教材习题答案

第四章　指数函数、对数函数与幂函数

4.1　指数与指数函数

4.1.1　实数指数幂及其运算

练习 A

1. 解析　(1) $x^5x^7=x^{12}$.

(2) $(-3x^3)^2=9x^6$.

(3) $(-x^3)^7=-x^{21}$.

(4) $\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^3=-\frac{1}{8}x^6$.

(5) $(2x)^2(-x)^{-3}=4x^2\times\frac{1}{(-x)^3}=-\frac{4}{x}$.

(6) $\left(\frac{1}{5}x\right)^{-2}(5x)^2=25\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 25x^2=625$.

2. 解析　(1) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$.

(2) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}=a^{-\frac{1}{3}}$.

(3) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}=x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$.

3. 解析　(1) $\sqrt[5]{(3-\sqrt{2})^5}=3-\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt[6]{(2\sqrt{2}-3)^6}=3-2\sqrt{2}$.

(3) $2\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{2}=2\times2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{4}}\times2^{\frac{1}{8}}=2^{\frac{15}{8}}$.

4. 解析　(1) $36^{\frac{1}{2}}=6^{2\times\frac{1}{2}}=6$.

(2) $\left(6\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^3}=\frac{25}{4}\times\sqrt{\frac{25}{4}}$

$=\frac{25}{4}\times\frac{5}{2}=\frac{125}{8}$.

(3) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{2^{10}}}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2}=\sqrt[3]{4}$.

(4) $2^{-1+\sqrt{3}}\times16^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}=2^{-1+\sqrt{3}}\times2^{-\sqrt{3}}=2^{-1}=\frac{1}{2}$.

练习 B

1. 解析　(1) $a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{5}{8}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{8}}=a^{\frac{29}{24}}$.

(2) $a^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{5}{6}}\div a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{3}}$.

(3) $(x^{\frac{1}{2}}\times y^{-\frac{1}{3}})^6=x^3\times y^{-2}=\frac{x^3}{y^2}$.

(4) $4a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\div\left(-\frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}\times b^{-\frac{1}{3}}\right)$

$=-6a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=-6a$.

2. 解析　(1) $2^8>2^6$.　(2) $2^{\frac{3}{5}}>1$.

(3) $3^{5.1}<3^{5.2}$.　(4) $5^{\sqrt{2}}>5$.

3. 证明　(1) 假设 $a^s\leqslant b^s$ 成立，s 为正有理数，则 $a^s<b^s$ 或 $a^s=b^s$，根据不等式性质可得 $a<b$ 或 $a=b$，与 $a>b>0$ 相矛盾，

$\therefore a^s>b^s$ 成立.

(2) ①假设 $a^s\leqslant1$ 成立，s 为正有理数，则 $a^s<1$ 或 $a^s=1$，根据不等式性质可得 $a<1$ 或 $a=1$，与条件 $a>1$ 矛盾，

$\therefore a^s>1$ 成立.

② $a^{-s}<1$ 可变为 $\left(\frac{1}{a}\right)^s<1$，假设 $\left(\frac{1}{a}\right)^s\geqslant1$，$s$ 为正有理数，则 $\left(\frac{1}{a}\right)^s>1$ 或 $\left(\frac{1}{a}\right)^s=1$，

根据不等式的性质可得 $\frac{1}{a}>1$ 或 $\frac{1}{a}=1$，

即 $a<1$ 或 $a=1$，与条件 $a>1$ 相矛盾，

$\therefore a^{-s}<1$ 成立.

(3) 假设 $a^s\leqslant a^t$，则 $a^s<a^t$ 或 $a^s=a^t$，可写为 $\frac{a^s}{a^t}<1$ 或 $\frac{a^s}{a^t}=1$，即 $a^{s-t}<1$ 或 $a^{s-t}=1$，又 $a>1$，

$\therefore s-t<0$ 或 $s-t=0$，与条件 $s>t>0$ 矛盾，

$\therefore a^s>a^t$ 成立.

4.1.2　指数函数的性质与图像

练习 A

1. 解析　设指数函数的解析式为 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，把 $(2,81)$ 代入，

得 $81=a^2$，解得 $a=\pm9$，

$\because a>0$，$\therefore a=9$，$\therefore y=9^x$.

2. 解析　(1) $3^{0.8}>3^{0.7}$.　(2) $0.75^{-0.1}>0.75^{0.1}$.

3. 解析　$y=2^x$，$x\in[0,+\infty)$，

$\therefore y\geqslant1$，$\therefore$ 值域为 $[1,+\infty)$.

练习 B

1. 解析　$1.001^{0.001}>1^0=1$，

$0.999^{0.999}<0.999^0=1$，$\therefore 1.001^{0.001}>0.999^{0.999}$.

2. 解析　$1.1^a=\left(\frac{11}{10}\right)^a$，

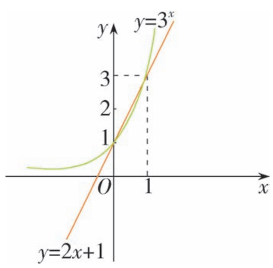
$0.9^{-a}=(0.9^{-1})^a=\left(\frac{10}{9}\right)^a$.

当 $a=0$ 时，$1.1^a=0.9^{-a}$；

当 $a>0$ 时，$1.1^a<0.9^{-a}$；

当 $a<0$ 时，$1.1^a>0.9^{-a}$.

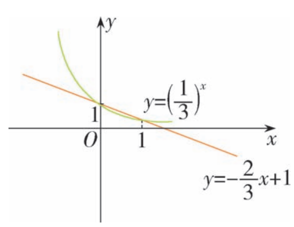
3. 解析　(1) 画出 $y=3^x$ 和 $y=2x+1$ 的图像，如图.



$\therefore$ 当 $x=0$ 或 $x=1$ 时，$3^x=2x+1$，

$\therefore$ 原方程的解集为 $\{0,1\}$.

(2) 画出 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 和 $y=-\frac{2}{3}x+1$ 的图像，如图.



$\therefore$ 当 $\left(\frac{1}{3}\right)^x>-\frac{2}{3}x+1$ 时，$x<0$ 或 $x>1$.

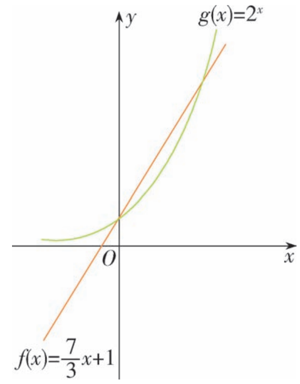
$\therefore$ 原不等式的解集为 $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

习题 4-1A

1. 解析　(1) $[(a^3)^{-1}\times a^4]^{-1}=a^{-1}=\frac{1}{a}$.

(2) $\left(\frac{a}{b}\right)^2\times(a^{-1}\times b)^{-3}=a^2\cdot b^{-2}\cdot a^3\cdot b^{-3}=a^5b^{-5}$.

2. 解析　函数的图像如图.



(1) 交点坐标为 $(0,1)$，$(3,8)$.

当 $x=0$ 时，$f(x)=0+1=1$，$g(x)=1$.

当 $x=3$ 时，$f(x)=8$，$g(x)=8$.

(2) 由图像可知 $f(x)<g(x)$ 的解集是 $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$，

$f(x)\geqslant g(x)$ 的解集是 $[0,3]$.

3. 解析　$\because 0<a<1$，$\therefore \sqrt{a^{\frac{4}{3}}-2a+a^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}})^2}=a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}}$.

4. 解析　$f(x_1)f(x_2)=2^{x_1}\cdot2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$，

$f(x_1+x_2)=2^{x_1+x_2}$，

$\therefore f(x_1)f(x_2)=f(x_1+x_2)$.

习题 4-1B

1. 解析　(1) $2^{-1}\times64^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times4^{3\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}\times16=8$.

(2) $0.2^{-2}\times0.064^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{0.04}\times0.4=10$.

2. 解析　(1) $\left(\frac{8a^{-3}}{27b^6}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{27b^6}{8a^{-3}}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{3b^2}{2a^{-1}}=\frac{3}{2}ab^2$.

(2) $\left(\frac{b}{2a^2}\right)^3\div\left(\frac{2b^2}{3a}\right)^0\times\left(-\frac{b}{a}\right)^{-3}$

$=\frac{b^3}{8a^6}\times\left(-\frac{a^3}{b^3}\right)=-\frac{1}{8a^3}$.

3. 解析　(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=3^{-\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2$，

$\because -\frac{2}{3}<2<4$，$3>1$，

$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}<3^4$.

(2) $2^{2.5}>2^0=1$，$2.5^0=1$，

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}<\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，

$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5}<2.5^0<2^{2.5}$.

4. 解析　(1) 定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $(0,+\infty)$.

(2) $1-2^x\geqslant0$，$\therefore 2^x\leqslant1$，$\therefore x\leqslant0$.

$\therefore$ 定义域为 $(-\infty,0]$. $\because 0\leqslant1-2^x<1$，

$\therefore 0\leqslant\sqrt{1-2^x}<1$，

$\therefore$ 值域为 $[0,1)$.

(3) 定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[1,+\infty)$.

5. 解析　漂洗 1 次后，$y=\frac{1}{4}$，

漂洗 2 次后，$\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}\right)^2$，

∴ $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x(x\in\mathbf{N}_+)$.

令 $\left(\frac{1}{4}\right)^x\leqslant\frac{1}{100}$，即 $4^x\geqslant100$，

又 $x\in\mathbf{N}_+$，∴ $x\geqslant4$，$x\in\mathbf{N}_+$，

∴ 漂洗的最少次数是 4.

习题 4-1C

1. 解析　$a^2-a-2=(a-2)(a+1)$.

(1) 当 $a=2$ 或 $a=-1$ 时，$a^2-a-2=0$，即 $a^2-a=2$，此时 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{a^2-a}$.

(2) 当 $a>2$ 或 $a<-1$ 时，$a^2-a-2>0$，即 $a^2-a>2$，

此时 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2>(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{a^2-a}$.

(3) 当 $-1<a<2$ 时，$a^2-a-2<0$，即 $a^2-a<2$，

此时 $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2<(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{a^2-a}$.

2. 解析　$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

证明：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}$，

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=a^{\frac{x_1}{2}}\cdot a^{\frac{x_2}{2}}=\sqrt{a^{x_1}}\cdot\sqrt{a^{x_2}}$，

∵ $\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geqslant\sqrt{a^{x_1}}\cdot\sqrt{a^{x_2}}$（当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号），

∴ $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

4.2　对数与对数函数

4.2.1　对数运算

练习 A

1. 解析　(1) $2^3=8$，$\log_2 8=3$.

(2) $8^2=64$，$\log_8 64=2$.

(3) $4^{-3}=\frac{1}{64}$，$\log_4\frac{1}{64}=-3$.

(4) $8.8^0=1$，$\log_{8.8}1=0$.

2. 解析　(1) 正确.

(2) 不正确，改为 $\log_5 125=3$.

(3) 不正确，改为 $\lg 100=2$.

(4) 正确.

3. 解析　(1) $x=\lg 25$.　(2) $x=\log_2 12$.

(3) $x=\log_5 6$.　(4) $x=\log_4\frac{1}{6}$.

4. 解析　(1) $2^{\log_2 8}=8$.　(2) $3^{\log_3 9}=9$.

(3) $10^{\lg 5}=5$.　(4) $e^{\ln 7}=7$.

(5) $\log_5 5^2=2$.　(6) $\lg 10^{-5}=-5$.

(7) $\lg 10^6=6$.　(8) $\ln e^3=3$.

5. 解析　(1) $\lg 2\,001\approx3.301\,2$.

(2) $\ln 0.004\,5\approx-5.403\,7$.

(3) $\ln 396.5\approx5.982\,7$.

练习 B

1. 解析　(1) $2^{-5}=\frac{1}{32}$，$\log_2\frac{1}{32}=-5$.

(2) $25^{\frac{1}{2}}=5$，$\log_{25}5=\frac{1}{2}$.

(3) $27^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27}}=\frac{1}{3}$，$\log_{27}\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

(4) $81^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{81^{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{81^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{9^6}}=\frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}}=\frac{1}{27}$，

$\log_{81}\frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$.

2. 解析　(1) 不正确，改为 $\log_2\frac{1}{4}=-2$.

(2) 不正确，改为 $\lg\frac{1}{100}=-2$.

(3) 不正确，改为 $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$.

3. 解析　(1) $2^{-\log_2 3}=(2^{\log_2 3})^{-1}=3^{-1}=\frac{1}{3}$.

(2) $10^{2\lg 3}=(10^{\lg 3})^2=3^2=9$.

(3) $e^{3\ln 7}=(e^{\ln 7})^3=7^3=343$.

(4) $\log_3 9^2=\log_3 3^4=4$.

(5) $\lg 100^2=\lg 10^4=4$.

(6) $\lg 0.001^2=\lg 10^{-6}=-6$.

4. 解析　(1) $\lg 1+\lg 10+\lg 100=0+1+2=3$.

(2) $\lg 0.1+\lg 0.01+\lg 0.001=-1-2-3=-6$.

(3) $\log_6 36+\log_2\frac{1}{8}=2-3=-1$.

(4) $\lg 0.1^2+\ln e^{-2}=\lg 10^{-2}+(-2)=-2-2=-4$.

5. 解析　$\mathrm{pH}=-\lg c_1(\mathrm{H^+})=7$，$c_1(\mathrm{H^+})=10^{-7}$，

$\mathrm{pH}=-\lg c_2(\mathrm{H^+})=8$，$c_2(\mathrm{H^+})=10^{-8}$，故 pH=7 的溶液的 $c(\mathrm{H^+})$ 是 pH=8 的溶液的 10 倍.

6. 解析　∵ $\log_x\frac{1}{16}=-4$，∴ $x^{-4}=\frac{1}{16}=2^{-4}$，∴ $x=2$.

4.2.2　对数运算法则

练习 A

1. 解析　(1) $\log_2 6-\log_2 3=\log_2 2=1$.

(2) $\lg 5+\lg 2=\lg 10=1$.

(3) $\log_5 3+\log_5\frac{1}{3}=\log_5 1=0$.

(4) $\log_3 5-\log_3 15=\log_3\frac{1}{3}=-1$.

(5) $\ln\sqrt{e}=\frac{1}{2}$.

(6) $\lg 100^{-2}=\lg 10^{-4}=-4$.

2. 解析　∵ $3^a=2$，∴ $a=\log_3 2$，

∴ $\log_3 4-\log_3 6=\log_3\frac{2}{3}=\log_3 2-1=a-1$.

3. 解析　∵ $3^b=5$，∴ $b=\log_3 5$，

∴ $\log_3\sqrt{30}=\frac{1}{2}\log_3 30=\frac{1}{2}\log_3(10\times3)$

$=\frac{1}{2}(\log_3 10+\log_3 3)=\frac{1}{2}(a+b+1)$.

4. 证明　右边 $=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b=$ 左边.

∴ 原式得证.

5. 解析　$\lg 5=\lg\frac{10}{2}=1-\lg 2\approx1-0.301\,0=0.699\,0$.

练习 B

1. 解析　(1) $\lg 0.001-\log_{27}\frac{1}{81}$

$=-3-\frac{\log_3\frac{1}{81}}{\log_3 27}=-3+\frac{4}{3}=-\frac{5}{3}$.

(2) $\log_4 8+\log_{\frac{1}{2}}4=\frac{\log_2 8}{\log_2 4}+\frac{\log_2 4}{\log_2\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{2}{-1}$

$=-\frac{1}{2}$.

(3) $\log_7\sqrt[3]{49}=\frac{1}{3}\log_7 49=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$.

2. 证明　(1) ∵ $(a^\beta)^\alpha=a^{\beta\times\alpha}$，

∴ $\log_a(a^\beta)^\alpha=\log_a a^{\beta\times\alpha}=\alpha\log_a a^\beta$，

设 $a^\beta=M$，则 $\log_a M^\alpha=\alpha\log_a M$.

(2) 令 $\log_a b=N$，由对数定义得 $b=a^N$，

两边取以 c 为底的对数，

得 $\log_c b=\log_c a^N$，即 $N\log_c a=\log_c b$，

即 $N=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\log_a b$，∴ 等式成立.

3. 解析　$(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 50$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\times(\lg 5+1)$

$=(\lg 5)^2+\lg 2\lg 5+\lg 2$

$=\lg 5(\lg 5+\lg 2)+\lg 2$

$=\lg 5+\lg 2$

$=1$.

4. 证明　设 $a>0$ 且 $a\neq1$，

则 $\log_x y\times\log_y z\times\log_z x$

$=\frac{\log_a y}{\log_a x}\times\frac{\log_a z}{\log_a y}\times\frac{\log_a x}{\log_a z}=1$.

5. 解析　原式 $=\sqrt{(\log_3 5)^2-4\log_3 5+2^2}$

$=\sqrt{(\log_3 5-2)^2}=2-\log_3 5$.

6. 解析　设 $\log_6 2=a$，$\log_6 3=b$，

则 $6^a=2$，$6^b=3$，

∴ $6^{a-b}=\frac{2}{3}<1=6^0$，

∴ $a-b<0$，即 $\log_6 2<\log_6 3$.

4.2.3　对数函数的性质与图像

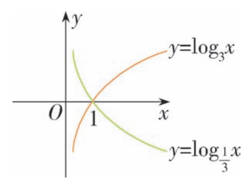
练习 A

1. 解析　设对数函数的解析式为 $y=\log_a x$（$a>0$，且 $a\neq1$），将 $(9,2)$ 代入，得 $2=\log_a 9$，解得 $a=3$，

∴ 对数函数的解析式为 $y=\log_3 x$.

2. 解析　$y=\log_3 x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$，为增函数.

$y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $\mathbf{R}$，为减函数.



3. 解析　(1) $\lg 6<\lg 8$.　(2) $\log_{0.5}6<\log_{0.5}4$.

(3) $\log_{\frac{2}{3}}0.5>\log_{\frac{2}{3}}0.6$.　(4) $\log_{1.5}1.6>\log_{1.5}1.4$.

4. 解析　$a>b$.

5. 解析　∵ $x\in[8,+\infty)$，∴ $\log_2 x\geqslant3$，

∴ 值域为 $[3,+\infty)$.

练习 B

1. 解析　(1) ∵ $a<a+0.1$，∴ $\lg a<\lg(a+0.1)$.

(2) ∵ $a^2+2>2$，∴ $\ln(a^2+2)>\ln 2$.

2. 解析　(1) ∵ $\log_a 0.8>\log_a 1.2$，∴ $0<a<1$.

(2) ∵ $\log_a\sqrt{10}>\log_a\pi$，∴ $a>1$.

(3) ∵ $0<0.2<1$，$\log_{0.2}a>\log_{0.2}3$，∴ $0<a<3$.

(4) ∵ $\log_2 a>0=\log_2 1$，∴ $a>1$.

3. 解析　(1) $1+x>0$，∴ $x>-1$，

∴ 定义域为 $(-1,+\infty)$.

(2) 由题意得 $x>0$ 且 $x\neq1$，

∴ 定义域为 $\{x|x>0$ 且 $x\neq1\}$.

(3) $\frac{1}{1-3x}>0$，∴ $x<\frac{1}{3}$.

$\therefore$ 定义域为$\left\{x \,\middle|\, x<\frac{1}{3}\right\}$.

(4) $\log_3 x\geqslant 0$, $\therefore x\geqslant 1$,

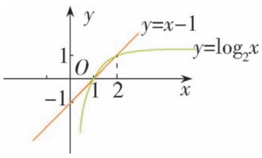
$\therefore$ 定义域为$[1,+\infty)$.

4. 解析　$\because x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$,

$\therefore y\geqslant\log_2\frac{3}{4}=\log_2 3-2$,

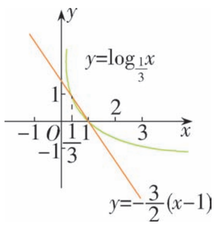
$\therefore$ 值域为$[\log_2 3-2,+\infty)$.

5. 解析　(1) 画出 $y=\log_2 x$ 与 $y=x-1$ 的图像，如图，



$\therefore$ 原方程的解集为$\{1,2\}$.

(2) 画出 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 与 $y=-\frac{3}{2}(x-1)$ 的图像，如图，



$\therefore$ 原不等式的解集为$\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup(1,+\infty)$.

6. 解析　$\lg 3^{2\,018}=2\,018\times\lg 3\approx 0.477\,1\times 2\,018=962.787\,8$, $\therefore 3^{2\,018}$有 963 位数.

习题 4-2A

1. 解析　(1) $\log_a a=1$.　(2) $\log_a 1=0$.

(3) $a^b=N$.　(4) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$.

2. 解析　(1) $\ln e^{-2}=-2$.

(2) $e^{\ln\pi}=\pi$.

(3) $\log_{12}2+\log_{12}6=\log_{12}12=1$.

(4) $\lg 200-\lg 2=\lg 100=2$.

3. 证明　(1) $\log_8 81=\frac{\log_2 81}{\log_2 8}=\frac{\log_2 3^4}{3}=\frac{4}{3}\log_2 3$.

(2) $\log_2 64=\frac{\log_8 64}{\log_8 2}=\frac{\log_8 64}{\frac{1}{3}}=3\log_8 64$.

4. 证明　$\log_x y\times\log_y z=\frac{\log_x y\log_x z}{\log_x x\log_x y}=\log_x z$.

5. 解析　$\log_{35}9=\frac{\log_9 9}{\log_9 35}=\frac{1}{\log_9 5+\log_9 7}=\frac{1}{a+b}$.

6. 证明　(1) $\because f(x_1+x_2)=a^{x_1+x_2}$,

$f(x_1)f(x_2)=a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$.

$\therefore f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$.

(2) $\because f(x_1x_2)=\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$,

$f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$,

$\therefore f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

7. 解析　(1) $\because \lg x\geqslant 0$, $\therefore x\geqslant 1$.

$\therefore$ 定义域为$[1,+\infty)$.

(2) $(x-1)^2>0$, $\therefore x\neq 1$,

$\therefore$ 定义域为$\{x\mid x\neq 1\}$.

(3) $1-\log_{\frac{1}{2}}x\geqslant 0$, $\therefore \log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 1$, $\therefore x\geqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 定义域为$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(4) $\log_{\frac{1}{2}}x-1\geqslant 0$，且 $\log_{\frac{1}{2}}x-1\neq 0$,

即 $\log_{\frac{1}{2}}x>1$,

$\therefore 0<x<\frac{1}{2}$. $\therefore$ 定义域为$\left\{x \,\middle|\, 0<x<\frac{1}{2}\right\}$.

习题 4-2B

1. 解析　(1) $\log_{64}32=\frac{\log_2 32}{\log_2 64}=\frac{5}{6}$.

(2) $\lg 20+\log_{100}25=\lg 20+\frac{\lg 25}{2}$

$=\lg 20+\lg 5=2$.

(3) $\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\times\sqrt[6]{16}\right)=\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\times\sqrt[6]{2^4}\right)$

$=\log_2\left(\sqrt[3]{\frac{1}{16}}\times\sqrt[3]{2^2}\right)=\log_2\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{4}=-\frac{2}{3}$.

2. 解析　(1) $\lg\frac{300}{7}+\lg\frac{700}{3}+\lg 100$

$=\lg\left(\frac{300}{7}\times\frac{700}{3}\times 100\right)=\lg 10^6=6$.

(2) $\log_7\frac{2}{35}-\log_7\frac{2}{5}$

$=\log_7\left(\frac{2}{35}\times\frac{5}{2}\right)=\log_7\frac{1}{7}=-1$.

(3) $2\log_{18}3+\log_{18}2=\log_{18}(9\times 2)=1$.

(4) $(\lg 5)^2+\lg 2\times\lg 25+(\lg 2)^2$

$=(\lg 5)^2+2\lg 2\lg 5+(\lg 2)^2$

$=(\lg 2+\lg 5)^2=1$.

3. 解析　$\lg 35=\lg 5+\lg 7=1-\lg 2+\lg 7\approx 1-0.301\,0+0.845\,1=1.544\,1$.

4. 证明　$\log_{25}12=\frac{\log_5 12}{\log_5 25}=\frac{\log_5 3+\log_5 4}{2}$

$=\frac{1}{2}(a+b)$.

5. 解析　(1) 由题意得$\begin{cases}x>0,\\3-x>0,\end{cases}$ $\therefore 0<x<3$,

$\therefore$ 定义域为$(0,3)$.

(2) 由题意得$\begin{cases}\log_2 x\geqslant 0,\\x>0,\end{cases}$ $\therefore x\geqslant 1$,

$\therefore$ 定义域为$[1,+\infty)$.

(3) 由题意得$\begin{cases}\log_{0.5}(4x-3)\geqslant 0\\4x-3>0,\end{cases}$

则 $0<4x-3\leqslant 1$，解得 $\frac{3}{4}<x\leqslant 1$,

$\therefore$ 定义域为$\left(\frac{3}{4},1\right]$.

(4) 由题意得$\begin{cases}x^2-x+1\geqslant 0,\\3x>0,\end{cases}$解得 $x>0$,

$\therefore$ 定义域为$(0,+\infty)$.

6. 解析　$\log_m 7-\log_n 7$

$=\frac{1}{\log_7 m}-\frac{1}{\log_7 n}=\frac{\log_7 n-\log_7 m}{\log_7 m\cdot\log_7 n}$,

$\because m<n$, $\therefore \log_7 n-\log_7 m>0$.

①当 $0<m<n<1$ 时，$\log_m 7>\log_n 7$.

②当 $n>m>1$ 时，$\log_m 7>\log_n 7$.

③当 $0<m<1$, $n>1$ 时，$\log_m 7<\log_n 7$.

7. 解析　(1) $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$解得 $-1<x<1$,

$\therefore$ 定义域为$(-1,1)$.

(2) 定义域为$(-1,1)$，关于原点对称，$f(-x)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)=f(x)$, $\therefore f(x)$为偶函数.

(3) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\log_2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\log_2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)=-1$.

习题 4-2C

1. 解析　(1) $x<0$ 时，$-x>0$,

$\therefore f(-x)=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$,

又 $f(x)$为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

$\therefore f(x)=-f(-x)=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$.

(2) $f(x)=\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, x>0,\\0, x=0,\\-\log_{\frac{1}{2}}(-x), x<0,\end{cases}$

当 $x>0$ 时，由 $\log_{\frac{1}{2}}x\leqslant 2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$，得 $x\geqslant\frac{1}{4}$;

当 $x=0$ 时，$0\leqslant 2$，满足条件;

当 $x<0$ 时，由 $-\log_{\frac{1}{2}}(-x)\leqslant 2$，解得 $x\geqslant -4$,

所以 $-4\leqslant x<0$.

综上，$f(x)\leqslant 2$ 的解集为$[-4,0]\cup\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$.

2. 解析　当 $a>1$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$;

当 $0<a<1$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

证明：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2}$

$=\frac{1}{2}\log_a(x_1x_2)=\log_a\sqrt{x_1x_2}$,

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\log_a\frac{x_1+x_2}{2}$,

$\because \frac{x_1+x_2}{2}\geqslant\sqrt{x_1x_2}$（当且仅当 $x_1=x_2$ 时取等号）,

$\therefore$ 当 $a>1$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$;

当 $0<a<1$ 时，$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqslant f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

4.3　指数函数与对数函数的关系

习题 4-3A

1. 解析　对调 $y=3^x$ 中的 x,y，得 $y=\log_3 x$.

2. 解析　对调 $y=\log_6 x$ 中的 x,y，得 $y=6^x$.

3. 解析　$(2,1)$.

4. 解析　存在. 令 $y=-3x+2$，对调其中的 x,y，得 $x=-3y+2$，整理得 $y=\frac{2-x}{3}$，因此 $f^{-1}(x)=\frac{2-x}{3}$.

5. 解析　(1) 存在.

(2) 不存在.

习题 4-3B

1. 解析　设指数函数的解析式为 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq 1)$，由题意得 $a^1=5$, $\therefore a=5$,

$\therefore y=5^x$, $\therefore f^{-1}(x)=\log_5 x$.

2. 解析　一定存在.

令 $y=kx+b(k\neq 0)$，对调 x,y，得 $y=\frac{x}{k}-\frac{b}{k}$,

因此 $f^{-1}(x)=\frac{x}{k}-\frac{b}{k}$.

3. 解析 (1)存在反函数.

(2)不存在反函数.

4. 解析 一定存在.

令 $y=x^2, x\geqslant 3$,对调 x, y,得 $x=y^2, x\geqslant 9$,

即 $y=\sqrt{x}, x\geqslant 9$,因此 $f^{-1}(x)=\sqrt{x}, x\geqslant 9$.

5. 解析 $y=\frac{1}{2}e^x$,对调其中的 x, y,

得 $y=\ln(2x)$,所以两个函数互为反函数,图像关于直线 $y=x$ 对称.

6. 解析 不一定.

习题 4-3C

1. 解析 不一定有交点. 如果有交点,则交点不一定在直线 $y=x$ 上.

2. 解析 (1)令 $y=3x+1$,对调其中的 x, y,得 $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$,即 $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

$\therefore f(f^{-1}(x))=3\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+1$

$=x-1+1=x$,

$f^{-1}(f(x))=\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{1}{3}=x$.

(2) $f(f^{-1}(x))=x, f^{-1}(f(x))=x$.

4.4 幂函数

习题 4-4A

1. 解析 设幂函数的解析式为 $y=x^{\alpha}$(α 为常数),将(9,3)代入,得 $3=9^{\alpha}$,$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$,

$\therefore y=x^{\frac{1}{2}}$.

2. 解析 $y=x^{-3}=\frac{1}{x^3}$,奇函数.

$y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$,偶函数.

3. 解析 $y=x^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{x^5}$,

$\therefore$ 定义域为$[0,+\infty)$,值域为$[0,+\infty)$.

$y=x^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{x^4}$,

$\therefore$ 定义域为 $\mathbf{R}$,值域为$[0,+\infty)$.

4. 解析 (1) $2.3^{\frac{1}{2}}<2.4^{\frac{1}{2}}$. (2) $0.31^{-\frac{6}{5}}>2^{-\frac{6}{5}}$.

5. 解析 (答案不唯一)$\alpha=\frac{1}{2}$ 或 $\alpha=\frac{1}{4}$.

习题 4-4B

1. 解析 由题意得,$2=8^{\alpha}=2^{3\alpha}$,$\therefore \alpha=\frac{1}{3}$,

$\therefore f(x)=x^{\frac{1}{3}}$,$\therefore f(-27)=(-27)^{\frac{1}{3}}=-3$.

2. 解析 (1) $\because t^2+1\geqslant 2|t|, 1.5>0$,

$\therefore (2|t|)^{1.5}\leqslant (t^2+1)^{1.5}$.

(2) $0.4^{-\frac{1}{2}}=(0.4^{-1})^{\frac{1}{2}}=2.5^{\frac{1}{2}}$,

$\therefore 1.3^{\frac{1}{2}}<0.4^{-\frac{1}{2}}$.

3. 解析 (1) $f(x)=x^2+x^{-2}=x^2+\frac{1}{x^2}$,

$\therefore$ 定义域为$\{x|x\neq 0\}$,

$f(-x)=f(x)$,$\therefore f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(x)=x+3x^{\frac{2}{3}}=x+3\sqrt[3]{x^2}$,

$\therefore$ 定义域为 $\mathbf{R}$.

又 $f(x)\neq f(-x), f(x)\neq -f(-x)$

$\therefore f(x)$ 为非奇非偶函数.

(3) $f(x)=x^3+x^{\frac{1}{3}}=x^3+\sqrt[3]{x}$,

$\therefore$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(4) $f(x)=2x^4+x^{-\frac{1}{2}}=2x^4+\frac{1}{\sqrt{x}}$,

$\therefore$ 定义域为$(0,+\infty)$,$f(x)$ 为非奇非偶函数.

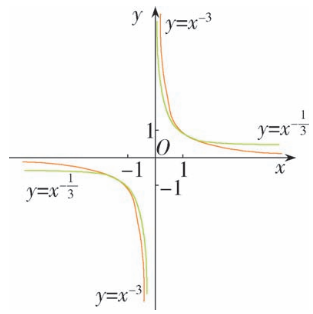
4. 解析 $f(x)=(x+2)^{-2}=\frac{1}{(x+2)^2}$,

$\therefore$ 定义域为$\{x|x\neq -2\}$,减区间为$(-2,+\infty)$,增区间为$(-\infty,-2)$.

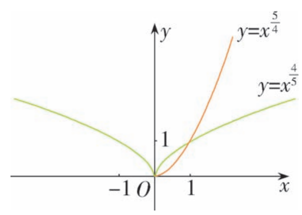
5. 解析 (答案不唯一)$\alpha=2$.

6. 解析

(1)



(2)



规律:对于 $y=x^m$,①$m>0$ 时,在第一象限为增函数,$m<0$ 时,在第一象限为减函数;②指数互为倒数的两个指数函数,其图像在第一象限的部分关于直线 $y=x$ 对称.

习题 4-4C

1. 解析 由题图可知 $b>1, c>1, b>c, d>2$, $0<a<1, b=2$,$\therefore d>b>c>a$.

2. 证明 $x=2$ 时,$3^x+4^x=5^x$ 成立,

易知 $x=2$ 为方程的一个实数解.

$\frac{3^x}{5^x}+\frac{4^x}{5^x}=1$,即 $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$,

$\because y=\left(\frac{3}{5}\right)^x$ 及 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 在定义域上为单调递减函数,

$\therefore f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减,

$\therefore 3^x+4^x=5^x$ 有且只有一个解,即 $x=2$.

4.5 增长速度的比较

习题 4-5A

1. 解析 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{5x_2+1-(5x_1+1)}{x_2-x_1}$

$=\frac{5(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=5$,

故自变量每增加 1 个单位,函数值增加 5 个单位.

2. 解析 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2^4-2^3}{4-3}=8$,

$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{3^4-3^3}{4-3}=81-27=54$,$\frac{\Delta f}{\Delta x}<\frac{\Delta g}{\Delta x}$.

3. 解析 (1) $f(x)$ 在$[1,2]$上的平均变化率为 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(-2^2-3\times 2)-(-1-3)}{2-1}=\frac{-10+4}{1}=-6$,

$f(x)$ 在$[2,3]$上的平均变化率为 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{(-3^2-3\times 3)-(-2^2-3\times 2)}{3-2}=-8$.

(2) $f(1)=-1-3=-4, A(1,-4)$,

$f(2)=-2^2-3\times 2=-10, B(2,-10)$,

$f(3)=-3^2-3\times 3=-18, C(3,-18)$,

$\therefore k_{AB}=\frac{-6}{2-1}=-6, k_{BC}=\frac{-8}{1}=-8$.$\therefore k_{AB}>k_{BC}$.

习题 4-5B

1. 解析 (1)增函数. (2)减函数.

2. 解析 $g(2)=2\times 2+3=7$,

$h(2)=3\times 2-2=4$,

$h(2+\Delta x)>g(2+\Delta x)$,

即 $3(2+\Delta x)-2>2(2+\Delta x)+3$,

即 $6+3\Delta x-2>4+2\Delta x+3$,

解得 $\Delta x>3$,$\therefore \Delta x\in(3,+\infty)$.

3. 解析 函数值减小 15 个单位.

4. 证明 任取 $x_1, x_2\in\mathbf{R}$,则 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

$=k$,$\therefore f(x)=kx+b$(b 为常数),即 $f(x)$ 是一个一次函数.

习题 4-5C

1. 解析 $f(3)-f(2)>1$.

2. 解析 (答案不唯一)$f(x)=-\frac{1}{x}$.

4.6 函数的应用(二)

习题 4-6A

1. 解析 设每年湖水减小的面积百分比为 a,则

$(1-a)^{50}=0.9$,即 $1-a=0.9^{\frac{1}{50}}$,

$\therefore y=(1-a)^x\cdot m=0.9^{\frac{x}{50}}m$.

2. 解析 (1)设 2015 年排放总量为 a 万吨,每年减少的百分比为 x,

则 $a\times 0.9=2\ 001$,$\therefore a=\frac{2\ 001}{0.9}$,

又$(1-x)^5=0.9$,$\therefore 1-x=0.9^{\frac{1}{5}}$,

$\therefore f(t)=a(1-x)^t=\frac{2\ 001}{0.9}\times 0.9^{\frac{t}{5}}$

$=2\ 001\times 0.9^{\frac{t}{5}-1}$.

(2) $2\ 001\times 0.9^{\frac{4}{5}-1}=2\ 001\times 0.9^{-\frac{1}{5}}\approx 2\ 044$(万吨).

3. 解析 (1)减少.

(2) $\frac{1}{2}=e^{-\frac{t}{400}}$,

$\therefore t=400\times\ln 2\approx 277$,

$\therefore$ 277 年以后将会有一半的臭氧消失.

4. 解析 设喷气式飞机起飞时的声音强度为 x_1,一般说话时的声音强度为 x_2,

则 $140=10\lg\frac{x_1}{1\times 10^{-12}}$,$\therefore 14=\lg x_1+12$,

$\therefore 2=\lg x_1$,$\therefore x_1=100$.

$60=10\lg\frac{x_2}{1\times 10^{-12}}$,$\therefore 6=\lg x_2+12$,

$\therefore \lg x_2=-6$,$\therefore x_2=10^{-6}$,$\therefore \frac{x_1}{x_2}=\frac{10^2}{10^{-6}}=10^8$,

$\therefore$ 喷气式飞机起飞时的声音强度是一般说话时声音强度的 10^8 倍.

习题 4-6B

1. 解析　由题意得 $\begin{cases}30=\dfrac{c}{\sqrt{4}},\\ 15=\dfrac{c}{\sqrt{A}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c=60,\\ A=16,\end{cases}$

$\therefore c=60, A=16$.

2. 解析　(1)由已知得 2003,2004,2005,2006 年全球太阳能电池的年生产量的增长率分别为 36%,38%,40%,42%,

则 2006 年全球太阳能电池的年生产量为 $670\times1.36\times1.38\times1.40\times1.42\approx2\ 499.8$ MW.

(2)设太阳能电池的年安装量的平均增长率为 x,

则 $1\ 420(1+x)^4\geqslant2\ 499.8(1+42\%)^4\times95\%$,

$\therefore x\geqslant0.615$,

∴ 这四年中太阳能电池的年安装量的平均增长率至少应达到 61.5%.

3. 解析　(1)根据题意有 $52=15+(62-15)e^{-k}$,

$\therefore 37=47e^{-k}$,

$\therefore e^{-k}=\dfrac{37}{47}$, $\therefore k=\ln\dfrac{47}{37}$.

(2) $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$, $\theta-\theta_0=(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,

$e^{-kt}=\dfrac{\theta-\theta_0}{\theta_1-\theta_0}$, $-kt=\ln(\theta-\theta_0)-\ln(\theta_1-\theta_0)$,

$t=\dfrac{\ln(\theta_1-\theta_0)-\ln(\theta-\theta_0)}{k}$

$=\dfrac{\ln(\theta_1-\theta_0)-\ln(\theta-\theta_0)}{\ln 47-\ln 37}$,

其中,$\theta_1=62$, $\theta_0=15$,

∴ 当 $\theta=42$ 时,$t=\dfrac{\ln 47-\ln 27}{\ln 47-\ln 37}\approx2.32$ min.

当 $\theta=32$ 时,$t=\dfrac{\ln 47-\ln 17}{\ln 47-\ln 37}\approx4.25$ min.

当 $\theta=22$ 时,$t=\dfrac{\ln 47-\ln 7}{\ln 47-\ln 37}\approx7.96$ min.

(3)当 $\theta=12$ 时,$\theta-\theta_0<0$ 无意义,

∴ 物体最终不能冷却到 12 ℃.

4. 解析　(1) $f(0)=1$,表示没有用水清洗时,蔬菜上残留的农药量将保持原样.

(2)函数 $f(x)$ 应该满足的条件和具有的性质是 $f(0)=1$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$, $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减,且 $0<f(x)\leqslant1$.

(3)设仅清洗一次,残留的农药量为 m,

清洗两次后,残留的农药量为 n,则 $m=\dfrac{1}{1+a^2}$, $n=\left[\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}\right]^2=\dfrac{16}{(4+a^2)^2}$,

$m-n=\dfrac{1}{1+a^2}-\dfrac{16}{(4+a^2)^2}$

$=\dfrac{16+8a^2+a^4-16-16a^2}{(a^2+1)(a^2+4)^2}=\dfrac{a^4-8a^2}{(a^2+1)(a^2+4)^2}$

$=\dfrac{a^2(a^2-8)}{(a^2+1)(a^2+4)^2}$,

∴ 当 $a>2\sqrt{2}$ 时,清洗两次后残留的农药量较少;

当 $a=2\sqrt{2}$ 时,两种清洗方案具有相同的效果;

当 $0<a<2\sqrt{2}$ 时,清洗一次残留的农药量较少.

复习题

A 组

1. 解析　(1) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$.

(2) $3^{\frac{5}{3}}3^{\frac{4}{3}}=3^{\left(\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)}=3^3=27$.

(3) $\log_2 0.25=\log_2\dfrac{1}{4}=-2$.

(4) $\log_2 20-\log_4 25=\log_2 20-\dfrac{\log_2 25}{\log_2 4}$

$=(\log_2 4+\log_2 5)-\dfrac{2\log_2 5}{2}=2+\log_2 5-\log_2 5=2$.

(5) $\log_2 3\times\log_{27}125$

$=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 5^3}{\log_2 3^3}=\log_2 3\times\dfrac{3\log_2 5}{3\log_2 3}=\log_2 5$.

(6) $\log_3 2\times\log_2 5\times\log_5 3=\dfrac{\lg 2\lg 5\lg 3}{\lg 3\lg 2\lg 5}=1$.

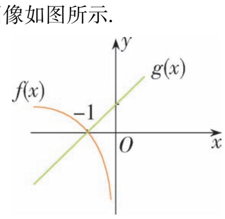
2. 解析　$\lg 6=\lg 2+\lg 3=a+b$.

$\log_3 8=\dfrac{\lg 8}{\lg 3}=\dfrac{3\lg 2}{\lg 3}=\dfrac{3a}{b}$.

3. 解析　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称,$f(-x)=\dfrac{a^{-x}-a^x}{2}=-f(x)$,

∴ 函数 $f(x)$ 为奇函数.

4. 解析　图像如图所示.



观察图像可知 $f(x)<g(x)$ 的解集为 $(-1,0)$.

5. 证明　(1) $f(a)f(b)=3^a\cdot3^b=3^{a+b}$,

$f(a+b)=3^{a+b}$, $\therefore f(a)f(b)=f(a+b)$.

(2) $\dfrac{f(a)}{f(b)}=\dfrac{3^a}{3^b}=3^{a-b}$, $f(a-b)=3^{a-b}$,

$\therefore \dfrac{f(a)}{f(b)}=f(a-b)$.

6. 解析　(1) $2^m<2^n$, $\therefore m<n$.

(2) $\log_{0.2}m>\log_{0.2}n$, $\therefore m<n$.

7. 解析　(1) $1.5^{\frac{3}{5}}<1.7^{\frac{3}{5}}$.

(2) $(-1.2)^{-\frac{2}{3}}>(-1.25)^{-\frac{2}{3}}$.

8. 解析　当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)>1$,即 $2^{-x}-1>1$,即 $2^{-x}>2$,解得 $x<-1$.

当 $x>0$ 时,$f(x)>1$,即 $x^{\frac{1}{2}}>1$,解得 $x>1$.

∴ 解集为 $\{x\mid x<-1$ 或 $x>1\}$.

9. 解析　(1) $3^{2x-2}=81=3^4$,

$\therefore 2x-2=4$,解得 $x=3$,解集为 $\{3\}$.

(2) $\sqrt{7^x}=\sqrt[5]{343}$,即 $7^{\frac{x}{2}}=7^{\frac{3}{5}}$, $\therefore \dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{5}$,

解得 $x=\dfrac{6}{5}$, ∴ 解集为 $\left\{\dfrac{6}{5}\right\}$.

(3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{27}{64}$,

$\therefore \left(\dfrac{3}{4}\right)^x=\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$,解得 $x=3$,

∴ 解集为 $\{3\}$.

(4) $5^{x-1}10^{3x}=8^x$, $\therefore 5^{x-1}\cdot5^{3x}\cdot2^{3x}=2^{3x}$,

$\therefore 5^{x-1+3x}=1$, $\therefore 4x-1=0$,

解得 $x=\dfrac{1}{4}$, ∴ 解集为 $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$.

10. 解析　(1)要使 $y=8^{\frac{1}{2x-1}}$ 有意义,需 $2x-1\neq0$,

即 $x\neq\dfrac{1}{2}$,即函数的定义域为 $\left\{x\ \middle|\ x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\dfrac{1}{2}\right\}$.

(2)要使 $\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x}$ 有意义,需 $1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\geqslant0$,

解得 $x\geqslant0$, ∴ 函数的定义域为 $[0,+\infty)$.

(3)要使 $y=\log_3(2-x)$ 有意义,需 $2-x>0$,

解得 $x<2$, ∴ 函数的定义域为 $\{x\mid x<2\}$.

B 组

1. 解析　(1) $\log_2\dfrac{1}{25}\times\log_3 8\times\log_5\dfrac{1}{9}$

$=\dfrac{\log_2\frac{1}{25}}{\log_2 2}\times\dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}\times\dfrac{\log_2\frac{1}{9}}{\log_2 5}$

$=\dfrac{-2\log_2 5}{\log_2 2}\times\dfrac{3\log_2 2}{\log_2 3}\times\dfrac{-2\log_2 3}{\log_2 5}=12$.

(2) $\log_2\left(\log_2 32-\log_2\dfrac{3}{4}+\log_2 6\right)$

$=\log_2\left[\log_2\left(32\times\dfrac{4}{3}\times6\right)\right]$

$=\log_2[\log_2(8^2\times2^2)]$

$=\log_2(2\log_2 8+2\log_2 2)=\log_2(6+2)=3$.

2. 解析　$5^{2x-\frac{y}{2}}=\dfrac{5^{2x}}{5^{\frac{y}{2}}}=\dfrac{(5^x)^2}{(5^y)^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{2^2}{9^{\frac{1}{2}}}=\dfrac{4}{3}$.

3. 解析　$\because a^3=9$, $\therefore a=\sqrt[3]{9}$.

$\therefore \log_3 a=\log_3\sqrt[3]{9}=\log_3 3^{\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}$.

4. 解析　$\because 4^a=2$, $\therefore a=\dfrac{1}{2}$,

又 $\lg x=a$, $\therefore x=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}$.

5. 解析　$\because 2^a=5^b=m$, $\therefore a=\log_2 m$, $b=\log_5 m$,

$\because \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$, $\therefore \log_m 2+\log_m 5=2$,

即 $\log_m 10=2$, $\therefore m=\sqrt{10}$.

6. 解析　函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$,关于原点对称,

$f(-x)=\dfrac{(a^{-x}+1)(-x)}{a^{-x}-1}=\dfrac{\left(\dfrac{1}{a^x}+1\right)(-x)}{\dfrac{1}{a^x}-1}$

$=\dfrac{(1+a^x)x}{a^x-1}=f(x)$, ∴ $f(x)$ 为偶函数.

7. 解析　令 $x^5=2$,

则 $x=\sqrt[5]{2}$, $\therefore f(2)=\lg\sqrt[5]{2}=\dfrac{1}{5}\lg 2$.

8. 解析　①若 $a\leqslant1$,则 $2^{a-1}-2=3$,

$\therefore 2^{a-1}=5$, $\therefore a-1=\log_2 5$,

$\therefore a=\log_2 5+1$(不合题意,舍去).

②若 $a>1$,则 $\log_2(a+1)=3$,

$\therefore a+1=8$, $\therefore a=7$,符合题意.

$\therefore f(6-a)=f(6-7)=f(-1)=2^{-2}-2$

$=\dfrac{1}{4}-2=-\dfrac{7}{4}$.

9. 解析　$f(x)=\ln(e^x+1)-ax$,

$f(-x)=\ln(e^{-x}+1)+ax$

$=\ln\dfrac{1+e^x}{e^x}+ax=\ln(1+e^x)-x+ax$

$\therefore -ax=-x+ax$, $\therefore a=\dfrac{1}{2}$.

10. 解析 $g(x)=\log_3 x(x>0)$.

11. 解析 $f(x)=e^{2x}-2e^x=(e^x)^2-2e^x=(e^x-1)^2-1$，$\because e^x\geqslant 0$，

$\therefore f(x)$的最小值为-1，没有最大值.

12. 解析 (1) $\lg x+\lg(x-3)=1$，

$\therefore \lg[x(x-3)]=1$，$\therefore x(x-3)=10$，

$\therefore x^2-3x-10=0$，$\therefore (x-5)(x+2)=0$，

解得 $x_1=5$，$x_2=-2$(舍去)，

$\therefore x=5$，$\therefore$ 解集为$\{5\}$.

(2) $\frac{1}{12}(\lg x)^2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$，

$\therefore (\lg x)^2+3\lg x-4=0$，

$\therefore (\lg x+4)(\lg x-1)=0$，$\therefore \lg x=-4$ 或 $\lg x=1$，

$\therefore x=\frac{1}{10^4}$或 $x=10$，$\therefore$ 解集为$\left\{\frac{1}{10^4},10\right\}$.

(3) $5^{2x}-6\times5^x+5=0$，$\therefore (5^x)^2-6\times5^x+5=0$，

$\therefore (5^x-1)(5^x-5)=0$，$\therefore 5^x=1$ 或 $5^x=5$，

即 $x=0$ 或 $x=1$，$\therefore$ 解集为$\{0,1\}$.

(4) $3^x-3^{-x}=\frac{80}{9}$，即 $3^x-\frac{1}{3^x}=\frac{80}{9}$，

$\therefore \frac{(3^x)^2-1}{3^x}=\frac{80}{9}$，$\therefore 9\times(3^x)^2-9=80\times3^x$，

即$(9\times3^x+1)(3^x-9)=0$，

$\therefore 3^x-9=0$，解得 $x=2$，$\therefore$ 解集为$\{2\}$.

(5) $2\log_x 25-3\log_{25}x=1$，

即$\frac{2}{\log_{25}x}-3\log_{25}x=1$，

$\therefore 2-3(\log_{25}x)^2=\log_{25}x$，

$\therefore 3(\log_{25}x)^2+\log_{25}x-2=0$，

即$(\log_{25}x+1)(3\log_{25}x-2)=0$，

$\therefore \log_{25}x=-1$ 或 $\log_{25}x=\frac{2}{3}$，

$\therefore x=\frac{1}{25}$或 $x=5\sqrt[3]{5}$，$\therefore$ 解集为$\left\{\frac{1}{25},5\sqrt[3]{5}\right\}$.

(6) $\log_7(\log_3 x)=-1$，$\therefore \log_3 x=\frac{1}{7}$，

$\therefore x=3^{\frac{1}{7}}$，$\therefore$ 解集为$\{3^{\frac{1}{7}}\}$.

13. 解析 2015 年：27 898×(1+35%)

= 27 898×1.35 = 37 662(亿元).

2016 年：37 662×1.35 = 50 844(亿元).

2017 年：50 844×1.35 = 68 639(亿元).

2018 年：68 639×1.35 = 92 663(亿元).

2019 年：125 095(亿元).

2020 年：168 878(亿元).

14. 解析 $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{2^a-2^{a-1}}{1}=2^{a-1}$，

$$\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2}a-1-\left[\frac{1}{2}(a-1)-1\right]}{1}=\frac{\frac{1}{2}a-1-\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)}{1}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{\frac{\Delta f}{\Delta x}}{\frac{\Delta g}{\Delta x}}=\frac{2^{a-1}}{\frac{1}{2}}=2^a.\because a<0,\therefore 2^a<1,\therefore \frac{\Delta f}{\Delta x}<\frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

C 组

1. 解析 $\log_2 5>2$，$1<2^{0.5}<\left(\frac{9}{4}\right)^{0.5}=\frac{3}{2}$，

$2>\log_4 15>\log_4 8=\frac{3}{2}$，$\therefore \log_2 5>\log_4 15>2^{0.5}$.

2. 解析 函数定义域为 $\mathbf{R}$，关于原点对称，

$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{x^2+1})$，

$f(x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})+\lg(-x+\sqrt{x^2+1})=\lg 1=0$，$\therefore f(x)=-f(-x)$，$\therefore f(x)$为奇函数.

3. 解析 由根与系数的关系得 $\lg a+\lg b=4$，$\lg a\lg b=1$，

$\therefore \left(\lg\frac{b}{a}\right)^2=(\lg b-\lg a)^2=(\lg a+\lg b)^2-4\lg a\lg b=16-4=12$.

4. 解析 设 $P(x,y)$为 $f(x)$的图像上一点，则 P 关于直线 $y=-x$ 的对称点 $P'(-y,-x)$在 $y=2^{x+a}$的图像上，即$-x=2^{-y+a}$，$\therefore x=-2^{a-y}$.

当 $x=-2$ 时，$y=a-1$，当 $x=-4$ 时，$y=a-2$，

$\because f(-2)+f(-4)=1$，$\therefore a-1+a-2=1$，$\therefore a=2$.

5. 解析 (1)要使 $g(x)$有意义，则 $1\leqslant\lg x\leqslant3$，

解得 $10\leqslant x\leqslant1\ 000$，

$\therefore g(x)$的定义域为$[10,1\ 000]$.

(2)函数 $y=\lg x$ 的值域为 $y=f(x)$的定义域，又 $0.1\leqslant x\leqslant100$，则$-1\leqslant\lg x\leqslant2$，$\therefore f(x)$的定义域为$[-1,2]$.

6. 解析 (1) $f(x)=4^x-2^{x+1}a=(2^x)^2-2a\cdot2^x=(2^x-a)^2-a^2$，

当 $a=2$ 时，$f(x)=(2^x-2)^2-4$，则当 $x=1$ 时，$f(x)$取最小值-4，即 $g(2)=-4$.

(2)令 $2^x=t$，则 $f(x)=(t-a)^2-a^2$，$t\in\left[\frac{1}{2},4\right]$.

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则当 $t=\frac{1}{2}$，即 $x=-1$ 时，$f(x)$取最小值，$\therefore g(a)=f(-1)=\frac{1}{4}-a$；

若$\frac{1}{2}<a\leqslant4$，则当 $t=a$，即 $x=\log_2 a$ 时，$f(x)$取最小值，$\therefore g(a)=f(\log_2 a)=-a^2$；

若 $a>4$，则当 $t=4$，即 $x=2$ 时，$f(x)$取最小值，$\therefore g(a)=f(2)=16-8a$.

综上，$g(a)=\begin{cases}\frac{1}{4}-a,a\leqslant\frac{1}{2},\\-a^2,\frac{1}{2}<a\leqslant4,\\16-8a,a>4.\end{cases}$

第五章　统计与概率

5.1　统计

5.1.1　数据的收集

练习 A

1. 解析 抽样调查.理由：普查的方法具有破坏性且普查的意义不大.

2. 解析 483，261，405，172，328.

3. 解析 $\frac{37}{25}$.

练习 B

1. 解析 乙公司抽取了 16 名员工，丙公司抽取了 6 名员工.

2. 解析 甲地区应抽取$\frac{2\ 400}{12\ 000}\times60=12$(人)，乙地区应抽取$\frac{4\ 605}{12\ 000}\times60\approx23$(人)，丙地区应抽取$\frac{3\ 795}{12\ 000}\times60\approx19$(人)，丁地区应抽取$\frac{1\ 200}{12\ 000}\times60=6$(人).

3. 解析 略.

5.1.2　数据的数字特征

练习 A

1. 解析 (1) 6. (2) 12. (3) 15.

2. 解析 25%分位数为 3，75%分位数为 8，90%分位数为 9.5.

3. 解析 (1)平均数为 92，方差为 1.2.

(2)平均数为 2，方差为 1.2.

(3)平均数为 0，方差为 1.2.

(4)平均数为 920，方差为 120.

4. 证明 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i-n\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$.

练习 B

1. 解析 $\{1,2,3,\cdots,15\}$.

2. 解析 (1) 12. (2) 6. (3) 25.

3. 解析 $a_1=\frac{100+100+300+500+500}{5}=300$，

$b_1=\sqrt{\frac{200^2+200^2+200^2+200^2}{5}}=80\sqrt{5}$，

$a_2=\frac{200+200+300+400+400}{5}=300$，

$b_2=\sqrt{\frac{100^2+100^2+100^2+100^2}{5}}=40\sqrt{5}$，

所以 $a_1=a_2$，$b_1>b_2$.

5.1.3　数据的直观表示

练习 A

1. 解析 (1)用扇形图表示，图略.

(2)用柱形图表示，图略.

2. 解析

1	8 9
2	1 1 3 3 4 6 6 6 6 7 7 7 8 8 8 9
3	0 0

3. 解析 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$，$s^2=\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\bar{x})^2p_i]$.

练习 B

1. 解析 甲组数据：12，15，24，25，31，31，36，36，37，39，44，49，50，平均数为 33；

乙组数据：8，13，13，14，16，23，26，29，33，35，38，39，51，平均数为 26.

2. 解析 甲组数据的平均数为$\frac{2\times10+6\times20+6\times30+2\times40}{16}=25$，

方差为$\frac{2\times15^2+6\times5^2+6\times5^2+2\times15^2}{16}=75$；

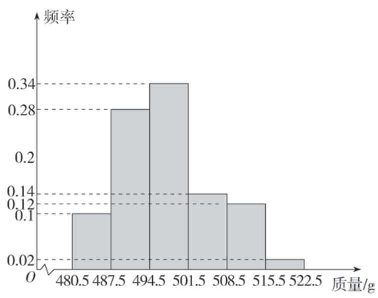
乙组数据的平均数为$\frac{3\times10+5\times20+5\times30+3\times40}{16}=25$，

方差为$\frac{3\times15^2+5\times5^2+5\times5^2+3\times15^2}{16}=100$.

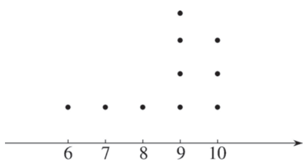
所以两组数的平均数一样大，乙组数的方差较大.

3. 解析 (1)最大值为 518，最小值为 482，极差为 518−482=36.

(2)



4. 解析



甲组数据的平均数为

$\frac{6+7\times3+8\times4+9+10}{10}=7.8$,

甲组数据的方差为

$\frac{(6-7.8)^2+(7-7.8)^2\times3+(8-7.8)^2\times4+(9-7.8)^2+(10-7.8)^2}{10}$

$=1.16$,

乙组数据的平均数为

$\frac{6+7+8+9\times4+10\times3}{10}=8.7$,

乙组数据的方差为

$\frac{(6-8.7)^2+(7-8.7)^2+(8-8.7)^2+(9-8.7)^2\times4+(10-8.7)^2\times3}{10}$

$=1.61$,

所以甲的平均数和方差均小于乙的平均数和方差.

5.1.4 用样本估计总体

练习 A

1. 解析 $\frac{28}{254}\times1\ 534\approx169$(石).

2. 解析 平均数为 $\frac{92+78+56+75+62}{5}=72.6$,

方差为

$\frac{(92-72.6)^2+(78-72.6)^2+(56-72.6)^2+(75-72.6)^2+(62-72.6)^2}{5}$

$=159.84$.

3. 解析 估计这所学校学生中,日平均上网时间不到 1 h 和超过了 2 h 的学生所占的百分比分别为 50% 和 20%.

练习 B

1. 解析 估计该地 6 月份最高气温的平均值为 $\frac{28+29+30+31+31}{5}=29.8$,

方差为

$\frac{(28-29.8)^2+(29-29.8)^2+(30-29.8)^2+(31-29.8)^2+(31-29.8)^2}{5}$

$=1.36$.

2. 解析 茎叶图如图所示:

上班时期		下班时期
8	1	6 7 9
8 8 7 6 1 0	2	2 5 7 9 9
5 3 2 0	3	0 0 2 6
0	4	

估计该市上班时期机动车行驶的平均时速为 28.17 km/h,下班时期机动车行驶的平均时速为 26 km/h.

3. 解析 (1)甲,乙,丙三个班中学生人数之比为 5∶7∶8.

(2)估计这个学校高一年级学生中,一周的锻炼时间超过 10 h 的百分比为 $\frac{5}{5+7+8}\times100\%=25\%$.

(3)估计这个学校高一年级学生一周的平均锻炼时间为 8.2 h.

4. 解析 合在一起的样本均值为

$\bar{x}=\frac{10\times5+8\times6}{18}=\frac{49}{9}$,

因为 $\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\times5^2}{10}=9$,

$\frac{\sum_{i=1}^{8}y_i^2-8\times6^2}{8}=16$,

所以 $\sum_{i=1}^{10}x_i^2=340$, $\sum_{i=1}^{8}y_i^2=416$,

合在一起的样本方差为

$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i^2+\sum_{i=1}^{8}y_i^2-18\times\left(\frac{49}{9}\right)^2}{18}$

$=\frac{340+416-\frac{4\ 802}{9}}{18}=\frac{1\ 001}{81}$.

5. 证明 $\sum_{i=1}^{n}(\pi_i-p_i)=\sum_{i=1}^{n}\pi_i-\sum_{i=1}^{n}p_i=1-1=0$.

习题 5-1A

1. 解析 08,02,14,07,01.

2. 解析 由分层抽样的定义可知应该抽取小学生 $\frac{12\ 000}{12\ 000+11\ 000+9\ 000}\times320=120$(人),

抽取初中生 $\frac{11\ 000}{12\ 000+11\ 000+9\ 000}\times320=110$(人),

抽取高中生 $\frac{9\ 000}{12\ 000+11\ 000+9\ 000}\times320=90$(人).

3. 解析 用扇形图表示,图略.

4. 解析 极差为 384−4=380,中位数为 60.

习题 5-1B

1. 解析 (1) $\frac{125}{500}\times100=25$(人).

(2)由 $\frac{a}{500}\times100=56$,得 $a=280$,由 $b=500-125-280=95$,得 $\frac{95}{500}\times100=19$(人).

2. 解析 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数为 12,方差为 9.

3. 解析 (1)众数为 32,极差为 17,平均数为

$\frac{28+29\times3+30\times3+32\times5+36\times4+40\times3+45}{20}$

$=33.7$,

方差为

$\frac{(28-33.7)^2+(29-33.7)^2\times3+\cdots+(45-33.7)^2}{20}$

$=21.11$,

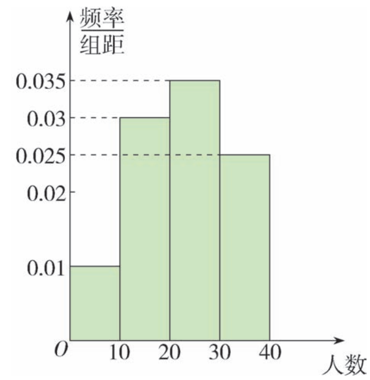
25%分位数为 30,75%分位数为 36.

(2)

2	8 9 9 9
3	0 0 0 2 2 2 2 2 6 6 6 6
4	0 0 0 5

4. 解析 利用柱形图表示,图略.

5. 解析 频率分布直方图如图所示,由茎叶图可以得到频率分布直方图,反之,由频率分布直方图不能得到茎叶图.



6. 解析 逐年比较,2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著,2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效,2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势.

习题 5-1C

1. 解析 对于甲地,“总体平均数为 3,中位数为 4”时,不能限制某一天的新增疑似病例超过 7 人,∴ 甲地不合标准;对于乙地,当总体方差大于 0,不知道总体方差的具体数值时,不能确定数据的波动大小,∴ 乙地不合标准;对于丙地,中位数和众数也不能限制某一天的新增病例超过 7 人,∴ 丙地不合标准;对于丁地,当总体平均数是 2 时,若有一个数据超过 7,则方差就大于 3,所以总体均值为 2,总体方差为 3 时,没有数据超过 7,因此丁地符合标准.

2. 解析 A 产品月销售额的平均数大于 B 产品月销售额的平均数,A 产品月销售额的方差小于 B 产品月销售额的方差.

3. 解析 $\sum_{i=1}^{10}(x_i-3)(y_i-2)$

$=\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-2\sum_{i=1}^{10}x_i-3\sum_{i=1}^{10}y_i+60$

$=20-2\times20-3\times10+60=10$.

4. 证明 因为 $\frac{\sum_{j=1}^{n_j}x_j}{n_j}=\bar{x}_j$,所以 $\sum_{j=1}^{n_j}x_j=n_j\bar{x}_j$,

所以所有样本数据的平均数为 $\bar{x}=\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_j}x_j\right)}{\sum_{j=1}^{k}n_j}=\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_j\bar{x}_j)}{n}$,

因为 $\frac{\sum_{j=1}^{n_j}x_j^2-n_j\bar{x}_j^2}{n_j}=s_j^2$,所以 $\sum_{j=1}^{n_j}x_j^2=n_js_j^2+n_j\bar{x}_j^2$,

所以所有样本数据的方差为

$s^2=\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n_j}x_j^2\right)-n\bar{x}^2}{n}$

$=\frac{\sum_{j=1}^{k}(n_js_j^2+n_j\bar{x}_j^2)-n\bar{x}^2}{n}$

$=\frac{\sum_{j=1}^{k}n_js_j^2+\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{x}_j^2-n\bar{x}^2}{n}$,

因为 $\sum_{j=1}^{k}n_j(\bar{x}_j-\bar{x})^2=\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{x}_j^2-2\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{x}_j\bar{x}+\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{x}^2=\sum_{j=1}^{k}n_j\bar{x}_j^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2$

$=\sum_{j=1}^{k}n_j\overline{x}_j^2-2\overline{x}^2$,

所以 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}[n_js_j^2+n_j(\overline{x}_j-\overline{x})^2]$.

5.3 概率

5.3.1 样本空间与事件

练习 A

1.解析 (1){发芽,不发芽}.
(2){甲赢,平局,甲输}.

2.解析 $A=\{1,3,5\}$,$B=\{4,5,6\}$

3.解析 (1)$\Omega=\{0,1,2,3\}$.(2)$A=\{0\}$.
(3)取到的3件产品中没有次品或只有一件次品.

4.解析 不可能,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

练习 B

1.解析 (1)$\Omega=\{(0,1),(0,2),(1,2),(1,0),(2,0),(2,1)\}$.
(2)$\{(2,0),(2,1)\}$.

2.解析 正面用1表示,反面用0表示,则 $\Omega=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,0)\}$.

3.解析 $A=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$,
$B=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(5,1)\}$,
所以 $P(A)\leqslant P(B)$.

4.解析 (1)$A=\Omega$.(2)$B=\varnothing$.

5.解析 (1)$\Omega=\{t|t>0\}$,其中含有的样本点有无穷多个.
(2)$A=\{t|t>5\ 000\}$,$B=\{t|0<t<1\ 000\}$.

5.3.2 事件之间的关系与运算

练习 A

1.解析 (1)$A\overline{B}$.(2)$\overline{A}\ \overline{B}$.

2.解析 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3$.

3.解析 学校足球队不输的概率为 $0.7+0.2=0.9$.

练习 B

1.解析 (1)$A\overline{B}+\overline{A}B+\overline{A}\ \overline{B}$.(2)$A\overline{B}+\overline{A}B+AB$.

2.解析 $A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$,
$B=\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$,
$A+B=\{(1,4),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$,$AB=\{(1,4),(4,1)\}$

3.解析 $P(B)=1-P(\overline{B})=0.4$,$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0.3+0.4+0.2=0.9$.

4.解析 $B\subseteq\overline{A}$,$A\subseteq\overline{B}$.

5.解析 (1)A 不发生且 B,C 同时发生.(2)A,B,C 都不发生.(3)A,B,C 恰有一个发生.

5.3.3 古典概型

练习 A

1.解析 $\frac{2}{5}$.

2.解析 $\frac{12}{17}$.

3.解析 设三件正品分别为 a_1,a_2,a_3,一件次品为 b_1,从中任取两件产品的结果有$\{(a_1,a_2),(a_1,a_3),(a_2,a_3),(a_1,b_1),(a_2,b_1),(a_3,b_1)\}$,共6个结果,恰有一件次品的结果有3种,所以所求概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

练习 B

1.解析 (1)取出偶数的结果有$\{2,4,6,\cdots,28,30\}$,所以所求概率为 $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$.
(2)能被3整除的结果有$\{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$,
所以所求概率为 $\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.
(3)取出的数是偶数且能被3整除的结果有$\{6,12,18,24,30\}$,所以所求概率为 $\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.
(4)取出的数是偶数或能被3整除的结果有$\{2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,26,27,28,30\}$,所以所求概率为 $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$.

2.解析 从中任取一块共有64种结果,其中只有一面涂有红色的木块共有 $6\times4=24$(块),所以所求概率为 $\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$.

3.解析 从2,3,8,9中任取两个不同的数组成$\log_a b$ 的结果有:$\{(2,3),(2,8),(2,9),(3,2),(3,8),(3,9),(8,2),(8,3),(8,9),(9,2),(9,3),(9,8)\}$,共12种结果,其中$\log_a b$ 为整数的结果有$\log_2 8$,$\log_3 9$,共2个,所以所求概率为 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

4.解析 设田忌的上、中、下等马分别记为 A,B,C,齐王的上、中、下等马分别记为 a,b,c,则比赛的所有可能有$\{(A,a)(B,b),(C,c)\}$,$\{(A,a),(B,c),(C,b)\}$,$\{(A,b),(B,a),(C,c)\}$,$\{(A,b),(B,c),(C,a)\}$,$\{(A,c),(B,a),(C,b)\}$,$\{(A,c),(B,b),(C,a)\}$,共6种结果,其中田忌获胜的结果只有$\{(A,b),(B,c),(C,a)\}$,所以所求概率为 $\frac{1}{6}$.

5.解析 记甲校2名男教师为 A_1,A_2,女教师为 B_1,乙校1名男教师为 a_1,2名女教师为 b_1,b_2,
(1)从甲校和乙校中各取1名教师,其结果为$\{A_1a_1,A_1b_1,A_1b_2,A_2a_1,A_2b_1,A_2b_2,B_1a_1,B_1b_1,B_1b_2\}$,共9个结果,其中性别相同的结果共有4个,所以所求概率为 $\frac{4}{9}$.
(2)从6名教师中任选2名,其结果为$\{A_1A_2,A_1B_1,A_1a_1,A_1b_1,A_1b_2,A_2B_1,A_2a_1,A_2b_1,A_2b_2,B_1a_1,B_1b_1,B_1b_2,a_1b_1,a_1b_2,b_1b_2\}$,共15种结果,其中2名教师来自同一学校的结果共有6种,所以所求概率为 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.

5.3.4 频率与概率

练习 A

1.解析 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

2.解析 苹果质量落在[114.5,124.5]的有120,122,116,120,共4个,所以 $P=\frac{2}{5}$.

3.解析 不对,每次投篮命中的可能性为90%,投篮100次可能都没有命中,也可能命中100次.

4.解析 不同意,抛下一次时,反面朝上的可能性仍为 $\frac{1}{2}$.

5.解析 略

练习 B

1.解析 (1)不可能事件出现的次数为0,所以其概率为0.
(2)必然事件每次都出现,所以其概率为1.

2.解析 (1)从左到右,表格中依次填入0.80,0.95,0.88,0.92,0.89,0.91.
(2)击中靶心的概率为 $\frac{8+19+\cdots+455}{10+20+\cdots+500}\approx0.90$.

3.解析 出现的点数大于2的概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,所以出现的点数大于2的次数大约为 $\frac{2}{3}\times600=400$.不一定会出现这么多次.

4.解析 (1)$\frac{11}{50}$.(2)$\frac{39}{50}$.

5.3.5 随机事件的独立性

练习 A

1.解析 $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$P(\overline{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$,
$P(A\overline{B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,
所以 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$,所以事件 A 与$\overline{B}$ 相互独立.

2.解析 0.09.

3.解析 三个臭皮匠至少一人想出主意的概率大于诸葛亮一个人想出主意的概率.

练习 B

1.解析 因为 $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$,$P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$,所以 $P(\overline{A})=\frac{3}{4}$,$P(\overline{B})=\frac{12}{13}$,
又因为 $P(\overline{A}\ \overline{B})=\frac{52-13-4+1}{52}=\frac{9}{13}$,
所以 $P(\overline{A}\ \overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$,
所以$\overline{A}$与$\overline{B}$相互独立.

2.解析 至少投中一次的概率为 $1-(1-0.7)\times(1-0.7)=0.91$.

3.证明 因为 $P(B)=P((A+\overline{A})B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(A)P(B)+P(\overline{A}B)$,
所以 $P(B)(1-P(A))=P(\overline{A})P(B)=P(\overline{A}B)$,所以$\overline{A}$与 B 相互独立.

4.解析 尝试10次至少有一次成功的概率为 $1-(1-0.1)^{10}\approx0.65$,尝试20次至少有一次成功的概率为 $1-(1-0.1)^{20}\approx0.88$,设 $1-(1-0.1)^n\geqslant0.90$,又 $n\in\mathbf{N}^*$,则 $n\geqslant22$,所以至少要尝试22次.

习题 5-3A

1.解析 $20\times0.3=6$(位).

2.解析 (1)样本空间 $\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(4,1),$

(4,2),(4,3),(4,5),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)}.

(2)两个数都是奇数的结果有(1,3),(1,5),(3,1),(3,5),(5,1),(5,3),共6个,所以其概率为$\frac{3}{10}$.

3. 解析　(1)每个节能灯寿命不小于10 000 h的概率为95%.

(2)有80%~90%的可能性下雨.

4. 解析　$0.8\times(1-0.7)\times0.6=0.144$.

5. 解析　(1)$0.2\times0.3=0.06$.

(2)$(1-0.2)\times(1-0.3)=0.56$.

6. 解析　$\because P(A)=\frac{1}{2}$,

$P(B)=\frac{2}{3}$,

$\therefore P(A\bar{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{1}{6}$,

$P(\bar{A}\bar{B})=[1-P(A)][1-P(B)]=\frac{1}{6}$.

习题 5-3B

1. 解析　(1)样本空间Ω={(甲,甲,甲),(甲,甲,乙),(甲,乙,甲),(乙,甲,甲),(甲,乙,乙),(乙,甲,乙),(乙,乙,甲),(乙,乙,乙)}.

(2)$\frac{1}{8}$.

(3)$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

2. 解析　(1)样本空间Ω={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}.

(2)$P(A)=\frac{1}{6}$,$P(B)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$,

$P(AB)=\frac{1}{36}$,

所以$P(AB)=P(A)P(B)$,所以A,B相互独立.

3. 解析　抛掷两个骰子,共有36种结果,点数之和为7的结果有6种,数目最多,所以其概率最大,最大值为$\frac{1}{6}$.

4. 解析　(1)$0.05\times0.05=0.0025$.

(2)$0.05\times0.95+0.95\times0.05=0.095$.

(3)$0.95\times0.95=0.9025$.

5. 解析　A,B相互独立,所以$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{4}$,$P(\bar{A}B)=[1-P(A)]P(B)=\frac{9}{16}$,

解得$P(A)=\frac{4}{13}$,$P(B)=\frac{13}{16}$.

习题 5-3C

1. 解析　因为$P(AB)=p(1-p)=-p^2+p=-\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$,

所以当$p=\frac{1}{2}$时,$P(AB)$取得最大值,最大值为$\frac{1}{4}$.

2. 解析　因为$P(A_i)=\frac{1}{2}$,$i=1,2,3$,$P(A_iA_j)=\frac{1}{4}=P(A_i)P(A_j)$,$i,j=1,2,3$,$i\neq j$,

$P(A_1A_2A_3)=\frac{1}{4}\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$,

所以A_1,A_2,A_3两两相互独立,但A_1,A_2,A_3不相互独立.

5.4　统计与概率的应用

习题 5-4A

1. 解析　如果要求70%的居民用电量在第一阶梯内,阶梯电价的临界点为176,如果要求20%的居民用电量在第二阶梯内,阶梯电价的临界点为215.

2. 解析　设白色围棋子的数目为x颗,由题意得$\frac{6}{30}=\frac{100}{100+x}$,解得$x=400$.

3. 解析　不可信.

4. 解析　(1)$\frac{8\ 513}{10\ 000}\times100\%=85.13\%$.

(2)$\frac{8\ 513}{10\ 000}\times30\ 000=25\ 539$(尾).

(3)$\frac{5\ 000}{85.13\%}\approx5\ 900$(尾).

5. 解析　(1)$0.8\times0.7\times0.5=0.28$.

(2)$0.2\times0.3\times0.5+0.2\times0.7\times0.5+0.8\times0.3\times0.5=0.22$.

习题 5-4B

1. 解析　(1)事件A的人数为$60+50=110$,

$P(A)=\frac{110}{200}=\frac{11}{20}$.

(2)事件B的人数为$30+30=60$,

$P(B)=\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$.

2. 解析　甲要获得冠军共分为两种情况:

①第一场就取胜,这种情况的概率为$\frac{1}{2}$;

②第一场失败,第二场取胜,这种情况的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

则甲获得冠军的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

3. 解析　(1)记"该选手能正确回答第i轮的问题"为事件$A_i(i=1,2,3,4)$,

则$P(A_1)=\frac{4}{5}$,$P(A_2)=\frac{3}{5}$,$P(A_3)=\frac{2}{5}$,

$P(A_4)=\frac{1}{5}$,

$\therefore$ 该选手进入第四轮才被淘汰的概率

$P_1=P(A_1A_2A_3\bar{A}_4)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdot P(\bar{A}_4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{96}{625}$.

(2)该选手至多进入第三轮考核的概率$P_2=P(\bar{A}_1+A_1\bar{A}_2+A_1A_2\bar{A}_3)$

$=P(\bar{A}_1)+P(A_1)P(\bar{A}_2)+P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)$

$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{101}{125}$.

4. 解析　(1)设事件A、B、C分别为甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品.

由题设条件有$\begin{cases}P(A\bar{B})=\frac{1}{4},\\P(B\bar{C})=\frac{1}{12},\\P(AC)=\frac{2}{9},\end{cases}$

即$\begin{cases}P(A)\cdot[1-P(B)]=\frac{1}{4}①,\\P(B)\cdot[1-P(C)]=\frac{1}{12}②,\\P(A)\cdot P(C)=\frac{2}{9}③.\end{cases}$

由①③得$P(B)=1-\frac{9}{8}P(C)$,

代入②得$27[P(C)]^2-51P(C)+22=0$,

解得$P(C)=\frac{2}{3}$或$\frac{11}{9}$(舍去).

将$P(C)=\frac{2}{3}$分别代入③、②可得$P(A)=\frac{1}{3}$,$P(B)=\frac{1}{4}$.

即甲、乙、丙三台机床各自加工的零件是一等品的概率分别是$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{2}{3}$.

(2)记事件D为从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验,至少有一个一等品,

则$P(D)=1-P(\bar{D})=1-[1-P(A)][1-P(B)][1-P(C)]=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$.

故从甲、乙、丙加工的零件中各取一个检验,至少有一个一等品的概率为$\frac{5}{6}$.

5. 解析　由题意知抽签的结果共有3种,其中甲抽中"参赛"的结果有2种,乙抽中"参赛"的结果有2种,所以$P(A)=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{2}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{3}$,因为$P(AB)\neq P(A)\cdot P(B)$,所以A,B不相互独立.

复习题

A 组

1. 解析　第一营区抽取$\frac{200}{500}\times50=20$(人),第二营区抽取$\frac{150}{500}\times50=15$(人),第三营区抽取$\frac{150}{500}\times50=15$(人).

2. 解析　用柱形图表示,图略.

3. 解析　用扇形图表示,图略.

4. 解析　$5x_1+2$,$5x_2+2$,…,$5x_n+2$的平均数为$5\times3+2=17$,方差为$2^2\times5^2=100$.

5. 解析　(1)

甲		乙
9	0	8
2 1 0 0	1	0 2 3 4
0	2	1

(2)甲组数据的平均数为$\bar{x}_{甲}=\frac{9+10+11+12+10+20}{6}=12$,

$s^2_{甲}=\frac{9+4+1+0+4+64}{6}=\frac{41}{3}$,

乙组数据的平均数为 $\bar{x}_{\text{乙}}=\frac{8+14+13+10+12+21}{6}=13$，

$s_{\text{乙}}^2=\frac{25+1+0+9+1+64}{6}=\frac{50}{3}$，

所以 $\bar{x}_{\text{甲}}<\bar{x}_{\text{乙}}$，$s_{\text{甲}}^2<s_{\text{乙}}^2$，乙种麦苗平均株高更高，甲种麦苗长势更平均.

6. 解析　（答案不唯一，合理即可）四个人中乙的方差最小，乙的平均数在第二位上，所以综合平均数和方差的定义可知最佳人选为乙.

7. 解析　(1)样本空间 $\Omega=\{156,165,561,516,615,651\}$.

(2)所得的三位数大于400的结果有4个，所以其概率为 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

(3)所得的三位数是偶数的结果有2个，所以其概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

8. 解析　$0.95\times0.95\times0.95\times0.95\times0.95\approx0.77$.

B 组

1. 解析　甲组数据为28，31，39，42，45，55，57，58，66，其中位数为45，25%分位数为39，75%分位数为57，平均数为 $\frac{28+31+39+42+45+55+57+58+66}{9}=\frac{421}{9}$，方差为 $\frac{12\ 200}{81}$.

乙组数据为29，34，35，42，46，48，53，55，67，其中位数为46，25%分位数为35，75%分位数为53，平均数为 $\frac{29+34+35+42+46+48+53+55+67}{9}=\frac{409}{9}$，方差为 $\frac{10\ 280}{81}$.

2. 解析　估计此次数学测试的平均分为 $0.1\times65+0.3\times75+0.4\times85+0.2\times95=82$，取每组的组中值为平均值.

3. 证明　$\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\bar{x}+\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{x}^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2$.

4. 解析　设3本科技书为 k_1,k_2,k_3，2本文艺书为 w_1,w_2，则从中任选2本所有的结果有 $\{(k_1,k_2),(k_1,k_3),(k_1,w_1),(k_1,w_2),(k_2,k_3),(k_2,w_1),(k_2,w_2),(k_3,w_1),(k_3,w_2),(w_1,w_2)\}$，共10种结果，其中既有科技书又有文艺书的结果有6种，所以其概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

5. 解析　从8人中选出通晓日语、俄语和韩语的志愿者各1名，

其一切可能的结果组成的样本空间 $\Omega=\{(A_1,B_1,C_1),(A_1,B_1,C_2),(A_1,B_2,C_1),(A_1,B_2,C_2),(A_1,B_3,C_1),(A_1,B_3,C_2),(A_2,B_1,C_1),(A_2,B_1,C_2),(A_2,B_2,C_1),(A_2,B_2,C_2),(A_2,B_3,C_1),(A_2,B_3,C_2),(A_3,B_1,C_1),(A_3,B_1,C_2),(A_3,B_2,C_1),(A_3,B_2,C_2),(A_3,B_3,C_1),(A_3,B_3,C_2)\}$，

由18个基本事件组成.由于每一个基本事件被抽取的机会均等，因此这些基本事件的发生是等可能的.

(1)用 M 表示"A_1 恰被选中"这一事件，则 $M=\{(A_1,B_1,C_1),(A_1,B_1,C_2),(A_1,B_2,C_1),(A_1,B_2,C_2),(A_1,B_3,C_1),(A_1,B_3,C_2)\}$，

事件 M 由6个基本事件组成，因而 $P(M)=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$.

(2)用 N 表示"B_1,C_1 不全被选中"这一事件，

则其对立事件 $\overline{N}$ 表示"B_1,C_1 全被选中"，

则 $\overline{N}=\{(A_1,B_1,C_1),(A_2,B_1,C_1),(A_3,B_1,C_1)\}$，事件 $\overline{N}$ 由3个基本事件组成，

所以 $P(\overline{N})=\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$，由对立事件的概率公式得 $P(N)=1-P(\overline{N})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

6. 解析　(1) $\frac{1}{3}$.(2) $\frac{2}{3}$.(3) $\frac{2}{3}$.

7. 解析　(1)由题意可知，厨余垃圾共600 t，正确投放到"厨余垃圾"箱400 t，故估计厨余垃圾投放正确的概率为 $\frac{400}{600}=\frac{2}{3}$.

(2)由题意可知，生活垃圾投放错误有 $100+100+30+30+20+20=300(\text{t})$，故估计生活垃圾投放错误的概率为 $\frac{300}{1\ 000}=\frac{3}{10}$.

(3)$\because a+b+c=600$，$\therefore a,b,c$ 的平均数为200，

$\therefore s^2=\frac{1}{3}[(a-200)^2+(b-200)^2+(c-200)^2]$

$=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2-120\ 000)$，

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\geqslant a^2+b^2+c^2$，$\therefore$ 当 $a=600,b=0,c=0$ 时，s^2 最大，为80 000.

8. 解析　设事件 A_i 为"甲是 A 组的第 i 个人"，事件 B_i 为"乙是 B 组的第 i 个人"，

由题意可知 $P(A_i)=P(B_i)=\frac{1}{7}$，$i=1,2,\cdots,7$，

(1)事件"甲的康复时间不少于14天"等价于"甲是 A 组的第5或第6或第7个人"，

$\therefore$ 甲的康复时间不少于14天的概率为 $P(A_5\cup A_6\cup A_7)=P(A_5)+P(A_6)+P(A_7)=\frac{3}{7}$.

(2)设事件 C 为"甲的康复时间比乙的康复时间长"，

则 $C=A_4B_1\cup A_5B_1\cup A_6B_1\cup A_7B_1\cup A_5B_2\cup A_6B_2\cup A_7B_2\cup A_7B_3\cup A_6B_6\cup A_7B_6$，

$\therefore P(C)=P(A_4B_1)+P(A_5B_1)+P(A_6B_1)+P(A_7B_1)+P(A_5B_2)+P(A_6B_2)+P(A_7B_2)+P(A_7B_3)+P(A_6B_6)+P(A_7B_6)$

$=10P(A_4B_1)=10P(A_4)P(B_1)=\frac{10}{49}$.

(3)当 a 为11或18时，A,B 两组病人康复时间的方差相等.

9. 解析　(1)乙第一次投球获胜的概率等于 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，乙第二次投球获胜的概率等于 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$，乙第三次投球获胜的概率等于 $\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{27}$，

故乙获胜的概率等于 $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}=\frac{13}{27}$.

(2)由于投篮结束时乙只投了2个球，说明第一次投球甲乙都没有投中，第二次投球甲没有投中而乙投中，或第三次投球甲投中了.故投篮结束时乙只投了2个球的概率等于 $\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

C 组

1. 解析　$\bar{x}_{\text{甲}}=\frac{(7+8+9+10)\times5}{20}=8.5$，

$s_1^2=\frac{5\times[(7-8.5)^2+(8-8.5)^2+(9-8.5)^2+(10-8.5)^2]}{20}$

$=1.25$，

$\bar{x}_{\text{乙}}=\frac{(7+10)\times6+(8+9)\times4}{20}=8.5$，

$s_2^2=\frac{6\times[(7-8.5)^2+(10-8.5)^2]+4\times[(8-8.5)^2+(9-8.5)^2]}{20}$

$=1.45$，

$\bar{x}_{\text{丙}}=\frac{(7+10)\times4+(8+9)\times6}{20}=8.5$，

$s_3^2=\frac{4\times[(7-8.5)^2+(10-8.5)^2]+6\times[(8-8.5)^2+(9-8.5)^2]}{20}$

$=1.05$，

由 $s_2^2>s_1^2>s_3^2$ 得 $s_2>s_1>s_3$，

2. 解析　由茎叶图知，

甲加工零件个数的平均数 $\bar{x}_1$

$=\frac{19+18+20\times2+21+22+23+31\times2+35}{10}=24$，

乙加工零件个数的平均数为 $\bar{x}_2$

$=\frac{19+17+11+21+22+24\times2+30\times2+32}{10}=23$.

所以 $\bar{x}_1-\bar{x}_2=1$.

3. 解析　(1)设"至少参加一个社团"为事件 A，

从45名同学中任选一名有45种选法，$\therefore$ 基本事件数为45，

通过题表可知事件 A 的基本事件数为 $8+2+5=15$，$\therefore P(A)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

(2)从5名男同学中任选一名有5种选法，从3名女同学中任选一名有3种选法，

$\therefore$ 从这5名男同学和3名女同学中各随机选1人的选法有 $5\times3=15$ 种，即基本事件总数为15.

设"A_1 被选中，而 B_1 未被选中"为事件 B，显然事件 B 包含的基本事件数为2，

$\therefore P(B)=\frac{2}{15}$.

第六章　平面向量初步

6.1　平面向量及其线性运算

6.1.1　向量的概念

练习 A

1. 解析　方向相反，大小相等.

2. 解析　与 $\overrightarrow{DE}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{FC}$，

与 $\overrightarrow{EF}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{DA}$，

与 $\overrightarrow{FD}$ 相等的向量有 $\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{EB}$.

3. 解析　不一定，向量的方向不一定相同.

练习 B

1. 解析　略.

2.解析　$|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3,|\boldsymbol{d}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10},|\boldsymbol{e}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

3.解析　(1)充要条件.

(2)充分不必要条件.

(3)充分不必要条件.

4.解析　(1)一定共线.(2)不可能共线.

5.解析　不一定成立,当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 不一定平行.

6.1.2　向量的加法

练习 A

1.解析　(1)$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

2.解析　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$.

3.解析　$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最大值为 5,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线;$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$的最小值为 1,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线.

练习 B

1.解析　略.

2.解析　(1)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}|=3|\boldsymbol{a}|=3$.

(2)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}|=5|\boldsymbol{a}|=5$.

3.解析　(1)$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{FH}$.

(2)$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$.

4.解析　(1)不一定.(2)一定.

5.解析　一定.

6.1.3　向量的减法

练习 A

1.解析　(1)$\overrightarrow{MP}-\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NP}$.

(2)原式$=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

2.解析　$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

3.解析　$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值为 2.

练习 B

1.解析　略.

2.证明　$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$.

3.解析　(1)$\overrightarrow{CD}=-\boldsymbol{a},\overrightarrow{CB}=-\boldsymbol{b}$.

(2)$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

4.解析　$3\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 7$.

5.解析　由向量的减法运算法则和三角形两边之和大于第三边,两边之差小于第三边得此不等式成立.

$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最大值为$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线;$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$的最小值为$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线.

6.1.4 数乘向量

练习 A

1.解析　$\boldsymbol{a}$ 与 $3\boldsymbol{a}$ 方向相同,$-3\overrightarrow{AB}$是$\overrightarrow{AB}$长度的 3 倍.

2.解析　(1)$2\boldsymbol{a}$.(2)$6\boldsymbol{a}$.(3)$-3\boldsymbol{a}$.

3.解析　假命题.

4.解析　(1)共线,长度之比为 3.

(2)共线,长度之比为 2.

练习 B

1.解析　(1)假命题.(2)真命题.

2.解析　(1)$\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{ON}$.(2)$\overrightarrow{NO}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{MN}$.

3.解析　$\frac{\boldsymbol{a}}{2},-\frac{\boldsymbol{a}}{2}$.

4.解析　$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

6.1.5　向量的线性运算

练习 A

1.解析　(1)原式$=3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$.

(2)原式$=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}+3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$.

(3)原式$=\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

(4)原式$=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{0}$.

2.解析　$|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=9$.

3.证明　因为 $\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

练习 B

1.证明　因为$\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{PQ}$,$\overrightarrow{MP}$与$\overrightarrow{PQ}$有公共点 P,所以 M,P,Q 三点共线.

2.解析　$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$的最大值为 $2|\boldsymbol{a}|+3|\boldsymbol{b}|=18$,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向共线;$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$的最小值为 $|2|\boldsymbol{a}|-3|\boldsymbol{b}||=6$,此时 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向共线.

3.证明　因为$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$,所以$2\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,即 $2\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$,又$\overrightarrow{CA}$与$\overrightarrow{AB}$有公共点 A,所以 A,B,C 三点共线.

4.解析　$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EF},\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEF}}=\frac{1}{9}$.

习题 6-1A

1.解析　(1)$\overrightarrow{BA}$.(2)$\overrightarrow{CA}$.(3)$\overrightarrow{AC}$.(4)$\overrightarrow{CE}$.

2.解析　(1)$\overrightarrow{AC}$.(2)$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

3.解析　略.

4.解析　(1)$\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.(2)$\boldsymbol{a}=-\frac{9}{8}\boldsymbol{b}$.

5.解析　(1)原式$=2\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=5\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

(2)原式$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$.

习题 6-1B

1.解析　(1)平行四边形.(2)梯形.(3)菱形.

2.解析　(1)原式$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

(2)原式$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$.

(3)原式$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$.

(4)原式$=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$.

3.解析　略.

4.解析　(1)$2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{x})$,

$2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{x}$,∴ $3\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$,

∴ $\boldsymbol{x}=\frac{\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}}{3}$.

(2)$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{x})=3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$,

$\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{x}=3\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{a}$,

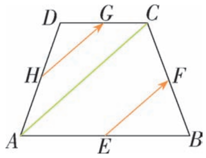
∴ $4\boldsymbol{x}=\frac{7}{2}\boldsymbol{a}$,∴ $\boldsymbol{x}=\frac{7}{8}\boldsymbol{a}$.

5.解析　∵ $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{b}$,∴ $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

6.证明　因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b},\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$,所以$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$,又$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$有公共点 A,所以 A,B,C 三点共线.

习题 6-1C

1.解析　如图所示,连接 AC,



∵ E,F,G,H 分别为 AB,BC,CD,DA 的中点,

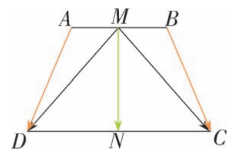
∴ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

同理,$\overrightarrow{HG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,∴ $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$.

2.解析　不一定,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两不共线时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 才能构成三角形.

3.证明　如图所示,∵ M 是 AB 的中点,N 是 CD 的中点,



∴ $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD})$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA})$.

∵ M 是 AB 的中点,

∴ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\boldsymbol{0}$,即$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

6.2　向量基本定理与向量的坐标

6.2.1　向量基本定理

练习 A

1.解析　$\boldsymbol{b},\boldsymbol{e}$ 可以,$\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 不可以,因为 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不平行.

2.解析　由题意得$(y+3)\boldsymbol{b}=(x-2)\boldsymbol{a}$,

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,

所以 $x-2=0,y+3=0$,

解得 $x=2,y=-3$.

3.解析　$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

练习 B

1.解析　略.

2.解析　令 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}$,则 $7\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=x(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+y(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(3x+y)\boldsymbol{a}+(2x-y)\boldsymbol{b}$,

所以 $3x+y=7,2x-y=-3$,

解得 $x=\frac{4}{5},y=\frac{23}{5}$,

所以 $\boldsymbol{p}=\frac{4}{5}\boldsymbol{m}+\frac{23}{5}\boldsymbol{n}$.

3.解析　(1)能.(2)能.(3)不能,因为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线.(4)能.

4.解析　不一定,当 $st=-1$ 时,两向量共线.

5.解析　(1)$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}(\lambda>0),\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{b}(\mu<0)$.

(2)不能,因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且与 $\boldsymbol{d}$ 不共线.

6.解析　可能,当 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时,两向量共线.

6.2.2 直线上向量的坐标及其运算

练习 A

1. 解析 (1) $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 3，$\boldsymbol{b}$ 的坐标为 -6.

(2) $\boldsymbol{a}$ 的坐标为 $-\frac{1}{4}$，$\boldsymbol{b}$ 的坐标为 2.

2. 解析 0.

3. 解析 (1) $\overrightarrow{AB}$ 的坐标为 4，A,B 之间的距离为 4.

(2) 线段 AB 中点的坐标为 1.

练习 B

1. 解析 (1) 正确. (2) 错误.

2. 解析 $|\boldsymbol{a}|=\frac{2}{3}$，$|\boldsymbol{b}|=\frac{5}{6}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\frac{1}{6}$，$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\frac{23}{6}$.

3. 解析 由题意知 $B(x)-3=-5$，得 $B(x)=-2$. 故点 B 的坐标为 -2.

6.2.3 平面向量的坐标及其运算

练习 A

1. 解析 (1) $\boldsymbol{a}=(-2,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-\sqrt{2})$，$\boldsymbol{c}=(-\sqrt{3},0)$.

2. 解析 $(0,0)$.

3. 解析 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,2)$，

$-3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-9,-3)+(-4,2)=(-13,-1)$.

4. 解析 $\overrightarrow{AB}=(1,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,4)$，$\because \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$，且有公共点 A，$\therefore A,B,C$ 三点共线.

5. 解析 (1) $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(3+1)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{17}$，$AD=BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(4-3)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$.

(2) 设 $D(x,y)$，因为 $\overrightarrow{BC}=(1,3)$，$\overrightarrow{AD}=(x+1,y+2)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，所以 $x=0,y=1$，所以 $D(0,1)$.

练习 B

1. 解析 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反的单位向量为 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

2. 解析 $\because \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，$\therefore -3y=-8$，$\therefore y=\frac{8}{3}$.

3. 解析 设 $C(x,y)$，由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$，得 $(x+3,y-1)=(2,-6)$，解得 $x=-1,y=-5$，所以 C 的坐标为 $(-1,-5)$.

4. 解析 由题意得 $\overrightarrow{AB}=(-8,8)$，$\overrightarrow{AC}=(3,y+6)$，$\because A,B,C$ 三点共线，$\therefore \overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，$\therefore -8y-48=24$，解得 $y=-9$.

5. 解析 设线段 AB 的两个三等分点分别为 $M(x,y)$，$N(m,n)$，

由 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，

得 $(x+2,y-1)=\frac{1}{3}(3,2)=\left(1,\frac{2}{3}\right)$，

$(m+2,n-1)=\frac{2}{3}(3,2)=\left(2,\frac{4}{3}\right)$，解得 $x=-1$，$y=\frac{5}{3}$，$m=0$，$n=\frac{7}{3}$，

所以 $M\left(-1,\frac{5}{3}\right)$，$N\left(0,\frac{7}{3}\right)$.

6. 解析 设 $B(x,0)$，由 $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x-1)^2+1}=2$，得 $x=1\pm\sqrt{3}$，所以 B 的坐标为 $(1+\sqrt{3},0)$ 或 $(1-\sqrt{3},0)$.

习题 6-2A

1. 解析 $\overrightarrow{OA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，$\overrightarrow{OD}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

2. 解析 由题意得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$，$\therefore \overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

3. 解析 由题意得 $(x+2y,2x+3y)=(3,4)$，

$\therefore x+2y=3$，且 $2x+3y=4$，解得 $x=-1,y=2$.

4. 证明 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{CD}=(1,-1)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，所以 $AB/\!/CD$.

5. 解析 由题意得 $A_1\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$，$B_1\left(\frac{1}{3},1\right)$，所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\left(-\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，$|\overrightarrow{A_1B_1}|=\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

习题 6-2B

1. 解析 $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. 解析 $\lambda=\pm 2$.

3. 解析 原式可化为 $(3x-4x-7)\boldsymbol{a}=(2x+y-10)\boldsymbol{b}$，$\because \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，

$\therefore \begin{cases}3x-4x-7=0,\\2x+y-10=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-7,\\y=24.\end{cases}$

4. 解析 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(k-3,2k+2)$，$\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=(10,-4)$，$\because k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，$\therefore \frac{k-3}{10}=\frac{2k+2}{-4}$，

解得 $k=-\frac{1}{3}$.

5. 解析 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$，

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$

$=\frac{3}{4}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$

$=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，

$\therefore \overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$；

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{3}{4}(-\boldsymbol{b})+\frac{1}{4}\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{3}{4}\boldsymbol{b}$.

习题 6-2C

1. 解析 略.

2. 解析 因为 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

6.3 平面向量线性运算的应用

习题 6-3A

1. 证明 因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}$，$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 证明 因为 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，所以 $MN/\!/BC$，且 $MN=\frac{1}{3}BC$.

3. 解析 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=(0,5)$，所以 $|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=5$.

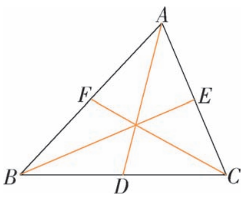
习题 6-3B

1. 证明 因为 $\overrightarrow{AB}=(1,-3)$，$\overrightarrow{DC}=(1,-3)$，所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 证明 因为 $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2-7)^2+(3-5)^2}=\sqrt{29}$，$BC=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(6-2)^2+(-7-3)^2}=\sqrt{116}$，$AC=\sqrt{(6-7)^2+(-7-5)^2}=\sqrt{145}$，

所以 $AC^2=AB^2+BC^2$，所以 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

3. 证明 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D、E、F 分别为 BC、CA、AB 的中点，



$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})$，$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$.

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB})=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

4. 证明 延长 AQ 交 DC 于点 M，则 $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MC}$，所以 $PQ/\!/MC$，

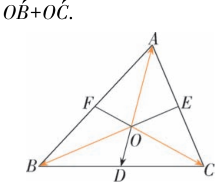
又 $AB/\!/MC$，所以 $PQ/\!/AB$.

5. 解析 $|\boldsymbol{G}|=\frac{|\boldsymbol{F}_1|}{\sin 30°}=60\ \text{N}$，$|\boldsymbol{F}_2|=|\boldsymbol{G}|\cdot\cos 30°=30\sqrt{3}\ \text{N}$.

习题 6-3C

1. 证明 如图，$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore 2\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.



又 $\because O$ 为 $\triangle ABC$ 的重心，

$\therefore AO:OD=2:1$，

即 $\overrightarrow{OA}=-2\overrightarrow{OD}$. $\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$.

2. 证明 设 BC 的中点为 D，则 $D\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$，设 $G(x,y)$，由 $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{GD}$，

得 $(x-x_1,y-y_1)=2\left(\frac{x_2+x_3}{2}-x,\frac{y_2+y_3}{2}-y\right)$，

解得 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$，$y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$，

所以三角形重心 G 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

复习题

A 组

1. 解析　(1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$.

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.

(3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$.

(4) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{0}$.

(5) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}$.

(6) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\mathbf{0}$.

2. 解析　由 $\begin{cases}5x+2y=\boldsymbol{a},\\3x-y=\boldsymbol{b},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{11}\boldsymbol{a}+\frac{2}{11}\boldsymbol{b},\\y=\frac{3}{11}\boldsymbol{a}-\frac{5}{11}\boldsymbol{b}.\end{cases}$

3. 解析　$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

4. 解析　$\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

5. 证明　因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, 且 AB, BD 有公共点 B, 所以 A,B,D 三点共线.

6. 解析　(1) $-2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{c}=(-6,10)+(27,33)-(32,52)=(-11,-9)$.

(2) $15\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=(45,-75)-(54,66)+(56,91)=(47,-50)$.

7. 解析　$A'(4,-1)$, $B'(-1,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(5,2)$, $\overrightarrow{A'B'}=(-5,-2)=-\overrightarrow{AB}$.

8. 解析　略.

B 组

1. 解析　$\overrightarrow{BC}=3(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\overrightarrow{BF}=\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{EC}=3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{CF}=-2\boldsymbol{b}$.

2. B　由 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BP}$, 得 $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{BP}$, 所以 $\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\mathbf{0}$.

3. 解析　由平行四边形法则得 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

4. 解析　$\because \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, $\therefore$ 可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, 由题意可知 $\lambda=2$, $\therefore k=-8$.

5. D　设 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}+k\mu\boldsymbol{b}$,

$\therefore \begin{cases}\lambda=k,\\k\mu=1,\end{cases}$ 解得 $\lambda\mu=1$.

6. 解析　$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线, $\therefore \lambda=-3$.

7. 解析　由题意得 $k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(k-6,2k+4)$, $2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}=(14,-4)$,

$\therefore -4k+24=28k+56$, $\therefore k=-1$.

8. 解析　(1) $\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行, $\therefore \begin{cases}m-1=3,\\2-n=4,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}m=4,\\n=-2.\end{cases}$

(2) $(m-n)\boldsymbol{a}+(m+n)\boldsymbol{b}$

$=(m-n)(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)+(m+n)(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$

$=(m-n+m+n)\boldsymbol{e}_1+(m-n-m-n)\boldsymbol{e}_2$

$=2m\boldsymbol{e}_1-2n\boldsymbol{e}_2$

$=2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$.

$\because \boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,

$\therefore \begin{cases}2m=2,\\-2n=3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}m=1,\\n=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

9. 解析　设点 C 的坐标为 (x,y),

$\overrightarrow{BC}=(x-3,y-2)$, $\overrightarrow{AD}=(1,4)$,

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\therefore \begin{cases}x-3=1,\\y-2=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=4,\\y=6,\end{cases}$ $\therefore C(4,6)$.

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

$\therefore M$ 为 $\square ABCD$ 的中心, $\therefore M\left(\frac{3}{2},\frac{7}{2}\right)$.

C 组

1. 证明　$\because \boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$ $\therefore$ 可设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{c}$, $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, $\therefore \lambda\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{c}$, $\therefore \boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{c}$.

2. 证明　$\because \overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$,

$\therefore \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB}$.

又 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}$,

$\therefore \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{EA}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EA})+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{ED}$

$=2\overrightarrow{ED}+2\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{CD}$

$=2(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DB})+2(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD})$

$=2(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{ED})$.

3. 解析　(1) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2) 设 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BF}=\mu\overrightarrow{FC}$, 则 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{b}$,

又 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{1+\mu}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{a}+\frac{\mu}{1+\mu}\boldsymbol{b}$,

所以 $\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{a}=\frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{a}$,

$\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\boldsymbol{b}=\frac{\mu}{1+\mu}\boldsymbol{b}$,

解得 $\mu=4$, $\lambda=5$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$.

所以 $\overrightarrow{AE}=5\overrightarrow{EF}$,

所以 $AE:EF=5$.

由 $\mu=4$ 知, $\overrightarrow{BF}=4\overrightarrow{FC}$,

所以 $BF:FC=4$.