# TEOREMA DE BAYES

La fórmula de Bayes, en su forma más sencilla permite calcular la probabilidad de que ocurra el evento “B”, si se sabe que ya ocurrió el evento ”A", esto es P(A/B), para ello se requiere conocer la probabilidad simple de que ocurra el evento "A”, la probabilidad simple de que ocurra el evento ”B” y la probabilidad de que ocurra el evento ”A” si se sabe que ya ocurrió el evento ”B" o sea P(A/B).

El teorema de Bayes explica la probabilidad de forma inversa al teorema de la probabilidad total.

La importancia del teorema de Bayes consiste en que se aplica en el contexto de eventos secuenciales y, además, en que la versión de cálculo de la formula proporciona la base para determinar la probabilidad condicional de un evento que ha ocurrido en la primera posición secuencial, de lo que se ha observado un evento especifico en la segunda posición secuencial.

Para calcular esa probabilidad inversa usamos la siguiente expresión:

**Definición**

Sean $A_1, A2, \ldots, A_k$ una partición de S. Sea $B$ un evento cualquiera, entonces,

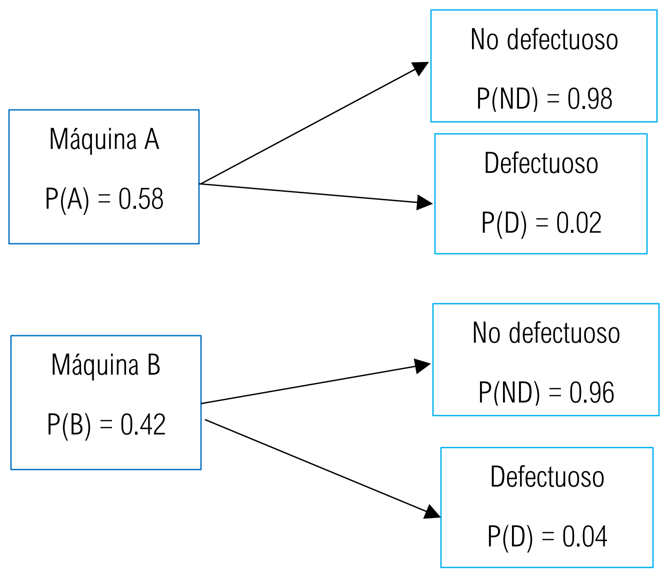
$$\begin{aligned}
P(A_i/B) &= \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(B)} \\
&= \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \cdots + P(A_k)P(B/A_k)} \\
&= \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\left(\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B/A_j)\right)}
\end{aligned}$$

# EJEMPLOS

*Ejemplo 1:*

La máquina “A” de una fábrica de alfileres produce el 58% de la producción total de la fábrica, mientras que la máquina ”B” produce el 42% del total. La máquina "A" produce un porcentaje de alfileres defectuosos del 2%, en tanto que la máquina “B” produce un 4% de alfileres defectuosos. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar, al azar, un alfiler defectuoso éste provenga de la máquina ”B”?

Primero elaboramos un diagrama de árbol.




$$P\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{P(B)\cdot P\left(\frac{D}{B}\right)}{P(A)\cdot P\left(\frac{D}{A}\right) + P(B)\cdot P\left(\frac{D}{B}\right)}$$

$$P\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{(0.42)(0.04)}{(0.58)(0.02) + (0.42)(0.04)}$$

$$P\left(\frac{B}{D}\right) = \frac{0.0168}{0.0116 + 0.0168} = \frac{0.0168}{0.0284} = 0.5915$$

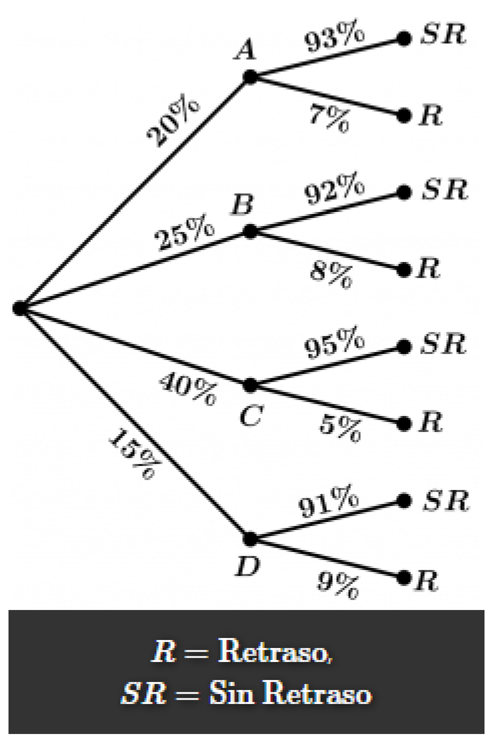
59.15% de probabilidad de que al seleccionar una pieza defectuosa ésta provenga de la máquina B.

*Ejemplo 2:*

La compañía X usa cuatro empresas de transporte: $A_1$, $A_2$, $A_3$ y $A_4$. Se sabe que 20% de los embarques se asignan a la empresa $A_1$, 25% a la $A_2$, 40% a la $A_3$ y 15% a la $A_4$. Los embarques llegan retrasados a sus clientes en 7% si los entrega $A_1$, 8% si es $A_2$, 5% si es $A_3$ y 9% si es $A_4$. Si sabemos que el embarque de hoy fue entregado con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido la empresa $A_1$ la encargada de hacerlo?

Vamos a representar la información en la siguiente tabla:

| Embarques | Entrega |
|---|---|
| $A_1 = 20\%$ | Retraso (R) $= 7\%$ |
| $A_2 = 25\%$ | Retraso (R) $= 8\%$ |
| $A_3 = 40\%$ | Retraso (R) $= 5\%$ |
| $A_4 = 15\%$ | Retraso (R) $= 9\%$ |




El equipo de logística nos está informando desde la cabina que llegó un encargo y se retrasó, y como lo que queremos saber es si fue la empresa $A_1$, en otras palabras, saber si fue $A_1$ debido a que ya se retrasó, entonces utilizaremos la fórmula del teorema de Bayes:

$$P(A_1|R) = \frac{P(A_1)P(R|A_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(R|A_i)}$$

*n* es igual a 4 porque vamos a representar la probabilidad del retraso de las 4 empresas. Vamos a hallarla:

$$\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(R|A_i) = P(A_1)P(R|A_1)$$

$$+P(A_2)P(R|A_2) + P(A_3)P(R|A_3) + P(A_4)P(R|A_4)$$

Con la tabla escrita, es más fácil colocar los valores, mira la sumatoria con los valores de la tabla:

$$\sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(R|A_i) = (20\%)(7\%)$$

$$+(25\%)(8\%) + (40\%)(5\%) + (15\%)(9\%)$$

$$P = (E) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i)P(R|A_i)$$

$$= \frac{7}{500} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{27}{2000} = \frac{27}{400}$$

Sólo falta calcular la probabilidad del numerador de la fórmula del Teorema de Bayes, la cual tiene $P(A_1)$ que es 20% y tiene P $(\frac{E}{A1})$que es la probabilidad de que haya llegado con retraso si ya ocurrió que llegó en el embarque $A_1$ que tiene una probabilidad de 7%. Ahora sí, sustituyamos todos estos valores en la fórmula del Teorema de Bayes:

$$P(A_1|E) = \frac{\frac{20}{100} \cdot \frac{7}{100}}{\frac{27}{400}} = \frac{28}{135} = 0.2074$$

Así que la probabilidad de que llegue una embarcación con retraso y además venga de la embarcación A es de 0.2074 que es igual al 20.74%.