Tarea 8. Optimización, Introducción al Cálculo Variacional

Oscar Esaú Peralta Rosales
Maestría en Computación
Centro de Investigación en Matemáticas

1. Usa la ecuación de Euler-Lagrange para buscar los extremos de las siguientes funcionales

$$J[y] = \int_a^b \big(xy\prime + (y\prime)^2\big)dx \tag{1}$$

$$J[y] = \int_a^b (1+x)(y\prime)^2 dx \tag{2}$$

Solución

La ecuación de Euler-Lagrange está dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y\prime}\Big) = 0$$

Para la función (1) tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y\prime} = x + 2y\prime$ y $\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y\prime}\Big) = 1 + 2y\prime\prime$.

Usando la ecuación de Euler-Lagrange tenemos: $1 + 2y\prime\prime = 0$ y por tanto $y\prime\prime = -\frac{1}{2}$.

ntegrando ambos miembros:

$$\int \frac{dy\prime}{dx}dx = -\frac{1}{2}\int dx$$

$$\int dy\prime = -\frac{1}{2}\int dx$$

$$y\prime = -\frac{1}{2}x + c_1$$

Finalmente, integrando nuevamente:

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int (-\frac{1}{2}x + c_1)dx$$

$$\int dy = \int (-\frac{1}{2}x + c_1)dx$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + c_1 x + c_2$$

Para la función (2) tenemos que: $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y\prime} = 2(1+x)y\prime$ y $\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\partial y\prime}\Big) = 2y\prime + 2(1+x)y\prime\prime$.

Usando la ecuación de Euler-Lagrange tenemos: $2y\prime + 2(1+x)y\prime\prime = 0$ y por tanto $\frac{y\prime\prime}{y\prime} = -\frac{1}{1+x}$.

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{1}{y\prime}\frac{dy\prime}{dx}dx = -\int \frac{1}{1+x}dx$$

$$\int \frac{1}{y\prime}dy\prime = -\int \frac{1}{1+x}dx$$

$$ln(y\prime) = ln(\frac{1}{1+x}) + c_1$$

Aplicando la exponencial: $y\prime = \frac{1}{1+x}e^{c_1}$, hacemos $e^{c_1} = c2$ e integrando nuevamente:

$$\int \frac{dy}{dx}dx = c_2 \int \frac{1}{1+x}dx$$

$$y = c_2 ln(1+x) + c_3$$

2. Derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange usando el método de Lagrange de

$$\int_x \int_y F(x, y, f, f_x, f_y)dxdy \tag{3}$$

$$\int_x \int_y F(x, y, u, v, u_x, v_x, u_y, v_y)dxdy \tag{4}$$

donde $f, u, v : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ y $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ y $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$.

Solución

Para la función (3) introducimos la variación $W(x, y) = f(x, y) + \epsilon\eta(x, y)$, con $\eta(x, y) = 0$ sobre todo $\mathcal{C}$ el cual es la curva límite del dominio de integración.

$$I(\epsilon) = \int_x \int_y F(x, y, W, W_x, W_y)dxdy$$

Diferenciamos con respecto a ϵ

$$I\prime(\epsilon) = \int_x \int_y \Big(\frac{\partial F}{\partial W}\frac{\partial W}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_x}\frac{\partial W_x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_y}\frac{\partial W_y}{\partial \epsilon}\Big)dxdy$$

usando $\frac{\partial W}{\partial \epsilon} = \eta$, $\frac{\partial W_x}{\partial \epsilon} = \eta_x$ y $\frac{\partial W_y}{\partial \epsilon} = \eta_y$

$$I\prime(\epsilon) = \int_x \int_y \Big(\frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial W_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y}\eta_y\Big)dxdy$$

evaluando en $\epsilon = 0$

$$I\prime(0) = \int_x \int_y \Big(\frac{\partial F}{\partial f}\eta + \frac{\partial F}{\partial f_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial f_y}\eta_y\Big)dxdy = 0$$

puesto que $f(x,y)$ es un extremo para $\epsilon = 0$. Usando el teoremoa de Green para reexpresar

los dos ultimos sumandos tenemos

$$\int_x \int_y \eta \Big[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_y}\Big)\Big] dxdy +$$

$$\int_C \eta \Big(\frac{\partial F}{\partial f_x} \frac{y}{ds} - \Big(\frac{\partial F}{\partial f_y} \frac{x}{ds} \Big) ds = 0$$

Como $\eta(x,y) = 0$ en todo $\mathcal{C}$ entonces

$$\int_x \int_y \eta \Big[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_y}\Big)\Big] dxdy = 0$$

Así la función extrema $f(x,y)$ debe cumplir que

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial f_y}\Big) = 0 \tag{5}$$

Para la función 4, proponemos dos variaciones con las mismas condiciones anteriores: $W(x,y) = u(x,y) + \epsilon_1 \eta(x,y)$ y $Z(x,y) = v(x,y) + \epsilon_2 \phi(x,y)$, así tenemos que:

$$I(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_x \int_y F(x, y, W, Z, W_x, Z_x, W_y, Z_y) dxdy$$

Derivamos con respecto a ϵ_1 y $epsilon_2$

$$I\prime(\epsilon) = \begin{bmatrix} \int_x \int_y \left(\frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial W_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y}\eta_y \right) dxdy \\ \int_x \int_y \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\eta + \frac{\partial F}{\partial Z_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial Z_y}\eta_y \right) dxdy \end{bmatrix}$$

Evaluando en $I\prime(0,0)$

$$\begin{bmatrix} \int_x \int_y \left(\frac{\partial F}{\partial W}\eta + \frac{\partial F}{\partial u_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial u_y}\eta_y \right) dxdy \\ \int_x \int_y \left(\frac{\partial F}{\partial Z}\eta + \frac{\partial F}{\partial v_x}\eta_x + \frac{\partial F}{\partial v_y}\eta_y \right) dxdy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Usando el teorema de Green llegamos a que:

$$\begin{bmatrix} \int_x \int_y \eta \Big(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\big) \Big) dxdy \\ \int_x \int_y \eta \Big(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial F}{\partial v_x}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial F}{\partial v_y}\big) \Big) dxdy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así la funciones extremas $u(x,y)$ y $v(x,y)$ debe cumplir que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial F}{\partial u_x}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial F}{\partial u_y}\big) \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\big(\frac{\partial F}{\partial v_x}\big) - \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial F}{\partial v_y}\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

3. Obtener la ecuaciones de Euler-Lagrange de:

$$\int_x \int_y ((f-g)^2 + \lambda ||\nabla f||^2) dxdy \tag{7}$$

$$\int_x \int_y ((p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(||\nabla u||^2 + ||\nabla v||^2)) dxdy \tag{8}$$

donde $f, u, v : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ y $g, p, q : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ son funciones dadas.

Solución

Notemos que podemos reexpresar la ecuación (7) a través del producto interior como

$$\int_x \int_y ((f-g)^2 + \lambda(f_x^2 - f_y^2)) dxdy$$

Usando (5) tenemos que $\frac{\partial F}{\partial f} = 2(f-g)$, $\frac{\partial F}{\partial f_x} = 2\lambda f_x$, $\frac{\partial F}{\partial f_y} = 2\lambda f_y$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial f_x} = 2\lambda f_{xx}$ $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial f_y} = 2\lambda f_{yy}$, así, obtenemos que debe cumplir con:

$$(f-g) - \lambda(f_{xx} + f_{yy}) = 0$$

Para la ecuación (8) tambien podemos reexpresarla usando producto interior como:

$$\int_x \int_y ((p - q - p_x u - q_x v)^2 + \lambda(u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2)) dxdy$$

Usando (7) tenemos que $\frac{\partial F}{\partial v} = -2q_x(p - q - p_x u - q_x v)$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v_x} = 2\lambda v_{xx}$ $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial v_y} = 2\lambda v_{yy}$, así, obtenemos que debe cumplir con:

$$q_x(p - q - p_x u - q_x v) + \lambda(v_{xx} + v_{yy}) = 0$$

por otro lado $\frac{\partial F}{\partial u} = -2p_x(p - q - p_x u - q_x v)$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x} = 2\lambda u_{xx}$ $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u_y} = 2\lambda u_{yy}$, así, obtenemos que también debe cumplir con:

$$p_x(p - q - p_x u - q_x v) + \lambda(u_{xx} + u_{yy}) = 0$$