x_1=2-\sqrt{3}$，$x_2=2+\sqrt{3}$，$\because x_1=2-\sqrt{3}\in(0,1)$，$x_2=2+\sqrt{3}\in(1,+\infty)$，故选 A.

11. B

12. B 设动圆的圆心为 P，半径为 r，而 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $O(0,0)$，半径为 1，$x^2+y^2-8x+12=0$ 的圆心为 $F(4,0)$，半径为 2，

$\therefore |PF|=2+r$，$|PO|=1+r$，则 $|PF|-|PO|=(2+r)-(1+r)=1<|FO|$，

$\therefore P$ 的轨迹是双曲线的一支.

13. 解析 $\because |BC|=2$，

$\therefore |AB|+|CA|=2|BC|=4>2$，

$\therefore$ 点 A 的轨迹为椭圆，且 $a=2$，$c=1$，$b^2=3$.

又 $\because |AB|>|CA|$，$\therefore A$ 位于椭圆右半部分，且 A 不能与 B,C 在同一直线（x 轴）上，$\therefore$ 点 A 的轨迹方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(0<x<2)$.

14. 解析 方程可化为 $(3-a)x^2+(a+1)y^2=-(a+1)(a-3)$，若 $a=-1$，则方程为 $x=0$；若 $a=3$，则方程为 $y=0$；

若 $a\neq-1$ 且 $a\neq3$，则方程可化为 $\frac{x^2}{a+1}-\frac{y^2}{a-3}=1$，

$\therefore$ 此方程表示双曲线条件是 $(a+1)(a-3)>0$，$\therefore a>3$ 或 $a<-1$.

15. 解析 双曲线的离心率 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，椭圆焦点 $(\pm\sqrt{5},0)$，$\therefore c=\sqrt{5}$，$a=2$，$b=1$，

$\therefore$ 双曲线的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

16. 解析 双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{8}=1$，焦点为 $(\pm4,0)$，$\therefore c=4$，又椭圆经过点 $P(4,6)$，

$\therefore 2a=\sqrt{(4+4)^2+36}+\sqrt{(4-4)^2+36}=16$，$\therefore a=8$，$b^2=a^2-c^2=48$，

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

17. 解析 $c=2$，由椭圆的定义得 $2a=\frac{10}{3}\times\frac{1}{2}+\sqrt{4^2+\left(\frac{10}{3}\times\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{3}+\frac{13}{3}=6$，

$\therefore a=3$. $\therefore b^2=a^2-c^2=9-4=5$. $\therefore$ 所求椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

18. 解析 由 $\begin{cases}y=kx+2,\\x^2+2y^2=2\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+8kx+6=0$，$\because$ 直线与椭圆交于不同两点.

$\therefore \Delta=64k^2-24(1+2k^2)=16k^2-24>0$，

$\therefore k<-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $k>\frac{\sqrt{6}}{2}$.

19. 解析 若直线 l 的斜率不存在，则显然不符合题意，故直线 l 的斜率存在，设直线 l 的斜率为 k. ①当 $k=0$ 时，符合题意，直线 l 的方程为 $y=4$. ②当 $k\neq0$ 时，由 $\begin{cases}y^2=8x,\\y-4=k(x-2),\end{cases}$ 消去 x，得 $ky^2-8y+32-16k=0$，由 $\Delta=0$，得 $k=1$，所以方程为 $x-y+2=0$. 综上，直线 l 的方程为 $y=4$ 或 $x-y+2=0$.

B 组

1. 解析 由 $\begin{cases}4x+3y=10,\\2x-y=10\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=4,\\y=-2,\end{cases}$ 代入 $mx+2y+8=0$ 得 $m=-1$.

2. 解析 易得 $l_3/\!/l_4$，l_1 与 l_3 的交点为 $A(0,1)$，l_2 与 l_3 的交点为 $B(0,-5)$，l_1 与 l_4 的交点为 $D(3,7)$，l_2 与 l_4 的交点为 $C(3,-8)$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是梯形，高是 3，上底 $AB=6$，下底 $CD=15$，

$\therefore S=\frac{(6+15)\times3}{2}=31.5$.

3. 解析 (1) 由题意得 $\begin{cases}\frac{3}{a-1}=1,\\\frac{5}{a-1}\neq0,\end{cases}$ $\therefore a=4$.

(2) 由题意得 $2(a-4)+3=0$，$\therefore a=\frac{5}{2}$.

4. 解析 由 $\begin{cases}2x+y-4=0,\\3x-2y+1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$ $\therefore$ 不论 λ 为何值，直线 $(2x+y-4)+\lambda(3x-2y+1)=0$ 恒过定点 $(1,2)$.

5. 解析 真命题.

6. 解析 $\because M(-2,3)$ 关于 x 轴的对称点为 $N(-2,-3)$，$\therefore$ 根据反射定律可得 P,N 两点都在反射光线所在直线上，

$\therefore$ 反射光线所在直线方程为 $x-y-1=0$.

7. 解析 $k_{AB}=\frac{2-1}{-3-4}=-\frac{1}{7}$，$l_{AB}:y-1=-\frac{1}{7}\times(x-4)$ 与 y 轴交点 $D\left(0,\frac{11}{7}\right)$，设 $C(0,m)$，$\therefore CD=\left|m-\frac{11}{7}\right|$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}CD\times(4+3)=\frac{7}{2}CD=12$，

$\therefore CD=\frac{24}{7}=\left|m-\frac{11}{7}\right|$, $\therefore m=5$ 或 $m=-\frac{13}{7}$, $\therefore C(0,5)$或$\left(0,-\frac{13}{7}\right)$.

8. 解析 $C_1:x^2+y^2-8x+6y=0$ 可化为$(x-4)^2+(y+3)^2=25$,所以圆心的坐标为$(4,-3)$,半径为5.

$\because PA,PB$ 是圆的两条切线,

$\therefore P,A,B,C_1$ 四点共圆,

$\therefore$ 圆心 $C_2\left(\frac{8+4}{2},\frac{6-3}{2}\right)=\left(6,\frac{3}{2}\right)$.

$|PC_1|=2R=\sqrt{(8-4)^2+(6+3)^2}=\sqrt{97}$,

$\therefore R^2=\frac{97}{4}$,

$\therefore C_2:(x-6)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{97}{4}$,

由 C_1-C_2 得 $l_{AB}:4x+9y-14=0$.

9. 解析 曲线上的点到点 $A(0,2)$的距离减去它到 x 轴的距离的差都是2,则曲线上面的每个点到点 $A(0,2)$的距离都等于它到直线 $y=-2$ 的距离,$\therefore$ 曲线轨迹是以 A 点为焦点,直线 $y=-2$ 为准线的抛物线,$\therefore$ 曲线的方程为 $y^2=8x$.

10. 解析 (1)若方程$\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 为椭圆,则$\begin{cases}9-k>0,\\4-k>0,\end{cases}$ $\therefore k<4$.此时焦点坐标为$(0,-\sqrt{5})$和$(0,\sqrt{5})$.

(2)若方程$\frac{x^2}{4-k}+\frac{y^2}{9-k}=1$ 为双曲线,则有$(4-k)(9-k)<0$,$\therefore 4<k<9$.

此时焦点坐标为$(0,\sqrt{5})$和$(0,-\sqrt{5})$.

11. 证明 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则点 A,B 到 x 轴的距离之积为$|y_1||y_2|=|y_1y_2|$,由题意可设直线方程为 $x=my+\frac{p}{2}$,联立$\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\y^2=2px,\end{cases}$消去 x,得 $y^2-2pmy-p^2=0$,$\therefore y_1y_2=-p^2$,$\therefore |y_1y_2|=p^2$.故这两个交点到 x 轴的距离的乘积为 p^2,是一个常数.

12. 证明 不妨设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$,弦 AB 与抛物线的对称轴交于 $C(x,0)$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 A,B,C 三点共线,所以得到 $x=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$(*).将 $x_1=\frac{y_1^2}{2p}$,$x_2=\frac{y_2^2}{2p}$代入(*)式,得 $x=-\frac{1}{2p}y_1y_2$,因为 $OA\perp OB$,所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$,所以 $y_1y_2=-4p^2$,所以 $x=2p$.故 C 点坐标为$(2p,0)$,即弦 AB 与抛物线的对称轴相交于定点$(2p,0)$.

13. 解析 易知直线 l 的斜率存在且不为零.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\therefore x_1+x_2=8$,$y_1+y_2=4$.$x_1^2+4y_1^2=36$①,$x_2^2+4y_2^2=36$②,①−②可得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{2}$,即直线 l 的斜率为$-\frac{1}{2}$,$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-4)$,即 $x+2y-8=0$.

14. 解析 设直线 $l:x=t(|t|\leqslant 2)$,不妨设 P 点坐标为$\left(t,\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\right)$,$Q$ 点坐标为$\left(t,-\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\right)$,则 $l_{AP}:y=\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\cdot\frac{x+2}{t+2}$①,$l_{BQ}:y=-\sqrt{\frac{4-t^2}{2}}\cdot\frac{x-2}{t-2}$②,由①②得 $t=\frac{4}{x}$③,将③代入①化简整理,得 $x^2-2y^2=4$,即$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$,所以点 M 的轨迹为双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$.

15. 解析 由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\y=x+m\end{cases}$消去 y,得 $5x^2+8mx+4m^2-4=0$,由弦长公式得$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$,所以$|AB|=\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$,当 $m=0$ 时,$|AB|_{\max}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

16. 解析 设 A,B 两点的坐标为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\because OA\perp OB$,$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$,$\therefore x_1x_2+(ax_1+1)(ax_2+1)=0$,即$(a^2+1)x_1x_2+a(x_1+x_2)+1=0$.由$\begin{cases}y=ax+1,\\3x^2-y^2=1\end{cases}$消去 y,得 $3x^2-(ax+1)^2=1$,即$(3-a^2)x^2-2ax-2=0$,$\therefore x_1+x_2=\frac{2a}{3-a^2}$,$x_1x_2=\frac{2}{a^2-3}$,$\therefore (a^2+1)\cdot\frac{2}{a^2-3}+a\cdot\frac{2a}{3-a^2}+1=0$,$\therefore 2(a^2+1)-2a^2+a^2-3=0$,即 $a^2=1$,$\therefore a=1$ 或 $a=-1$.

17. 解析 设抛物线 C 的方程为 $y^2=2px$ $(p\neq 0)$,由$\begin{cases}y^2=2px,\\y=2x+1\end{cases}$消去 y,得 $4x^2+(4-2p)x+1=0$,$x_1+x_2=\frac{p-2}{2}$,$x_1x_2=\frac{1}{4}$,$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\left(\frac{p-2}{2}\right)^2-1}=\sqrt{15}$,解得 $p=6$ 或 $p=-2$,$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=12x$ 或 $y^2=-4x$.

18. 解析 易得直线 AB 的方程为 $y=x-\frac{p}{2}$,由$\begin{cases}y=x-\frac{p}{2},\\y^2=2px\end{cases}$消去 x,得 $y^2-2py-p^2=0$.设 A,B 的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=2p$,$y_1y_2=-p^2$,$\therefore \frac{y_1}{y_2}+\frac{y_2}{y_1}=-6$,即$\frac{y_1}{-y_2}+\frac{-y_2}{y_1}-6=0$,令 $t=\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{y_1}{-y_2}$且 $t>1$,则 $t^2-6t+1=0$,$\therefore t=3+2\sqrt{2}$,即$\frac{|AF|}{|BF|}=3+2\sqrt{2}$.

19. 解析 由双曲线的方程可知双曲线的实轴长为2,当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=k(x-\sqrt{3})$,联立$\begin{cases}y=k(x-\sqrt{3}),\\2x^2-y^2=2,\end{cases}$消去 y,得$(2-k^2)x^2+2\sqrt{3}k^2x-3k^2-2=0$.设 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=\frac{-2\sqrt{3}k^2}{2-k^2}$,$x_1x_2=\frac{-3k^2-2}{2-k^2}$,$\therefore |PQ|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{3}k^2}{2-k^2}\right)^2-4\cdot\frac{-3k^2-2}{2-k^2}}=\frac{4(1+k^2)}{|2-k^2|}=4$,$\therefore k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.当直线 l 的斜率不存在时,直线 l 的方程为 $x=\sqrt{3}$,此时$|PQ|=4$,符合题意.综上所述,直线 l 的方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{3})$或 $x=\sqrt{3}$.

20. 解析 设点 M 为(x,y),则有距离乘积的值 $A=\frac{|bx-ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{|bx+ay|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|b^2x^2-a^2y^2|}{a^2+b^2}$,又点 M 在双曲线上,由$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,即 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$,所以 $A=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$,为定值.所以第一问的值为$\frac{16}{5}$.

21. 解析 由双曲线定义得$\begin{cases}|AF_2|-|AF_1|=2a①,\\|BF_2|-|BF_1|=2a②,\end{cases}$①+②得$|AF_2|+|BF_2|-(|AF_1|+|BF_1|)=4a$,即$|AF_2|+|BF_2|-|AB|=4a$.

$\because |AF_2|+|BF_2|=2|AB|$,

$\therefore 2|AB|-|AB|=4a$,$\therefore |AB|=4a$.

22. 解析 易得直线 AB 的斜率存在.设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$,由$\begin{cases}y^2=4x,\\y=k(x-1)\end{cases}$消去 y,得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$,由弦长公式$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=20$,得 $k=\pm\frac{1}{2}$,所以直线 AB 的

方程为 $x-2y-1=0$ 或 $x+2y-1=0$.

23. 解析 AB 与 OM 不能垂直，理由如下：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$M(m,n)$，则 $x_1+x_2=2m$，$y_1+y_2=2n$，由 $\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 可得 $\dfrac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\dfrac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，因为 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$，所以 $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\dfrac{b^2}{a^2}$，即 $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{b^2}{a^2}$. 假设 $AB\perp OM$，则 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-1$，得 $\dfrac{n}{m}=-1$，所以 $a^2=b^2$，这与已知矛盾，所以 AB 与 OM 不能垂直.

24. 解析 设 $A\left(x_1,\dfrac{2\sqrt5}{5}x_1\right)$，$B\left(x_2,-\dfrac{2\sqrt5}{5}x_2\right)$，$P(x,y)$. 由 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt5$，得 $(x_1-x_2)^2+\dfrac45(x_1+x_2)^2=20$. 由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，可知 $x=x_1+x_2$，$y=\dfrac{2\sqrt5}{5}(x_1-x_2)$，所以 $\dfrac54y^2+\dfrac45x^2=20$，化简得点 P 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

25. 解析 (1)由已知易得 $b=\sqrt2$，由 $|OF|=2|FM|$ 可得 $c=2$ 或 $c=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$. 故椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率为 $\dfrac{\sqrt6}{3}$；或椭圆的方程为 $\dfrac{3x^2}{26}+\dfrac{y^2}{2}=1$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{130}}{13}$.

(2)略.(设出 PQ 的方程，与椭圆方程联立组成方程组，利用韦达定理求解即可)

C 组

1. 解析 设 $l:y=ax+2$ 与线段相交于 P，$y=ax+2$ 过定点 $C(0,2)$，则 $k_{BC}\leqslant k_{CP}\leqslant k_{CA}$.

$\because k_{BC}=\dfrac{1-2}{3-0}=-\dfrac13$，$k_{AC}=\dfrac{4-2}{1-0}=2$，$\therefore a\in\left[-\dfrac13,2\right]$.

2. 解析 设 l 与直线 $3x+y-2=0$ 的交点为 $A(x_1,y_1)$，与直线 $x+5y+10=0$ 的交点为 $B(x_2,y_2)$. $\because P(2,-3)$ 是线段 AB 中点，

$\therefore \begin{cases}\dfrac{x_1+x_2}{2}=2,\\ \dfrac{y_1+y_2}{2}=-3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x_2=4-x_1,\\ y_2=-6-y_1.\end{cases}$

$\because$ 点 B 在直线 $x+5y+10=0$ 的上，$\therefore x_2+5y_2+10=0$，

$\therefore 4-x_1+5(-6-y_1)+10=0$，即 $x_1+5y_1+16=0$.

由 $\begin{cases}3x_1+y_1-2=0,\\ x_1+5y_1+16=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{13}{7},\\ y_1=-\dfrac{25}{7}.\end{cases}$

$\therefore A\left(\dfrac{13}{7},-\dfrac{25}{7}\right)$. 又直线 l 过 A,P 两点，

$\therefore l:\dfrac{y+3}{-\dfrac{25}{7}+3}=\dfrac{x-2}{\dfrac{13}{7}-2}$，

即 $4x-y-11=0$.

3. 证明 (1)设 $B(m,n)$，$\because A,B$ 关于 $l:y=x+b$ 对称，

$\therefore \begin{cases}k_{AB}\cdot k_l=-1,\\ \dfrac{y_0+n}{2}=\dfrac{x_0+m}{2}+b,\end{cases}$

即 $\begin{cases}k_{AB}=-1=\dfrac{y_0-n}{x_0-m},①\\ y_0+n=x_0+m+2b,②\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}m=y_0-b,\\ n=x_0+b,\end{cases}$

$\therefore B(y_0-b,x_0+b)$.

(2)设 $B(p,q)$，A,B 中点坐标为 $\left(\dfrac{x_0+p}{2},\dfrac{y_0+q}{2}\right)$.

$\because A,B$ 关于 $l:y=-x+b$ 对称，

$\therefore \begin{cases}k_{AB}\cdot k_l=-1,\\ \dfrac{y_0+q}{2}=-\dfrac{x_0+p}{2}+b,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\dfrac{y_0-q}{x_0-p}=1,\\ y_0+q=-x_0-p+2b,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}p=-y_0+b,\\ q=-x_0+b,\end{cases}$ $\therefore B(-y_0+b,-x_0+b)$.

4. 解析 设 $B(m,n)$，则 A,B 中点坐标为 $\left(\dfrac{2+m}{2},\dfrac{n+1}{2}\right)$ 在 l 上，$\because k_{AB}=\dfrac{n-1}{m-2}$，$k_l=-\dfrac32$，$\therefore \begin{cases}\dfrac{n-1}{m-2}\times\left(-\dfrac32\right)=-1,\\ 3\times\dfrac{2+m}{2}+2\times\dfrac{n+1}{2}+5=0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}m=-4,\\ n=-3,\end{cases}$

$\therefore B(-4,-3)$.

5. 解析 设圆心 $C(a,b)$，半径为 R，由题意，得 $\begin{cases}a^2=R^2-1^2,\\ b^2=\left(\dfrac{\sqrt2}{2}R\right)^2=\dfrac{R^2}{2},\end{cases}$ 消去 R，得 $a^2-2b^2+1=0(*)$. 又由已知，得 $\dfrac{|a-2b|}{\sqrt5}=\dfrac{\sqrt5}{5}$，可知 $a-2b=1$ 或 $a-2b=-1$. 分别代入$(*)$式，解得 $a=-1,b=-1$ 或 $a=1,b=1$. 即圆心坐标为 $(1,1)$ 或 $(-1,-1)$. 由 $a^2=R^2-1$，得 $R^2=2$. 所以所求圆的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 或 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$.

6. 解析 不妨设 F 为右焦点，记 F_1 为椭圆的左焦点，如图. 由椭圆定义知 $|PF|+|PF_1|=2a$，由对称性知 $|QF|=|PF_1|$，

$\therefore |PF|+|QF|=2a$，而 $|PQ|_{\min}=2b$，

$\therefore \triangle PFQ$ 周长的最小值为 $2a+2b$.