OPTIMIZACIÓN. TAREA 5

OSCAR DALMAU

1. Implementar el **Algoritmo Región de confianza: Dogleg**
2. El esquema general del **Algoritmo Región de confianza** es el siguiente:
   - Dado $\hat{\Delta} > 0$, $\Delta_0 \in (0, \hat{\Delta})$ y $\eta \in [0, \frac{1}{4})$
   - Para $k = 0, 1, 2, \cdots$,
     - **Calcular** p_k (minimizar el modelo cuadrático en la region de confianza, ie, $\|p\| \leq \Delta_k$)
     - **Calcular** ρ_k .
     - Si $\rho_k > \eta$ entonces $x_{k+1} = x_k + p_k$
       De lo contrario $x_{k+1} = x_k$
     - **Calcular** Δ_{k+1}, dados $(x_k, p_k, \Delta_k, \hat{\Delta}, \eta)$.

El esquema anterior se puede combinar con varias estrategias. Un punto crucial es el cálculo de p_k. Implementar el algoritmo **Búsqueda en Linea-Región de Confianza** (LSTR-Line search trust region) que calcula p_k mediante el uso de un metodo de búsqueda en línea.

Hacer $j = 0$, $z_0 = 0$, $d_0 = -\nabla m_k(z_0)$
while $\|d_j\| \neq 0$ and $j < J$ (No conveja) **do**
    if $d_j^T B_k d_j \leq 0$ **then**
        Calcular $\tau \geq 0$ tal que $p_k = z_j + \tau d_j$ minimiza el modelo cuadrático sujeto a $\|p_k\| \leq \Delta_k$, Ecs. (1)-(2), ie, encontrar $\tau \geq 0$ tal que $\|z_j + \tau d_j\| = \Delta_k$
        return p_k
    else
        $\alpha_j = \arg\min_{\alpha \geq 0} m_k(z_j + \alpha d_j)$
        $z_{j+1} = z_j + \alpha_j d_j$
        if $\|z_{j+1}\| \geq \Delta_k$ **then**
            Encontrar $\tau \geq 0$ tal que $\|z_j + \tau d_j\| = \Delta_k$
            $p_k = z_j + \tau d_j$
            return p_k
        end if
        $d_{j+1} = -\nabla m_k(z_{j+1})$
        $j = j + 1$
    end if
end while
$p_k = z_{j+1}$

19: **return** p_k

$$p_k^* = \arg\min_p m_k(p) \quad = \quad f(x_k) + \nabla f(x_k)^T p + \frac{1}{2} p^T B_k p, \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \|p\| \leq \Delta_k, \tag{2}$$

3. Aplicar el **Método de Región de Confianza 'Dogleg'** y **Búsqueda en Linea-Región de Confianza** a la función de Rosembrock. Use los puntos iniciales indicados en la tarea anterior. Comentar los resultados.
4. Resolver el problema de ajustar una mezcla de gaussianas a un histograma 3D. La función objetivo de este problema viene dada por:

$$\min_{\alpha^j, \mu^j} g(\alpha^j, \mu^j) = \sum_{c \in \Omega} [h^j(c) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \exp(\frac{-||c - \mu_i^j||_2^2}{2\sigma^2})]^2, \tag{3}$$

Donde:

- $j \in \{1, 2\}$, corresponden a fondo y objeto.
- $c = [r, g, b]^\top$, con $r \in B_1 = \{1, ..., b_1\}$, $g \in B_2 = \{1, ..., b_2\}$, $b \in B_3 = \{1, ..., b_3\}$ y b_1, b_2, b_3 son el número de bins en cada canal RGB (pueden elegir otro espacio de colores).
- $\Omega = B_1 \times B_2 \times B_3$, donde $X \times Y := \{(x, y) : x \in X,\ y \in Y\}$ representa el producto cartesiano.
- $h^j(r, g, b)$ es el histograma 3D de la clase j.
- n es el número de elementos de la base radial.
- $\alpha^j = [\alpha_1^j, \alpha_2^j, \ldots, \alpha_n^j]$ son los pesos de la combinación lineal de la base radial.
- $\mu^j = [\mu_1^j, \mu_2^j, \ldots, \mu_n^j]$ son las medias o posiciones de los elementos de la base radial.
- σ es un parámetro conocido.

El problema (3) se puede resolver alternadamente hasta convergencia, es decir:

$$\alpha_{k+1}^j \quad = \quad \arg\min_{\alpha^j \in \mathbb{R}^n} g(\alpha^j, \mu_k^j)$$

$$\mu_{k+1}^j \quad = \quad \arg\min_{\mu^j \in \mathbb{R}^n} g(\alpha_{k+1}^j, \mu^j)$$

Indicaciones para el problema 4:

1. En la carpeta en drive estará un código en Python para generar un histograma 3D. También podrán implementar su propia versión si así lo desean. Además, encontraran un PDF llamado "InstruccionesParaHistograma" donde están las instrucciones explicadas de forma detallada para el manejo de

dicho código. También encontraran una carpeta llamada "Imagenes" donde se encuentra varias imágenes, deberán realizar esta tarea para alguna de las igmágenes almacenadas en esta carpeta.

2. El reporte podrá ser máximo de tres hojas.
3. Comparar resultados al realizar una segmentación (separar fondo y objeto de una imagen) al utilizar los histogramas de las clases "originales" contra los obtenidos al minimizar su función objetivo.

$$f(c;\alpha^j,\mu^j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^j \exp(\frac{-||c-\mu_i^j||_2^2}{2\sigma^2})$$

$$F(c;\alpha^1,\mu^1) = \frac{f(c;\alpha^1,\mu^1)+\epsilon}{f(c;\alpha^1,\mu^1)+f(c;\alpha^2,\mu^2)+2\epsilon}$$

$$F(c;\alpha^2,\mu^2) = \frac{f(c;\alpha^2,\mu^2)+\epsilon}{f(c;\alpha^1,\mu^1)+f(c;\alpha^2,\mu^2)+2\epsilon}$$

Donde $\epsilon = 0{,}01$. Si $F(c;\alpha^1,\mu^1) < F(c;\alpha^2,\mu^2)$ asignar al color c la etiqueta 2, en caso contrario se le asigna la etiqueta 1. Donde: Etiqueta 1 $\rightarrow$ Rojo y Etiqueta 2 $\rightarrow$ Azul.

Mostrar la imagen resultante (en rojo y azul). Repetir de igual forma para las $h^j(c)$, lo que se comentó anteriormente para las $f^j(c;\alpha^j,\mu^j)$ es decir calcular:

$$H(c) = \frac{h^1(c)+\epsilon}{h^1(c)+h^2(c)+2\epsilon}$$

$$H(c) = \frac{h^2(c)+\epsilon}{h^1(c)+h^2(c)+2\epsilon}$$

y mostrar la imagen resultante (en rojo y azul).

Nota: Las $h^j(c)$ no depende de parámetros, es simplemente una tabla en 3D.