教材习题答案

第三章　排列、组合与二次式定理

3.1　排列与组合

3.1.1　基本计数原理

练习 A

1. 答案　5;6.

2. 答案　10^6.

3. 解析　(1)$6\times5=30$.

(2)$6\times6=36$.

4. 解析　$3\times5=15$.

5. 解析　要完成的一件事情是“确定一个电话号码的后四位”.分四步完成:每一步都是从 0~9 这 10 个数字中取一个,共有 $10\times10\times10\times10=10\ 000$ 个.

练习 B

1. 解析　从甲地到丁地有两类方法.第一类:从甲地经过乙地到达丁地,共有 $2\times3=6$ 种不同方法;第二类:从甲地经过丙地到达丁地,共有 $4\times2=8$ 种不同方法.所以从甲地到丁地共有 $6+8=14$ 种不同的方法.

2. 解析　$2\times4=8$.

3. 解析　由题意知 $n\times(n-1)=20$,$n\leqslant10$,且 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n=5$.

4. 解析　不同的数组共有 $2\times2\times2\times2\times2=32$ 个.

5. 答案　2^n.

3.1.2　排列与排列数

练习 A

1. 解析　$A_4^4=24$.

2. 答案　(1)24.(2)120.(3)15.(4)380.(5)9 900.

3. 答案

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n!$	1	2	6	24	120	720	5 040	40 320

4. 解析　$A_5^2=20$.

5. 解析　$A_5^3=60$.

6. 解析　$A_6^6=720$.

练习 B

1. 答案　(1)6 608.(2)64.(3)252.

2. 解析　(1)将 2 封信投入 4 个邮箱,每个邮箱最多投一封,对应于把 2 个对象排在 4 个位置上,有 $A_4^2=4\times3=12$ 种不同的投法.

(2)将 2 封信投入 4 个邮箱,随意投,每封信有 4 种不同的投法,共有 $4\times4=16$ 种不同的投法.

3. 解析　(1)千位上可以排 1,2,3,4,5 中任一数字,有 A_5^1 种方法,其他数位可任意排列,有 A_5^3 种方法,所以共有 $A_5^1\times A_5^3=300$ 个.

(2)第一类:个位上排 0,其他数位有 A_5^3 种方法,共有 $A_5^3=60$ 个;第二类:个位上排 5,则千位上可排 1,2,3,4 中任一数字,有 A_4^1 种方法,十位和百位的排法数为 A_4^2,共有 $A_4^1\times A_4^2=48$ 个.

所以满足题意的四位数共有 $60+48=108$ 个.

(3)分三类.第一类:比 2 000 大的四位数有 $A_4^1A_5^3$ 个;

第二类:比 2 000 大的五位数有 $A_5^1A_5^4$ 个;

第三类:比 2 000 大的六位数有 $A_5^1A_5^5$ 个.

所以满足题意的自然数共有 $A_4^1A_5^3+A_5^1A_5^4+A_5^1A_5^5=1\ 440$ 个.

4. 解析　(1)把每对夫妇看成一个整体,共 4 个对象全排列,再把每对夫妇看成两个对象全排列,共有 $A_4^4\times A_2^2\times A_2^2\times A_2^2\times A_2^2=4\times3\times2\times1\times2\times2\times2\times2=384$ 种不同的排法.

(2)每对夫妇都不能隔开,可把每对夫妇作为一个对象,4 个对象全排列共 4! 种排法,且性别相同的人不能相邻的排法只有两种:男的在女的左边或右边,因此共有 $4!\times2=48$ 种不同的排法.

5. 解析　因为关掉的四盏灯不是两端的灯,且任意两盏都不相邻,

所以使用插空法解决问题,即先将亮的 7 盏灯排成一排,

因为两端的灯不能熄灭,

所以有 6 个符合条件的空位,

所以在 6 个空位中选取 3 个位置插入熄灭的 3 盏灯,即有 $\dfrac{A_6^3}{A_3^3}=20$ 种.

3.1.3　组合与组合数

练习 A

1. 答案　(1)(北京,上海),(北京,天津),(北京,广东),(上海,天津),(上海,广东),(天津,广东).

(2)(注:冠军在前,亚军在后)(北京,上海),(上海,北京),(北京,天津),(天津,北京),(北京,广东),(广东,北京),(上海,天津),(天津,上海),(上海,广东),(广东,上海),(天津,广东),(广东,天津).

2. 答案　(1)*ab*,*ac*,*ad*,*ae*,*bc*,*bd*,*be*,*cd*,*ce*,*de*.

(2)*abc*,*abd*,*abe*,*acd*,*ace*,*ade*,*bcd*,*bce*,*bde*,*cde*.

3. 答案　(1)17.(2)20.(3)1.(4)9 900.

4. 解析　所求不同的场数相当于从 8 个不同的对象中取出两个对象的组合数,共有 $C_8^2=\dfrac{8\times7}{2\times1}=28$ 场.

5. 解析　(1)$C_{10}^3=120$.

(2)$C_2^1C_8^2=56$.

(3)$C_{10}^3-C_8^3=120-56=64$.

练习 B

1. 解析　(1)$C_7^3+C_7^4+C_8^5+C_9^6+C_{10}^7=C_8^4+C_8^5+C_9^6+C_{10}^7=C_9^5+C_9^6+C_{10}^7=C_{10}^6+C_{10}^7=C_{11}^7=C_{11}^4=330$.

(2)$C_5^0+C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=C_6^1+C_6^3+C_6^5=2C_6^1+C_6^3=2\times6+\dfrac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=32$.

2. 解析　$\because C_{18}^x=C_{18}^{3x-6}$,$\therefore x=3x-6$ 或 $18-x=3x-6$,解得 $x=3$ 或 $x=6$.经检验都符合题意,$\therefore x=3$ 或 $x=6$.

3. 证明　$C_n^{m+1}+C_n^m=\dfrac{n!}{(m+1)!\ (n-m-1)!}+\dfrac{n!}{m!\ (n-m)!}=\dfrac{n!\ (n-m)}{(m+1)!\ (n-m)!}+\dfrac{n!\ (m+1)}{(m+1)!\ (n-m)!}=\dfrac{(n+1)!}{(m+1)!\ (n-m)!}=C_{n+1}^{m+1}$.

4. 解析　可转化成“1,2,3,4,5 五个数,1,2 不能在第一位,2 不在最后一位,一共有多少不同的数”.

可分三步完成:第一步,排数字 2,它可以在十位、百位、千位中选取,有 A_3^1 种方法;第二步,排数字 1,它可以在除去万位和 2 占的位置中选取,有 A_3^1 种方法;第三步,排其他数字,有 A_3^3 种方法.故共有 $A_3^1\times A_3^1\times A_3^3=54$ 种.

5. 解析　(1)3 人分到甲组,2 人分到乙组,1 人分到丙组这件事分三步完成,共有 $C_6^3C_3^2C_1^1=60$ 种不同的分法.

(2)分四步完成这件事,第一步选 3 人作为一个对象;第二步选 2 人作为一个对象;第三步剩余的 1 人作为一个对象;第四步把三个对象全排列.不同的分法种数为 $C_6^3\times C_3^2\times C_1^1\times A_3^3=360$.

◆ 习题 3-1A

1. 解析　(1)$8+7=15$.

(2)$C_8^1C_7^1=56$.

2. 解析　(1)$\because A_{2n}^3=10A_n^3$,即 $2n(2n-1)\cdot(2n-2)=10n(n-1)(n-2)$,$\therefore n=8$.

(2)易知 $n=6$.

3. 解析　由题意知 $A_n^2=7A_{n-4}^2$,即 $n(n-1)=7(n-4)(n-5)$,解得 $n=7$ 或 $n=\dfrac{10}{3}$,

因为 n 为正整数，所以 $n=7$.

4. 解析　$A_4^4=24$.

5. 解析　(1) $C_{10}^3=120$(个).

(2) $C_{10}^4=210$(个).

6. 解析　(1) $C_m^2C_n^2$(个).

(2) $C_m^2C_n^2C_l^2$(个).

7. 解析　(1) $3^4=81$(种).

(2) $C_4^2A_3^3=36$(种).

8. 解析　$C_7^2+C_7^2+C_6^2+A_3^2=63$(场).

◆习题 3-1B

1. 解析　$(C_4^3-2)A_3^3=12$(种).

2. 解析　$A_4^1A_8^2+A_3^1A_8^2=392$(个).

3. 解析　(1) $A_6^6=720$(种).

(2) $A_3^1A_3^1A_4^4=216$(种).

(3)甲、乙两人既可在后排，也可在前排，共有 C_2^1 种选择方法；

在某一排上时，甲、乙或者靠左，或者靠右，同样有 C_2^1 种选择，甲、乙内部排列，有 A_2^2 种方法；

剩余的对象全排列，有 A_4^4 种方法；

由分步乘法计数原理得，不同的坐法共有 $C_2^1\times C_2^1\times A_2^2\times A_4^4=192$(种).

(4)甲、乙两人既可在前排，也可在后排，有 C_2^1 种选择方法；

在某一排上时，甲、乙只可在两端，有 A_2^2 种坐法，其余的对象全排列，有 A_4^4 种方法.

由分步乘法计数原理得，不同的坐法共有 $C_2^1\times A_2^2\times A_4^4=96$(种).

4. 解析　(1) $C_{33}^3=5\ 456$(种).

(2) $C_2^1C_{33}^4=81\ 840$(种).

(3) $C_{33}^5=237\ 336$(种).

(4) $C_2^2C_{33}^3+C_2^1C_{33}^4=87\ 296$(种).

5. 解析　第一步，先把 3 个人安排好，有 A_3^3 种不同的排法，

第二步，3 个人分出了四个空，让空座(分成两组，2 个相邻的，1 个单一放置的)去插这四个空，有 A_4^2 种不同的插法.

由分步乘法计数原理得，不同的坐法共有 $A_3^3A_4^2=72$(种).

6. 解析　$A_{10}^{10}=10!\ =362\ 8800$(种).

◆习题 3-1C

1. 解析　原式 $=C_{101}^3=166\ 650$.

2. 证明　左边 $=C_m^mA_m^m+C_{m+1}^mA_m^m+C_{m+2}^mA_m^m+\cdots+C_{2m}^mA_m^m$

$=A_m^m(C_m^m+C_{m+1}^m+C_{m+2}^m+\cdots+C_{2m}^m)$

$=A_m^mC_{2m+1}^{m+1}=\dfrac{1}{m+1}A_{2m+1}^{m+1}=$ 右边.

3. 解析　由题意知，选用 3 种颜色时，涂色方法有 $C_4^3A_3^3=24$ 种，

4 色全用时涂色方法有 $C_2^1A_4^4=48$ 种，

所以不同的着色方法共有 72 种.

4. 解析　由隔板法得 $C_8^3=56$.

5. 解析　第一类：4 号球独占一盒，则有 3 种选择，若 4 号球独占 1 号盒，则对于剩下的 2 个盒子，先把 1 号球放旁边，2 号球放入 3 号盒，3 号球放入 2 号盒，有 1 种选择，再把 1 号球分别放入 2，3 号盒，有 2 种可能选择，

于是得到 4 号球独占一盒的放法有 6 种.

第二类：4 号球不独占一盒，先放 1，2，3 号球，3 个球的全不对应排列数是 2，再放 4 号球，有 3 种选择，共有 6 种放法.

根据分类加法计数原理得，不同的放法有 $6+6=12$ 种.

3.3　二项式定理与杨辉三角

◆习题 3-3A

1. 解析　所有可能的投篮结果为 001，010，011，100，101，110，111，000，共 8 种.

2. 解析　二项展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_9^rx^{9-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=C_9^rx^{9-2r}(r=0,1,\cdots,9)$，

令 $9-2r=3$，得 $r=3$，所以 x^3 的系数为 $C_9^3=84$.

3. 解析　(1)第 4 项和第 5 项.

(2)第 9 项，即中间项.

4. 解析　$(1+\sqrt{x})^5+(1-\sqrt{x})^5=1+C_5^1\sqrt{x}+C_5^2\cdot(\sqrt{x})^2+C_5^3(\sqrt{x})^3+C_5^4(\sqrt{x})^4+C_5^5(\sqrt{x})^5+1-C_5^1\sqrt{x}+C_5^2(\sqrt{x})^2-C_5^3(\sqrt{x})^3+C_5^4(\sqrt{x})^4-C_5^5(\sqrt{x})^5=2(1+C_5^2x+C_5^4x^2)=2+20x+10x^2$.

5. 证明　因为 $101^{10}-1=(100+1)^{10}-1=C_{100}^0100^{100}+C_{100}^1100^{99}+\cdots+C_{100}^{99}100+1-1=C_{100}^0100^{100}+C_{100}^1100^{99}+\cdots+C_{100}^{99}100$,

所以 $101^{10}-1$ 能被 10 整除.

6. 解析　(1) $C_6^1+C_6^2+\cdots+C_6^5=2^6-2=62$.

(2)在 $(1+x)^{11}$ 的展开式中，分别令 $x=1$ 和 $x=-1$ 得，

$2^{11}=C_{11}^0+C_{11}^1+C_{11}^2+\cdots+C_{11}^{11}$,　①

$0=C_{11}^0-C_{11}^1+C_{11}^2-\cdots-C_{11}^{11}$,　②

$\dfrac{①-②}{2}$ 得 $C_{11}^1+C_{11}^3+C_{11}^5+\cdots+C_{11}^{11}=2^{10}=1\ 024$.

◆习题 3-3B

1. 解析　在 $(1-x)^{13}=C_{13}^0-C_{13}^1x+C_{13}^2x^2-C_{13}^3\cdot x^3+\cdots+C_{13}^{12}x^{12}-C_{13}^{13}x^{13}$ 中，

令 $x=1$，得 $C_{13}^0-C_{13}^1+C_{13}^2-C_{13}^3+\cdots+C_{13}^{12}-C_{13}^{13}=0$,　①

令 $x=-1$，得 $C_{13}^0+C_{13}^1+C_{13}^2+C_{13}^3+\cdots+C_{13}^{12}+C_{13}^{13}=2^{13}$,　②

$\dfrac{①-②}{2}$ 得 $-C_{13}^1-C_{13}^3-\cdots-C_{13}^{13}=-2^{12}=-4\ 096$.

2. 解析　由题意得 $C_n^3=C_n^5$，$\therefore n=8$，则 $(1+x)^8$ 的展开式的所有二项式系数之和为 $2^8=256$.

3. 解析　因为 $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}\left(\dfrac{-2}{\sqrt{x}}\right)^k$

$=C_6^k(-2)^kx^{6-\frac{3}{2}k}$，$k=0,1,\cdots,6$,

所以 $\left(x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^6=x^6-12x^{\frac{9}{2}}+60x^3-160x^{\frac{3}{2}}+240-192x^{-\frac{3}{2}}+64x^{-3}$.

4. 解析　由题意得 $C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=1\ 024=2^{n-1}$,

$\therefore n=11$.

则二项式系数最大项为 T_6 和 T_7.

故 $T_6=C_{11}^5\cdot(\sqrt[3]{x^{-1}})^6\cdot(-\sqrt[5]{x^{-2}})^5=-462x^{-4}$,

$T_7=C_{11}^6\cdot(\sqrt[3]{x^{-1}})^5\cdot(-\sqrt[5]{x^{-2}})^6=462x^{-\frac{61}{15}}$.

5. 解析　展开式的通项为 $T_{r+1}=C_{11}^r\cdot(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}})^{11-r}\cdot(a^{-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{4}})^r=C_{11}^r\cdot a^{\frac{22-3r}{6}}b^{\frac{5r-22}{12}}$，$r=0,1,\cdots,11$，令 $\dfrac{22-3r}{6}=\dfrac{5r-22}{12}$，即 $44-6r=5r-22$，得 $r=6$,

$\therefore$ 展开式中 a 和 b 的指数相等的项为 $T_7=C_{11}^6\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}=462a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

6. 解析　令 $a=b=c=1$ 得各项系数的和为 $2\times2^2\times2^3=64$.

7. 解析　常数项为 $1\times C_6^0\times2^6\times(-x)^0=64$，

因为 $(1+x)(2-x)^6=(2-x)^6+x(2-x)^6$，

所以含有 x 的项为 $C_6^1\times2^5\times(-x)+x\times C_6^0\times2^6\times(-x)^0=-128x$.

◆习题 3-3C

1. 解析　观察题图中给出的“莱布尼茨三角形”，

及给定的关系式：$\dfrac{1}{(n+1)C_n^r}+\dfrac{1}{(n+1)C_n^x}=\dfrac{1}{nC_{n-1}^r}$

我们可以知道，下一行两分数之和等于肩上的上一行的分数，故 $x=r+1$.

2. 解析　(1)令 $x=1$，则 $a_8+a_7+a_6+\cdots+a_1=2^8-1=255$.

(2)令 $x=-1$，则 $a_8-a_7+a_6-\cdots-a_1+a_0=(-4)^8=65\ 536$.

(3)令 $A=a_8+a_6+a_4+a_2+a_0$，$B=a_7+a_5+a_3+a_1$,

$\therefore A+B=2^8$,　①

$A-B=4^8$,　②

$\therefore \dfrac{①+②}{2}$ 得 $a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=A=\dfrac{2^8+4^8}{2}=32\ 896$.

3. 解析　因为 $(2+x-x^2)^6=(2-x)^6(1+$

$x)^6$,

所以展开式中含 x 的项为 $C_6^0 2^6(-x)^0\times C_6^1x+C_6^1 2^5(-x)^1\times C_6^0x^0=192x$,

含 x^3 的项为 $C_6^0 2^6(-x)^0\times C_6^3x^3+C_6^1 2^5(-x)^1\times C_6^2x^2+C_6^2 2^4(-x)^2\times C_6^1x+C_6^3 2^3(-x)^3\times C_6^0x^0=-320x^3$.

4. 证明　因为 $(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$,

又 $x>0$,且 $n>1,n\in\mathbf{N}_+$,

所以 $(1+x)^n\geqslant C_n^0x^0+C_n^1x^1+C_n^2x^2=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$.

本章小结 A 组

1. 解析　从 5 门选修课中选择 3 门有 C_5^3 种方法,

从 4 个课外活动中选择一个有 4 种方法,

所以共有 $4C_5^3=40$ 种方法.

2. 解析　先安排甲有 A_4^1 种方法,再安排其余的同学有 A_5^5 种方法,

所以一共有 $A_4^1A_5^5=480$ 种方法.

3. 解析　(1)4 位数的回文数相当于填 4 个方格,首尾相同且不为 0,共有 9 种填法,中间两位一样,可取 0,共有 10 种填法,共计 $9\times10=90$(种)填法,即 4 位数的回文数有 90 个.

(2)根据回文数的定义,与(1)中方法类似,问题转化为填方格.首位和末位相同且不为 0,共有 9 种填法,第二位与倒数第二位相同,可取 0,共有 10 种填法,同样第三位与倒数第三位共有 10 种填法,……,第 n 位与倒数第 n 位共有 10 种填法,第 $n+1$ 位,即中间位置也有 10 种填法,故 $2n+1(n\in\mathbf{N}_+)$ 位数的回文数共有 9×10^n 个.

4. 解析　三所学校依次选医生、护士,不同的分配方法共有:$C_3^1C_6^2C_2^1C_4^2=540$ 种.

5. 解析　解法一:$C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1=30$(种).

解法二:$C_7^3-C_3^3-C_4^3=30$(种).

6. 解析　(1)$C_{27}^5=80\ 730$(种).

(2)$C_3^2\times C_{27}^3=8\ 775$(种).

(3)$C_3^2\times C_{27}^3+C_3^3\times C_{27}^2=9\ 126$(种).

7. 解析　第一类:甲、乙只选一人,有 $C_2^1C_7^2A_3^3=252$ 种方法;

第二类:甲、乙都入选,有 $C_2^2C_7^1A_3^3=42$ 种方法.

所以一共有 294 种方法.

8. 解析　(1)选到的两名同学都是女同学的选法共有 $C_8^2=28$ 种.

(2)选到的两名同学至少有一名女同学的选法共有 $C_{12}^2-C_4^2=60$ 种.

9. 解析　因为 $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_{18}^k(9x)^{18-k}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^k=C_{18}^k(-1)^k3^{36-3k}x^{18-\frac{3}{2}k}$,$k=0,1,2,\cdots,18$,

所以令 $18-\frac{3}{2}k=0$,得 $k=12$,所以第 13 项为常数项,且常数项为 18 564.

10. 解析　二项式 $\left(2x+\frac{a}{x}\right)^7$ 的展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_7^r\cdot2^{7-r}\cdot a^r\cdot x^{7-2r}$,$r=0,1,\cdots,7$,

令 $7-2r=-3$,得 $r=5$,可得展开式中 $\frac{1}{x^3}$ 的系数是 $C_7^5\times4\times a^5=84$,得 $a=1$.

11. 解析　因为 $(\sqrt{2}-\mathrm{i})^7$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_7^k(\sqrt{2})^{7-k}(-\mathrm{i})^k$,$k=0,1,2,\cdots,7$,

所以其实部为 $C_7^0(\sqrt{2})^7+C_7^2(\sqrt{2})^5(-\mathrm{i})^2+C_7^4(\sqrt{2})^3(-\mathrm{i})^4+C_7^6(\sqrt{2})^1(-\mathrm{i})^6=\sqrt{2}$.

12. 解析　根据二项式系数的性质,$\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中,各项二项式系数之和为 2^n,

在 $\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 的展开式中,令 $x=1$,可得 $(1+3)^n=4^n$,则各项系数的和为 4^n,

依题意有 $\frac{4^n}{2^n}=64$,解得 $n=6$.

本章小结 B 组

1. 解析　$A_5^2+C_5^1A_2^2=30$ 种.

2. 解析　根据题意,要求个子最高的在中间,

将剩余的四人安排在其他四个位置,有 $A_4^4=24$ 种情况,

在高个子左边的两个人有 2 种情况,

按从中间到左边一个比一个矮的顺序只有 1 种,占左边全部情况的 $\frac{1}{2}$,同理,

在高个子右边的两个人从中间到右边一个比一个矮的顺序只有 1 种,

占右边全部情况的 $\frac{1}{2}$,则符合条件的排法有 $24\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=6$ 种.

3. 解析　设该球队胜 x 场,平 y 场,负 z 场,则 x、y、z 是非负整数,且满足 $\begin{cases}x+y+z=15,①\\3x+y=33,②\end{cases}$

由②得 $y=3(11-x)$,

代入①得 $z=2(x-9)$,

$\because 0\leqslant y\leqslant15,0\leqslant z\leqslant15$,

$\therefore\begin{cases}0\leqslant11-x\leqslant5,\\0\leqslant x-9\leqslant7.5,\end{cases}$

$\therefore 9\leqslant x\leqslant11,x\in\mathbf{N}$,

当 $x=9$ 时,$y=6,z=0$,

当 $x=10$ 时,$y=3,z=2$,

当 $x=11$ 时,$y=0,z=4$,

$\therefore$ 比赛结果是胜 9 场、平 6 场,或是胜 10,平 3 场,负 2 场,或是胜 11 场、负 4 场,共 3 种.

4. 解析　(1)$A_4^4\times A_5^5\times A_3^3\times A_3^3=103\ 680$(种).

(2)$A_7^7\times A_8^5=33\ 868\ 800$(种).

5. 解析　(1)由题易得 $\frac{n!\ (5-n)!}{5!}-\frac{n!\ (6-n)!}{6!}=\frac{7}{10}\times\frac{n!\ (7-n)!}{7!}$,

整理得

$42-7(6-n)=\frac{7}{10}(7-n)(6-n)$,

$\therefore n=2(n=21$ 舍去).

$\therefore C_8^2=28$.

(2)由题得

$\begin{cases}\frac{n!}{2(m-1)!\ (n-m+1)!}=\frac{n!}{3m!\ (n-m)!},\\\frac{n!}{3m!\ (n-m)!}=\frac{n!}{4(m+1)!\ (n-m-1)!},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{1}{2(n-m+1)}=\frac{1}{3m},\\\frac{1}{3(n-m)}=\frac{1}{4(m+1)},\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}m=14,\\n=34.\end{cases}$

6. 解析　$\because(1-2x)^9=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_9x^9$,

$\therefore$ 令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2+\cdots-a_9=3^9$,

$\therefore|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_9|=a_0-a_1+a_2\cdots-a_9=3^9$.

7. 解析　$\because(x^2+1)(2x+1)^9=a_0+a_1(x+2)+a_2(x+2)^2+\cdots+a_{11}(x+2)^{11}$,

$\therefore$ 令 $x=-1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{11}=2\times(-1)^9=-2$.

8. 解析　$\because(1-x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$,

$\therefore$ 令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$,

令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=32$,

$\therefore a_0+a_2+a_4=16$,

$a_1+a_3+a_5=-16$,

$\therefore(a_0+a_2+a_4)(a_1+a_3+a_5)=-256$.

9. 解析　因为 $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{50}$ 的展开式中第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_{50}^k2^{25-\frac{k}{2}}3^{\frac{k}{4}}$,$k=0,1,\cdots,50$,所以要使 T_{k+1} 为有理数,则 k 为 4 的倍数,所以 $k=0,4,8,12,\cdots,48$,共 13 个.

10. 解析　$\left(|x|+\frac{1}{|x|}-2\right)^3=\left(\sqrt{|x|}-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^6$,

$T_{r+1}=C_6^r\cdot(\sqrt{|x|})^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{|x|}}\right)^r=(-1)^r\cdot C_6^r\cdot(\sqrt{|x|})^{6-2r}$.

令 $6-2r=0$,得 $r=3$,所以常数项为 T_4

$=(-1)^3\times C_6^3=-20.$

11. 答案　135.

12. 解析　$(1-2x)^5=C_5^0-C_5^1\cdot 2x+C_5^2\cdot(2x)^2-\cdots=1-10x+40x^2-\cdots$,

$(1+3x)^4=C_4^0+C_4^1\cdot 3x+C_4^2\cdot(3x)^2+\cdots=1+12x+54x^2+\cdots$,

$(1-2x)^5(1+3x)^4=1+2x-26x^2+\cdots$,

故展开式中,按 x 的升幂排列的前三项分别为 $1,2x,-26x^2$.

本章小结 C 组

1. 解析　由 4 个数字组成共有 $4^4=256$ 个密码,

由 3 个数字组成共有 $3^3=27$ 个密码,

由 5 个数字组成共有 $5^5=3\ 125$ 个密码,

所以不可以由 3 个数字组成,但可以由 5 个数字组成.

2. 解析　∵ 要把 6 张票分给 4 个人,

∴ 要把票分成四份,

∵ 1,2,3,4,5,6 之间有五个空,

任选三个空插入挡板把数分成四组共有 C_5^3 种结果,

其中如果有两个连续的空未插入挡板,则出现三个数字相连,共有 4 种情况要排除掉(具体为第一、二,第二、三,第三、四,第四、五空未插挡板),

把分成的四部分在四个位置上排列,

∴ 有 $(C_5^3-4)\times A_4^4=144$ 种分法.

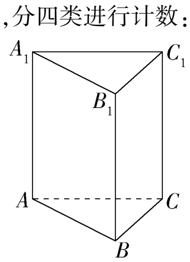
3. 解析　$C_n^1+C_n^2 6+C_n^3 6^2+\cdots+C_n^n 6^{n-1}$

$=\frac{1}{6}(C_n^0+C_n^1 6+C_n^2 6^2+C_n^3 6^3+\cdots+C_n^n 6^n-1)$

$=\frac{1}{6}[(1+6)^n-1]=\frac{1}{6}(7^n-1)$.

4. 解析　因为 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{20}=\frac{(1+x)^3[1-(1+x)^{18}]}{1-(1+x)}=\frac{(1+x)^3-(1+x)^{21}}{-x}$,所以它的展开式中含 x^3 的项为 $C_{21}^4x^4$.

5. 解析　在如图所示的三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,分四类进行计数:



①与上底面的 A_1B_1,A_1C_1,B_1C_1 异面的直线有 $3\times5=15$ 条;

②与下底面的 AB,AC,BC 异面的直线有 9 条(除去与上底面的);

③与侧棱 AA_1,BB_1,CC_1 异面的直线有 6 条(除去与下底面的);

④侧面对角线之间成异面直线的直线有 6 对.

由分类加法计数原理知共有异面直线 $15+9+6+6=36$ 对.

6. 解析　填好第一行和第一列,其他的行和列就确定,∴ 不同的填写方法有 $A_3^3A_2^2=12$ 种.

7. 解析　先安装底面的三个顶点有 A_3^3 种不同的安装方法,

再安装上底面的三个顶点有 C_2^1 种不同的安装方法.

由分步计数原理可知,共有 $A_3^3C_2^1=12$ 种不同的安装方法.

第四章　概率与统计

4.1　条件概率与事件的独立性

4.1.1　条件概率

练习 A

1. 解析　(1) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{5}$.

(2) $P(A|B)=\frac{1}{3}$.

2. 解析　不可能,因为 $P(B|A)\leqslant 1$.

3. 解析　不是黑球共有 15 种,它是黄球的概率为 $P=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

4. 解析　设事件 A 为节能灯使用寿命超过 10 000 h,事件 B 为节能灯使用寿命超过 12 000 h.

∵ $P(A)=0.95,P(AB)=0.9$,

∴ $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{19}{20}}=\frac{18}{19}$.

5. 答案　略

练习 B

1. 证明　∵ $0\leqslant P(BA)\leqslant P(A)$,

∴ $P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}\in[0,1]$.

2. 解析　$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=0.4$.

3. 解析　(1) $P=\frac{14}{32}=\frac{7}{16}$.

(2) $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

4. 解析　第一次出现正面的概率 $P(A)=\frac{1}{2}$,

第一次、第二次都出现正面的概率 $P(AB)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

∴ $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$.

5. 解析　$n(A)=6\times2=12$.

由 $3+1=1+3=2+2<5,1+2=2+1<5,1+1<5$,知 $n(B)=6$,其中 $n(AB)=5$.

所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{5}{12}$,

$P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{5}{6}$.

4.1.2　乘法公式与全概率公式

练习 A

1. 解析　(1) $P(BA)=P(A)P(B|A)=0.2\times0.15=0.03$.

(2) $P(BA)=P(A)P(B|A)=0.6\times0.3=0.18$.

2. 解析　$P(BA)+P(B\overline{A})=P(B)=0.45$.

3. 解析　(1) $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$

$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$=0.4\times0.25+0.6\times0.3=0.1+0.18=0.28$;

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.4\times0.25}{0.28}=\frac{5}{14}$.

(2) $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$

$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$=0.5\times0.2+0.5\times0.4=0.3$;

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{0.3}=\frac{0.5\times0.2}{0.3}=\frac{1}{3}$.

4. 解析　设第一次打通电话为 A,第二次打通电话为 B,则正好两次拨对电话号码的概率为 $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$.

5. 解析　设 A 为“经常参加体育锻炼”,B 为“喜欢篮球”.

则 $P(A)=0.4,P(B)=0.25$,

所以 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.25}{0.4}=\frac{5}{8}$.

练习 B

1. 解析　$P(BA)=P(A)P(B|A)=0.5\times0.2=0.1$,

∵ $P(\overline{B}A)+P(BA)=P(A)$,

∴ $P(\overline{B}A)=P(A)-P(BA)=0.4$.

2. 解析　∵ $P(BA)+P(B\overline{A})=P(B)$,

∴ $P(B\overline{A})=P(B)-P(BA)=0.72-0.35=0.37$.

3. 解析　∵ $P(B|A)=P(B)$,

∴ A、B 相互独立,

∴ $P(AB)=P(A)P(B)=0.3\times0.6=0.18$.

4. 解析　(1) 设“甲中奖”为 A,“乙中奖”为 B,则

$P(AB)=\frac{3}{20}\times\frac{2}{19}=\frac{6}{380}=\frac{3}{190}$.

(2) $P(\overline{A}B)=\frac{17}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{51}{380}$.

5. 略.

4.1.3 独立性与条件概率的关系

练习 A

1. 解析 ∵ $P(A|B)=0.6\neq P(A)=0.59$,
∴ 不独立

2. 解析 $P(A|B)=P(A)=0.75$.

3. 解析 ∵ $P(A)=1-P(\bar{A})$,
∴ $P(A|B)=0.6=P(A)$,
∴ A,B 相互独立.

4. 解析 $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$,
∴ $P(A|B)=P(A)=0.7$.

5. 解析 $P=1-\left(1-\frac{1}{70}\right)\times\left(1-\frac{1}{69}\right)\times\left(1-\frac{1}{68}\right)=\frac{3}{70}$.

练习 B

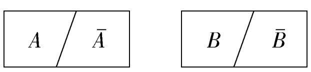
1. 解析 ∵ $P(AB)=\frac{5}{12}=P(A)\times P(B)$,
又∵ $P(B)=\frac{5}{6}$, ∴ $P(A)=\frac{1}{2}$,
∴ $P(\bar{A}|B)=1-P(A)=\frac{1}{2}$.

2. 解析 $P=1-(1-r^2)^2=r^2(2-r^2)$.

3. 解析 (1) $P=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$.
(2) $P=\frac{1}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$.
(3) $P=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$.

4. 解析 $P=C_3^2\times\left(\frac{1}{10}\right)^2\times\frac{9}{10}=\frac{27}{1\ 000}=0.027$.

5. 证明 如图.



◆ 习题 4-1A

1. 解析 设"A 指标优秀"为 A,"B 指标优秀"为 B,
$P(A)=0.8,P(B)=0.75,P(AB)=0.7$,
则 $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{7}{8}$.

2. 解析 设"第一次抽到一等品"为 A,"第二次抽到一等品"为 B,
则 $P(AB)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$.

3. 解析 ∵ $P(BA)+P(B\bar{A})=P(B)$,
∴ $P(B)=0.5+0.2=0.7$,
∴ $P(\bar{B})=1-P(B)=0.3$.

4. 解析 (1)设"抽到男生"为 A,则 $P(A)=\frac{15}{32}$.
(2)设"抽到女生"为 B,"无外地旅游经历"为 C,
则 $P(C|B)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{8}{17}$.
(3) $P(\bar{C}|B)=\frac{P(\bar{C}\cap B)}{P(B)}=\frac{9}{17}$.
(4) $P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.
(5) $P(\bar{C})=\frac{15}{32}\neq P(\bar{C}|B)=\frac{9}{17}$.
故两者不相互独立.

5. 解析 (1) $P=0.8^3=0.512$.
(2) $P=1-0.8^3=0.488$.
(3) $P=0.2^3=0.008$.

6. 解析 设乘坐公共汽车为 A,则乘坐地铁为 $\bar{A}$,
(1)设迟到为 B,则
$P(B|A)=0.2,P(B|\bar{A})=0.05$,
∴ $P(B)=P(B|A)+P(B|\bar{A})=0.25$.
(2) $P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$
$=\frac{0.3\times0.2}{0.3\times0.2+0.7\times0.05}=\frac{12}{19}$.

◆ 习题 4-1B

1. 解析 $P=\frac{a}{a+b}\times\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\times\frac{a}{a+b-1}$
$=\frac{a(a+b-1)}{(a+b)(a+b-1)}=\frac{a}{a+b}$.

2. 解析 $P=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

3. 解析 设 A 为一天的空气质量为优良,B 为随后一天的空气质量为优良.
$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.6}{0.75}=\frac{4}{5}$.

4. 解析 (1)∵ $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7$,
∴ $P(BA)=P(A)P(B|A)$
$=0.7\times0.6=0.42$.
(2) $P(A)=1-P(\bar{A})=0.4$,
则 $P(\bar{B}A)=P(A)\cdot P(\bar{B}|A)=0.4\times0.8$
$=0.32$,
∵ $P(BA)+P(\bar{B}A)=P(A)$,
∴ $P(BA)=0.4-0.32=0.08$.

5. 解析 ∵ $P(\bar{A})=0.6$, ∴ $P(A)=0.4$,
∴ $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})$
$=0.4\times0.35+0.6\times0.2=0.14+0.12=0.26$.
∴ $P(\bar{B})=1-P(B)=0.74$,
$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}$
$=\frac{0.4\times0.35}{0.4\times35+0.6\times0.2}=\frac{7}{13}$.

◆ 习题 4-1C

1. 证明 充分性:∵ $P(B|A)=P(B)$,
∴ $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$,
∴ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$,
∴ A、B 相互独立,∴ $\bar{A}$ 与 B 也相互独立,
∴ $P(B|\bar{A})=P(B)$.
必要性:∵ $P(B|\bar{A})=P(B)$,
∴ $\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}=P(B)$,
∴ $P(\bar{A}\cap B)=P(B)P(\bar{A})$,
∴ $\bar{A}$ 与 B 相互独立,∴ A 与 B 也相互独立,∴ $P(B|A)=P(B)$.

2. 证明 ∵ $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$,
∴ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.
又∵ $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$,
∴ $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.
∴ 两者等价,∴ $P(B|A)=P(B)$ 的充要条件为 $P(A|B)=P(A)$.

4.2 随机变量

4.2.1 随机变量及其与事件的联系

练习 A

1. 解析 (1) C_{100}^5.
(2) X 的可能取值有 0,1,2,3,共 4 个.

2. 解析 (1) $X=0,1,2,3,4,5$.
(2) $Y=1,2,3,4,\cdots,10$.
(3) $Z=0,1,2,3,4,5$.

3. 解析 $Y\geqslant5$ 表示向上的点数为 5 点或 6 点,所以 $P(Y\geqslant5)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

4. 解析 Y 的取值范围为 $\{2,3\}$.

5. 解析 Y 的取值范围为 $\{2,4,6,8,10,12\}$.

练习 B

1. 解析 所有可能的结果有(正、正),(正、反),(反、正),(反、反),共 4 种,其中 $X=0$ 表示(正、反)或(反、正),
∴ $P(X=0)=\frac{1}{2}$.

2. 解析 (1) $P(X=a)=1-P(X\neq a)$.
(2) $P(X<a)=1-P(X\geqslant a)$.
(3) $P(X<a)<P(X<a+1)$.

3. 解析 $P(X>0)=1-P(X\leqslant0)=0.75$.

4. 解析 $P(|X|=1)=P(X=1)+P(X=-1)=0.4$.

5. 解析 (1) $Y=500+35\times80=3\ 300$.
(2) $Y=35X+500$.
(3)由 $Y=2\ 950$ 知 $X=70$,
∴ $P(X\leqslant70)=P(Y\leqslant2\ 950)=1-P(X>2\ 950)=0.73$.

4.2.2 离散型随机变量的分布列

练习 A

1. 解析 (1) $0.2+0.2+0.2+0.2+0.3>1$,不是.
(2) $0.1-0.2+0.3+0.4+0.2+0.2=1$,是.

2. 解析 $0.3+a+0.5=1$, ∴ $a=0.2$.

3. 解析

X	0	1
P	0.5	0.5

4. 解析 (1)由题意知 X 的分布列为

X	0	1
P	0.7	0.3

$\therefore P(X=0)=0.7$.

(2)$X=0$ 时,$Y=1$;

$X=1$ 时,$Y=3$,

$\therefore$ Y 的分布列为

Y	1	3
P	0.7	0.3

5. 解析

X	0	1
P	0.4	0.6

练习 B

1. 解析 $0.5+0.2+a=1$,$\therefore a=0.3$.

2. 解析 设销售这批西瓜获利 X 元,X 的可能取值为 1 000,500,−500,则 X 的分布列为

X	1 000	500	−500
P	0.4	0.2	0.4

3. 解析 $0.03+0.05+0.07+0.08+0.26+a+0.23=1$,$\therefore a=0.28$.

(2)$P(\xi>6)=1-P(\xi=4)-P(\xi=5)-P(\xi=6)=0.85$.

4. 解析 (1)一次正面向上;

$P(X=1)=\dfrac{1}{2}$.

(2)

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

5. 解析 (1)

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\dfrac{1}{36}$	$\dfrac{2}{36}$	$\dfrac{3}{36}$	$\dfrac{4}{36}$	$\dfrac{5}{36}$	$\dfrac{6}{36}$	$\dfrac{5}{36}$	$\dfrac{4}{36}$	$\dfrac{3}{36}$	$\dfrac{2}{36}$	$\dfrac{1}{36}$

(2)$P(X<5)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

(3)$P(X>9)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

4.2.3 二项分布与超几何分布

练习 A

1. 答案 (1)二项分布.

(2)超几何分布.

2. 答案 (1)

X	0	1	2	3	4	5
P	$C_5^0\times0.9^5$	$C_5^1\,0.1\times0.9^4$	$C_5^2\,0.1^2\times0.9^3$	$C_5^3\times0.1^3\times0.9^2$	$C_5^4\,0.1^4\times0.9$	$C_5^5\times0.1^5$

(2)$P=C_5^2\times0.1^3\times0.9^2+C_5^4\times0.1^4\times0.9+C_5^5\times0.1^5=\dfrac{107}{12\ 500}$.

3. 解析 超几何分布.

$P(X=3)=\dfrac{C_8^3C_{12}^0}{C_{20}^3}=\dfrac{14}{285}$.

4. 解析

X	0	1	2	3
P	$C_3^0\times0.75^3$	$C_3^1\times0.75^2\times0.25^1$	$C_3^2\times0.75\times0.25^2$	$C_3^3\times0.25^3$

5. 解析 (1)有放回抽样时,取到的黑球个数 X 可能的取值为 0,1,2.又由于每次抽到黑球的概率均为 $\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$,2 次取球可以看成 2 次独立重复试验,即 $X\sim B\left(2,\dfrac{1}{3}\right)$,

$P(X=0)=C_2^0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{9}$,

$P(X=1)=C_2^1\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$,

$P(X=2)=C_2^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$.

$\therefore$ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{4}{9}$	$\dfrac{1}{9}$

(2)不放回抽样时,取到的黑球个数 Y 可能的取值为 0,1,2.

且有 $P(Y=0)=\dfrac{C_6^2}{C_9^2}=\dfrac{5}{12}$,

$P(Y=1)=\dfrac{C_3^1C_6^1}{C_9^2}=\dfrac{1}{2}$,

$P(Y=2)=\dfrac{C_3^2C_6^0}{C_9^2}=\dfrac{1}{12}$.

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\dfrac{5}{12}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$

练习 B

1. 解析 (1)3 次预报中恰有 2 次预报准确的概率为

$P=C_3^2\times0.8^2\times(1-0.8)=0.384$.

(2)3 次预报中至少有 2 次预报准确的概率为 $P=1-C_3^0(0.2)^3-C_3^1 0.8\times0.2^2=0.896$.

(3)3 次预报中恰有 2 次预报准确,且其中第 3 次预报准确的概率为

$P=0.2\times0.8\times0.8+0.8\times0.2\times0.8=0.256$.

2. 解析 (1)超几何分布,$X\sim H(5,10,30)$.

(2)二项分布,$X\sim B(300,0.25\%)$.

(3)超几何分布,$X\sim H(3,3,7)$.

3. 解析 (1)设随机变量 X 表示所选 3 人中女生的人数,

$\because$ 从 4 名男生和 2 名女生中任选 3 人参加演讲比赛,

$\therefore$ X 的可能取值为 0,1,2,

$P(X=0)=\dfrac{C_4^3}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$,

$P(X=1)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{3}{5}$,

$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{1}{5}$,

$\therefore$ X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

(2)$X\leqslant1$ 表示"所选 3 人中女生人数 $X\leqslant1$",

则 $P(X\leqslant1)=P(X=0)+P(X=1)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{5}$.

4. 解析

Y	1	3	5	7
P	$C_3^0\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$	$C_3^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\dfrac{1}{4}$	$C_3^2\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$	$C_3^3\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$

5. 解析 此单位没有人患此病的概率为 $C_{1\,000}^0\times0.999^0\times(0.001)^{1\,000}$,

故该单位至少有 1 人患此病的概率为 $1-C_{1\,000}^0\times0.999^0\times(0.001)^{1\,000}=1-(0.001)^{1\,000}$.

4.2.4 随机变量的数字特征

练习 A

1. 解析 一个骰子点数 X 的期望值

$E(X)=\dfrac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=3.5$,

$D(X)\approx2.916\ 67$.

2. 解析 设这台机器每生产一件产品可获利 X 元,则 X 的可能取值为 50,30,−20,

$P(X=50)=0.6$,$P(X=30)=0.3$,

$P(X=-20)=0.1$,

所以 X 的分布列为

X	50	30	−20
P	0.6	0.3	0.1

所以这台机器每生产一件产品平均预期可获利为 $E(X)=50\times0.6+30\times0.3-20\times0.1=37$(元).

3. 解析 由题意可知,该事件满足独立重复试验,是一个二项分布模型,其中,$p=0.02$,$n=100$,$E(X)=np=0.02\times100=2$,

则 $DX=np(1-p)=100\times0.02\times0.98=1.96$.

4. 解析 易知 X 的可能取值为 0,1,2,3,4,5,

$X\sim H(5,6,14)$,

则 $E(X)=\dfrac{nM}{N}=\dfrac{5\times6}{14}=\dfrac{15}{7}$.

5. 解析 (1)$E(X)=3.7+19+11.7+4=$

38.4,

$D(X)=(37-38.4)^2\times0.1+(38-38.4)^2\times0.5+(39-38.4)^2\times0.3+(40-38.4)^2\times0.1$

$=0.196+0.08+0.108+0.256=0.64$.

(2)$E(Y)=1.8E(X)+32=101.12$,

$D(Y)=(1.8)^2D(X)=2.073\ 6$.

练习 B

1. 解析　$np=7$,$np(1-p)=6$,

$\therefore 1-p=\frac{6}{7}$,$\therefore p=\frac{1}{7}$.

2. 解析　(1)ξ 的可能取值为 0,1,则

因为 $P(\xi=1)=0.7$,$P(\xi=0)=0.3$,

所以 $E\xi=1\times P(\xi=1)+0\times P(\xi=0)=0.7$.

(2)解法一:η 的可能取值为 0,1,2,则

$P(\eta=0)=0.3^2=0.09$,

$P(\eta=1)=C_2^1\times0.7\times0.3=0.42$,

$P(\eta=2)=0.7^2=0.49$,

η 的概率分布列为

η	0	1	2
P	0.09	0.42	0.49

所以 $E\eta=0\times0.09+1\times0.42+2\times0.49=1.4$.

解法二:

$\because \eta\sim B(2,0.7)$,

$\therefore E(\eta)=np=2\times0.7=1.4$.

3. 证明　$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i=$

$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-2E(X)x_i+(E(X))^2)p_i$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2E(X)\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i+(E(X))^2\sum\limits_{i=1}^{n}p_i$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2p_i-(E(X))^2$.

4. 解析　解法一:主要依乙所验的次数分类:

若乙验两次时,有两种可能:

①先验三只结果为阳性,再从中逐个验时,恰好一次验中的概率为

$\frac{C_4^2A_3^3}{A_5^3}\times\frac{1}{A_3^1}=\frac{6\times6}{3\times4\times5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$(也可以用 $\frac{C_4^2}{C_5^3}\times\frac{1}{C_3^1}=\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$).

②先验三只结果为阴性,再从其它两只中验出阳性(无论第二次有没有验中,均可以在第二次结束),概率为

$\frac{A_4^3A_2^1}{A_5^3A_2^2}=\frac{24}{5\times4\times3}=\frac{2}{5}\left(\frac{A_4^3}{A_5^3}=\frac{2}{5}\right)$,

$\therefore$ 乙只用两次的概率为 $\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

若乙验三次时,只有一种可能:

先验三只结果为阳性,再从中逐个验时,恰好二次验中的概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^3}\times\frac{C_2^1}{C_3^2}$

$=\frac{2}{5}$,

$\therefore$ 在三次验出时的概率为 $\frac{2}{5}$,

$\therefore$ 甲种方案的次数不少于乙种次数的概率为

$\frac{3}{5}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{12}{25}+\frac{6}{25}$

$=\frac{18}{25}>\frac{1}{2}$,$\therefore$ 乙种化验方案更好.

解法二:设 A 为甲的次数不少于乙的次数,则 $\overline{A}$ 表示甲的次数少于乙的次数,

$\overline{A}$ 包含两种情况,即甲进行了一次即验出了和甲进行了两次,乙进行了三次.

则设 A_1,A_2 分别表示甲在第一次、二次验出,并设乙在三次验出为 B,

则 $P(A_1)=\frac{1}{C_5^1}=\frac{1}{5}$,$P(A_2)=\frac{A_4^1}{A_5^2}=\frac{1}{5}$,

$P(B)=\frac{C_4^2}{C_5^3}\left(1-\frac{1}{C_3^1}\right)=\frac{2}{5}$,

$\therefore P(\overline{A})=P(A_1)+P(A_2)\cdot P(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{25}$,

$\therefore P(A)=1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$.

$\because \frac{18}{25}>\frac{1}{2}$,$\therefore$ 乙种化验方案更好.

4.2.5　正态分布

练习 A

1. 解析　$P(\xi<3)=P(\xi\geqslant3)=0.5$.

2. A　$\mu_1<0$,$\mu_2>0$,$\therefore \mu_1<\mu_2$,

由第一图瘦高,第二图矮胖知 $\sigma_1<\sigma_2$.

3. 解析　(1)$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu)=P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)=0.341\ 3$.

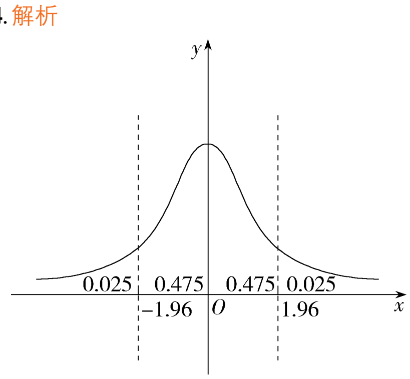
(2)$P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu)$

$=P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)$

$=P(\mu\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)+P(\mu+\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)$

$=0.341\ 3+0.135\ 9=0.477\ 2$.

4. 解析



解法一:$\because \xi\sim N(0,1)$

$\therefore P(|\xi|<1.96)$

$=P(-1.96<\xi<1.96)$

$=\phi(1.96)-\phi(-1.96)$

$=1-2\phi(-1.96)$

$=0.950$.

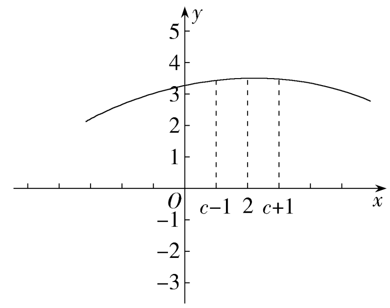
解法二:因为曲线的对称轴是直线 $x=0$,

所以由图可知 $P(\xi>1.96)=P(\xi\leqslant-1.96)=\phi(-1.96)=0.025$,

$\therefore P(|\xi|<1.96)=1-0.25-0.25=0.950$.

练习 B

1. 解析



随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,9)$,

所以正态曲线关于直线 $x=2$ 对称,

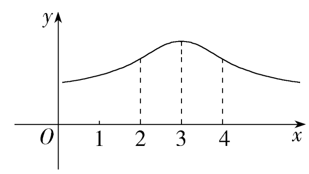
因为 $P(\xi>c+1)=P(\xi<c-1)$,

所以直线 $x=c+1$ 与 $x=c-1$ 关于直线 $x=2$ 对称,

所以 $(c+1)+(c-1)=2\times2$,

解得 $c=2$.

2. 解析



$P(3\leqslant X\leqslant4)=\frac{1}{2}P(2\leqslant X\leqslant4)=0.341\ 3$,

观察上图得,

$P(X>4)=0.5-P(3\leqslant X\leqslant4)=0.5-0.341\ 3=0.158\ 7$.

3. 解析　$\because$ 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$,

$\therefore$ 正态曲线关于 $x=0$ 对称,

$\because P(\xi>2)=0.023$,

$\therefore P(\xi<-2)=0.023$,

$\therefore P(-2\leqslant\xi\leqslant2)=1-0.023-0.023=0.954$.

4. 解析　$\because$ 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,

$\therefore$ 正态曲线的对称轴是 $x=2$,

$\because P(\xi<4)=0.8$,

$\therefore P(\xi>4)=0.2$,

$\therefore P(0<\xi<2)=0.5-0.2=0.3$.

5. 解析　$\because$ 随机变量 X 服从正态分布 $N(10,\sigma^2)$,

$\therefore$ 正态曲线的对称轴是 $x=10$,

$\because P(X<10.5)=0.8$,

$\therefore P(X\geqslant10.5)=0.2$,

$\therefore P(9.5<X<10.5)=1-0.2\times2=0.6$.

◆习题 4-2A

1. 解析　(1)$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

(2)$\{0,1,2,3\}$.

(3)$[0,3]$.

(4)$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

2. 解析 $P(Y=5)=P(X=3)=0.2$.

3. 解析 $P(X\neq 1)=1-P(X=1)=0.7$.

4. 解析 易知 X 的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$,

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$,

$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$,

∴ X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

5. 解析 用 X 表示 10 局中甲赢的次数,则 X 服从二项分布 $B(10,0.51)$.

$E(X)=10\times0.51=5.1$,即甲平均赢 5.1局.

6. 解析 二项分布.

由于每个学生早上到校的时间相互没有影响,

则这个班某天正好有 3 个学生迟到的概率 $P=C_{35}^3\times(0.05)^3\times(1-0.05)^{32}$

$=C_{35}^3\times\frac{5^3\times95^{32}}{100^{35}}\approx0.158$.

7. 解析 用 X_1,X_2,X_3 分别表示方案 1,2,3 的损失.

采用第 1 种方案,无论有无洪水都损失 3 800 元,即 $X_1=3\ 800$,

∴ $P(X_1=3\ 800)=1$.

采用第 2 种方案,遇到大洪水时,损失 2 000+60 000=62 000 元;没有大洪水时,损失 2 000 元,因此 $X_2=\begin{cases}62\ 000,有大洪水,\\2\ 000,无大洪水,\end{cases}$

∴ $P(X_2=62\ 000)=0.01$,

$P(X_2=2\ 000)=0.99$.

采用第 3 种方案,遇到大洪水时,损失 60 000元,

遇到小洪水时,损失 10 000 元,无洪水不损失,即

$X_3=\begin{cases}60\ 000,有大洪水,\\10\ 000,有小洪水,\\0,无洪水,\end{cases}$

∴ $P(X_3=60\ 000)=0.01$,

$P(X_3=10\ 000)=0.25$,

$P(X_3=0)=0.74$.

∴ $E(X_1)=3\ 800$,

$E(X_2)=62\ 000\times0.01+2\ 000\times(1-0.01)=2\ 600$,

$E(X_3)=60\ 000\times0.01+10\ 000\times0.25=3\ 100$.

因此采取方案 2 的平均损失最小,可以选择方案 2.

◆习题 4-2B

1. 解析 (1)$\xi\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

(2)$P(\xi=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

2. 解析 (1)$X=10$ 时,$Y=50-30=20$.

(2)$Y=5X-3(20-X)=8X-60$.

(3)$P(Y>60)=P(X>15)=1-P(X\leqslant15)=0.7$.

3. 解析 $P(\xi>2)=P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0=\frac{1}{216}$.

4. 解析 我们知道只有 5 发子弹,所以 X 的可能取值只有 1,2,3,4,5.

当 $X=1$ 时,$P(X=1)=0.9$;

当 $X=2$ 时,要求第一次没射中,第二次射中,故 $P(X=2)=0.1\times0.9=0.09$;

$X=3$ 时,要求前两次没有射中,第三次射中,故 $P(X=3)=0.1^2\times0.9=0.009$;

类似地,$P(X=4)=0.1^3\times0.9=0.000\ 9$;

第 5 次射击不同,只要前四次射不中,都要射第 5 发子弹,也不考虑是否射中,所以 $P(X=5)=0.1^4$,所以耗用子弹数 X 的分布列为

X	1	2	3	4	5
P	0.9	0.09	0.009	0.000 9	0.000 1

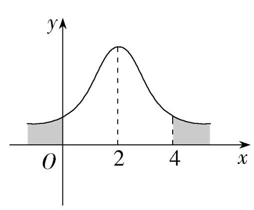
5. 解析 没有发芽的种子数 ξ 服从二项分布,即 $\xi\sim B(1\ 000,0.1)$,

而每粒需再补种 2 粒,故 $X=2\xi$,

则 $E(X)=2E(\xi)=2\times1\ 000\times0.1=200$,

$D(X)=D(2\xi)=4D(\xi)=4\times1\ 000\times0.1\times0.9=360$.

6. 解析



∵ 随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,

∴ $\mu=2$,

如图,∵ $P(\xi\leqslant4)=0.84$,

∴ $P(\xi\geqslant4)=1-P(\xi\leqslant4)=1-0.84=0.16$,

∴ $P(\xi\leqslant0)=P(\xi\geqslant4)=0.16$.

7. 解析 ∵ ξ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$,ξ 在(0,1)内取值的概率为 0.4,

∴ 由正态分布的对称性可知 ξ 在(1,2)内取值的概率也为 0.4,

∴ $P(0<\xi<2)=P(0<\xi<1)+P(1<\xi<2)=0.4+0.4=0.8$.

4.3 统计模型

4.3.1 一元线性回归模型

练习 A

1. 答案 对.

2. 答案 (1)正相关.

(2)负相关.

3. 解析 对.

假设 x 与 y 的线性回归方程为 $y=ax+b$ $(a\neq0)$,

则 $x=\frac{1}{a}y-\frac{b}{a}$ 也为线性关系,故 y 与 x 也线性相关.

4. 解析 因为所有样本点都落在一条直线上,所以相关系数 $|r|=1$,又回归直线方程为 $y=\frac{1}{2}x+1$,说明 x 与 y 正相关,即 $r>0$,所以 $r=1$.

5. 解析 由变量 x 与 y 相对应的一组数据为(10,1),(11.3,2),(11.8,3),(12.5,4),(13,5),可得:变量 y 与 x 正相关,因此 $r_1>0$.

而由变量 u 与 v 相对应的一组数据为(10,5),(11.3,4)(11.8,3),(12.5,2),(13,1),可知:变量 u 与 v 负相关,因此 $r_2<0$.

6. 解析 设回归直线方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,

∴ $\begin{cases}96=8\hat{b}+\hat{a},\\99=9\hat{b}+\hat{a},\end{cases}$

∴ $\begin{cases}\hat{b}=3,\\\hat{a}=72.\end{cases}$

练习 B

1. 答案 $x=4y-8$.

2. 答案 $\hat{y}=\frac{3}{10}u-13$.

3. 解析 $\bar{v}=\frac{10+20+30+40+50}{5}=30$,

$\bar{u}=\frac{25+35+45+55+75}{5}=47$,

$\bar{u}'=\frac{20+30+40+50+70}{5}=42$,

设 u 关于 v 的回归直线方程为$\hat{u}=\hat{b}v+\hat{a}$,

则该回归直线过样本中心点(30,47),

由题易知过样本中心点(30,42)的回归直线方程为$\hat{u}'=1.2v+6$,

故 u 关于 v 的回归直线方程为$\hat{u}=1.2v+11$.

4. 解析 y 减少 3.9 个单位.

5. 解析 由 x 增大 y 减小知$\hat{b}<0$,又 $x=3$ 时 $y>0$,∴ $\hat{a}>0$,故$\hat{a}>0$,$\hat{b}<0$.

6. 解析 (1)平均命中率为

$\bar{y}=\frac{0.4+0.5+0.6+0.6+0.4}{5}=0.5$.

(2)平均时间$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$,利用线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中系数计算公式

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0.01,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=0.47$,

所以线性回归方程为

$\hat{y}=0.01x+0.47$.

令 $x=6$,得$\hat{y}=0.53$.

预测小李该月 6 号打篮球 6 小时的投篮命中率为 0.53.

7. 略.

4.3.2 独立性检验

练习 A

1. 解析　$P=\frac{80}{190}$,∴ 该企业员工中支持企业改革的人数约为 $950\times\frac{80}{190}=400$.

2. 解析

	男	女	合计
晕车	28	32	60
不晕车	124	136	260
合计	152	168	320

3. 答案　是.

4. 答案　是.

5. 解析　$P(\chi^2\geqslant7.897)=1-P(\chi^2<7897)=0.905$.

练习 B

1. 解析　将 2×2 列联表中的数据代入公式计算,得

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(30\times10-15\times45)^2}{75\times25\times45\times55}=\frac{4}{33}\approx0.12.$$

因为 0.12<3.841,所以没有 95%的把握认为"体育迷"与性别有关.

2. 解析　(1)由题知 2×2 列联表如下.

	甲	乙	合计
优质品	360	320	680
非优质品	140	180	320
合计	500	500	1 000

甲厂优质品率为 72%,乙厂优质品率为 64%.

(2)$\chi^2=\frac{1\,000(360\times180-320\times140)^2}{500\times500\times680\times320}\approx7.353>6.635$,

∴ 有 99%的把握认为两个分厂生产的零件优质品率有差异.

3. 解析　及格的有$\frac{39}{52}\times32=24$ 人.

4. 解析　(1)调查的 500 位老年人中有 70 位需要志愿者提供帮助,

因此在该地区老年人中,需要帮助的老年人的比例的估计值为$\frac{70}{500}=14\%$.

(2)$\chi^2=\frac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967$,因为 9.967>6.635,所以有 99%的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关.

(3)根据(2)的结论可知,该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关,并且从样本数据能够看出该地区男性老年人与女性老年人中需要帮助的比例有明显差异,因此在调查时,先确定该地区老年人中男女的比例,再把老年人分成男女两层,并采用分层抽样方法比简单随机抽样方法更好.

◆习题 4-3A

1. 答案　240.

2. 答案　$\hat{a}=-6$.

3. A　x 与 y 负相关,x 与 z 负相关.

4. 解析　(1)$\chi^2=\frac{100\times(40\times27-18\times15)^2}{58\times42\times55\times45}=\frac{24\,300}{2\,233}\approx10.88>10.828$,

所以有 99.9%把握认为收看新闻节目的观众与年龄有关.

(2)抽取的比例为$\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$,所以大于 40 岁的观众应该抽取$\frac{1}{9}\times27=3$ 名.

(3)在年龄 20 至 40 岁的 2 名观众和年龄大于 40 岁的 3 名观众中共任取 2 名,恰有 1 名观众的年龄为 20 至 40 岁的概率为$\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$.

◆习题 4-3B

1. 答案　由表格得

$$\hat{b}=\frac{(4+3+12+15+24)-6\times3.5\times\frac{13}{6}}{(1+4+9+16+25+36)-6\times3.5^2}=\frac{5}{7},$$

$\hat{a}=-\frac{1}{3}$.

由前两组数据求得 $b'=2,a'=-2$.

故$\hat{b}<b',\hat{a}>a'$.

2. 解析　(1)由所给数据看出,年需求量与年份之间是近似直线上升,下面来配回归直线方程,为此对数据预处理如下:

年份−2006	−4	−2	0	2	4
需求量−257	−21	−11	0	19	29

对预处理后的数据,容易算得:

$\bar{x}=0,\bar{y}=3.2$,

$$\hat{b}=\frac{(-4)\times(-21)+(-2)\times(-11)+2\times19+4\times29}{4^2+2^2+2^2+4^2}=\frac{260}{40}=6.5,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3.2$.

由上述计算结果,知所求回归直线方程为

$\hat{y}-257=\hat{b}(x-2\,006)+\hat{a}=6.5(x-2\,006)+3.2$,

即$\hat{y}=6.5(x-2\,006)+260.2$①.

(2)利用直线方程①,可预测 2022 年的粮食需求量为

$6.5(2\,022-2\,006)+260.2=6.5\times16+260.2=364.2$(万吨).

3. 解析　$P(\chi^2\geqslant6)>P(\chi^2\geqslant7)$,

$a=P(\chi^2<6)=1-P(\chi^2\geqslant6)$,

$b=P(\chi^2<7)=1-P(\chi^2\geqslant7)$,∴ $a<b$.

4. 解析　(1)由已知得,样本中有 25 周岁及以上组工人 60 名,25 周岁以下组工人 40 名.所以,样本中日平均生产件数不足 60 件的工人中:

25 周岁及以上组工人有 $60\times0.05=3$(人),记为 A_1,A_2,A_3;

25 周岁以下组工人有 $40\times0.05=2$(人),记为 B_1,B_2.

从中随机抽取 2 名工人,所有的可能结果共有 10 种,它们是(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_2,A_3),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2).

其中,至少有 1 名"25 周岁以下组"工人的可能结果共有 7 种,它们是(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(B_1,B_2).

故所求的概率 $P=\frac{7}{10}$.

(2)由频率分布直方图可知,在抽取的 100 名工人中,25 周岁及以上组中的"生产能手"有 $60\times0.25=15$(人),25 周岁以下组中的"生产能手"有 $40\times0.375=15$(人),据此可得 2×2 列联表如下:

	生产能手	非生产能手	合计
25 周岁及以上组	15	45	60
25 周岁以下组	15	25	40
合计	30	70	100

所以 $\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100\times(15\times25-15\times45)^2}{60\times40\times30\times70}=\frac{25}{14}\approx1.786$.

因为 1.786<2.706,所以没有 90%的把握认为"生产能手与工人所在的年龄组有关".

本章小结 A 组

1. 解析　设"这两个零件中恰有一个一等品"为 A,"仅第一个实习生加工为一等品"为 B,"仅第二个实习生加工为一等品"为 C,显然 $A=B\bar{C}+\bar{B}C$.

$$P(A)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}.$$

2. 解析　总的选法有 $C_6^3=20$ 种,男生甲

被选中的概率为 $P(A)=\frac{C_5^2}{20}=\frac{1}{2}$，

男生甲、女生乙都被选中的概率为

$P(AB)=\frac{C_4^1}{20}=\frac{1}{5}$，

则在男生甲被选中的情况下，求女生乙也被选中的概率为 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$

$=\frac{2}{5}$.

3. 解析　(1) $P(X=3)=C_5^3\times(0.6)^3\times(0.4)^2=\frac{216}{625}$.

(2) $P=3\times(0.6)^3\times(0.4)^2=\frac{324}{3\,125}$.

4. 解析　(1) 由已知得，甲、乙两名运动员在每一局比赛中获胜的概率都是 $\frac{1}{2}$.

记“甲以 4 比 1 获胜”为事件 A，则

$P(A)=C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(2) 记“乙获胜且比赛局数多于 5 局”为事件 B.

因为乙以 4 比 2 获胜的概率为

$P_1=C_5^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，

乙以 4 比 3 获胜的概率为

$P_2=C_6^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3}\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$，

所以 $P(B)=P_1+P_2=\frac{5}{16}$.

5. 解析　$P(X=1)=1-P(X=0)=0.7$.

6. 解析　Y 的范围为 $\{1,0,4\}$.

7. 解析　二项分布.

$P(X=10)=C_{10}^{10}(0.9)^{10}\approx0.348\ 7$.

8. 解析　二项分布.

$\because X\sim B(5,0.2)$，$P(X\geqslant1)=1-P(X=0)$

$=1-C_5^0(0.2)^0\times(0.8)^5=0.672\ 32$.

9. 解析　二项分布. $\because X\sim B\left(30,\frac{1}{365}\right)$，

$\therefore P(X\geqslant2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-C_{30}^0\left(1-\frac{1}{365}\right)^{365}-C_{30}^1\frac{1}{365}\left(1-\frac{1}{365}\right)^{364}\approx$

0.602.

10. 解析　(1) 设 A_1 表示事件“日销售量不低于 100 个”，A_2 表示事件“日销售量低于 50 个”，B 表示事件“在未来连续 3 天里有连续 2 天日销售量不低于 100 个且另一天销售量低于 50 个”，因此

$P(A_1)=(0.006+0.004+0.002)\times50=0.6$，

$P(A_2)=0.003\times50=0.15$，

$P(B)=0.6\times0.6\times0.15\times2=0.108$.

(2) X 可能取的值为 0，1，2，3，相应的概率为

$P(X=0)=C_3^0(1-0.6)^3=0.064$，

$P(X=1)=C_3^1 0.6(1-0.6)^2=0.288$，

$P(X=2)=C_3^2 0.6^2(1-0.6)=0.432$，

$P(X=3)=C_3^3 0.6^3=0.216$.

分布列为

X	0	1	2	3
P	0.064	0.288	0.432	0.216

因为 $X\sim B(3,0.6)$，

所以期望 $EX=3\times0.6=1.8$，

方差 $DX=3\times0.6\times(1-0.6)=0.72$.

11. 答案

	男生	女生	总计
阅读营养成分说明	18	28	46
不阅读营养成分说明	18	10	28
总计	36	38	74

本章小结 B 组

1. 解析　抛掷红、蓝两枚骰子，则“红色骰子出现点数 4”的概率为 $P(A)=\frac{1}{6}$，

“蓝骰子出现的点数是偶数”的概率

$P(B)=\frac{3}{6}$.

“红色骰子出现点数 4”且“蓝色骰子出现偶数点”的概率为

$P(AB)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$，

所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{6}$.

2. 解析　因为甲、乙赢一局的概率均为 $\frac{1}{2}$，所以 P(第一局甲赢)$=\frac{1}{2}$，P(第一局乙赢)$=\frac{1}{2}$，P(第二局甲赢)$=\frac{1}{2}$，

P(第二局乙赢)$=\frac{1}{2}$，故 P(甲获得冠军)$=P$(第一局甲赢)$+P$(第一局乙赢)$\times P$(第二局甲赢)$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

3. 解析　设事件 A 在一次试验中发生的概率为 p，则事件 A 在一次试验中不发生的概率为 $1-p$，3 次试验中事件 A 至少发生一次的对立事件是“在 3 次试验中，事件 A 一次也没有发生”，即有 $(1-p)^3=1-\frac{63}{64}$，解得 $p=\frac{3}{4}$. 则事件 A 恰好发生一次的概率 $P=C_3^1\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{9}{64}$.

4. 解析　(1) 甲品牌 $70\%\times80\%=0.56$，

乙品牌 $(1-70\%)\times90\%=0.27$，

$\therefore$ 买到优质电脑的概率为 $0.56+0.27=0.83$.

(2) $P=\frac{0.56}{0.83}\approx0.675$.

5. 解析　相互独立.

$\because P(A|B)=1-P(\bar{A}|B)=0.3$，

$\therefore P(A|B)=P(A)$，$\therefore A$、B 相互独立.

6. 解析　因为 $P(\bar{B}|A)=\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)}=$

$\frac{P(\bar{B}A)}{1-P(\bar{A})}=\frac{P(\bar{B}A)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$，

所以 $P(\bar{B}A)=\frac{1}{3}$，

因为 $P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{B}\bar{A})}{P(\bar{A})}$，$P(\bar{B}|\bar{A})=1-P(B|\bar{A})=\frac{3}{4}$，所以 $P(\bar{B}\bar{A})=\frac{3}{8}$，

因此 $P(\bar{B})=P(\bar{B}A)+P(\bar{B}\bar{A})=\frac{1}{3}+\frac{3}{8}$

$=\frac{17}{24}$，所以 $P(B)=1-P(\bar{B})=\frac{7}{24}$，

从而 $P(\bar{A}|B)=P(B|\bar{A})\frac{P(\bar{A})}{P(B)}=\frac{1}{4}\times\frac{\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}$

$=\frac{3}{7}$.

7. 解析　分布列为 $P(X=0)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$，

$P(X=n)=\frac{n}{50}(n=1,2,\cdots,9)$.

则分布列为

$X=n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P	10%	2%	4%	6%	8%	10%	12%	14%	16%	18%

8. 解析　(1) 如果采用三局两胜制，则甲在下列两种情况下获胜：A_1(甲净胜二局)，A_2(前二局甲一胜一负，第三局甲胜).

$P(A_1)=0.6\times0.6=0.36$，

$P(A_2)=C_2^1\times0.6\times0.4\times0.6=0.288$.

因为 A_1 与 A_2 互斥，所以甲胜的概率为

$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)=0.648$.

(2) 如果采用五局三胜制，则甲在下列三种情况下获胜：B_1(甲净胜 3 局)，B_2(前3 局甲 2 胜 1 负，第四局甲胜)，B_3(前四局各胜 2 局，第五局甲胜).

因为 B_1，B_2，B_3 互斥，

所以甲胜的概率为 $P(B_1+B_2+B_3)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)$

$=0.6^3+C_3^2\times0.6^2\times0.4\times0.6+C_4^2\times0.6^2\times0.4^2\times0.6=0.682\ 56$.

由(1)(2)可知，在“五局三胜制”下，甲获胜的可能性大.

结论：优秀的选手，比赛局数越多，成绩越优秀.

9. 解析　由于三个电子元件的使用寿命

都符合正态分布 $N(1\ 000,50^2)$，故每个电子元件使用寿命超过 1 000 小时的概率 $P(X\geqslant 1\ 000)=\frac{1}{2}$，故该部件使用寿命超过 1 000 小时的概率 $P=\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

10. 解析 (1)由题知，$300\times\frac{4\ 500}{15\ 000}=90$，所以应收集 90 位女生的样本数据.

(2)由频率直方图得 $1-2\times(0.100+0.025)=0.75$，所以该校学生每周平均体育运动时间超过 4 小时的概率估计值为 0.75.

(3)由(2)知，300 位学生中有 $300\times0.75=225$ 人的每周平均运动时间超过 4 小时，75 人的每周平均运动时间不超过 4 小时，又因为样本数据中有 210 份是关于男生的，90 份是关于女生的，所以每周体育运动时间与性别列联表如下：

	男生	女生	总计
周平均体育运动时间不超过 4 小时	45	30	75
周平均体育运动时间超过 4 小时	165	60	225
总计	210	90	300

结合列联表可算得

$\chi^2=\frac{300\times2\ 250^2}{75\times225\times210\times90}\approx4.762>3.841$，

所以有 95%的把握认为"该校学生的每周平均体育运动时间与性别有关".

本章小结 C 组

1. 解析 (1)由散点图可以判断，$y=c+d\sqrt{x}$ 更适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型.

(2)令 $w=\sqrt{x}$，先建立 y 关于 w 的线性回归方程，由于

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})\cdot(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2}=\frac{108.8}{1.6}=68,$$

$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\overline{w}=563-68\times6.8=100.6$，

所以 y 关于 w 的线性回归方程为 $\hat{y}=100.6+68w$，因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$.

(3)①由(2)知，当 $x=49$ 时，年销售量 y 的预测值

$\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6$，

年利润 z 的预测值

$\hat{z}=576.6\times0.2-49=66.32$.

②根据(2)的结果知，年利润 z 的预测值

$\hat{z}=0.2(100.6+68\sqrt{x})-x=-x+13.6\sqrt{x}+20.12$.

所以当 $\sqrt{x}=\frac{13.6}{2}=6.8$，即 $x=46.24$ 时，$\hat{z}$ 取得最大值.

故年宣传费为 46.24 千元时，年利润的预测值最大.

2. 解析 (1)由题设可知 Y_1 和 Y_2 的分布列分别为

Y_1	5	10
P	0.8	0.2

Y_2	2	8	12
P	0.2	0.5	0.3

$\therefore E(Y_1)=5\times0.8+10\times0.2=6$，

则 $D(Y_1)=(5-6)^2\times0.8+(10-6)^2\times0.2=4$；

$E(Y_2)=2\times0.2+8\times0.5+12\times0.3=8$，

$D(Y_2)=(2-8)^2\times0.2+(8-8)^2\times0.5+(12-8)^2\times0.3=12$.

(2)$f(x)=D\left(\frac{x}{100}Y_1\right)+D\left(\frac{100-x}{100}Y_2\right)$

$=\left(\frac{x}{100}\right)^2D(Y_1)+\left(\frac{100-x}{100}\right)^2D(Y_2)$

$=\frac{4}{100^2}[x^2+3(100-x)^2]$

$=\frac{4}{100^2}[4x^2-600x+3\times100^2]$

当 $x=\frac{600}{2\times4}=75$ 时，$f(x)=3$ 为最小值.