

# Métodos Numéricos

Dr. Salvador Botello Rionda y Dr. Julio César Estrada Rico

## Examen

Límite de entrega: **Jueves 31 de Octubre de 2019 antes de las 14:30**

### Problemas a resolver

1. **Valor 25%:** Resolver el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$ . La matriz ( $A$ ) y el vector de términos independientes ( $b$ ) están en *A\_1000.mtx* y *b\_1000.vec* respectivamente, el sistema de ecuaciones tiene  $n = 1000$  variables, y se debe de obtener:
  - La inversa de la matriz y guardarla en un archivo con el nombre *INV\_1000.mtx* con el mismo formato que la matriz *A\_1000.mtx*.
  - Guardar la solución del sistema de ecuaciones en un archivo con nombre *X\_1000.vec* con el mismo formato que *b\_1000.vec*.
  - Presentar un reporte detallado, donde se exprese el método de solución usado y los motivos por los que este fue usado así como información interesante observada durante el proceso.
2. **Valor 25%:** Hacer una comparación entre los métodos directos e iterativos para resolver el sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  contenido en los archivos *A\_5000.mtx* y *b\_5000.vec*, este sistema tiene  $n = 5000$  variables y es una matriz rala (la mayoría de las entradas de la matriz son 0). Con la solución de este problema se deberán de responder las siguientes preguntas:
  - Cuál de los métodos es el mas adecuado para la solución de este problema?
  - Qué ventajas y desventajas presenta cada uno de los métodos de solución?
  - Cuál de los métodos presenta el mejor rendimiento?
  - Para comparar el rendimiento de los diferentes métodos emplea varios aspectos como:
    - Memoria usada
    - Tiempo
    - Número de iteraciones
    - Error en la solución
    - Etc.
  - Guardar la solución del sistema de ecuaciones en un archivo con nombre *X\_5000.vec* con el mismo formato que *b\_5000.vec*.
3. **Valor 25%:** Resolver un problema de valores y vectores propios de una matriz que está formada por una discretización muy fina de un problema de difusión. Cada ecuación del sistema tiene la siguiente forma:
$$-4x_{i-2} - 8x_{i-1} + 40x_i - 8x_{i+1} - 4x_{i+2} \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, 2000$$
En los extremos de la matriz se eliminan los términos que quedan fuera (cuando el índice es negativo o mayor a 2000). La primer ecuación sería  $40x_1 - 8x_2 - 4x_3$ , la segunda ecuación sería  $-8x_1 + 40x_2 - 8x_3 - 4x_4$ , la penúltima sería  $-4x_{1997} - 8x_{1998} + 40x_{1999} - 8x_{2000}$  y la última  $-4x_{1998} - 8x_{1999} + 40x_{2000}$ . Para este sistema de ecuaciones se deberán de obtener:
  - Los 10 eigenvalores más chicos y su respectivo eigenvector.
  - Los 10 eigenvalores más grandes y su respectivo eigenvector.

4. **Valor 25%:** Usar polinomios de Hermite para desarrollar un solver de ecuaciones diferenciales ordinarias de tres pasos (3 puntos nodos).

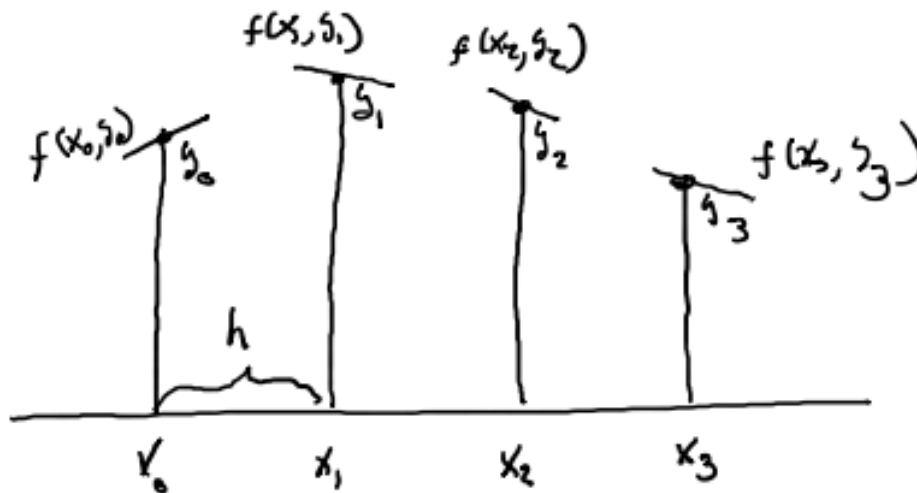
La ecuación diferencial ordinaria es:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

Para condiciones iniciales  $x_0, y_0$ .

$$\text{La solución puede ser planteada como } y_i = y_{i-2} + \int_{x_{i-2}}^{x_i} f(x, y) dx \text{ para } i = 2, 3, 4, \dots \quad (2)$$

Graficamente esta solución se puede ver como



Componiendo la solución con polinomios de Hermite usando 3 puntos nodos, digamos  $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$  y sus valores correspondientes  $y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$  y los valores de la derivada dados por la ecuación (1), entonces, usando (2) se puede calcular una aproximación a  $y_{i+1}$  como

$$y_{i+1} = y_{i-2} + \int_{x_{i-2}}^{x_i} P_H(x) dx$$

Donde  $P_H(x)$  es el polinomio de Hermite que pasa por  $y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$  con derivadas en esos puntos dados por la ecuación diferencial (1). Para este ejercicio realizar:

- Desarrollar el método de interpolación de Hermite.
- Desarrollar el método de integración del polinomio de Hermite de 3 pasos (3 puntos nodos).
- Para la ecuación diferencial  $y' = y + \sin\left(\frac{x}{2}\right)$  generar la solución (**gráfica**) en el dominio  $[-\pi, \pi]$  con un  $h = 10^{-3}$  con  $y_0 = 0.5$  y  $x_0 = -\pi$

Para generar  $y_1$  y  $y_2$  usando la regla

$$y_i = y_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1}, y_{i-1}) dx \text{ para } i = 1, 2$$

Para después seguir con la integración compuesta de polinomios de Hermite.

## Sobre los archivos de entrada y salida

- **A\_1000.mtx:** Es una matriz llena de tamaño 1000, el primer renglón contiene dos enteros que indican el número de renglones y columnas respectivamente, enseguida cada uno de los renglones contiene las entradas de ese renglón de la matriz con formato de tipo double.

- **b\_1000.vec:** Es un vector de tamaño 1000, el primer renglón contiene un entero con el tamaño del vector y enseguida se encuentran las entradas del vector con datos de tipo flotante.
- **A\_5000.mtx:** Es una matriz rara de tamaño 5000, el primer renglón contiene dos enteros que indican el número de renglones y columnas respectivamente, enseguida cada uno de los renglones siguientes contiene una entrada de la matriz, la cuál se representa con dos valores enteros y un flotante,  $i_{row}$   $i_{col}$   $value_{ij}$  que indican el índice del renglón, columna y el valor de la entrada de la matriz.
  - Los índices comienzan en 1 para esta matriz
  - Las entradas de la matriz que no se encuentran en este archivo tienen valor 0.0
- **b\_5000.vec:** Es un vector de tamaño 5000, el primer renglón contiene un entero con el tamaño del vector y enseguida se encuentran las entradas del vector con datos de tipo flotante.

## Sobre el reporte

- No es necesario describir los mtodos que hayan sido reportados en tareas anteriores; en caso contrario o si se hacen modificaciones de los mismos, se debe detallar en el reporte con claridad.
- Los resultados reportados deben coincidir con los que proporcione el programa
- Es recomendable que se apoyen con figuras y gráficas para explicar sus ideas.
- Anexar capturas de pantalla donde se verifique que la solución de los problemas es correcta.

## Consideraciones

El examen deberá ser enviado a [jorge.lopez@cimat.mx](mailto:jorge.lopez@cimat.mx) con copia a [luis.espejo@cimat.mx](mailto:luis.espejo@cimat.mx) y [rogelio.cruz@cimat.mx](mailto:rogelio.cruz@cimat.mx) con los siguientes entregables:

- **Código comprimido en un archivo (con la clave XXXXXX\_EXAMEN\_MN2019.zip, donde XXXXXX es la clave personal) que deberá de contener la solución de cada problema en una carpeta diferente y el reporte en PDF:** Además de los archivos fuente, se deberá anexar un breve instructivo de compilación y ejecución del programa.
- El README debe ser claro acerca de los parmetros que recibe el ejecutable desde terminal y contener las instrucciones de compilacin en caso de que no se incluya un makefile.
- **Reporte de resultados en PDF:** Un solo reporte (eviten enviar un reporte por cada problema) que explique el algoritmo, el código, los resultados, posibles mejoras, conclusiones y otros comentarios al respecto.
- La implementación debe ser hecha con C o C++ para los alumnos de computación y en python para los de matemáticas.

## IMPORTANTE

- Por ningún motivo se aceptará un examen entregado después de la hora límite.
- El examen será anulado en caso de detectar plagio.