OPTIMIZATION. HOMEWORK 9

OSCAR DALMAU

(1) Las matrices de **correccion de rango 1** se escriben

$$\mathbf{B}_{k+1}^{RS1} = \mathbf{B}_k + \frac{(\boldsymbol{y}_k - \mathbf{B}_k\, \boldsymbol{s}_k)(\boldsymbol{y}_k - \mathbf{B}_k\, \boldsymbol{s}_k)^T}{(\boldsymbol{y}_k - \mathbf{B}_k\, \boldsymbol{s}_k)^T\, \boldsymbol{s}_k} \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_{k+1}^{RS1} = \mathbf{H}_k + \frac{(\boldsymbol{s}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{y}_k)(\boldsymbol{s}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{y}_k)^T}{\boldsymbol{y}_k^T(\boldsymbol{s}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{y}_k)} \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{g}_{k+1} - \boldsymbol{g}_k$ y $\boldsymbol{s}_k = \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}_k$.

(a) Derive la matrix $\mathbf{H}_{k+1}^{RS1}$ a partir $\mathbf{B}_{k+1}^{RS1}$ usando la formula de Sherman-Morrison.
(b) Si $\mathbf{H}_k$ es una matriz definida positiva y $\boldsymbol{y}_k^T(\boldsymbol{s}_k - \mathbf{H}_k \boldsymbol{y}_k) > 0$ muestra que $\mathbf{H}_{k+1}$ es definida positiva.

(2) Implemente los algoritmos cuasi Newton DFP y BFGS. Compare los dos algoritmos anteriones usando los Problemas 2 y 3 propocionados mas abajo. Considere en la comparacion de 30 corridas usando puntos iniciales seleccionados aleatoriamente y reporte el el promedio de: Numero de Iteraciones, norma del gradiente y tiempo de ejecucin. Los criterios de paro a utilizar serán: Número máximo de iteraciones K, tol_x (para el criterio $\frac{||x_{k+1}-x_k||}{\max\{1, ||x_k||\}} < tol_x$), tol_f (para el criterio $\frac{|f(x_{k+1})-f(x_k)|}{\max\{1, |f(x_k)|\}} < tol_f$), y tol_g (para el criterio $||\nabla f(x_k)|| < tol_g$).

Problema 2 (Rosembrock, n = 100): Extended Rosembrock function, for $n = 100$

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2\right] \\ \boldsymbol{x}^* &= [1, 1, \cdots, 1, 1]^T \\ f(\boldsymbol{x}^*) &= 0 \end{aligned}$$

Problema 3 (Wood Function):

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}) &= 100(x_1^2 - x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + 90(x_3^2 - x_4)^2 \\
&\quad +10.1[(x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2] + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1) \\
\boldsymbol{x}^* &= [1, 1, 1, 1]^T \\
f(\boldsymbol{x}^*) &= 0
\end{aligned}
$$