# 教材习题答案

## 第五章 数列

## 5.1 数列基础

### 5.1.1 数列的概念

练习 A

1.解析 $a_1=2,a_2=4,a_3=8$.

2.解析 (1)$a_1=1,a_2=4,a_3=9$.

(2)$a_1=-2,a_2=4,a_3=-6$.

(3)$a_1=0,a_2=\frac{1}{6},a_3=\frac{1}{6}$.

3.解析 (1)$a_n=n+1$.(2)$a_n=-3n$.

4.解析 因为 $a_{n+1}-a_n=[2(n+1)-3]-(2n-3)=2>0$,即 $a_{n+1}>a_n$,

所以数列$\{a_n\}$是递增数列.

5.解析 (1)证明:$a_n=f(n)=\frac{2n-1}{n}=2-\frac{1}{n}$,

∵ $n\in\mathbf{N}_+$,∴ $0<\frac{1}{n}\leqslant 1$,

∴ $1\leqslant 2-\frac{1}{n}<2$,即 $1\leqslant a_n<2$.

(2)易得 $a_{n+1}-a_n=\left(2-\frac{1}{n+1}\right)-\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,∵ $n\in\mathbf{N}_+$,

∴ $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$,

即 $a_{n+1}-a_n>0$,

∴ $\{a_n\}$是递增数列.

练习 B

1.解析 (1)$a_{10}=(-1)^{11}\times\frac{10+1}{2\times10-1}=-\frac{11}{19}$.

(2)$a_{10}=1+\cos\frac{9\pi}{2}=1+\cos\left(\frac{8\pi+\pi}{2}\right)=1+\cos\frac{\pi}{2}=1$.

2.解析 (1)$a_n=\frac{1}{2^n},a_{10}=\frac{1}{1\,024}$.

(2)$a_n=(-1)^{n+1}(2n-1),a_{10}=-19$.

3.解析 若168是$\{a_n\}$中的项,则存在正整数$n$使得 $n^2+2n=168$,解得 $n=12$ 或 $n=-14$(舍),所以168是$\{a_n\}$中的项,是第12项.

4.解析 $a_5=15,a_6=21,a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5.解析 (1)$a_n=2n+1$(答案不唯一).

(2)$a_n=-3^n$(答案不唯一).

### 5.1.2 数列中的递推

练习 A

1.解析 (1)$a_{n+1}-a_n=n,a_1=4;a_7=25$.

(2)$a_{n+1}-a_n=2,a_1=7;a_7=19$.

(3)$a_{n+1}=3a_n,a_1=2;a_7=1\,458$.

2.解析 (1)$a_1=2,a_2=1,a_3=\frac{1}{2},a_4=\frac{1}{4},a_5=\frac{1}{8}$.

(2)$a_1=3,a_2=5,a_3=7,a_4=9,a_5=11$.

3.解析 $F_3=F_1+F_2=2,F_4=F_3+F_2=3,F_5=F_4+F_3=5,F_6=F_5+F_4=8,F_7=F_6+F_5=13,F_8=F_7+F_6=21$.

前5项和 $S_5=F_1+F_2+F_3+F_4+F_5=12$.

4.解析 $a_1=-\frac{1}{4},a_2=5,a_3=\frac{4}{5},a_4=-\frac{1}{4},a_5=5$.

前3项和 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{111}{20}$,

前5项和 $S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{103}{10}$.

5.解析 ∵ $S_n=3n$,①

∴ $S_{n-1}=3(n-1)(n\geqslant2)$,②

由①-②得 $a_n=3n-3(n-1)=3(n\geqslant2)$,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=3$,满足该式,

∴ $\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3$.

练习 B

1.解析 (1)$a_1=1,a_2=3,a_3=7,a_4=15,a_5=31$.

前3项和 $S_3=a_1+a_2+a_3=11$,前5项和 $S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=57$.

(2)$a_1=2,a_2=\frac{5}{2},a_3=\frac{8}{3},a_4=\frac{33}{12},a_5=\frac{42}{15}=\frac{14}{5}$.

前3项和 $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{43}{6}$,前5项和 $S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{763}{60}$.

2.解析 不一定.也可能是常数列 $a_n=0$.

3.解析 ∵ $S_n=n^2-n$①,

∴ $S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)(n\geqslant2)$②,

由①-②得 $a_n=2n-2(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=0$ 满足该式,

∴ $a_n=2n-2$.

4.解析 $a_1=\frac{1}{2},a_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

递推关系为 $a_1=\frac{1}{2},a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{a_n}$.

### ◆习题 5-1A

1.解析 (1)1,1.4,1.41,1.414,1.414 2,1.414 21,….

(2)2,3,5,7,11,13,17,19.

2.解析 (1)$a_1=12,a_2=14,a_3=16,a_4=18,a_5=20$,前5项和 $S_5=80$.

(2)$a_1=5,a_2=-5,a_3=5,a_4=-5,a_5=5$,前5项和 $S_5=5$.

(3)$a_1=\frac{3}{2},a_2=1,a_3=\frac{7}{10},a_4=\frac{9}{17},a_5=\frac{11}{26}$,前5项和 $S_5=\frac{9\,177}{2\,210}$.

3.解析 (1)$a_7=\frac{1}{343},a_{10}=\frac{1}{1\,000},a_{n-1}=\frac{1}{(n-1)^3},a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^3}$.

(2)$a_7=\frac{1}{7},a_{10}=-\frac{1}{10},a_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n-1},a_{n+1}=\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}$.

(3)$a_7=-125,a_{10}=-1\,021,a_{n-1}=-2^{n-1}+3,a_{n+1}=-2^{n+1}+3$.

4.解析 $a_2=2,a_3=\frac{5}{2},a_4=\frac{29}{10},a_5=\frac{941}{290}$.

$S_1=a_1=1,S_2=a_1+a_2=3,S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{11}{2},S_4=\frac{42}{5},S_5=\frac{3\,377}{290}$.

5.解析 (1)$a_n=2-2n$.

(2)$a_n=\frac{n+5}{n+4}$.

(3)$a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$.

6.解析 (1)6,$a_n=2n$.

(2)8,64,256,$a_n=2^n$.

(3)5,0,-2,$a_n=6-n$.

(4)1,36,$a_n=n^2$.

7.解析 第4个等式:1+3+5+7+9=25,

第5个等式:1+3+5+7+9+11=36,

归纳第$n$个等式为 $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)=(n+1)^2$.

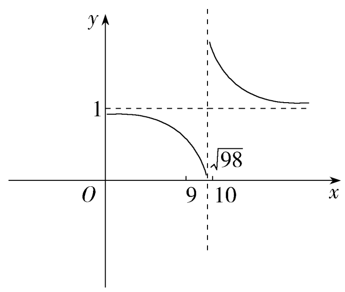
### ◆习题 5-1B

1.解析 从左到右依次填-1,0,15,15.

2.解析 (1)$a_{10}=120,a_{15}=255,a_{21}=483$.

(2)若440是数列$\{a_n\}$中的项,则存在正整数$n$,使得$440=n(n+2)$,解得$n=20$($n=-22$舍去),即$a_{20}=440$,故440是数列$\{a_n\}$中的第20项.若222是数列$\{a_n\}$中的项,则存在正整数$m$,使得$222=m(m+2)$,计算知该方程无解,故222不是$\{a_n\}$中的项.

3.解析 由于数列中的项对应函数 $y=f(x)$ 的图像上的一群孤立的点,因此可由函数图像来判断数列中各项的大小变化.函数 $y=1+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{97}}{x-\sqrt{98}}$ 的大致图像如图所示.




显然 $a_9$ 最小，$a_{10}$最大.

4.解析　(1)证明:由已知得 $a_n=\frac{1-2n}{n+1}(n\in\mathbf{N}_+)$,∴ $a_n=-\frac{2n-1}{n+1}=-2+\frac{3}{n+1}$,

∵ $n\in\mathbf{N}_+$,∴ $\frac{3}{n+1}>0$,∴ $a_n>-2$.

(2)由 $a_n=-2+\frac{3}{n+1}$得 $a_{n+1}=-2+\frac{3}{n+2}$,则 $a_{n+1}-a_n=\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+1}=\frac{-3}{(n+2)(n+1)}$.

∵ $n\in\mathbf{N}_+$,∴ $(n+2)(n+1)>0$,

∴ $\frac{-3}{(n+2)(n+1)}<0$,即 $a_{n+1}<a_n$,

∴ 数列$\{a_n\}$是递减数列.

5.解析　$a_n=\begin{cases}\frac{n+1}{2}, n\in\mathbf{N}_+\text{且 } n \text{ 为奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, n\in\mathbf{N}_+\text{且 } n \text{ 为偶数}.\end{cases}$

6.解析　∵ $S_n=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}$,①

∴ $S_{n-1}=1+\frac{1}{n-1}(n\geqslant2)$,②

①-②得,$a_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}(n\geqslant2)$,

当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2$ 不满足上式,

∴ $a_n=\begin{cases}2, n=1,\\ \frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}, n\geqslant2.\end{cases}$

## 5.2　等差数列

### 5.2.1　等差数列

练习 A

1.解析　(1)由 $a_n=a_m+(n-m)d$,知 $a_7-a_5=(7-5)d$,∴ $d=5$.

又 $a_5=a_1+4d$,∴ $a_1=-14$.

(2)∵ $a_{10}=a_3+(10-3)d=-1$,∴ $d=-3$,

∴ $a_{15}=a_{10}+(15-10)d=-16$.

2.解析　(1)24.(2)-2.

3.解析　(1)记该等差数列为$\{a_n\}$,则其通项公式为 $a_n=3n-1$,∴ $a_4=11$,$a_{10}=29$.

(2)记该等差数列为$\{a_n\}$,则其通项公式为 $a_n=-5n+17$,∴ $a_{15}=-58$.

4.解析　记该等差数列为$\{a_n\}$,则其通项公式为 $a_n=4n-1$.

令 $100=4n-1$,得 $n=\frac{101}{4}\notin\mathbf{N}_+$,故 100 不是等差数列$\{a_n\}$中的项.

令 $79=4n-1$,得 $n=20\in\mathbf{N}_+$,故 79 是等差数列$\{a_n\}$中的项.

5.解析　(1)$a_1=8$,$d=3$.(2)$a_1=10$,$d=-2$.

练习 B

1.解析　由题意可得等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=17+(n-1)\cdot(-0.6)=-0.6n+17.6$,

令 $a_n<0$,解得 $n>\frac{88}{3}$.又 $n\in\mathbf{N}_+$,∴ $a_{29}>0$,$a_{30}<0$.

即此等差数列从第 30 项开始出现负数.

2.证明　①若$\{a_n\}$是等差数列,则 $a_n=a_1+(n-1)d$,

整理得 $a_n=dn+a_1-d$,令 $d=k$,$b=a_1-d$,

∴ $a_n=kn+b$ 成立.

②若 $a_n=kn+b$①,则 $a_{n-1}=k(n-1)+b(n\geqslant2)$②,

①-②得:$a_n-a_{n-1}=k$($k$ 为常数),

∴ $\{a_n\}$是等差数列.

综合①②可知,原命题得证.

3.证明　∵ $\{a_n\}$是等差数列,∴ $a_n=a_1+(n-1)d$,

$a_s+a_t=a_1+(s-1)d+a_1+(t-1)d=2a_1+(s+t-2)d$,

$a_p+a_q=a_1+(p-1)d+a_1+(q-1)d=2a_1+(p+q-2)d$,

又∵ $s+t=p+q$,∴ $a_s+a_t=a_p+a_q$.

4.解析　设中间 3 个皮带轮的直径分别为$(a-d)$ mm,$a$ mm,$(a+d)$ mm,

由等差数列的性质知:$2a=120+216$,得 $a=168$,

由 $2(a-d)=120+168$,得:$a-d=144$,

由 $2(a+d)=168+216$,得:$a+d=192$,

故中间 3 个皮带轮的直径分别为 144 mm,168 mm,192 mm.

5.解析　(1)是.首项是 $a_1+md$,公差为 $d$.

(2)是.首项是 $a_1$,公差为 $2d$.

(3)是.首项是 $a_1+6d$,公差为 $7d$.

(4)是.证明:易得该无穷等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d$.记 $b_1=a_1+a_2+a_3$,$b_2=a_4+a_5+a_6$,$b_3=a_7+a_8+a_9$,……,则 $b_1=3a_1+3d$,$b_2=3a_1+12d$,$b_3=3a_1+21d$,……,易知 $b_n-b_{n-1}=b_{n-1}-b_{n-2}=\cdots\cdots=b_3-b_2=b_2-b_1=9d$,为一个常数,故$\{b_n\}$为等差数列,其首项是 $3(a_1+d)$,公差为 $9d$.

### 5.2.2　等差数列的前 $n$ 项和

练习 A

1.解析　(1)$S_{10}=10\times6+\frac{10\times9}{2}\times3=195$.

(2)$S_8=\frac{8(2+16)}{2}=72$.

2.解析　由等差数列的性质知:

$a_4=a_1+3d=10$①,$a_{10}=a_1+9d=-2$②,

由①②得:$a_1=16$,$d=-2$,

又 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$,

故 $S_{12}=60$.

3.解析　(1)原式$=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

(2)原式$=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$.

4.解析　记该等差数列为$\{a_n\}$,则 $a_1=63$,$d=-3$,则 $a_n=a_1+(n-1)d=63-3(n-1)$,令 $63-3(n-1)=-12$,

解得 $n=26$,所以 $S_{26}=26\times63+\frac{26\times25}{2}\times(-3)=663$.

5.解析　记该等差数列为$\{a_n\}$,则 $d=-1$,$a_1=4$,令 $-18=n\times4+\frac{n(n-1)}{2}\times(-1)$,

解得 $n=12$ 或 $n=-3$(舍去),即前 12 项的和为-18.

练习 B

1.解析　记该等差数列为$\{a_n\}$,则 $a_1=14$,$d=-3<0$.设其前 $n$ 项和最大,

则有 $\begin{cases}a_n\geqslant0,\\ a_{n+1}<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}14-3(n-1)\geqslant0,\\ 14-3n<0,\end{cases}$ 得 $\frac{14}{3}<n\leqslant\frac{17}{3}$.又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n=5$,即前 5 项的和最大.

2.解析　在两位数的正整数中,除以 3 余 1 的数有 10,13,16,…,97,共 30 个数.

它们的和为$\frac{30\times(10+97)}{2}=1\ 605$.

3.解析　(1)原式$=\frac{(n+2)(1+2n+3)}{2}=(n+2)^2$.

(2)原式$=\frac{(n+1)(1+3n+1)}{2}=\frac{1}{2}(n+1)\cdot(3n+2)$.

4.解析　∵ 凸 $n$ 边形的内角和是$(n-2)\times180°$,

∴ $40°\times n+\frac{n(n-1)}{2}\times20°=(n-2)\times180°$,

∴ $n^2-15n+36=0$,解得 $n=3$ 或 $n=12$,

容易判断 $n=12$ 时不符合题意,

故凸 $n$ 边形的边数为 3.

5.解析　设 2017 年供应的土地公顷数为 $a_1$,由等差数列前 $n$ 项和公式知:

$5a_1+\frac{5\times4}{2}\times25=1\ 000$,解得 $a_1=150$.

∴ 这个数列为 150,175,200,225,250.

◆习题 5-2A

1.解析　由题知 $a_1=4$,$a_2=7$,$a_3=10$,

递推公式为 $a_{n+1}-a_n=3$,$a_1=4$.

2.解析　(1)$a_8=a_1+7d=27$.

(2) $a_7=a_1+6d$,故 $a_1=\frac{25}{2}$.

(3) $d=\frac{a_{19}-a_4}{19-4}=-\frac{2}{5}$, $a_7=a_4+3d=\frac{44}{5}$.

3. 解析　在 12 与 60 之间插入 3 个数,则公差 $d=\frac{60-12}{4}=12$,所以插入的 3 个数依次为 24,36,48.

4. 解析　集合 $\{m\mid m=7n, n\in\mathbf{N}, 0<m<100\}$ 的元素按从小到大的顺序构成等差数列 7,14,21,⋯,98,易知项数 $n=14$,$\therefore S_{14}=\frac{14\times(7+98)}{2}=735$,

即这些元素的和为 735.

5. 解析　(1) $S_{10}=10\times2+\frac{10\times9}{2}\times5=245$.

(2) $S_{12}=\frac{12\times(-2+6)}{2}=24$.

## ◆习题 5-2B

1. 解析　设三角形三个内角的度数分别为 $a-d, a, a+d$,则 $a-d+a+a+d=180°$,$\therefore a=60°$,即三个内角中必有一个内角大小为 60°,其余两个内角的大小不能确定.

2. 解析　$a_{10}=a_1+9d$,$\therefore a_1=-2+9\times5=43$,

故 $S_8=8\times43+\frac{8\times7}{2}\times(-5)=204$.

3. 解析　$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9\times2a_5}{2}=9a_5<0$,①

$S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10(a_5+a_6)}{2}=5(a_5+a_6)>0$.②

由②得 $a_6>-a_5>0$,故此等差数列的前 5 项和最小.

4. 解析　由等差数列的性质知 $a_1+a_{13}=a_3+a_{11}$,

$\therefore S_{13}=\frac{a_1+a_{13}}{2}\times13=\frac{a_3+a_{11}}{2}\times13=39$.

5. 解析　(1) $f(1)=0+1+2+\cdots+19=\frac{19\times(1+19)}{2}=190$,

$f(5)=4+3+2+1+0+1+2+\cdots+15=10+\frac{(1+15)\times15}{2}=130$,

$f(20)=19+18+\cdots+0=\frac{19(19+1)}{2}=190$.

(2) 设 $n$ 是 1~20 中的某一个整数,则

$f(n)=(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1+0+1+2+\cdots+(20-n)=\frac{(n-1)[1+(n-1)]}{2}+\frac{(20-n)[1+(20-n)]}{2}=\frac{1}{2}(2n^2-42n+420)=n^2-21n+210=\left(n-\frac{21}{2}\right)^2+\frac{399}{4}$.

又 $n\in\mathbf{N}_+$,所以当 $n=10$ 或 11 时 $f(n)$ 取得最小值,

$f(10)=f(11)=100$,即最小值为 100.

当 $n\geqslant21(n\in\mathbf{N}_+)$ 时 $f(n)$ 为增函数,即 $f(n)\geqslant f(21)=20+19+\cdots+2+1=210>100$.

综上,当 $n$ 为 10 或 11 时,$f(n)$ 取最小值,最小值为 100.

6. 解析　此题可理解为等差数列,由题意,$S_n=996$, $n=8$, $d=17$,

又 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d$,所以 $a_1=65$,

即第一个孩子分得 65 斤棉花.

故每个孩子分得的棉花斤数依次为 65,82,99,116,133,150,167,184.

# 5.3　等比数列

## 5.3.1　等比数列

### 练习 A

1. 解析　(1)否.(2)是.(3)否.(4)是.

2. 解析　(1) $-32, 64$.(2) $\frac{16}{27}, \frac{32}{81}$.

(3) 0.297, 0.089 1.(4) $-3, 3\sqrt{3}$.

3. 解析　(1) $\pm6$.(2) $\pm\sqrt{13}$.

4. 解析　(1) 48.(2) $\frac{1}{2}$.(3) $\sqrt[3]{16}$.(4) $\pm2$.

(5) 4.

5. 解析　(1) 2017−1945=72 年.按照每 24 个月翻一番,总共翻 $\frac{72}{2}=36$ 番,设 $a_1=5\ 000$, $q=2$,$\therefore a_{37}=a_1q^{36}=5\ 000\times2^{36}=343\ 597\ 383\ 680\approx3.4\times10^{14}$.

(2) $\because 3.4\times10^{14}<9.3\times10^{16}$,$\therefore$ (1)中得到的预测值比这一值小.

### 练习 B

1. 解析　$\because a_{15}=a_5\cdot q^{10}$,$\therefore q^{10}=\frac{1}{4}$,$\therefore q^5=\pm\frac{1}{2}$,

又 $a_{20}=a_{15}\cdot q^5$,$\therefore a_{20}=\pm\frac{5}{2}$.

2. 解析　存在.非零常数列,如 2,2,2,⋯.

3. 解析　$a_1>0, q>1$ 或 $a_1<0, 0<q<1$.

4. 证明　①若 $\{a_n\}$ 为等比数列,则 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{a_1}{q}\cdot q^n(q\neq0)$,

令 $\frac{a_1}{q}=k$,得 $a_n=k\cdot q^n$.

② $\because a_n=k\cdot q^n$($k, q$ 都是不为 0 的常数)①,$\therefore a_{n+1}=k\cdot q^{n+1}$②,

$\frac{②}{①}$得,$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(q\neq0)$,

$\therefore \{a_n\}$ 是公比为 $q$ 的等比数列.

综合①②可知,原命题得证.

5. 证明　$\because \{a_n\}$ 是等比数列,设其公比为 $q_1$,

$\therefore a_s=a_1\cdot q_1^{s-1}$, $a_t=a_1q_1^{t-1}$, $a_p=a_1q_1^{p-1}$, $a_q=a_1\cdot q_1^{q-1}$,

$a_s\cdot a_t=a_1^2\cdot q_1^{s+t-2}$, $a_p\cdot a_q=a_1^2\cdot q_1^{p+q-2}$,

又 $s+t=p+q$,$\therefore a_s\cdot a_t=a_p\cdot a_q$.

6. 解析　(1)是.首项为 $a_1q^m$,公比为 $q$.

(2)是.首项为 $a_1$,公比为 $q^2$.

(3)是.证明:易知 $a_n=a_1q^{n-1}$.

令 $b_1=a_1a_2a_3a_4a_5$, $b_2=a_6a_7a_8a_9a_{10}$, $b_3=a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}$, ⋯⋯, $b_n=b_{5n-4}b_{5n-3}b_{5n-2}\cdot b_{5n-1}b_{5n}$.

易得 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\cdots=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_2}{b_1}=q^{25}$,为一个常数,所以数列 $\{b_n\}$ 为一个等比数列,其首项为 $a_1q^{10}$,公比为 $q^{25}$.

7. 解析　设第 $n$ 个图形的边长为 $a_n$,

由题意知,从第 1 个图形起,每一个图形的边长均为上一个图形边长的 $\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1,公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列,故 $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

要计算第 $n$ 个图形的周长,只需计算第 $n$ 个图形的边数.

第一个图形的边数为 3,

从第 2 个图形起,每一个图形的边数均为上一个图形边数的 4 倍,

$\therefore$ 第 $n$ 个图形的边数为 $3\times4^{n-1}$,

$\therefore$ 第 $n$ 个图形的周长为 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times(3\times4^{n-1})=3\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$.

第一个图形的面积 $S_1=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

第二个图形的面积 $S_2=S_1+3\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}$.

第三个图形的面积 $S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}+12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{27}$.

第四个图形的面积 $S_4=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{27}+\frac{4\sqrt{3}}{243}$.

从第三个图形开始,后面的图形增加的面积是前一个图形增加面积的 $\frac{4}{9}$,$\therefore S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{\sqrt{3}}{12}\times\frac{4}{9}+\frac{\sqrt{3}}{12}\times\left(\frac{4}{9}\right)^2+\cdots+\frac{\sqrt{3}}{12}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$.

## 5.3.2 等比数列的前 $n$ 项和

### 练习 A

1. 解析 (1) 189. (2) 8.25. (3) 15.5.

(4) $-\frac{91}{45}$.

2. 解析 设该等比数列为 $\{a_n\}$，由已知得

$a_1=\frac{1}{4}, q=-2$,

则从第 6 项到第 10 项的和为 $S_{10}-S_5=$

$\frac{\frac{1}{4}[1-(-2)^{10}]}{1-(-2)}-\frac{\frac{1}{4}[1-(-2)^5]}{1-(-2)}=-\frac{1}{12}\times(2^5+2^{10})=-88$.

3. 解析 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=a_1q^2$, $S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2$,

$\therefore a_1q^2=6$①，$a_1+a_1q=12$②，

$\frac{①}{②}$得：$\frac{q^2}{1+q}=\frac{6}{12}$，解得：$q=-\frac{1}{2}$ 或 $q=1$.

4. 解析 第 5 年造林 $15\times1.2^4=31.104$ 公顷，该林场 5 年共造林 $\frac{15(1-1.2^5)}{1-1.2}=111.624$ 公顷.

5. 解析 原题可以理解为等比数列模型. $a_1=5, q=1.1$. 设第 $n$ 年总产量达到 30 万吨，

故 $\frac{5(1-1.1^n)}{1-1.1}=30$，即 $1.6=1.1^n$，两边同时取自然对数，

得 $\lg 1.6=n\lg 1.1$，解得 $n\approx5$，

故第 5 年达到 30 万吨.

### 练习 B

1. 解析 (1) 原式 $=(1-0.1)+(1-0.01)+\cdots+(1-0.\overbrace{00\cdots0}^{(n-1)个0}1)=n-(0.1+0.01+\cdots+0.\overbrace{00\cdots0}^{(n-1)个0}1)=n-\frac{0.1(1-0.1^n)}{1-0.1}$

$=n-\frac{1-0.1^n}{9}$.

(2) 原式 $=(a+a^2+\cdots+a^n)-(1+2+\cdots+n)$.

①当 $a=1$ 时，原式 $=n-(1+2+\cdots+n)=-\frac{n(n-1)}{2}$.

②当 $a\neq1$ 且 $a\neq0$ 时，原式 $=\frac{a(1-a^n)}{1-a}-\frac{n(n+1)}{2}$.

2. 解析 设该等比数列为 $\{a_n\}$，$S_n$ 为其前 $n$ 项和，

则 $S_5, S_{10}-S_5, S_{15}-S_{10}$ 仍然成等比数列，

即 $(S_{10}-S_5)^2=S_5\cdot(S_{15}-S_{10})$，得 $S_{15}=210$.

3. 解析 设该等比数列为 $\{a_n\}$，公比为 $q$，由题易知，首项 $a_1=-1, q\neq1$.

则 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}}=1+q^5=\frac{31}{32}$,

$\therefore q^5=-\frac{1}{32}$，$\therefore q=-\frac{1}{2}$.

故 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{-1\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{85}{128}$.

4. 解析 由题知 $S_n=-2\times3^n+2$，①

则 $S_{n-1}=-2\times3^{n-1}+2(n\geqslant2)$，②

①−②得：$a_n=-2\times3^n+2\times3^{n-1}=-4\times3^{n-1}$ $(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-4$ 满足上式.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=-4\times3^{n-1}$.

5. 解析 由题可设，每层所挂灯的数目构成等比数列 $\{a_n\}$，其前 $n$ 项和为 $S_n$. 设塔顶层灯的数目为 $a_1$，由题意可得 $q=2, n=7, S_n=381$，

则有 $S_7=\frac{a_1(1-2^7)}{1-2}$，解得 $a_1=3$.

### ◆习题 5-3A

1. 解析 (1) $\because a_5=8, a_7=16$，$\therefore a_1q^4=8$, $a_1q^6=16$，$\therefore q^2=2$，$\therefore q=\sqrt{2}$ 或 $q=-\sqrt{2}$, $a_1=2$.

(2) $\because a_3=2, q=-1$，$\therefore a_1=2$，$\therefore a_{15}=a_1q^{14}=2$.

2. 解析 $\pm ab(a^2+b^2)$.

3. 解析 设每年的国内生产总值构成数列 $\{a_n\}$，则 $\{a_n\}$ 是等比数列且 $a_1=2\ 000$，公比 $q=1+8\%=1.08$，这个城市近 10 年的国内生产总值一共是 $S_{10}=\frac{a_1(1-q^{10})}{1-q}=\frac{2\ 000(1-1.08^{10})}{1-1.08}\approx28973.1$ (亿元).

4. 解析 由题知 $a_1=a, q=1+p$.

$\therefore a_n=a_1\cdot q^{n-1}=a\cdot(1+p)^{n-1}$, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a[1-(1+p)^n]}{-p}$.

5. 解析 设这 3 个数依次为 $\frac{a}{q}, a, aq$ ($a$, $q$ 为常数且均不为 0)，则由题意知，

$\frac{a}{q}\cdot a\cdot aq=64$，$\therefore a=4$，又其和为 14，

即 $\frac{4}{q}+4+4q=14$，化简得 $2q^2-5q+2=0$，

解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$. 故所求等比数列为 2，4，8 或 8，4，2.

6. 解析 该工厂的年增长率为 $(1+p)^{12}-1$.

7. 解析 记前 10 个正三角形的边长依次为 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$，

则前 10 个正三角形的周长之和 $C_{10}=3(a_1+a_2+\cdots+a_{10})$，

即 $C_{10}=3\left(a+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\cdots+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^9a\right)$

$=3\cdot\frac{a\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\frac{6a\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}\right]}{2-\sqrt{3}}$

$=6(2+\sqrt{3})\times\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{10}\right]a$.

8. 解析 $\because \{a_n\}$ 是等比数列，且 $a_n>0$，设首项为 $a_1$，公比为 $q$，则 $a_1>0, q>0$.

$\because \lg a_{n+1}-\lg a_n=\lg\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lg q$ (常数)，

$\therefore$ 数列 $\{\lg a_n\}$ 为等差数列，其首项为 $\lg a_1$，公差为 $\lg q$.

9. 解析 此人欠银行的钱数 $S_5=100\ 000\times(1+4.75\%)^5=126\ 115.99$ 元.

### ◆习题 5-3B

1. 解析 (1) $\because q^{4-1}=\frac{96}{-1.5}$，$\therefore q=-4$, $S_n=-0.3[1-(-4)^n]$.

(2) 由题易知 $q\neq1$，则 $S_3=\frac{2(1-q^3)}{1-q}=26$，$\therefore q^3-13q+12=0$，得 $q=3$ 或 $q=-4$.

当 $q=3$ 时，$a_3=18$. 当 $q=-4$ 时，$a_3=32$.

(3) $S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{16}a_1=3\frac{7}{8}$，$\therefore a_1=2$,

$a_4=a_1q^3=\frac{1}{4}$.

(4) $\because a_4=a_3q$，$\therefore q=\frac{a_4}{a_3}=-\frac{3}{2}$,

$\therefore a_1=\frac{a_3}{q^2}=-\frac{16}{9}$. 故 $S_5=\frac{\left(-\frac{16}{9}\right)\times\left[1-\left(-\frac{3}{2}\right)^5\right]}{1-\left(-\frac{3}{2}\right)}=-\frac{55}{9}$.

2. 解析 当 $a=0$ 时，不是等比数列，此时 0，0，0，…不满足定义.

当 $a\neq0$ 时，是等比数列，$\because \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ (常数) 满足定义，$\therefore$ 它是等比数列.

3. 解析 是. 由题知 $\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{a_{n+2}}{a_n}=q^2$，满足等比数列的定义，故新数列是等比数列.

4. 解析 除第 5 项外，有可能出现序号与

数值都相等的项.

设等比数列$\{a_n\}$的首项为$a_1$,公比为$q_1$,等比数列$\{b_n\}$首项为$b_1$,公比为$q_2$,则$q_1 \neq q_2$.

$\because a_5=b_5$, $\therefore a_1q_1^4=b_1q_2^4$, $\therefore \frac{a_1}{b_1}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^4$.①

假设除第5项外,序号与数值相等的项为第$m$项,即$a_m=b_m(m\neq 5)$,

则$a_1q_1^{m-1}=b_1q_2^{m-1}$,则$\frac{a_1}{b_1}=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{m-1}$,②

由①②知$\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^4=\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{m-1}$.当$\frac{q_2}{q_1}\neq -1$时,$m-1=4$,$\therefore m=5$,与假设矛盾.

当$\frac{q_2}{q_1}=-1$时,$m-1=2k(k\in \mathbf{Z})$,则$m=2k+1(k\in \mathbf{Z})$,此时可能出现序号与数值都相等的项.

故除第5项外,有可能出现序号与数值都相等的项.

5. 解析　不一定.还要看首项$a_1$,若$a_1<0$,则$\{a_n\}$为递减数列.

6. 解析　设等差数列$\{a_n\}$的首项$a_1=a$,公差为$d$,则其通项公式为$a_n=a+(n-1)d$,

前$n$项和$S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d$,

依题知$\begin{cases}\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4=\left(\frac{1}{5}S_5\right)^2,\\ \frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2,\end{cases}$

即$\begin{cases}\frac{1}{3}(3a+3d)\cdot\frac{1}{4}(4a+6d)=\frac{1}{25}(5a+10d)^2,\\ \frac{1}{3}(3a+3d)+\frac{1}{4}(4a+6d)=2,\end{cases}$

整理得$\begin{cases}3ad+5d^2=0,\\ 2a+\frac{5}{2}d=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ d=0\end{cases}$或$\begin{cases}a=4,\\ d=-\frac{12}{5},\end{cases}$经检验两组均符合题意.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=1$或$a_n=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$.

7. 解析　数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

前$n$项积$T_n=a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\cdots\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$,

即$T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2+(-1)+0+\cdots+(n-3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-5)}{2}}(n\in \mathbf{N}_+)$,结合复合函数的相关知识可知,

当$n=2$或$n=3$时,$T_n$取最大值,为$(T_n)_{\max}=8$.

## ◆习题 5-3C

1. 解析　令$S_n=1\times 2+2\times 2^2+\cdots+(n-1)\times 2^{n-1}+n\times 2^n$,①

$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-2)\times 2^{n-1}+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$,②

①-②得:$-S_n=1\times 2+2^2+\cdots+2^n-n\times 2^{n+1}$,

$\therefore -S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times 2^{n+1}$,

整理得:$S_n=(n-1)\times 2^{n+1}+2$.

2. 解析　(1)$\because a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(4a_n+2)-(4a_{n-1}+2)=4(a_n-a_{n-1})(n\geqslant 2)$,

$\therefore a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$,即$b_n=2b_{n-1}(n\geqslant 2)$.

又$S_2=4a_1+2$,$\therefore a_2=3a_1+2=5$,$\therefore b_1=a_2-2a_1=3$,

故数列$\{b_n\}$是首项为3,公比为2的等比数列.

(2)$c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{b_1\cdot q^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3\times 2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4}$(常数),

故数列$\{c_n\}$为等差数列.

(3)$\because \{c_n\}$为等差数列,且$c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$,

公差$d=\frac{3}{4}$,

$\therefore c_n=\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{3}{4}$,

$\therefore a_n=2^n\left[\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{3}{4}\right]=2^{n-1}+3(n-1)\times 2^{n-2}=(3n-1)\cdot 2^{n-2}$.

则$S_n=2\times 2^{-1}+5\times 2^0+8\times 2^1+\cdots+(3n-4)\times 2^{n-3}+(3n-1)\times 2^{n-2}$,①

$2S_n=2\times 2^0+5\times 2^1+8\times 2^2+\cdots+(3n-4)\times 2^{n-2}+(3n-1)\times 2^{n-1}$,②

①-②得:$-S_n=1+3(1+2+\cdots+2^{n-2})-(3n-1)\times 2^{n-1}$,

$-S_n=1+3\times\frac{1\times(1-2^{n-1})}{1-2}-(3n-1)\times 2^{n-1}$,

$\therefore -S_n=1+3\times(2^{n-1}-1)-(3n-1)\times 2^{n-1}$,

$\therefore -S_n=-2+(4-3n)\times 2^{n-1}$,

$\therefore S_n=(3n-4)\times 2^{n-1}+2$.

3. 解析　(1)$\because S_n=2a_n-3n$①,令$n=1$得:$S_1=a_1=2a_1-3$,得:$a_1=3$,

当$n\geqslant 2$时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-3(n-1)$②,

①-②得:$a_n=2a_n-2a_{n-1}-3$,即$a_n-2a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$,

故$\{a_n\}$的首项为$a_1=3$,递推关系为$a_n-2a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$.

(2)由题知$b_{n+1}=Ab_n+B$,则$b_{n+1}-\frac{B}{1-A}=Ab_n+B-\frac{B}{1-A}(A\neq 1,B\neq 0)$.

即$b_{n+1}-\frac{B}{1-A}=Ab_n-A\frac{B}{1-A}$,整理得:

$\frac{b_{n+1}-\frac{B}{1-A}}{b_n-\frac{B}{1-A}}=A\left(容易判断 b_n\neq\frac{B}{1-A}\right)$,

故$\left\{b_n-\frac{B}{1-A}\right\}$是以$A$为公比的等比数列.

由(1)知$a_n-2a_{n-1}=3(n\geqslant 2)$,则$a_n=2a_{n-1}+3$,$a_n+3=2a_{n-1}+6$,

即$\frac{a_n+3}{a_{n-1}+3}=2(n\geqslant 2)$,又$a_1=3$,

则$\{a_n+3\}$是以6为首项,2为公比的等比数列.

$\therefore a_n+3=6\times 2^{n-1}$,$\therefore a_n=6\cdot 2^{n-1}-3$.

# 5.4　数列的应用

## ◆习题 5-4A

1. 解析　是.第$m$期还款金额-第$m-1$期还款金额=-每期还款本金×利率.

2. 解析　常数列.

3. 解析　设每年约需存$x$元,

$x(1+5\%)^5+x(1+5\%)^4+x(1+5\%)^3+x(1+5\%)^2+x(1+5\%)=100\ 000$,

解得:$x=17\ 236$元,即每年约需存17 236元.

4. 解析　由题知:

$20\times 0.8^{30}+20\times 0.8^{29}+\cdots+20\times 0.8=79.9$ mg.

故30天后此人身体中积累了79.9 mg药物.

5. 解析　设第$n$天相逢,

则有$\frac{1\times(1-2^n)}{1-2}+\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=5$,解得$2^n=2+\sqrt{6}$,解得$n\approx 2.2$,

故大约在第3天相逢.当$n=2.2$时,大鼠穿墙共$\frac{1\times(1-2^{2.2})}{1-2}\approx 3.5$尺,

小鼠穿墙共$\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2.2}\right]}{1-\frac{1}{2}}\approx 1.5$尺.

## ◆习题 5-4B

1. 解析　(1)$a=5b+50(b\in \mathbf{N}_+)$.

(2)当$b=30$时,$a=5\times 30+50=200$ mm.

故对应的脚长为200 mm.

(3)当$a=282$时,即$5b+50=282$,得:$b=46.4$.

故应穿47号鞋.

2. 解析　设五个人所分得的面包数依次为$a-2d$,$a-d$,$a$,$a+d$,$a+2d$(其中$d>0$),

则$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=5a=100$,$\therefore a=20$.

由$\frac{1}{7}(a+a+d+a+2d)=a-2d+a-d$，得$3a+3d=7(2a-3d)$，

$\therefore 24d=11a$，$\therefore d=\frac{55}{6}$，$\therefore$ 最小的 1 份为 $a-2d=20-\frac{110}{6}=\frac{5}{3}$个.

3.解析　依题意可知，经过 50 轮后国内消费总金额为 $200+200\times50\%+200\times(50\%)^2+\cdots+200\times(50\%)^{50}$

$=\frac{200[1-(50\%)^{51}]}{1-50\%}\approx400$（亿元）.

4.解析　投资项目到第 50 年年末获得的总收益为 $200+50\times15=950$ 万元.

若年利率为 8%，则投资者到第 50 年年末的所有收益为 $200\times(1+8\%)+200\times(1+8\%)^2+\cdots+200\times(1+8\%)^{50}$

$=\frac{200\times(1+8\%)[1-(1+8\%)^{50}]}{1-(1+8\%)}$

$\approx123\ 934$（万元）.

$\because 123\ 934>950$，$\therefore$ 投资者不应该投资该项目.

5.解析　该企业未来利润的现值之和为 $200+200\times(1+4\%)+200\times(1+4\%)^2+\cdots+200\times(1+4\%)^n$

$=\frac{200\times[1-(1+4\%)^n]}{1-(1+4\%)}=5\ 000[(1+4\%)^n-1]$.

当 $n=20$ 时，$5\ 000[(1+4\%)^{20}-1]=5\ 956>5\ 500$.

$\therefore$ 不同意该企业管理人的提议.

6.解析　若买股票，每股获利 $18.96-17.25=1.71$（元），

每股获纯利 $1.71-1.71\times0.3\%=1.704\ 87$（元），

全部获利 $1.704\ 87\times10\ 000=17\ 048.7$（元）.

若全部存入银行，到期本利和为 $17.25\times(1+0.8\%)^{12}\times10\ 000\approx189\ 808.65$ 元.

纯获利 $189\ 808.65-172\ 500=17\ 308.65>17\ 048.7$.

$\therefore$ 全部存入银行较好.

7.解析　(1)第 1 年投入为 800 万元，第 2 年投入为 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)$万元，

第 $n$ 年投入为 $800\times\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$万元，所以 $n$ 年内的总投入 $a_n=800+800\times\frac{4}{5}+\cdots+800\times\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}=4\ 000\times\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]$.

第 1 年旅游业收入为 400 万元，第 2 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)=400\times\frac{5}{4}=500$ 万元，

第 $n$ 年旅游业收入为 $400\times\left(1+\frac{1}{4}\right)^{n-1}=400\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$万元，

$\therefore n$ 年内的旅游业总收入 $b_n=400+400\times\frac{5}{4}+\cdots+400\times\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}=1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]$万元.

(2)设至少经过 $n$ 年旅游业的总收入就能超过总投入，

即 $b_n-a_n>0$，即

$1\ 600\times\left[\left(\frac{5}{4}\right)^n-1\right]-4\ 000\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right]>0$,

化简得 $2\times\left(\frac{5}{4}\right)^n+5\times\left(\frac{4}{5}\right)^n-7>0$，设 $t=\left(\frac{4}{5}\right)^n$，则不等式等价为 $5t^2-7t+2>0$，解得 $0<t<\frac{2}{5}$或 $t>1$（舍去）.

即$\left(\frac{4}{5}\right)^n<\frac{2}{5}$，又 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $n\geqslant5$.

即经过 5 年旅游业的总收入就能超过总投入.

## 5.5　数学归纳法

### ◆习题 5-5A

1.解析　(1)成立.

(2)不一定.如 $a_n=\begin{cases}3n(n\leqslant2),\\n+1(n\geqslant3).\end{cases}$

2.证明　(1)$n=1$ 时，左边$=1\times2$，右边$=\frac{1}{3}\times1\times2\times3=2$，等式成立.

(2)假设 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$时，等式成立，即 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$，

那么当 $n=k+1$ 时，$1\times2+2\times3+\cdots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$

$=\frac{1}{3}(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，等式成立.

$\therefore$ 由数学归纳法基本原理知等式成立.

3.证明　①当 $n=1$ 时，左边$=-1$，右边$=-1$，左边=右边，等式成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$时，等式成立，即$-1+3-5+\cdots+(-1)^k(2k-1)=(-1)^k\cdot k$，

那么当 $n=k+1$ 时，$-1+3-5+\cdots+(-1)^k\cdot(2k-1)+(-1)^{k+1}(2k+1)=(-1)^kk+(-1)^{k+1}(2k+1)$

$=(-1)^{k+1}\cdot(-k+2k+1)=(-1)^{k+1}(k+1)$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

$\therefore$ 由数学归纳法基本原理知等式成立.

4.证明　①当 $n=2$ 时，$(a_1+a_2)^2=a_1^2+a_2^2+2a_1a_2$，等式成立.

②假设 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$时，等式成立，即$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{k-1}a_k)$，

那么当 $n=k+1$ 时，

$(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2=(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+2a_{k+1}\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{k-1}a_k)+2a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k+1}^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_k^2+a_{k+1}^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_{k+1}+a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1})$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

$\therefore$ 由数学归纳法基本原理知等式成立.

5.证明　①当 $n=1$ 时，左边$=1=1=$右边，等式成立.

②假设当 $n=k$ 时，等式成立，即 $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}$，

当 $n=k+1$ 时，

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)$

$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由数学归纳法基本原理知等式成立.

6.证明　①当 $n=1$ 时，$(1+x)^1\geqslant1+x$，不等式成立.

②假设当 $n=k$ 时不等式成立，即$(1+x)^k\geqslant1+kx$，

当 $n=k+1$ 时，$(1+x)^{k+1}=(1+x)(1+x)^k\geqslant(1+x)(1+kx)$，

又$(1+x)(1+kx)=1+(1+k+kx)\cdot x=1+[1+k(1+x)]\cdot x$，

且 $x>1$，$\therefore 1+[1+k(1+x)]x>1+(k+1)x$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时不等式也成立.

由数学归纳法基本原理知原不等式成立.

### ◆习题 5-5B

1.解析　(1)不成立.

(2)一定.

2.解析　$a_1=0,a_2=\frac{1}{2},a_3=\frac{2}{3},a_4=\frac{3}{4},a_5=\frac{4}{5}$.

猜测这个数列的通项公式为 $a_n=\frac{n-1}{n}$.

证明：当 $n=1$ 时，$a_1=0$，通项公式成立.

假设当 $n=k$ 时通项公式成立，即 $a_k=\frac{k-1}{k}$.

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}=\frac{1}{2-\frac{k-1}{k}}=\frac{k}{k+1}$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，通项公式也成立.

由数学归纳法基本原理知通项公式成立.

3. 解析　易得 $S_1=\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{3}$.

$S_2=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}=\frac{2}{5}$.

$S_3=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}=\frac{3}{7}$.

$S_4=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}=\frac{4}{9}$.

$\therefore$ 猜想 $S_n=\frac{n}{2n+1}$.

证明：当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{3}=\frac{1}{2\times1+1}$，猜想成立.

假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时，猜想成立，即 $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$ 成立.

那么当 $n=k+1$ 时，$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时猜想成立.

$\therefore$ 由数学归纳法基本原理知猜想成立.

4. 解析　易得 $S_1=\frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}$.

$S_2=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}$.

$S_3=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}$.

$S_4=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}=\frac{4}{5}$.

猜想：$S_n=\frac{n}{n+1}$.

证明：(1) 当 $n=1$ 时，$S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$，猜想成立.

(2) 假设 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时，猜想成立，即 $S_k=\frac{k}{k+1}$ 成立.

那么当 $n=k+1$ 时，

$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{(k+1)+1}$.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时等式成立.

$\therefore$ 由数学归纳法基本原理知猜想成立.

5. 证明　①当 $n=1$ 时，$4^{2+1}+3^{1+2}=64+27=91=13\times7$，能被 13 整除.

②假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时，命题成立，即 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 能被 13 整除.

则当 $n=k+1$ 时，$4^{2(k+1)+1}+3^{k+1+2}=16\times4^{2k+1}+3\times3^{k+2}=16\times4^{2k+1}+16\times3^{k+2}-13\times3^{k+2}=16(4^{2k+1}+3^{k+2})-13\times3^{k+2}$.

$\because$ $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 和 $-13$ 都能被 13 整除，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，命题也成立.

$\therefore$ 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$，$4^{2n+1}+3^{n+2}$ 都能被 13 整除.

6. 解析　猜想：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$.

证明：当 $n=1$ 时，$1^3=1^2$，等式成立.

假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$1^3+2^3+\cdots+k^3=(1+2+3+\cdots+k)^2$ 成立.

则当 $n=k+1$ 时，

$1^3+2^3+\cdots+k^3+(k+1)^3=(1+2+3+\cdots+k)^2+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=[1+2+3+\cdots+k+(k+1)]^2$.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上可知，对 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，等式恒成立.

7. 解析　由题知 $a_2-a_1=2$，

$a_3-a_2=4$，

$a_4-a_3=8$.

猜想：$a_n-a_{n-1}=2^{n-1}(n\geqslant2)$，$a_1=0$.

又 $a_{n-1}-a_{n-2}=2^{n-2}$，

……

$a_3-a_2=2^2$，

$a_2-a_1=2^1$，

$\therefore$ $a_n-a_1=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，

$\therefore$ $a_n=2^n-2+a_1$，又 $a_1=0$，

$\therefore$ $a_n=2^n-2$. 当 $n=1$ 时也满足该式.

$\therefore$ $a_n=2^n-2$.

证明：当 $n=1$ 时，$a_1=0=2^1-2$，猜想成立.

假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时猜想成立，即 $a_k=2^k-2$，

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=a_k+2^k=2^k+2^k-2=2^{k+1}-2$，

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时猜想也成立.

由数学归纳法基本原理知猜想成立.

## 复习题

### A 组

1. 解析　(1) 15，63，一个通项公式为 $a_n=2^n-1$.

(2) 10，37，一个通项公式为 $a_n=n^2+1$.

(3) $\frac{1}{8}$，$-\frac{1}{64}$，一个通项公式为 $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$.

(4) $\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，一个通项公式为 $a_n=\sqrt{n}$.

2. 解析　$a_n=n^2-1$.

3. 解析　$a_1=1$，$a_3=2$.

则 $a_3=a_2+a_1$，$\therefore$ $a_2=1$，

$a_4=a_3+a_2=2+1=3$.

$a_5=a_4+a_3=3+2=5$.

$a_6=a_5+a_4=5+3=8$.

$a_7=a_6+a_5=8+5=13$.

$a_8=a_7+a_6=13+8=21$.

$a_9=a_8+a_7=21+13=34$.

$a_{10}=a_9+a_8=34+21=55$.

$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1+1+2+3+5=12$.

4. 证明　$\because$ $a_n=2n-1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=1$.

$\therefore$ $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$.

又 $\frac{(a_n+1)^2}{4}=\frac{(2n-1+1)^2}{4}=n^2=S_n$，

$\therefore$ $S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}$.

5. 解析　(1) $S_4=41$，$S_5=71$.

(2) $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=2+2^0+5+2^1+8+2^2+\cdots+3n-1+2^{n-1}$，

即 $S_n=2+5+8+\cdots+3n-1+2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}$，

即 $S_n=\frac{n(2+3n-1)}{2}+\frac{2^0(1-2^n)}{1-2}$，$\therefore$ $S_n=2^n+\frac{n(3n+1)}{2}-1$.

6. 解析　由题知：$a_{n+1}+1=2a_n+2$，且 $a_1=1$，

整理得：$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=2$，又 $b_1=a_1+1=2$，

$\therefore$ $\{b_n\}$ 是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

$\therefore$ $b_n=2\times2^{n-1}=2^n$.

$\therefore$ $a_n=b_n-1=2^n-1$.

7. 解析　结合二十四节气表可知，从冬至到夏至，日影长度依次减小，各节气时的日影长度构成一个等差数列，即 $\{a_n^1\}$；从夏至再回到冬至，日影长度依次增大，各节气时的日影长度也构成一个等差数列，即 $\{a_n^2\}$.

由题知从冬至到夏至时，$a_1=1\ 350$，$a_{13}=160$，$d=-99\frac{1}{6}$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式

$a_n=a_1+(n-1)d=-99\frac{1}{6}n+1\ 449\frac{1}{6}$，

即 $a_n=-\frac{595n}{6}+\frac{8\ 695}{6}=\frac{-595n+8\ 695}{6}$.

故 $a_{13}=160$，$a_{12}=\frac{1\ 555}{6}$，$a_{11}=\frac{2\ 150}{6}$，$a_{10}=\frac{2\ 745}{6}$，$a_9=\frac{3\ 340}{6}$，$a_8=\frac{3\ 935}{6}$，

$a_7=\frac{4\,530}{6}, a_6=\frac{5\,125}{6}, a_5=\frac{5\,720}{6}, a_4=\frac{6\,315}{6}, a_3=\frac{6\,910}{6}, a_2=\frac{7\,505}{6}, a_1=\frac{8\,100}{6}$.

由题意可知，从夏至再回到冬至时，各节气时的日影长度同上.

8. 证明 ①当 $n=1$ 时，左边 $=1^2=1=\frac{1}{3}\times 1\times(4\times1^2-1)=$ 右边，成立.

②假设当 $n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}_+)$ 时，

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1)$ 成立.

那么当 $n=k+1$ 时，

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k+1)^2=\frac{1}{3}k(4k^2-1)+(2k+1)^2=\frac{1}{3}(2k+1)\cdot[k(2k-1)+3(2k+1)]=\frac{1}{3}(2k+1)(2k^2+5k+3)=\frac{1}{3}(2k+1)(k+1)(2k+3)=\frac{1}{3}(k+1)(4k^2+8k+3)=\frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2-1]$.

∴ 当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由①②知对任意 $n\in\mathbf{N}_+$，等式成立.

9. 解析 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$

$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

即 $a_1=\sqrt{2}-1, a_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}, a_3=\sqrt{4}-\sqrt{3}, a_4=\sqrt{5}-\sqrt{4}$.

∴ $S_1=\sqrt{2}-1$，

$S_2=\sqrt{3}-1$，

$S_3=\sqrt{4}-1=1$，

$S_4=\sqrt{5}-1$，

猜想 $S_n=\sqrt{n+1}-1$，证明如下：

当 $n=1$ 时，$a_1=\sqrt{2}-1, S_1=\sqrt{2}-1$，

∴ $a_1=S_1$，等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $S_k=\sqrt{k+1}-1$，

当 $n=k+1$ 时，$S_{k+1}=a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}=\sqrt{k+1}-1+a_{k+1}$①，

又 $a_{k+1}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$②，

由①②得：$S_{k+1}=\sqrt{k+2}-1$，

∴ 当 $n=k+1$ 时，等式也成立.

∴ 由数学归纳法基本原理知，猜想正确.

10. 证明 (1)当 $n=1$ 时，$x^2-y^2$ 能被 $x-y$ 整除，

假设当 $n=k(k\geqslant1$ 且 $k\in\mathbf{N}_+)$ 时，$x^{2k}-y^{2k}$ 能被 $x-y$ 整除，

那么当 $n=k+1$ 时，$x^{2k+2}-y^{2k+2}=x^{2k}\cdot x^2-y^{2k}\cdot y^2=x^{2k}x^2-x^{2k}y^2+x^{2k}y^2-y^{2k}\cdot y^2=x^{2k}(x^2-y^2)+y^2(x^{2k}-y^{2k})$.

∵ $x^2-y^2$ 能被 $x-y$ 整除，$x^{2k}-y^{2k}$ 也能被 $x-y$ 整除，

∴ $x^{2k}(x^2-y^2)+y^2(x^{2k}-y^{2k})$ 能被 $x-y$ 整除.

∴ $n=k+1$ 时命题也成立.

∴ 对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$，$x^{2n}-y^{2n}$ 都能被 $x-y$ 整除.

B 组

1. 解析 ∵ $\{a_n\}$ 为等差数列，

∴ $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 成等差数列，

∴ $2(S_{2m}-S_m)=S_m+S_{3m}-S_{2m}$，得：$S_{3m}=60$.

2. 解析 ∵ $\{a_n\}$ 为等比数列，

∴ $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 成等比数列，

∴ $(S_{2m}-S_m)^2=S_m(S_{3m}-S_{2m})$，得：$S_{3m}=70$.

3. 解析 (1)成等差数列，证明如下：

易得 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$①，

$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$②，

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$③，

$S_{4n}-S_{3n}=a_{3n+1}+a_{3n+2}+\cdots+a_{4n}$④，

……

∵ $\{a_n\}$ 为等差数列，∴ ②−①得 $S_{2n}-S_n-S_n=n^2d$，

③−②得 $S_{3n}-S_{2n}-(S_{2n}-S_n)=n^2d$，

依次类推，可知此数列为等差数列.

(2)不一定成等比数列，证明如下：

易得 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$①，

$S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$②，

$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$③，

$S_{4n}-S_{3n}=a_{3n+1}+a_{3n+2}+\cdots+a_{4n}$④，

……

∵ $\{a_n\}$ 为等比数列，

∴ $\frac{②}{①}$ 得 $\frac{S_{2n}-S_n}{S_n}=q^n$，

当 $q=-1$ 且 $n$ 为偶数时，$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 不一定是等比数列(如常数列 $0,0,0,\cdots$)；

当 $q\neq-1$ 或 $n$ 为奇数时，$S_n, S_{2n}-S_n, S_{3n}-S_{2n},\cdots$ 是等比数列.

4. 解析 存在，如 $a_n=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n$.

5. 解析 $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{4}, a_3=\frac{1}{6}$.

猜想：$a_n=\frac{1}{2n}$.

证明：∵ $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}$，即 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n+1}{a_n}$，整理得：$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，又 $\frac{1}{a_1}=2$，

∴ $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列.

$\frac{1}{a_n}=2+(n-1)\times2=2n$，∴ $a_n=\frac{1}{2n}$.

6. 解析 令 $n=1, m=9$ 得：

$S_1+S_9=S_{10}$，即 $S_{10}-S_9=S_1$，

又 $a_1=S_1$ 且 $S_{10}-S_9=a_{10}$，∴ $a_{10}=a_1=1$.

∴ $a_{10}=1$.

7. 解析 $n=1$ 时，$a_2-a_1=1$①，

$n=2$ 时，$a_3+a_2=3$②，

$n=3$ 时，$a_4-a_3=5$③，

$n=4$ 时，$a_5+a_4=7$④，

$n=5$ 时，$a_6-a_5=9$⑤，

$n=6$ 时，$a_7+a_6=11$⑥，

$n=7$ 时，$a_8-a_7=13$⑦，

②+④+⑥得：$a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=3+7+11=21$，

⑦+⑥−⑤−④+③+②−①得：$a_8-a_7+a_7+a_6-a_6+a_5-a_5-a_4+a_4-a_3+a_3+a_2-a_2+a_1=a_8+a_1=15$.

∴ $S_8=36$.

8. 解析 $a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n=n^2$①，

$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}=(n-1)^2(n\geqslant2)$②，

$\frac{①}{②}$ 得：$a_n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2(n\geqslant2)$.

当 $n=1$ 时 $a_1=1$，不满足上式.

∴ $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, n\geqslant2.\end{cases}$

9. 解析 $a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n=3n^2$①，

$a_1+2a_2+\cdots+(n-1)a_{n-1}=3(n-1)^2(n\geqslant2)$②，

①−②得：$na_n=3n^2-3(n-1)^2$，∴ $a_n=\frac{6n-3}{n}(n\geqslant2)$，

又当 $n=1$ 时 $a_1=3$ 满足上式，∴ $a_n=\frac{6n-3}{n}$.

10. 解析 (1)∵ $\{b_n\}$ 是等比数列，∴ $\frac{b_3}{b_2}=q=3$，∴ $b_1=1, b_4=27$，∴ $b_n=3^{n-1}$，

∴ $a_1=1, a_{14}=a_1+13d=27$，∴ $d=2$，

∴ $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$，

即 $a_n=2n-1$.

(2)由(1)知 $c_n=(2n-1)\cdot3^{n-1}$. 设 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$.

$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n$，

即 $S_n=1\times3^0+3\times3^1+\cdots+(2n-3)\times3^{n-2}+(2n-1)\times3^{n-1}$①，

$3S_n=1\times3^1+\cdots+(2n-5)\times3^{n-2}+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$②，

①−②得：$-2S_n=1+2\times3^1+\cdots+2\times3^{n-1}-(2n-1)\times3^n$，

∴ $-2S_n=1+2\times\frac{3\times(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times3^n$，

∴ $-2S_n=1-3+3^n-(2n-1)\cdot3^n$，

∴ $-2S_n=-2+(1-2n+1)\cdot 3^n$,

∴ $-2S_n=-2+(2-2n)\cdot 3^n$,

∴ $S_n=(n-1)\cdot 3^n+1$.

11. 解析 $\frac{a_8}{b_8}=\frac{A_{15}}{B_{15}}=\frac{2\times15+3}{3\times15+2}=\frac{33}{47}$.

12. 证明 (1)当 $n=2$ 时,两条相交直线有 1 个交点.又 $f(2)=\frac{2(2-1)}{2}=1$,

∴ 当 $n=2$ 时,结论成立.

(2)假设当 $n=k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}_+)$ 时结论成立,即 $f(k)=\frac{k(k-1)}{2}$.

则当 $n=k+1$ 时,其中的 $k$ 条直线的交点个数是 $\frac{1}{2}k(k-1)$,增加的第 $(k+1)$ 条直线与上述的 $k$ 条直线相交,共增加 $k$ 个交点.

∴ $f(k+1)=f(k)+k=\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{1}{2}k\times(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)[(k+1)-1]$,

∴ 当 $n=k+1$ 时结论也成立.

综合(1)(2),结论对任意 $n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant2$ 都成立.

C 组

1. 解析 (1)经过一次传递后,落在乙、丙、丁手中的概率均为 $\frac{1}{3}$,而落在甲手中的概率为 0,因此,$P_1=0$,两次传递后球落在甲手中的概率 $P_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

(2)要想经过 $n$ 次传递后球落在甲的手中,那么在 $n-1$ 次传递后球一定不在甲手中,

所以 $P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1}),n=1,2,3,4,\cdots$,

因此 $P_3=\frac{1}{3}(1-P_2)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,

$P_4=\frac{1}{3}(1-P_3)=\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{27}$,$P_5=\frac{1}{3}(1-P_4)=\frac{1}{3}\times\frac{20}{27}=\frac{20}{81}$,$P_6=\frac{1}{3}(1-P_5)=\frac{1}{3}\times\frac{61}{81}=\frac{61}{243}$,……,

∵ $P_n=\frac{1}{3}(1-P_{n-1})$,

∴ $P_n-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{1}{4}\right)$,又∵ $P_1-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$,

∴ $P_n-\frac{1}{4}=\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$,∴ $P_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

2. 解析 记 $S_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.当 $x=0$ 时,$S_n=1$,

当 $x=1$ 时,$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

当 $x\neq0$ 且 $x\neq1$ 时,

$S_n=1+2x+3x^2+\cdots+n\cdot x^{n-1}$①,

$xS_n=x+2x^2+\cdots+(n-1)\cdot x^{n-1}+n\cdot x^n$②,

①-②得:

$(1-x)S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-n\cdot x^n$,

∴ $(1-x)S_n=\frac{1\times(1-x^n)}{1-x}-nx^n$,

∴ $S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{n\cdot x^n}{1-x}$.

3. 解析 (1)7 8 9 10(第 4 行),11 12 13 14 15(第 5 行).

(2)50.

(3)递推公式依次为 $a_n-a_{n-1}=n-1(n\geqslant2)$,$a_1=1$.

$b_n-b_{n-1}=n(n\geqslant2)$,$b_1=1$.

由数列 $\{a_n\}$ 的递推公式可得 $a_n-a_{n-1}=n-1$,

$a_{n-1}-a_{n-2}=n-2$,

……

$a_3-a_2=2$,

$a_2-a_1=1$,

以上各式相加可得 $a_n-a_1=1+2+\cdots+(n-1)$,

∴ $a_n=\frac{n(n-1)}{2}+1$.

由数列 $\{b_n\}$ 的递推公式可得

$b_n-b_{n-1}=n$,

$b_{n-1}-b_{n-2}=n-1$,

……

$b_3-b_2=3$,

$b_2-b_1=2$,

以上各式相加可得 $b_n-b_1=2+3+\cdots+n$,

又 $b_1=1$,

∴ $b_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

∴ $b_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

# 第六章 导数及其应用

## 6.1 导数

### 6.1.1 函数的平均变化率

练习 A

1. 解析 ∵ $f(0)=0$,$f(1)=1$,

∴ $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$.

$g(0)=0$,$g(1)=1$,$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=1$.

2. 解析 ∵ $\frac{\sin\frac{\pi}{6}-\sin 0}{\frac{\pi}{6}}=\frac{3}{\pi}$,

$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{6}{\pi}$,

且 $\frac{3}{\pi}>\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{6}{\pi}$,∴ 在 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 上的平均变化率较大.

3. 解析 函数 $y=x^2$ 在区间 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$ 上的平均变化率为 $\frac{\frac{16}{9}-1}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{3}$,在区间 $\left[2,\frac{7}{3}\right]$ 上的平均变化率为 $\frac{\frac{49}{9}-4}{\frac{1}{3}}=\frac{13}{3}$,

在区间 $\left[\frac{8}{3},3\right]$ 上的平均变化率为 $\frac{9-\frac{64}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{17}{3}$.

∵ $\frac{17}{3}>\frac{13}{3}>\frac{7}{3}$,

∴ 函数 $y=x^2$ 在 $\left[\frac{8}{3},3\right]$ 上的平均变化率 > 在 $\left[2,\frac{7}{3}\right]$ 上的平均变化率 > 在 $\left[1,\frac{4}{3}\right]$ 上的平均变化率.

4. 解析 由图像可知 $a=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f(1)-f(0)}{1}$,$b=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{f(2)-f(1)}{1}$,

∴ 结合图像可得 $a>b$.

5. 解析 结合题表可知,函数在 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $\frac{0.238-0.5}{2}=-0.131$,

在 $[3,5]$ 上的平均变化率为 $\frac{0.078-0.164}{5-3}=-0.043$.故函数在 $[0,2]$ 上的平均变化率为 $-0.131$,在 $[3,5]$ 上的平均变化率为 $-0.043$.

练习 B

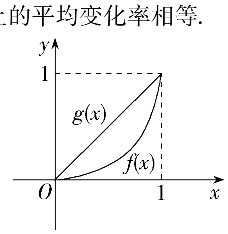
1. 解析 (1)∵ $f(0)=a$,$f(3)=a+3$,

∴ $f(3)>f(0)$.

(2)∵ $\frac{f(1)-f(0)}{1}=-1$,$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=2$,

∴ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的平均变化率小于在 $[1,3]$ 上的平均变化率.

2. 解析 不一定.如图,$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的平均变化率相等.



3.解析　(1)$\because \frac{5.06-0.38}{0.3}=15.6$，$\therefore$ 在 $[0.3,0.6]$ 内的平均速度为 15.6m/s.

(2)不妨设 $x=at+b$.将点 $(0.3,0.38)$，$(0.6,5.06)$ 代入解析式得

$\begin{cases}0.38=0.3a+b,\\5.06=0.6a+b,\end{cases}$ 解得 $a=15.6$，$b=-4.3$，

$\therefore x=15.6t-4.3$.

将 $t=0.5$ 代入上面解析式得 $x=15.6\times0.5-4.3=3.5$.

故 $t=0.5$ 时物体的位移为 3.5 m.

4.解析　$w$ 在区间 $[5,8]$ 内的平均变化率为 $\frac{8.3-8.8}{8-5}=-\frac{1}{6}$.

$\because w$ 是 $t$ 的函数，$\therefore$ 不妨设 $w=at+b$，将 $(5,8.8)$，$(8,8.3)$ 代入解析式得

$\begin{cases}8.8=5a+b,\\8.3=8a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{6},\\b=\frac{289}{30},\end{cases}$

$\therefore$ 解析式为 $w=-\frac{1}{6}t+\frac{289}{30}$.

当 $t=6$ 时，$w=-\frac{1}{6}\times6+\frac{289}{30}=\frac{259}{30}$，

当 $t=7$ 时，$w=-\frac{1}{6}\times7+\frac{289}{30}=\frac{127}{15}$.

5.解析　(1)由图像可知 $\bar{v}_{甲}=\bar{v}_{乙}=\frac{100-0}{12-0}=\frac{25}{3}$ m/s.

(2)由图像可知，在接近终点时乙的位移的平均变化率更大，所以乙的速度更快.

## 6.1.2　导数及其几何意义

### 练习 A

1.解析　(1)3.(2)0.(3)1.

2.解析　$f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(0+\Delta x)^2-(0+\Delta x)-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x-1)=-1$.

3.解析　圆的面积公式为 $S=\pi r^2$，令 $f(r)=\pi r^2$.

易得 $f'(2)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\pi(2+\Delta x)^2-\pi\times2^2}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\pi(\Delta x)^2+4\pi\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\pi\Delta x+4\pi)$

$=4\pi$.

这一瞬时变化率的实际意义是当半径为 2 时圆的周长.

4.解析　$f'(500)=$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(500+\Delta x)^2+2(500+\Delta x)-(500^2+2\times500)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{(\Delta x)^2+1\ 000\Delta x+2\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}(\Delta x+1\ 002)=1\ 002$.

$MC(500)$ 的实际意义为总成本在 $Q=500$ 处的边际成本.

### 练习 B

1.解析　易得线段 $AB$ 所在直线的方程为 $3x+2y-6=0$，即 $y=-\frac{3}{2}x+3$，即 $f(x)=-\frac{3}{2}x+3$. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{-\frac{3}{2}(1+\Delta x)+3-\left(-\frac{3}{2}\times1+3\right)}{\Delta x}=-\frac{3}{2}$.

2.解析　令 $f(x)=ax^2+bx+c$，

$f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{a(1+\Delta x)^2+b(1+\Delta x)+c-(a+b+c)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{a(\Delta x)^2+2a\Delta x+b\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}(a\Delta x+2a+b)=2a+b$.

同理可得 $f'(2)=4a+b$.

3.解析　球的体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

令 $f(R)=\frac{4}{3}\pi R^3$.

易得 $f'(3)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{4}{3}\pi(3+\Delta x)^3-\frac{4}{3}\pi\times3^3}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\frac{4}{3}\pi[(\Delta x)^3+9(\Delta x)^2+27\Delta x]}{\Delta x}=$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}[(\Delta x)^2+9\Delta x+27]\times\frac{4\pi}{3}=36\pi$.

这一瞬时变化率的实际意义为当半径为 3 时球的表面积.

4.解析　(1)$3x-y-5=0$.

(2)$2x-y=0$.

(3)$x+y-2=0$.

5.解析　$\because f'(1)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$，

$\therefore$ 当 $f(1)=1$，$f'(1)=2$，$\Delta x=0.03$ 时，$\frac{f(1+0.03)-f(1)}{0.03}\approx2$，$\therefore f(1.03)\approx1.06$.

## 6.1.3　基本初等函数的导数

### 练习 A

1.解析　$C'=0$ 的几何意义为该函数在各点处的瞬时变化率都为 0.

$x'=1$ 的几何意义为该函数在各点处的瞬时变化率都为 1.

2.解析　(1)$y'=15x^{14}$.(2)$y'=-3x^{-4}$.

(3)$y'=\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.(4)$y'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

3.解析　$y=\cos x\to y'=-\sin x$；

$y=\sin x\to y'=\cos x$；

$y=2^x\to y'=\ln 2\cdot2^x$；

$y=\ln x\to y'=\frac{1}{x}$；

$y=e^x\to y'=e^x$.

4.解析　$\because f'(x)=5x^4$，$\therefore f'(2)=5\times2^4=80$.

5.解析　令 $f(t)=2t^2+4t$.

(1)质点开始运动后 3 s 内的平均速度为 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{2\times3^2+4\times3}{3}=10$ m/s.

(2)质点在 2 s 到 3 s 内的平均速度为 $\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{2\times3^2+4\times3-(2\times2^2+4\times2)}{1}=14$ m/s.

(3)$f'(t)=4t+4$.当 $t=3$ 时，$f'(3)=16$ m/s.

### 练习 B

1.解析　(1)$y'=\frac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{4}}$，当 $x=16$ 时，$y'=\frac{1}{32}$.

(2)$y'=\cos x$，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y'=0$.

(3)$y'=-\frac{1}{x^2}$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y'=-4$.

2.解析　$\because y=\cos x$，

$\therefore y'=-\sin x$，

$\therefore$ 当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y'=-1$，

$\therefore$ 切线方程为 $y-0=-1\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，即 $x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

3.解析　$\because f(x)=x^{-\frac{2}{3}}$，

$\therefore f'(x)=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$，

$\therefore f'(8)=-\frac{1}{48}$.

又 $f(8)=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 过点 $\left(8,\frac{1}{4}\right)$ 的切线方程为 $y-\frac{1}{4}=-\frac{1}{48}(x-8)$，

即 $x+48y-20=0$.

4.解析　(1)$\because f(x)=x^2$，$f(3)=9\neq5$，

$\therefore (3,5)$ 不在曲线 $y=f(x)$ 上.

(2)设切点为 $(x_0,y_0)$，$f'(x)=2x$，结合导数的几何意义可知 $2x_0=\frac{y_0-5}{x_0-3}$①.

又$\because$ 点 $(x_0,y_0)$ 在 $y=f(x)=x^2$ 上，$\therefore y_0=x_0^2$②，

$\therefore$ 由①②可得 $\begin{cases}x_0=5,\\y_0=25,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\y_0=1,\end{cases}$

$\therefore l$ 的方程为 $2x-y-1=0$ 或 $10x-y-25=0$.

5.解析　$\because y=ax+b$，$\therefore y'=a$.

## 6.1.4 求导法则及其应用

### 练习 A

1.解析 (1)$y'=e^x+\cos x$.(2)$y'=1-\frac{1}{x^2}$.

(3)$y'=2^x\ln 2-\frac{1}{x}$.

2.解析 (1)$y'=2x\sin x+x^2\cos x$.

(2)$y'=(3^x\ln 3)\ln x+\frac{3^x}{x}$.

(3)$y'=e^x(2^x+2^x\ln 2)=2^xe^x(1+\ln 2)$.

3.解析 (1)$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

(2)$y'=e^x\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)$.

(3)$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

4.解析 (1)$y'=\frac{1}{x}$.

(2)$y'=-e^{-x}$.

(3)$y'=2\times 3^{2x}\ln 3$.

5.解析 (1)$y'=21(3x+5)^6$.

(2)$y'=5e^{5x-7}$.

(3)$y'=-\frac{1}{4-x}$.

(4)$y'=2\times 3^{2x-1}\ln 3$.

(5)$y'=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

(6)$y'=\frac{9}{4}(3x-5)^{-\frac{1}{4}}$.

### 练习 B

1.解析 (1)$y'=7x^6+6x^5-15x^4$.

(2)$y'=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

(3)$y'=-3\sin 3x\sin 2x+2\cos 3x\cos 2x$.

(4)$y'=\frac{-1}{1+\sin x}$.

(5)$y'=\cos 2x+\cos x$.

2.解析 (1)$y'=\frac{1}{\sqrt{2x-5}}$.

(2)$y'=\frac{12}{(1-3x)^5}$.

(3)$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3.解析

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(cx^2+d)-2cx(ax^2+bx)}{(cx^2+d)^2}$

$=\frac{-bcx^2+2adx+bd}{(cx^2+d)^2}$.

4.解析 (1)$y'=\sin x+x\cos x$,$y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$.

(2)$y'=\frac{1-x}{e^x}$,$y'\big|_{x=1}=0$.

5.解析 $y'=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore y'\big|_{x=\frac{\pi}{4}}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-2$.

$\therefore$ 在点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$处的切线方程为 $y-0=-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,即 $2x+y-\frac{\pi}{2}=0$.

6.解析 $\because y=5x^{\frac{1}{2}}$,$\therefore y'=\frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.设切点为$(x_0,y_0)$,令$\frac{5}{2}x_0^{-\frac{1}{2}}=2$,

解得 $x_0=\frac{25}{16}$,$\therefore y_0=\frac{25}{4}$.$\therefore$ 切线方程为 $y-\frac{25}{4}=2\left(x-\frac{25}{16}\right)$,

即 $16x-8y+25=0$.

### ◆习题 6-1A

1.解析 (1)由图像可得该月内乙厂的污水排放量减少得更多.

(2)由图像可知,在接近 $t_0$ 时,甲厂的污水排放量减少的更快.

2.解析 (1)$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$=\frac{3^2-5\times 3+6-(1^2-5\times 1+6)}{3-1}=-1$ m/s.

(2)$x'=2t-5$,令 $2t-5=-1$,解得 $t=2$ s.

3.解析 (1)$y'=1+3x^2+5x^4$.(2)$y'=2x-2\sin x$.(3)$y'=20(5x-4)$.

4.解析 $y'=2-3x^2$,$\therefore$ 切线的斜率 $k=-1=\tan\theta$,$\because 0\leqslant\theta<\pi$,

$\therefore \theta=\frac{3\pi}{4}$,$\therefore$ 切线的倾斜角为$\frac{3\pi}{4}$.

5.解析 $y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$,当 $x=1$ 时,切线斜率 $k_1=\frac{1}{2}$,$\therefore$ 切线方程为 $y-1=\frac{1}{2}(x-1)$,

即 $x-2y+1=0$.

当 $x=2$ 时,切线斜率 $k_2=\frac{\sqrt{2}}{4}$,$\therefore$ 切线方程为 $y-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)$,即$\sqrt{2}x-4y+2\sqrt{2}=0$.

6.解析 $q'_t=4t+3$,$\therefore q'_5=4\times 5+3=23$(A),$q'_7=4\times 7+3=31$(A).

当 $q'_t=43$ 时,有 $4t+3=43$,得 $t=10$,即 $t=10$ s 时,电流强度达到 43 A.

### ◆习题 6-1B

1.解析 (1)$y'=9x^2-26x-1$.

(2)$y'=(17-30x)(2x-1)(2-3x)^2$.

(3)$y'=3\sin 5x+(15x+10)\cos 5x$.

(4)$y'=2e^{2x}\cos 3x-3e^{2x}\sin 3x$.

2.解析 $f'(x)=\cos x$,令 $f'(x)=0$,解得 $x_1=\frac{\pi}{2}$,$x_2=\frac{3\pi}{2}$,曲线 $y=f(x)$ 在这两点处的切线都平行于 $x$ 轴.

3.解析 $y'=\frac{x}{2}-\frac{3}{x}$,令 $y'=\frac{1}{2}$,即$\frac{x}{2}-\frac{3}{x}=\frac{1}{2}$,解得 $x=3$ 或 $x=-2$.

又$\because x\in(0,+\infty)$,$\therefore x=3$.

$\therefore$ 切点的横坐标为 3.

4.解析 $f'(x)=e^x(x^2-3x+1+2x-3)=e^x(x^2-x-2)$,

令 $f'(x)=0$,即 $x^2-x-2=0$,解得 $x=2$ 或 $x=-1$.

当 $x=2$ 时,$f(2)=-e^2$,当 $x=-1$ 时,$f(-1)=\frac{5}{e}$,

$\therefore$ 切点坐标为$(2,-e^2)$,$\left(-1,\frac{5}{e}\right)$.

5.证明 $y'=-\frac{1}{x^2}$,设切点坐标为$\left(x_0,\frac{1}{x_0}\right)$.

则 $l$ 的方程为 $y=-\frac{1}{x_0^2}(x-x_0)+\frac{1}{x_0}$,令 $x=0$,得 $y=\frac{2}{x_0}$,

令 $y=0$,得 $x=2x_0$,$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{2}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=2$,即 $S=2$ 为定值,

$\therefore S$ 与切点位置无关.

6.解析 (1)设切点坐标为$(x_0,y_0)$,$y'=\frac{1}{x}$,$\therefore \frac{y_0-0}{x_0-0}=\frac{1}{x_0}$,

即$\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1}{x_0}$,解得 $x_0=e$.又$\because$ 切线过原点,$\therefore$ 切线方程为 $y=\frac{1}{e}x$.

(2)$y'=e^x$,令 $e^x=e$,得 $x=1$,$\therefore$ 切线方程为 $y=ex$.

7.解析 $y'=6x^2$,曲线在$(a,2a^3)$处的切线为 $y-2a^3=6a^2(x-a)$,

令 $y=0$,得 $x=\frac{2}{3}a$,则 $S=\frac{1}{2}\cdot|2a^3|\cdot\left|a-\frac{2}{3}a\right|=\frac{1}{3}$,

解得 $a=\pm 1$.

8.解析 (1)$f'(x)=8x$,$f'(1)=8$,$f(1)=4$,$\therefore$ 直线 $l$ 的方程为 $y-4=8(x-1)$,

即 $8x-y-4=0$.

$\because$ 直线 $l$ 平行于直线 $m$,

$\therefore k_l=k_m=8$.

$\therefore$ 直线 $m$ 的方程为 $y+6=8(x-0)$,即 $8x-y-6=0$.

(2)最短距离即为 $l$ 与曲线 $y=f(x)$ 的切点(1,4)到直线 $m$ 的距离,即 $d=\frac{|8-4-6|}{\sqrt{64+1}}=\frac{2\sqrt{65}}{65}$.

9.解析 3.008.

### ◆习题 6-1C

1.解析 (1)$y'=4x^3-3x^2-4x$.

(2)$y'=\frac{2}{(1+x)(1-x)}$, $x\in(-1,1)$.

2. 解析 $f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}$,将 $x=2$ 代入,

得 $f'(2)=4+3f'(2)+\frac{1}{2}$,解得 $f'(2)=-\frac{9}{4}$.

3. 解析 函数 $y=x^2+2x$ 的导函数为 $y'=2x+2$, ∴ 其图像在切点 $P(x_1, x_1^2+2x_1)$ 处的切线方程为 $y=(2x_1+2)x-x_1^2$.
函数 $y=-x^2+a$ 的导函数为 $y'=-2x$,
∴ 其图像在切点 $Q(x_2,-x_2^2+a)$ 处的切线方程为 $y=-2x_2x+x_2^2+a$.
由题意知 $\begin{cases}x_1+1=-x_2,\\-x_1^2=x_2^2+a,\end{cases}$ 得 $2x_1^2+2x_1+1+a=0$, ∵ 只有一条公切线, ∴ $\Delta=0$,解得 $a=-\frac{1}{2}$.
∴ 当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, $C_1$ 和 $C_2$ 有且仅有一条公切线,公切线方程为 $4x-4y-1=0$.

## 6.2 利用导数研究函数的性质

### 6.2.1 导数与函数的单调性

#### 练习 A

1. 解析 单调增区间为 $[0,1]$,
单调减区间为 $[1,2]$.

2. 解析 单调减区间为 $\left[-\infty,\frac{1}{2}\right]$,

单调增区间为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

3. 解析 (1)单调增区间为 $\left[\frac{5}{2},+\infty\right]$,

单调减区间为 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$.

(2)单调增区间为 $(-\infty,1]$, $\left[\frac{13}{3},+\infty\right)$,

单调减区间为 $\left[1,\frac{13}{3}\right]$.

#### 练习 B

1. 解析 ∵ $f'(x)>0$ 在区间 $(-1,2)$ 恒成立,
∴ $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增,
∴ $f(0)<f(1)$.

2. 解析 (1)单调增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$,
单调减区间为 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$.
(2)单调增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$,
无单调减区间.
(3)单调减区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(-1,+\infty)$,
无单调增区间.

3. 解析 单调增区间为 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$ 和 $[1,+\infty)$.

4. 解析 单调减区间为 $\left(0,\frac{1}{e}\right]$.

5. 解析 $y'=\cos x$. 当 $x\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$, $y'<0$,

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$, $y'>0$,

∴ $y=\sin x$ 的单调增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$,

单调减区间为 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

6. **D**

7. 解析 (1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=\frac{1}{x}+a$.

①当 $a>0$ 时, $f'(x)\geqslant0$ 恒成立, ∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

②当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<-\frac{1}{a}$.

令 $f'(x)<0$,得 $x>-\frac{1}{a}$.

∴ $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述,当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

当 $a<0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减.

(2)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

$f'(x)=x+\frac{a}{x}-(a+1)=\frac{x^2-(a+1)x+a}{x}=\frac{(x-a)(x-1)}{x}$.

①当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $x>1$.
令 $f'(x)<0$,得 $0<x<1$.
∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
②当 $0<a<1$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<a$ 或 $x>1$.
令 $f'(x)<0$,得 $a<x<1$.
∴ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增,在 $(a,1)$ 上单调递减.
③当 $a=1$ 时, $f'(x)\geqslant0$ 恒成立,
∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
④当 $a>1$ 时,令 $f'(x)>0$,得 $0<x<1$ 或 $x>a$.
令 $f'(x)<0$,得 $1<x<a$.
∴ $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增,在 $(1,a)$ 上单调递减.

### 6.2.2 导数与函数的极值、最值

#### 练习 A

1. 解析

| | 极值点 | | 最值点 | |
|---|---|---|---|---|
| | 极大值点 | 极小值点 | 最大值点 | 最小值点 |
| $f(x)$ | $-3,2$ | $0$ | $-3$ | $0$ |
| $g(x)$ | $-2,1$ | $-3,0,2$ | $-4,4$ | $-3,0$ |
| $h(x)$ | $-2,3$ | $1$ | $-2$ | $-4$ |

2. 解析 $y'=\frac{1}{x\ln 10}$. $y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.
在 $(0,+\infty)$ 内 $y'\neq0$, ∴ $y=\lg x$ 不存在极值.

3. 解析 $f'(x)=\frac{-3x^2-ax+6x+a}{e^x}$, ∴ $f'(0)=\frac{a}{e^0}=0$,解得 $a=0$.

4. 解析 (1)极小值为 $-\frac{25}{4}$,无极大值.
(2)极小值为 $-1$,无极大值.
(3)极大值为 $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$,无极小值.

5. 解析 $y_{\max}=13$, $y_{\min}=4$.

6. 解析 $f(x)$ 在区间 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 上的最大值为 4.

$f(x)$ 在区间 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 上的最小值为 $-1$.

#### 练习 B

1. 解析 (1)真.
(2)假.

2. 解析 $f'(x)=6(x-a)(x-2)$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=a$ 或 $x=2$, ∵ $0<a<2$,
∴ 令 $f'(x)>0$,得 $x>2$ 或 $x<a$.
令 $f'(x)<0$,得 $a<x<2$.
∴ $f(x)$ 在 $(0,a)$ 和 $(2,3)$ 上为增函数,在 $(a,2)$ 上为减函数.
∴ $f(x)_{极大值}=f(a)=-a^3+6a^2-9a+4$,
$f(x)_{极小值}=f(2)=3a-4$.
又 $f(0)=4-9a$, $f(3)=4$,且当 $0<a<2$ 时, $4>-a^3+6a^2-9a+4$,
∴ $f(x)_{\max}=f(3)=4$.

当 $a\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$ 时, $3a-4<4-9a$,

此时 $f(x)_{\min}=f(2)=3a-4$,

当 $a\in\left(\frac{2}{3},2\right)$ 时, $4-9a<3a-4$,

此时 $f(x)_{\min}=f(0)=4-9a$.

3. 解析 $f'(x)=3ax^2+3$,当 $a\geqslant0$ 时, $f'(x)\geqslant0$,函数 $f(x)$ 无极值.

当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\pm\sqrt{-\frac{1}{a}}$，

经检验，当 $a<0$ 时，函数 $f(x)$ 有极值，它的极值点为 $-\sqrt{-\frac{1}{a}}$，$\sqrt{-\frac{1}{a}}$.

4.解析　(1)值域为 $(-\infty,-1]$.(2)值域为 $[0,+\infty)$.

5.解析　极大值点：$x=-1$，极大值：$\frac{4}{e}$.

极小值点：$x=1$，极小值：0.

最小值点：$x=1$，最小值：0.

无最大值点，无最大值.

6.解析　极大值点：$x=\frac{1}{2}$，极大值：$-\frac{5}{4}-\ln 2$.

极小值点：$x=1$，极小值：$-2$.

无最大、小值点，无最大、小值.

7.证明　令 $f(x)=x^3-6x^2+12x-1$，

则 $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$，

∵ $x\le 2$，∴ $f'(x)\ge 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上为增函数，

∴ $f(x)\le f(2)=7$，原式得证.

### ◆习题 6-2A

1.证明　$y'=2+\cos x$，∵ $\cos x\in[-1,1]$，

∴ $y'>0$ 在 **R** 上恒成立.

∴ 函数 $y=2x+\sin x$ 是 **R** 上的增函数.

2.解析　(1)最大值为 2，最小值为 $-\frac{1}{4}$.

(2)最大值为 $\frac{25}{8}$，最小值为 $-3$.

(3)最大值为 7，最小值为 $-2$.

3.解析　(1)在 **R** 上为增函数.

(2)增区间为 $[4,+\infty)$，减区间为 $(-\infty,4]$.

(3)在 **R** 上为增函数.

(4)增区间为 $(-\infty,0]$ 和 $\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，减区间为 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$.

4.解析　(1)极大值为 $\frac{113}{27}$，极小值为 3.

(2)极小值为 $-7$，极大值为 $-3$.

(3)极大值为 $\frac{15}{4}$，极小值为 $-3$.

5.解析　(1)函数 $y=x+2\sqrt{x}$ 在 $[0,4]$ 上为增函数.

(2)增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[0,1]$.减区间为 $[-1,0]$ 和 $[1,+\infty)$.

6.解析　(1)极大值点为 $x=\frac{2}{3}$，极小值点为 $x=-2$.

(2)减区间为 $(-\infty,-2]$，$\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$，增区间为 $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$.

(3)$f(x)$ 的最大值为 63，最小值为 0.

(4)略.

### ◆习题 6-2B

1.C

2.解析　极大值点为 $x=\frac{1}{3}$，极大值为 $\frac{9}{2}$，极小值点为 $x=-3$，极小值为 $-\frac{1}{2}$，

最大值点为 $x=\frac{1}{3}$，最大值为 $\frac{9}{2}$，

最小值点为 $x=-3$，最小值为 $-\frac{1}{2}$.

3.解析　$f(x)$ 的定义域为 $x\ne 0$，$f'(x)=1-\frac{a}{x^2}$，当 $a\le 0$ 时，$f'(x)>0$ 在定义域上恒成立，

此时 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，解得 $x>\sqrt{a}$ 或 $x<-\sqrt{a}$.

令 $f'(x)<0$，解得 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$ 且 $x\ne 0$，

此时 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-\sqrt{a})$，$(\sqrt{a},+\infty)$，

单调减区间为 $(-\sqrt{a},0)$，$(0,\sqrt{a})$.

4.解析　$\left(-2,-\frac{22}{27}\right)$.

5.解析　$(0,1]$.

6.解析　$(-\infty,1]$.

### ◆习题 6-2C

1.解析　$y'=2ax+b$，令 $y'=0$，得 $x=-\frac{b}{2a}$.

当 $a>0$ 时，令 $y'>0$，得 $x>-\frac{b}{2a}$，令 $y'<0$，得 $x<-\frac{b}{2a}$，

∴ $y$ 在 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 上单调递减，此时 $y_{\min}=c-\frac{b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，令 $y'>0$，得 $x<-\frac{b}{2a}$，令 $y'<0$，得 $x>-\frac{b}{2a}$，∴ $y$ 在 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，此时 $y_{\max}=c-\frac{b^2}{4a}$.

2.解析　$f'(x)=-3x^2+2ax+b$.由题意知 $f'(1)=0$，即 $-3+2a+b=0$，∴ $b=3-2a$，

∴ $f'(x)=-3x^2+2ax+3-2a=-(x-1)(3x+3-2a)$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$ 或 $x=\frac{2a-3}{3}$，

∵ $f(x)$ 在 $x=1$ 时有极值，∴ $\frac{2a-3}{3}\ne 1$，

即 $a\ne 3$，

①当 $\frac{2a-3}{3}>1$，即 $a>3$ 时，

$f(x)_{极小}=f(1)=-1+a+b+1=-1+a+3-2a+1=3-a$，

$f(x)_{极大}=f\left(\frac{2a-3}{3}\right)=-\left(\frac{2a-3}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+(3-2a)\times\frac{2a-3}{3}+1$.

②当 $\frac{2a-3}{3}<1$，即 $a<3$ 时，

$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{2a-3}{3}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{2a-3}{3},1\right)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减.

∴ $f(x)_{极小}=f\left(\frac{2a-3}{3}\right)=-\left(\frac{2a-3}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+(3-2a)\times\frac{2a-3}{3}+1$，

$f(x)_{极大}=f(1)=3-a$.

综上，当 $a>3$，函数 $f(x)$ 的极大值为 $-\left(\frac{2a-3}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+(3-2a)\times\frac{2a-3}{3}+1$，

函数 $f(x)$ 的极小值为 $3-a$；

当 $a<3$，函数 $f(x)$ 的极大值为 $3-a$，

函数 $f(x)$ 的极小值为 $-\left(\frac{2a-3}{3}\right)^3+a\times\left(\frac{2a-3}{3}\right)^2+(3-2a)\times\frac{2a-3}{3}+1$.

求 $f(x)$ 在区间 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ 上的最值时，比较 $f(-3)$，$f\left(\frac{3}{2}\right)$，$f(1)$，$f\left(\frac{2a-3}{3}\right)$ 的值，最大的为 $f(x)$ 在 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ 上的最大值，最小的为 $f(x)$ 在 $\left[-3,\frac{3}{2}\right]$ 上的最小值，过程略.

## 6.3　利用导数解决实际问题

### ◆习题 6-3A

1.解析　$P'=\frac{E^2(R+r)^2-E^2R\times 2(R+r)}{(R+r)^4}=\frac{E^2(r+R)(r-R)}{(R+r)^4}$，

令 $P'=0$，得 $r=R$(负值舍去)，易知当 $R=r$ 时，电源的输出功率最大.

2.解析　设焊接成的长方形水箱的底面边长为 $x$ cm，则其高为 $\frac{60-x}{2}$ cm，

∴ 水箱的容积 $V=x^2\cdot\frac{60-x}{2}(0<x<60)$，

$\therefore V'=2x\cdot\frac{60-x}{2}+x^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=x\left(60-\frac{3}{2}x\right)$,

令 $V'=0$,得 $x=0$(舍去)或 $x=40$,

易知当 $x=40$ cm 时,能使水箱的容积最大.

3. 解析　设正四棱柱的底面边长为 $x$ cm,高为 $y$ cm,则 $8x+4y=72$.

$V=x^2\cdot y=x^2(18-2x)=18x^2-2x^3(0<x<9)$,

$V'=36x-6x^2$,令 $V'=0$ 得 $x=6$ 或 $x=0$(舍).

易知铁丝截 12 段 6 cm 时容积最大.

4. 解析　设横截面的宽为 $x$,高为 $y$.

由题意知,$x^2+y^2=d^2$,

$\therefore kx^2y=ky(d^2-y^2)$.

$[kx^2y]'=[ky(d^2-y^2)]'=k[(-2y)y+(d^2-y^2)]=k(d^2-3y^2)$,

令 $[kx^2y]'=0$,得 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}d$(负值舍去),

$\therefore x=\frac{\sqrt{6}}{3}d$.

$\therefore$ 横截面的宽为 $\frac{\sqrt{6}}{3}d$,高为 $\frac{\sqrt{3}}{3}d$ 时强度最大.

5. 解析　设将旧公路改造 $(90-x)$ km,其中 $0\leqslant x\leqslant 90$,

则成本 $f(x)=(90-x)\times 200+\sqrt{x^2+1\ 600}\times 300$

$=100(180-2x+3\sqrt{x^2+1\ 600})$.

$f'(x)=100\left[-2+3\times 2x\times\frac{1}{2}(x^2+1\ 600)^{-\frac{1}{2}}\right]$

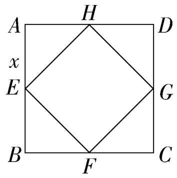
$=100[-2+3x(x^2+1\ 600)^{-\frac{1}{2}}]$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=16\sqrt{5}$(负值舍去).

易知将旧公路改造 $(90-16\sqrt{5})$ km 时,成本最低.

## ◆习题 6-3B

1. 解析　如图,设 $AE=x$,则 $AH=1-x$.




$\therefore EH=\sqrt{x^2+(1-x)^2}$,

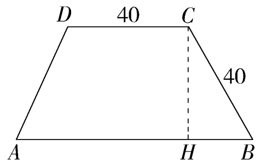
$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积 $S=EH^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1$,

则 $S'=4x-2$,令 $S'=0$,得 $x=\frac{1}{2}$.

易知 $S_{\min}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时四边形 $EFGH$ 的面积取得最小值,最小值为 $\frac{1}{2}$.

2. 解析　如图,过 $C$ 点作 $CH\perp AB$.设 $BH=x$,




则 $CH=\sqrt{40^2-x^2}$,

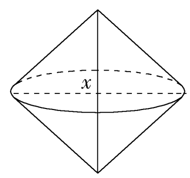
$\therefore$ 等腰梯形的面积 $S=\frac{1}{2}\times(40+40+2x)\times\sqrt{1\ 600-x^2}$

$=(40+x)\times\sqrt{1\ 600-x^2}$,

则 $S'=\sqrt{1\ 600-x^2}-\frac{x(40+x)}{\sqrt{1\ 600-x^2}}$,

令 $S'=0$,得 $x=20$(负值舍去),即 $AB=80$ 时其面积最大.

3. 解析　设底面边长为 $x$,则腰为 $\frac{2p-x}{2}$.




该几何体由两个相等的放倒的圆锥组成,圆锥的底面半径 $r=\sqrt{\left(\frac{2p-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$,

$\therefore$ 所得几何体的体积 $V=2\times\frac{1}{3}\pi r^2\times\frac{x}{2}$

$=\frac{\pi x}{3}\times\left[\left(\frac{2p-x}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]=\frac{\pi x}{3}(p^2-px)$.

$\therefore V'=\frac{\pi p^2}{3}-\frac{2\pi px}{3}$,令 $V'=0$,得 $x=\frac{p}{2}$.

即底面边长为 $\frac{p}{2}$,两腰长均为 $\frac{3}{4}p$ 时,所得几何体的体积最大.

4. 解析　设高为 $h$,底面直径为 $d$,由题意得 $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot h=216$,设所用材料的量为 $f(h)$,

则 $f(h)=2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2+\pi dh=\frac{432}{h}+\pi h\cdot 2\sqrt{\frac{216}{\pi h}}$,

$\therefore f'(h)=-\frac{432}{h^2}+216\left(\frac{216h}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}$.

令 $f'(h)=0$,得 $h=\sqrt[3]{\frac{864}{\pi}}$,则 $d=\sqrt[3]{\frac{864}{\pi}}$,

$\therefore$ 当高为 $\sqrt[3]{\frac{864}{\pi}}$,底面直径为 $\sqrt[3]{\frac{864}{\pi}}$ 时,所用材料最省.

5. 解析　$s'(x)=2(x-x_1)+2(x-x_2)+\cdots+2(x-x_n)$.

令 $s'(x)=0$,得 $2x+2x+\cdots+2x-(2x_1+2x_2+\cdots+2x_n)=0$,

即 $nx=x_1+x_2+\cdots+x_n$,即 $x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

易知当 $x=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 时,$s(x)$ 取得最小值.

## 复习题

### A 组

1. 解析　$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

2. 解析　(1) $y'=0.1x^{-0.9}$.(2) $y'=16x+14$.

(3) $=1\ 000(10x+3)^{99}$.(4) $y'=\frac{3}{3x-2}$.

3. 解析　(1) $f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$,$f'(5)=\frac{5^{-\frac{3}{4}}}{4}$.

(2) $f'(x)=9x^2+6x$,$f'(1)=15$.

4. 解析　$f'(x)=2x$,$k_1=f'(0.3)=0.6$,$k_2=f'(1)=2$,$k_3=f(3)=6$.

5. 解析　$f'(u)=3u^2$,$f'(3)=27$,$f(3)=27$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-27=27(x-3)$,即 $27x-y-54=0$.

6. 解析　$y'=3x^2+3$.令 $3x^2+3=15$,得 $x=\pm 2$,

又当 $x=2$ 时,$y=14$,

当 $x=-2$ 时,$y=-14$,

$\therefore$ 切线方程为 $y-14=15(x-2)$ 或 $y+14=15(x+2)$,

即 $15x-y-16=0$ 或 $15x-y+16=0$.

7. 解析　(1) $x-3y+4=0$.

(2) $6x-y-1=0$.

8. 解析　(1) 增区间为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$,减区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

(2) 增区间为 $[-1,1]$,减区间为 $(-\infty,-1]$,$[1,+\infty)$.

(3) 减区间为 $\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

9. 解析　增区间为 $(-\infty,2)$,$(3,+\infty)$,减区间为 $(2,3)$.

$x=2$ 是极大值点,$x=3$ 是极小值点.

草图略.

10. 解析　最大值为 15,最小值为 $-12$.

11.解析　增区间为$\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

12.解析　$a=1,b=1$.

B 组

1.解析　$f'(u)=5u^4$，$g'(\theta)=-\sin\theta$.

2.解析　$f(x)=x^3$，$f(a-bx)=(a-bx)^3$.
$\therefore f'(a-bx)=3(a-bx)^2\cdot(-b)=-3b(a-bx)^2$.

3.解析　$f(x)$的取值不发生变化，$f(x)$为常数函数.

4.解析　$y'=3x^2-2tx-t^2=(x-t)(3x+t)$.

令$y'=0$，得$x=t$或$x=-\frac{t}{3}$.

①当$t=0$时，显然不成立.

②当$t>0$时，有$\begin{cases}-\frac{t}{3}\leqslant -1,\\ t\geqslant 3,\end{cases}$得$t\geqslant 3$.

③当$t<0$时，有$\begin{cases}-\frac{t}{3}\geqslant 3,\\ t\leqslant -1,\end{cases}$得$t\leqslant -9$.

综上，$t$的取值范围为$t\geqslant 3$或$t\leqslant -9$.

5.解析　$a\geqslant 1$.

6.解析　$f'(x)=\frac{4x^2-1}{2x}$，令$f'(x)=0$，解得$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$.

$\therefore\begin{cases}a+1>-\frac{1}{2},\\ a-1<\frac{1}{2},\end{cases}$解得$-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$，$\therefore a$的取值范围为$-\frac{3}{2}<a<\frac{3}{2}$.

7.解析　(1)$f(0)=e^0=1$，$\therefore A$的坐标为$(0,1)$.

(2)$f'(x)=e^x-a$，$f'(0)=1-a=-1$，$\therefore a=2$，$\therefore f'(x)=e^x-2$.

令$f'(x)=0$，即$e^x-2=0$，得$x=\ln 2$.

令$f'(x)>0$，得$x>\ln 2$.

令$f'(x)<0$，得$x<\ln 2$.

$\therefore f(x)_{极小值}=f(\ln 2)=2-2\ln 2$，无极大值.

8.解析　$a=-\frac{3}{4}$.

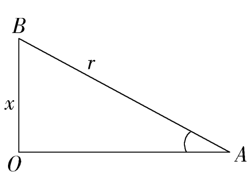
9.解析　$2x-y=0$.

10.A

11.解析　(1)$f(x)$的最大值为2.

(2)$a<-1$.

12.解析　如图，设吊灯离桌面$x$ m，则$r^2=x^2+\frac{1}{4}$，$\sin\varphi=\frac{x}{r}$，




$y=k\frac{\sin\varphi}{r^2}=k\cdot\frac{x}{r^3}=\frac{kx}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}(x\geqslant 0)$，

$y'=k\cdot\frac{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-3x^2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^3}=\frac{k\left(\frac{1}{4}-2x^2\right)}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}$，

令$y'=0$，得$x_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$x_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}$（舍去）；

当$0<x<\frac{\sqrt{2}}{4}$时，$y'>0$，当$x>\frac{\sqrt{2}}{4}$时，$y'<0$.

$\therefore$当$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$时，$y$取得最大值.

即当吊灯离桌面高度为$\frac{\sqrt{2}}{4}$ m时，桌边最亮.

13.解析　$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a$.

$\because f(x)$在$[0,+\infty)$上是减函数，

$\therefore f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a\leqslant 0$在$[0,+\infty)$上恒成立，即$a\geqslant\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$在$[0,+\infty)$上的最大值.

$\because x\in[0,+\infty)$，且$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$，

$\therefore 0\leqslant\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1$. 又$\because a>0$，$\therefore a\geqslant 1$.

$\therefore a$的取值范围为$[1,+\infty)$.

14.证明　要证当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$，

即证当$x>0$时，$\ln(1+x)-x<0$.

设$f(x)=\ln(1+x)-x$，$x>0$，$\because f'(x)=\frac{-x}{x+1}<0$，

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}<f(0)=0$，$\therefore$原式得证.

15.解析　$f'(x)=3x^2+2bx+c(x\in\mathbf{R})$.

(1)依题意知$x=0$为函数$f(x)$的极大值点，$\therefore f'(0)=0$，$\therefore c=0$.

(2)证明：由(1)得$f'(x)=x(3x+2b)$，

$\because x=2$为$f(x)=0$的根，$\therefore 8+4b+d=0$.①

又$f(x)$在$[0,2]$上为减函数，$\therefore f'(2)=2(6+2b)\leqslant 0$.②

由①知$d=-4b-8$.

$\because f(1)=1+b+d=1+b-4b-8=-3b-7$.

由②知$b\leqslant -3$，$\therefore f(1)\geqslant 2$.

(3)$\because f(x)=0$的三个根分别为$\alpha$，$2$，$\beta$，

$\therefore f(x)=(x-\alpha)(x-2)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta+2)x^2+(2\alpha+2\beta+\alpha\beta)x-2\alpha\beta$，

$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta+2=-b,\\ 2(\alpha+\beta)+\alpha\beta=0,\\ -2\alpha\beta=d,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=-(b+2),\\ \alpha\beta=2b+4.\end{cases}$

$\therefore|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2-4b-12=(b-2)^2-16$.

$\because b\leqslant -3$，$\therefore(b-2)^2-16\geqslant 9$.

即$|\alpha-\beta|^2\geqslant 9$，$|\alpha-\beta|\geqslant 3$.

C 组

1.解析　(1)$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，

则$f'(x)=3x^2+2ax+b$.

$\because f'(0)=b$，$f(0)=c$，$\therefore$曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-c=bx$，即$bx-y+c=0$.

(2)当$a=b=4$时，$f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，则$f'(x)=3x^2+8x+4$，

$\because$函数$f(x)$有三个不同零点，$\therefore f(x)$有两个极值点，且极小值小于0，极大值大于0，令$f'(x)=0$，即$3x^2+8x+4=0$，

解得$x_1=-2$，$x_2=-\frac{2}{3}$，

令$f'(x)>0$，得$x<-2$或$x>-\frac{2}{3}$，

令$f'(x)<0$，得$-2<x<-\frac{2}{3}$.

$\because f(-2)=c$，$f\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{32}{27}+c$，

$\therefore\begin{cases}c>0,\\ -\frac{32}{27}+c<0,\end{cases}$解得$0<c<\frac{32}{27}$.

(3)必要性：$f'(x)=3x^2+2ax+b$，当函数$f(x)$有三个不同零点时，$f(x)$有两个极值点，即方程$3x^2+2ax+b=0$有两个不等的实数解，因此有$\Delta>0$，即$a^2-3b>0$，所以必要性成立；

充分性：当$a=4$，$b=4$，$c=2$时，满足$a^2-3b>0$，但由(2)知，函数此时没有三个不同的零点，所以充分性不成立.

因此$a^2-3b>0$是$f(x)$有三个不同零点的必要不充分条件.

2.解析　设$g(x)=\frac{f(x)}{x}(x\neq 0)$，则$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

$\because f(x)-xf'(x)>0$，$\therefore g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，

即$g(x)$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore\frac{f(1)}{1}>\frac{f(3)}{3}$，即$3f(1)>f(3)$.

3.解析　(1)因为$y=f(x)$在$x=2$处的切线方程为$y=(e-1)x+4$，

$\therefore f'(2)=e-1$, $f(2)=2e+2$,

$\therefore 2e^{a-2}+2b=2e+2$, 即 $b+e^{a-2}=e+1$.①

又$\because f'(x)=e^{a-x}-xe^{a-x}+b$,

$\therefore f'(2)=e^{a-2}-2e^{a-2}+b=e-1$, 即 $b-e^{a-2}=e-1$,②

联立①②,解得 $b=e$, $a=2$.

(2)由(1)可知 $f(x)=xe^{2-x}+ex$,

$\therefore f'(x)=e^{2-x}-xe^{2-x}+e$,

令 $g(x)=f'(x)$,则 $g'(x)=-e^{2-x}-(e^{2-x}-x\cdot e^{2-x})=(x-2)e^{2-x}$,

令 $g'(x)=0$,得 $x=2$,

当 $x>2$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增;

当 $x<2$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减.

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,$g(x)$取最小值,

$g(x)_{\min}=g(2)=(1-2)e^{2-2}+e=e-1$,

$\therefore f'(x)_{\min}=g(2)=e-1>0$,

$\therefore$ $\forall x\in \mathbf{R}$,有 $f'(x)>0$,$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增.

4.解析 ①当 $a=0$ 时,$f(x)=-3x^2+1$,令 $f(x)=0$,得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以此时不符合题意;

②当 $a>0$ 时,$f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$,

当 $f'(x)>0$ 时,解得 $x>\frac{2}{a}$ 或 $x<0$,

则 $f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,

因为 $f(0)=1$,则存在一零点在$(-\infty,0)$上,所以此时不符合题意;

③当 $a<0$ 时,令 $f'(x)>0$,解得 $\frac{2}{a}<x<0$,令 $f'(x)<0$,解得 $x<\frac{2}{a}$ 或 $x>0$,所以函数 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{2}{a}\right)$单调递减,

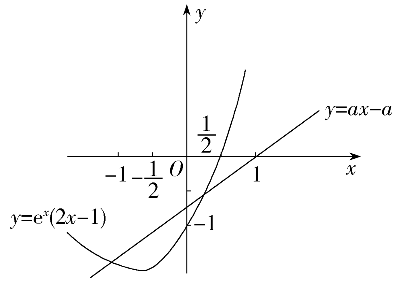
在$\left(\frac{2}{a},0\right)$上单调递增,在$(0,+\infty)$上单调递减.

若 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上存在唯一的零点 $x_0$,且 $x_0>0$,则 $f\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{8}{a^2}-3\times\frac{4}{a^2}+1>0$,

即 $-\frac{4}{a^2}+1>0$,整理得 $a^2>4$,解得 $a<-2$ 或 $a>2$,又 $a<0$,$\therefore a<-2$.

综上所述,当 $a<-2$ 时满足题意.

5.解析 设 $g(x)=e^x(2x-1)$,$y=ax-a(a<1)$,在同一平面直角坐标系中作出它们的大致图像,如图所示:




$\because$ 存在唯一的整数 $x_0$,使得 $f(x_0)<0$,

$\therefore$ 存在唯一的整数 $x_0$,使得 $g(x_0)$在直线 $y=ax-a$ 的下方,

$\because g'(x)=e^x(2x+1)$,$\therefore$ 当 $x<-\frac{1}{2}$时,$g'(x)<0$,当 $x>-\frac{1}{2}$时,$g'(x)>0$,

$\therefore$ 当 $x=-\frac{1}{2}$时,$[g(x)]_{\min}=g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2e^{-\frac{1}{2}}$.

又当 $x=0$ 时,$g(0)=-1$,$g(1)=e>0$,直线 $y=ax-a$ 恒过$(1,0)$,斜率为 $a$,当 $x=0$ 时,$y=-a$,又 $a>1$,$\therefore -a>g(0)=-1$,

$\therefore$ 这个唯一的整数 $x_0=0$,

则 $g(-1)=-3e^{-1}\geqslant -a-a$,解得 $\frac{3}{2e}\leqslant a<1$,

$\therefore a$ 的取值范围是 $\left[\frac{3}{2e},1\right)$.

6.解析 (1)$\because f(x)=x^2+x-1$,$\therefore f'(x)=2x+1$,则 $f'(1)=3$,$f(1)=1$,

$\therefore$ 在点$(1,1)$处的切线方程为 $y-1=3(x-1)$,即 $3x-y-2=0$,

令 $y=0$,得 $x=\frac{2}{3}$.根据题意得 $x_1=\frac{2}{3}$.

(2)$f'(x_n)=2x_n+1$,$f(x_n)=x_n^2+x_n-1$,

故可得 $f(x)$在$(x_n,f(x_n))$处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$,

即 $y=(2x_n+1)x-x_n^2-1$,

令 $y=0$,得$(2x_n+1)x_{n+1}=x_n^2+1$,

$\therefore x_{n+1}=\frac{x_n^2+1}{2x_n+1}$,$\therefore g(x_n)=\frac{x_n^2+1}{2x_n+1}$.

(3)根据(1)和(2)中所求,

用牛顿切线法经过1次运算,可得近似解 $x_1=\frac{2}{3}\approx 0.666\ 7$.

用牛顿切线法经过2次运算,可得近似解 $x_2\approx 0.619\ 0$.

用牛顿切线法经过3次运算,可得近似解 $x_3\approx 0.618\ 034\ 4$.

用牛顿切线法经过4次运算,可得近似解 $x_4\approx 0.618\ 033\ 9$.

经过4次运算,用牛顿切线法求得的近似解精确到了0.000 01.

若采用二分法,选定初始区间为$(0,1)$.

$\because f(0)\cdot f(1)<0$,经过一次运算,可得近似解为0.5.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$,经过二次运算,可得近似解为0.75.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(0.75)<0$,经过三次运算,可得近似解为0.625.

$\because f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(0.625)<0$,经过四次运算,可得近似解为0.562 5.

经过4次运算,用二分法求得的近似解不如用牛顿切线法求得的近似解精确.不难发现,牛顿切线法相对二分法要更加快速.

7.证明 令 $f(x)=xe^{-x}-\ln(1+x)$,$x\geqslant 0$.

要证 $xe^{-x}\leqslant \ln(1+x)$,即证 $f(x)\leqslant 0$ 在 $x\geqslant 0$ 时恒成立.

易得 $f'(x)=\frac{(1-x^2)e^{-x}-1}{1+x}$.

当 $x\geqslant 0$ 时,$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立,$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减,

$\therefore f(x)\leqslant f(0)=0$,故原不等式得证.