



TRABAJO FIN DE GRADO

# Teoría de nudos

Realizado por  
**Ramon Rebull Camarasa**

Para la obtención del título de  
**Grado de Matemáticas**

Dirigido por  
**Antonio Félix Costa González**

Convocatoria de Junio, curso 2021/22

---

# Agradecimientos

---

A mis padres, por haber puesto siempre provocaciones a mi alcance para estimular mi interés por las matemáticas.

A Antonio, por la guía, las correcciones y por haber orientado este trabajo a un rigor que en un principio no tenía. Y por su paciencia.

A Inma, por su apoyo y por simular interés en mis largas explicaciones.

A Martí, por los consejos en la redacción y por su valiosa ayuda en la corrección del abstract.

Y, por supuesto, a David. Por compartir mi pasión por la teoría de nudos. Por escucharme, por discutirme, por corregirme y por sus ideas. Tanto las que he aplicado como las que no.

---

# Resumen

---

La teoría de nudos es el área de la topología que estudia el objeto matemático que abstrae nuestra concepción cotidiana de nudo [2]. Este trabajo explora los fundamentos de esta teoría y obtiene algunos resultados que nos permitirán llegar a conclusiones interesantes sobre algunos nudos concretos.

Empezamos definiendo nudo como estructura topológica y concretando qué significa que dos nudos sean equivalentes. Es posible dotar al nudo de una orientación y definir sobre él algunas operaciones, como la suma conexa o la factorización.

Si proyectamos un nudo sobre el plano teniendo en cuenta algunas precauciones para prevenir la pérdida de información, obtenemos un diagrama. En el trabajo demostramos que para todo nudo es posible encontrar un diagrama que lo represente. Sin embargo, hay muchos posibles diagramas distintos de un mismo nudo, cosa que dificulta el estudio a partir de esta forma de representación. Por ello es conveniente identificar invariantes que se puedan extraer de un diagrama y que sean comunes a todos los diagramas del mismo nudo.

La existencia de estos invariantes puede verificarse gracias al teorema de Reidemeister. Este teorema expone que dos diagramas cualesquiera del mismo nudo pueden transformarse entre sí mediante un número finito de modificaciones locales, que denominamos movimientos de Reidemeister.

Como aplicación práctica de los resultados anteriores, analizamos algunos casos de invariantes concretos: número de desanudamiento, 3-colorabilidad y número de 3-coloraciones. Demostramos que son invariantes y estudiamos su valor para diversos nudos. Finalmente, observamos que los resultados obtenidos nos permiten concluir la no equivalencia de los nudos estudiados.

---

# Abstract

---

Knot theory is the area of topology which studies the mathematical object that abstracts our daily conception of knot. This degree dissertation explores the fundamentals of this theory and obtains some results that will allow us to reach interesting conclusions concerning a few specific knots.

We start by defining knot as a topological structure and describing what it means for two knots to be equivalent. It is possible to provide an orientation for a knot and define some operations on it, such as connected sum or factorization.

By projecting a knot on a plane – with certain restrictions to prevent the loss of information – we obtain a diagram. In this degree thesis we demonstrate that for every knot there is a representative diagram. Nonetheless, there are many possible diagrams of the same knot, which makes it difficult to study knots using this representation. Therefore, it is essential to identify invariants that can be extracted from a diagram and that are common to all diagrams of the same knot.

Reidemeister's theorem enables us to verify the existence of these invariants. This theorem states that any two diagrams of the same knot can be transformed into each other by a finite number of local modifications, known as Reidemeister moves.

To put the previous results into practice, we analyse a few cases of specific invariants: unknotting number, 3-colorability and number of 3-colorations. We prove they are invariants and study their value for different knots. Finally, we conclude the non-equivalence of the studied knots based on these values.

---

# Índice general

---

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Historia . . . . .	1
1.2. Contenido . . . . .	3
<b>2. Conceptos</b>	<b>5</b>
2.1. Nudo . . . . .	5
2.2. Equivalencia . . . . .	7
2.3. Diagrama . . . . .	9
2.4. Suma conexas . . . . .	13
2.5. Factorización . . . . .	15
<b>3. Estudio de equivalencia</b>	<b>17</b>
3.1. Movimientos de Reidemeister . . . . .	17
3.2. Invariantes . . . . .	27
3.2.1. Número de desanudamiento . . . . .	28
3.2.2. 3-colorabilidad . . . . .	31
3.2.3. Número de 3-coloraciones . . . . .	34
3.2.4. Comparativa de resultados . . . . .	37
<b>4. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Bibliografía</b>	<b>41</b>

---

# 1. Introducción

---

## 1.1. Historia

Desde el inicio de la civilización, la humanidad ha tenido siempre interés en los nudos. Su utilidad principal ha sido tradicionalmente la de atar objetos, pero también hay usos documentados para el recuento de información, o con objetivos artísticos u ornamentales.

El conocimiento de los distintos tipos de nudos se ha ido profundizando a lo largo de la historia. Sin embargo, el interés en su estudio como estructura matemática es mucho más reciente, esencialmente vinculado al desarrollo de la topología.

En la segunda mitad del siglo XVIII, Vandermonde anticipó algunas ideas de la teoría de nudos mientras estudiaba los entramados de cuerdas e hilos con un enfoque cercano a la topología. En sus estudios planteó que la aproximación a este tipo de estructuras debía hacerse sin tener en cuenta medidas ni distancias, sino solo estudiando la posición y el modo en que los hilos se entrelazan. [1]

En 1833, Gauss demostró que el número de entrelazados (que hoy conocemos como número de enlace) puede calcularse mediante una integral. Posteriormente inició el estudio de los nudos conjuntamente con Listing, alumno y doctorando suyo, quien fue el artífice de la palabra topología para referirse a la nueva geometría de posición.

Las iniciativas anteriores fueron aisladas y no despertaron demasiado interés en la comunidad matemática de la época. Hasta que en 1867 William Thomson (que más adelante obtuvo el título de Lord Kelvin) y Peter G. Tait iniciaron el desarrollo de la teoría de nudos a partir de una idea proveniente de la física. Kelvin propuso la hipótesis según la cual los átomos eran nudos formados por pequeñas corrientes de éter (páginas 78-85 de [19]). Algunas características de los nudos reforzaban esta idea: la estabilidad de la materia y la diversidad de elementos parecían ser explicadas por la naturaleza topológica de los nudos y su variedad de tipos. Incluso estudió las oscilaciones vibracionales de los vórtices tubulares para explicar las líneas espectrales de los átomos (página 5 de [9]).

Creando que estaba elaborando una tabla de los elementos, Tait dedicó años a

estudiar los distintos tipos de nudos. Este trabajo requería diferenciar qué nudos eran equivalentes y cuáles no, y con este objetivo empezó a desarrollar algunas técnicas que le facilitaran esta catalogación y aventuró algunas hipótesis que hoy se conocen como las conjeturas de Tait (minuto 25 de [21]). Su trabajo fue completado por otros científicos de la época, especialmente por C. N. Little, que completó el catálogo de nudos de hasta diez cruces. Cuando finalmente se descartó la idea de Kelvin, la teoría de nudos perdió interés para los físicos y su estudio quedó restringido al ámbito de la matemática teórica.

El auge de la topología durante el siglo XX dio un nuevo impulso al desarrollo de la teoría de nudos. En 1927 Reidemeister demostró su teorema, que define las bases para el estudio de la equivalencia de nudos mediante proyecciones en el plano y en 1932 publicó el primer libro sobre teoría de nudos, *Knotentheorie* [15].

Otras contribuciones importantes de la primera mitad del siglo XX fueron debidas a topólogos como Max Dehn (que incorporó el concepto de la homotopía, estudió los nudos desde el punto de vista del grupo fundamental del exterior de un nudo y usó estas técnicas para demostrar que el trébol derecho y el izquierdo son nudos distintos) o J.W.Alexander (que desarrolló el invariante polinómico que lleva su nombre).

En la segunda mitad de siglo, diversos matemáticos contribuyeron a alcanzar la madurez de esta disciplina. Hubo importantes esfuerzos en el desarrollo de nuevos invariantes, como los descubiertos por Vaughan Jones (polinomio de Jones) y por Louis Kauffman (polinomio de corchete de Kauffman).

Adicionalmente, John H. Conway incorporó una nueva notación que le permitió profundizar en el estudio de nudos de hasta trece cruces y así completar su tabulación. En este estudio identificó un nudo resultante de una mutación de otro nudo conocido y del que no pudo discernir si era o no slice (un nudo es slice si es el borde de un disco en  $S^4$ ) [12]. Esta cuestión es conocida como el problema del nudo de Conway, y quedó pendiente para siguientes generaciones de matemáticos.

Adicionalmente a la obtención de nuevos resultados, el desarrollo de la teoría de nudos ha conllevado la revisión de conclusiones previas. Por ejemplo, en 1973 Ken Perko se percató, a partir del estudio del número de enlace, que dos nudos que Little había identificado en su catálogo como diferentes eran en realidad el mismo nudo (hoy conocido como par de Perko). Este resultado, que a pesar de ser publicado inicialmente pasó desapercibido, fue corroborado años más tarde con el descubrimiento de los

invariantes de Jones y de HOMFLY [11].

Actualmente, la teoría de nudos ha vuelto a cobrar interés práctico debido a sus aplicaciones en áreas tan diversas como la dinámica de fluidos, la física solar, la investigación del ADN o la computación cuántica (página 85 de [19]). Como curiosidad, otra de las aplicaciones en estudio en el área de la química orgánica es la síntesis de nuevas moléculas a partir de la modificación topológica de su composición. La idea consiste en que al “anudar” un isómero podrían modificarse sus propiedades como material. Lo curioso del caso es que, si esta técnica progresase, podría volver a tener sentido un planteamiento que recuerda al que defendió Lord Kelvin en el siglo XIX, sólo que a nivel molecular en vez de atómico (minuto 6 de [20]).

Un ejemplo del constante progreso e interés que actualmente suscita esta rama de la topología fue la reciente resolución del problema del nudo de Conway por parte de la estudiante de doctorado Lisa Piccirillo en 2018. Este descubrimiento fue destacado por la prensa generalista y trascendió más allá del ámbito académico (minutos 28-43 de [20]).

Uno de los principales desafíos vigentes en el estudio de la teoría de nudos es el de desarrollar un sistema de invariantes que permita resolver computacionalmente el problema de la clasificación de nudos de forma eficiente.

## 1.2. Contenido

Este trabajo estudia los cimientos de la teoría de nudos. Empieza por las definiciones topológicas más básicas y, a partir de éstas, va construyendo los conceptos y propiedades en los que se fundamenta esta teoría. Más que llegar a resultados muy avanzados, la prioridad del trabajo ha sido la de construir una base teórica sólida, definir de forma rigurosa cada concepto, y avanzar en los primeros pasos de la teoría sin dejar cabos sueltos ni pasos por justificar.

Tras la introducción histórica, las primeras secciones del trabajo están dedicadas a definir qué es un nudo, las complejidades que encierra esta definición y qué significa que dos nudos son equivalentes. Se introduce también el concepto de nudo orientado, que será usado más adelante.

Posteriormente se enuncia y demuestra un resultado importante para el desarrollo



posterior del trabajo (Proposición 1): existe una isotopía ambiente entre dos nudos si y sólo si hay un homeomorfismo que preserve la orientación y que transforme uno en el otro (además del ambiente que rodea uno en el que rodea al otro). Esto facilitará el análisis de la equivalencia de nudos mediante homeomorfismos, en vez de tener que recurrir a la isotopía ambiente a la que refiere la definición de nudo.

En las secciones siguientes se introducen los conceptos de proyección regular y de diagrama, y en la Proposición 2 se justifica que todo nudo admite una proyección regular. La gran utilidad de estos conceptos es que permiten estudiar el nudo como estructura en un plano, mucho más fácil de analizar que en el espacio.

A partir del concepto de diagrama y de la definición anterior de nudo orientado se define la suma conexas y se demuestra que es una operación bien definida. De forma análoga al producto en los números naturales, esta operación induce ideas como la factorización de nudos o la clasificación entre nudos simples y nudos compuestos. Todo este desarrollo es posible gracias al hecho de que la factorización de nudos es única, resultado que también se expone en esa sección.

El objetivo central de este trabajo es el enunciado y demostración del teorema de Reidemeister. En la sección 3.1 se definen los movimientos de Reidemeister y se demuestra que dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas se pueden transformar entre sí mediante una secuencia finita de estos movimientos. Este resultado permite demostrar que dos nudos son iguales mediante operaciones locales en un diagrama, pero su principal utilidad es como fundamento de resultados posteriores en la teoría de nudos, por ejemplo la demostración de existencia de diversos invariantes de nudos.

Finalmente, definimos el concepto de invariante de nudos y estudiamos tres de ellos: el número de desanudamiento, la 3-colorabilidad y el número de 3-coloraciones. Demostramos que son invariantes, estudiamos algunas de sus propiedades y calculamos su valor para diversos nudos. Los resultados de estos cálculos nos permitirán concluir que los nudos estudiados son efectivamente nudos distintos.

---

## 2. Conceptos

---

### 2.1. Nudo

En primer lugar, definimos algunos conceptos topológicos: (páginas 1-2 de [3])

**Definición 1.** Sean  $X, Y$  espacios de Hausdorff, una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es un **encaje** si  $f : X \rightarrow f(X)$  es un homeomorfismo.

**Definición 2.** Dos encajes  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  son **isotópicos** si existe un encaje  $F : X \times I \rightarrow Y \times I$  tal que  $F(x, t) = (f(x, t), t)$ ,  $x \in X$ ,  $t \in I = [0, 1]$ ,  $f(x, 0) = f_0(x)$ ,  $f(x, 1) = f_1(x)$ .

La aplicación  $F$  anterior se denomina **isotopía** entre  $f_0$  y  $f_1$ .

**Definición 3.** Sean dos encajes  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ , denominamos **isotopía ambiente** a una isotopía  $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$  tal que  $H(y, t) = (h_t(y), t)$ , con  $y \in Y, t \in I$ , y tal que  $f_1 = h_1 f_0$ ,  $h_0 = id_Y$ .

La isotopía ambiente define una deformación progresiva del conjunto destino completo  $Y$  de tal forma que acabe transformando  $f_0$  en  $f_1$ . A diferencia del concepto de isotopía, actúa de forma global en la totalidad del espacio topológico, no solo en los encajes estudiados.

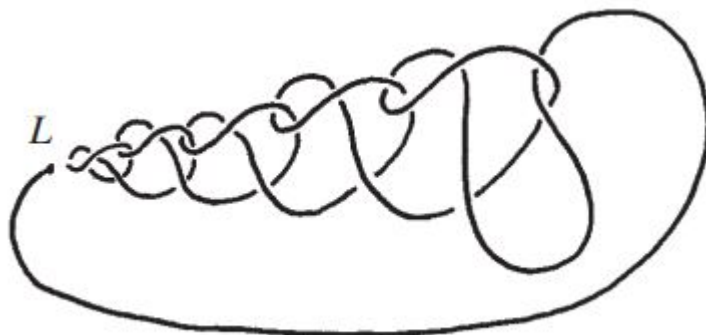
Este concepto es fundamental en la siguiente definición de nudo.

**Definición 4.** Un **nudo** es una clase de equivalencia de encajes de la 1-esfera  $S^1$  en  $S^3$ . Esta clase está dada por la equivalencia isotópica de funciones.[2]

Es decir, consideramos dos encajes equivalentes si existe una isotopía ambiente entre ambos.

Esta definición restringe la concepción de nudo a las dimensiones en las que estamos acostumbrados a percibirlo. Es posible ampliar este concepto a dimensiones superiores, definiéndolo como clase de equivalencia de encajes de  $S^m$  en  $S^n$  (siendo  $m < n$ ) o, de forma más general, de cualquier subvariedad embebida dentro de una variedad diferencial. No obstante, en lo sucesivo nos restringiremos al estudio del encaje de  $S^1$  en  $S^3$ .

La definición anterior, aunque topológicamente es consistente, engloba también ciertos nudos con características un tanto especiales. Un ejemplo sería el de la siguiente figura (página 3 de [3]), que contiene infinitos anudamientos que convergen a un punto límite. Este tipo de nudos se denomina **nudos salvajes**.



Su peculiaridad es que, a pesar de que intuitivamente observamos que podríamos ir desanudando uno a uno cada lazo del nudo, R.H. Fox demostró en 1948 que el complemento de esta estructura es distinto al del nudo trivial. Esto resulta un inconveniente cuando intentamos catalogar los nudos mediante determinados invariantes, así que conviene restringir el concepto de nudo a estructuras que no tengan estas dificultades.

**Definición 5.** Un **nudo manso** es un encaje  $K : S^1 \rightarrow S^3$  tal que existe una isotopía ambiente entre éste y una línea poligonal (cerrada y localmente finita)  $K' : S^1 \rightarrow S^3$ . (página 3 de [3])

Denominamos al encaje  $K'$  anterior **nudo poligonal**.

A lo largo de este trabajo, cuando nos refiramos a un nudo daremos por supuesto que se trata de un nudo manso. También haremos uso de la isotopía ambiente descrita en la definición anterior para restringir el estudio de algunas deformaciones y proyecciones a los nudos poligonales.

Finalmente, definimos el concepto de nudo orientado, que requeriremos más adelante:

**Definición 6.** *Un **nudo poligonal orientado** es un nudo poligonal  $K'$  dotado de una ordenación en sus vértices. La ordenación debe ser tal que cada par de vértices consecutivos (también el primero y el último) estén unidos por una arista. Dos ordenaciones definen el mismo nudo poligonal orientado si una es permutación cíclica de la otra (página 3 de [7]).*

*Un **nudo orientado** es un nudo  $K$  dotado de una relación de orden en sus puntos tal que existe una isotopía ambiente entre un nudo poligonal  $K'$  y  $K$ . Esta isotopía ambiente preserva la ordenación de los vértices de  $K'$  al ser transformados en puntos de  $K$ . Además, la relación de orden definida es tal que cualquier isotopía ambiente entre  $K'$  y  $K$  sigue preservando la ordenación de los vértices de  $K'$ .*

## 2.2. Equivalencia

El concepto de equivalencia de nudos es consecuencia directa de la relación de equivalencia descrita en la Definición 4.

**Definición 7.** *Dos nudos poligonales  $K, K'$  son **equivalentes** si existe una isotopía ambiente entre ambos.*

Si somos capaces de construir una isotopía ambiente entre dos nudos, podemos concluir que son equivalentes. Sin embargo, una isotopía ambiente involucra una transformación progresiva de todo el espacio topológico, proceso laborioso y poco práctico como instrumento de estudio de nudos.

La siguiente proposición nos da una herramienta más fácil de aplicar para estudiar la equivalencia: el homeomorfismo.

**Proposición 1.** *(página 6 de [3]) Sean  $K, K' \subset S^3$  nudos poligonales, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un homeomorfismo  $f : S^3 \rightarrow S^3$  que preserva la orientación y que transforma  $K$  en  $K'$ ,  $f(K) = K'$

(ii) Existe una isotopía ambiente entre  $K$  y  $K'$ .

### **Demostración:**

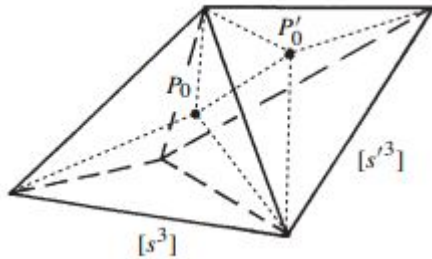
Basada en la demostración elaborada por Burde y Zieschang (páginas 5-7 de [3])

(i)  $\implies$  (ii)

Para ello, veamos en primer lugar que se puede definir una isotopía ambiente  $H(x, t) = (h_t(x), t)$  tal que  $h_1 f$  mantiene invariante un símplice  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$ .

Definimos un 3-símplice  $[s^3] \in S^3$  que contenga  $P_0$  y no contenga los puntos  $P_1, P_2, P_3$  ni sus imágenes  $f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ . Podemos definir una isotopía ambiente que deje invariante  $S^3 - [s^3]$  y que transforme  $P_0$  en cualquier otro punto interior de  $[s^3]$ .

Sea  $[s'^3]$  cualquier otro 3-símplice que tenga una cara en común con  $[s^3]$  como el de la siguiente figura (página 7 de [3]), también podemos construir una isotopía ambiente que transforme  $P_0$  en cualquier punto  $P'_0$  interior de  $[s'^3]$  y que deje invariante  $S^3 - [s^3] \cup [s'^3]$ .



Como cualquier par de símplices se puede conectar con una cadena de símplices que compartan una cara entre ellos, podemos definir una isotopía ambiente que transforme  $f(P_0)$  en  $P_0$  y que deje invariantes el resto de puntos  $P_1, P_2, P_3$  y sus imágenes por el homeomorfismo. Denominamos  $H^0$  a esta isotopía ambiente tal que  $h_1^0 f(P_0) = P_0$ .

Siguiendo el mismo procedimiento, tomamos el punto  $P_1$  y generamos una isotopía ambiente  $H^1$  que transforma  $f(P_1)$  en  $P_1$  mediante una cadena de símplices que no contenga  $P_0, P_2, P_3, f(P_0), f(P_2)$  ni  $f(P_3)$ , y que deje invariante el espacio exterior a esta cadena. Observamos que  $h_1^1 h_1^0 f$  deja invariante el 1-símplice  $[P_0, P_1]$ . Y seguimos

con el punto  $P_2$ , construyendo una isotopía ambiente  $H^2$  tal que  $h_1^2 h_1^1 h_1^0 f$  deja fijo el 2-símplice  $[P_0, P_1, P_2]$ .

A continuación, como  $f$  preserva la orientación,  $f(P_3)$  se encontrará en el mismo semiespacio respecto a  $[f(P_0), f(P_1), f(P_2)]$  que  $P_3$  respecto a  $[P_0, P_1, P_2]$ . Así pues, siguiendo el mismo mecanismo que para  $P_0, P_1, P_2$ , es posible construir una isotopía ambiente  $H^3$  tal que  $h_1^3 h_1^2 h_1^1 h_1^0 f$  permanezca invariante. Así que la isotopía ambiente planteada al inicio de la demostración es  $H = H^3 H^2 H^1 H^0$ .

Por otro lado, la generalización del teorema de Alexander-Schoenflies [14] postula que si  $\phi : S^{n-1} \rightarrow S^n, n \geq 2$  es un encaje y  $A$  es la clausura de  $S^n - \phi(S^{n-1})$ , entonces si  $A$  es una variedad, ésta es homeomorfa a  $D^n$ . Para  $n = 3$ , aplicado a nuestro caso determina que el complemento de  $[P_0, P_1, P_2, P_3]$  es homeomorfo a un 3-símplice.

Finalmente, la proposición Alexander-Tietze (página 6 de [3]) afirma que todo homeomorfismo  $f$  de una  $n$ -bola  $B$  que mantenga la frontera invariante es isotópico a la identidad mediante una isotopía ambiente que también mantiene la frontera invariante.

De lo anterior se concluye que existe una isotopía ambiente entre  $K$  y  $K'$ .

(ii)  $\implies$  (i)

Por hipótesis existe una isotopía ambiente  $H$  entre  $K$  y  $K'$ ,  $H : Y \times I \rightarrow Y \times I$ , con  $H(y, t) = (h_t(y), t)$ , tal que  $K' = h_1 K$  y  $h_0 = id_Y$ .

Así pues,  $h_1$  actúa como la identidad en el último grupo de homología, de lo que concluimos que preserva la orientación.

■

## 2.3. Diagrama

Un problema de gran importancia en la teoría de nudos es el de determinar si dos nudos dados son equivalentes. Una primera dificultad en este estudio es la modelización del nudo con técnicas que nos permitan mecanizar su análisis. No resulta evidente ver cómo analizar la disposición del nudo como estructura en un espacio tridimensional, así que es inevitable plantearse la posibilidad de proyectar el nudo en un plano.

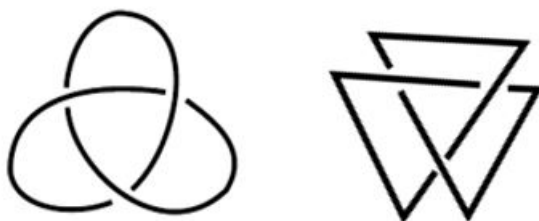
Sin embargo, es necesario tener en cuenta algunas precauciones para evitar que en la proyección se pierda información del nudo original:

**Definición 8.** Sea  $K$  un nudo poligonal, decimos que una proyección sobre un plano  $\pi(K)$  es una **proyección regular** si:

1.  $\pi$  es inyectiva excepto en un número finito de puntos (que denominamos puntos de cruce).
2. Ningún punto de cruce contiene como preimagen un vértice de  $K$ .
3. La preimagen de los puntos de cruce tiene cardinal 2.

Las proyecciones regulares suelen representarse en forma de **diagramas**, de manera que en cada punto de cruce se distinga cuál es la arista que pasa por debajo respecto al plano de proyección y cuál por encima (ésta última se representa discontinuada en el punto de cruce).

En la siguiente imagen (página 17 de [16]) hay un ejemplo del diagrama de un nudo trébol derecho y de un nudo poligonal equivalente:



Al inicio de esta sección planteábamos la necesidad de disponer de una representación bidimensional del nudo para facilitar su estudio. El diagrama cumple este objetivo, tal como comprobaremos cuando estudiemos en los próximos apartados las diversas técnicas que le son aplicables.

No obstante, para ello antes es necesario asegurar su existencia.

**Proposición 2.** *Todo nudo admite alguna proyección regular.*

**Demostración:**

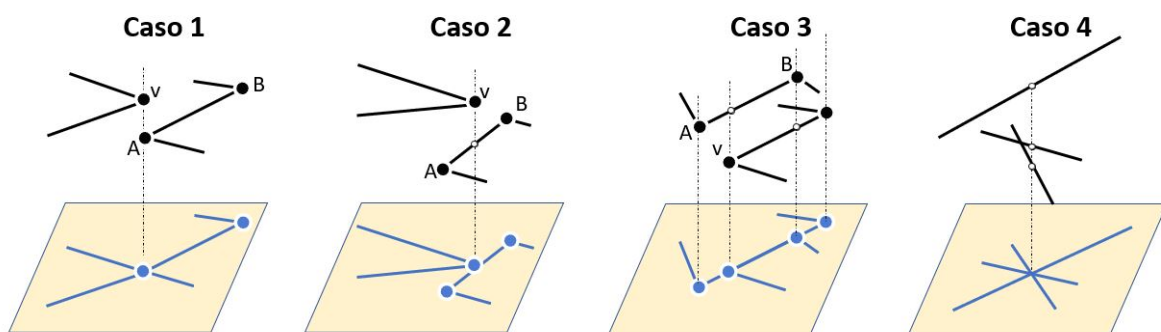
Basada en la demostración elaborada por Crowell y Fox (página 7 de [6]).

La demostración tiene idea de estudiar, para un nudo poligonal  $K$  fijo, cómo es la proyección sobre cada una de las posibles rotaciones del plano.

Tomamos una bola  $B^3$  que contenga el nudo en su interior. Sea  $S^2 = \delta B^3$ , observamos que a cada haz de planos paralelos le podemos hacer corresponder un punto de  $S^2$  (tomamos el mayor de los dos puntos de tangencia entre estos planos y  $S^2$  en orden lexicográfico). De igual forma, podemos relacionar cada conjunto de planos anterior con un haz de rectas paralelas que sean perpendiculares a éstos.

Así pues, si estudiamos una proyección de un nudo podemos hacer corresponder a la recta que actúa como haz de proyección con el punto de  $S^2$  asociado según el criterio anterior.

Estudiemos el conjunto de puntos  $P_s$  de  $S^2$  que se correspondan con planos sobre los que  $K$  tiene proyección no regular. Estos planos tendrán por lo menos una recta perpendicular que cumpla alguna de las situaciones del siguiente diagrama:



**Caso 1:** La recta pasa por al menos dos vértices de  $K$  (los vértices  $V$  y  $A$  en la imagen anterior).

**Caso 2:** La recta pasa por un vértice de  $K$  y un punto de una arista de  $K$  (el vértice  $V$  y un punto de la arista  $AB$  en la imagen anterior).

**Caso 3:** Hay por lo menos dos aristas de  $K$  cuyas proyecciones coinciden en más de un punto. En este caso, al menos uno de los vértices que delimitan estas aristas tiene una recta de proyección que pasa también por un punto de la otra arista. Por ejemplo, la recta de proyección del vértice  $V$  en la imagen anterior pasa por un punto de la arista  $AB$ .

**Caso 4:** La recta pasa por al menos tres puntos pertenecientes a tres aristas de  $K$ . Asumimos que las proyecciones de cada una de las aristas sobre el plano perpendi-



cular a la recta solo coinciden en un punto (si no fuera así consideraríamos el Caso 3), y que ninguna de las aristas está contenida en su recta de proyección (si no fuera así, la recta pasaría por los dos vértices que delimitan esta arista y podríamos considerar el Caso 1).

Teniendo en cuenta las restricciones anteriores, observamos que si tomamos un punto fijo cualquiera de una de las aristas hay solo una recta que pase por éste y que corte las otras dos.

Definimos el conjunto  $Q_{r1}$  de todas las rectas que unen un vértice con algún punto de una arista de  $K$ . Observamos que las rectas de los casos 1, 2 y 3 anteriores están contenidos en este conjunto (en cada caso de la imagen, la recta de proyección del vértice  $V$  cruza con algún punto de la arista  $AB$ , en el primer caso tenemos en cuenta que  $A \in AB$ ). A partir de éste definimos el conjunto  $Q_{s1}$  de puntos de  $S^2$  asociados a rectas de  $Q_{r1}$ . Como el nudo tiene un número finito de vértices y aristas,  $Q_{s1}$  será una colección finita de pedazos de circunferencias en  $S^2$ .

Por otro lado, definimos el conjunto  $Q_{r2}$  correspondiente a todas las rectas contempladas en el caso 4 y el conjunto  $Q_{s2}$  de puntos de  $S^2$  asociados a estas rectas. Como el número de aristas de  $K$  es finito y para cada punto de cada arista pasa una sola recta que corte las otras dos aristas, concluimos que  $Q_{s2}$  es una colección finita de curvas diferenciables en  $S^2$ .

Así pues, el conjunto  $Q_s = Q_{s1} \cup Q_{s2}$  también es una colección finita de curvas diferenciables, con lo que  $Q_s$  es un conjunto de medida 0 en  $S^2$ .

Por otro lado, observamos que  $Q_s$  contiene todos los puntos  $P_s$  de planos en los que  $K$  tiene proyección no regular. Así que  $P_s \subset Q_s$ , lo que implica que  $P_s$  es un conjunto de medida 0 en  $S^2$ .

Concluimos que  $S^2 \setminus P_s \neq \emptyset$ . Por lo tanto, para todo nudo  $K$  hay algún plano de proyección sobre el cual  $\pi(K)$  es regular.

■

El argumento anterior demuestra algo más que la existencia de proyecciones regulares. El hecho de que  $P_s$  sea un conjunto de medida 0 en  $S^2$  permite concluir que el conjunto de proyecciones regulares de un nudo es abierto y denso respecto al conjunto de todas sus posibles proyecciones.

Así pues, para cualquier proyección del nudo podemos obtener una proyección regular aplicando una rotación sobre el plano de proyección (o sobre el nudo) arbitrariamente pequeña.

## 2.4. Suma conexa

Basándonos en el concepto de suma conexa entre subespacios topológicos, definimos la siguiente operación.

**Definición 9.** (página 6 de [17]) *Dados dos nudos orientados  $K_1, K_2$  con proyecciones regulares  $\pi_1(K_1), \pi_2(K_2)$  tales que  $\pi_1(K_1) \cap \pi_2(K_2) = \emptyset$ . Sea  $D$  un disco tal que:*

1.  $D \cap \pi_1(K_1)$  y  $D \cap \pi_2(K_2)$  son dos arcos que no contienen puntos de cruce.
2.  $|\partial D \cap \pi_1(K_1)| = |\partial D \cap \pi_2(K_2)| = 2$

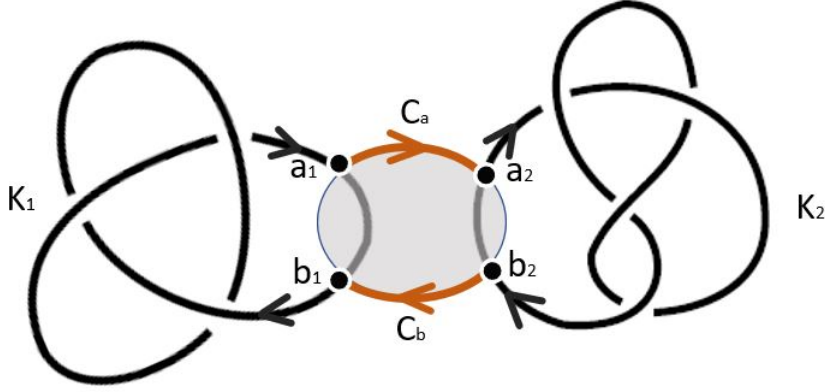
*Si es necesario, desplazaremos  $\pi_1(K_1)$  y  $\pi_2(K_2)$  mediante isotopía ambiente de forma que se cumplan las condiciones anteriores.*

*Denominamos los puntos  $a_1, b_1 \in \partial D \cap \pi_1(K_1)$  y  $a_2, b_2 \in \partial D \cap \pi_1(K_1)$ , de tal forma que:*

- $a_1$  es anterior a  $b_1$  siguiendo el arco  $\partial D \cap \pi_1(K_1)$  con la orientación de  $K_1$
- $b_2$  es anterior a  $a_2$  siguiendo el arco  $\partial D \cap \pi_2(K_2)$  con la orientación de  $K_2$
- Existe un arco  $C_a \subset \partial D$  con extremos en  $a_1, a_2$  que no contiene  $b_1$  ni  $b_2$
- Existe un arco  $C_b \subset \partial D$  con extremos en  $b_1, b_2$  que no contiene  $a_1$  ni  $a_2$

*Denominamos **suma conexa** de  $K_1$  y  $K_2$  ( $K_1 \# K_2$ ) a un nudo orientado que tenga el diagrama  $(\pi_1(K_1) \setminus D^\circ) \cup C_a \cup (\pi_2(K_2) \setminus D^\circ) \cup C_b$  y cuya orientación en  $\pi_1(K_1) \setminus D^\circ$  y  $\pi_2(K_2) \setminus D^\circ$  coincide con la de  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente.*

En la siguiente imagen se representan los elementos descritos en la definición:



Observamos que si no hubiéramos restringido esta operación a nudos orientados, no se trataría de una operación bien definida. Por ejemplo, si en el diagrama anterior el arco  $C_a$  hubiera conectado  $a_1$  y  $b_2$ , y  $C_b$  conectara a  $b_1$  y  $a_2$ , el nudo resultante podría ser no equivalente al previo.

La suma conexa nos permite generar nuevos nudos de mayor complejidad a partir de nudos básicos. En la siguiente proposición verificamos algunas propiedades importantes de esta operación.

**Proposición 3.** *La suma conexa dota al conjunto de nudos orientados de estructura de semigrupo.*

#### **Demostración:**

Tal como se detalla en las páginas 164-165 de [8], la suma conexa entre nudos orientados descrita en la definición anterior es única salvo equivalencia de nudos. En consecuencia, se trata de una operación bien definida y no depende del disco  $D$  elegido.

A continuación comprobamos que cumple las propiedades de un semigrupo:

1. Conmutativa: A partir de la definición anterior vemos que el diagrama de  $K_1 \# K_2$  es  $(\pi_1(K_1) \setminus D^\circ) \cup C_a \cup (\pi_2(K_2) \setminus D^\circ) \cup C_b = (\pi_2(K_2) \setminus D^\circ) \cup C_b \cup (\pi_1(K_1) \setminus D^\circ) \cup C_a$ , que es el diagrama de  $K_2 \# K_1$ , así que ambos nudos son equivalentes. También podríamos argumentarlo observando que si rotamos  $180^\circ$  el plano de proyección obtenemos el diagrama correspondiente a  $K_2 \# K_1$ , de lo que se deduce la conmutatividad de la operación.
2. Asociativa: También a partir de la definición y de la asociatividad de la unión de conjuntos, es inmediato que  $K_1 \# (K_2 \# K_3)$  y  $(K_1 \# K_2) \# K_3$  tienen el mismo

diagrama.

3. Elemento neutro: Denominamos nudo trivial ( $K_e$ ) al nudo que tiene algún diagrama sin puntos de cruce. Observamos que la suma directa de cualquier nudo con el nudo trivial genera el propio nudo:  $K_1 \# K_e = K_e \# K_1 = K_1$ . Así pues, el nudo trivial actúa como elemento neutro en la suma conexa.

■

En cambio, como demostraremos en el Corolario 1, no hay ningún nudo cuya suma conexa con el nudo trébol derecho genere el nudo trivial. Así pues, la suma conexa no satisface la condición del inverso, con lo que el conjunto de nudos con esta operación no forma una estructura de grupo.

## 2.5. Factorización

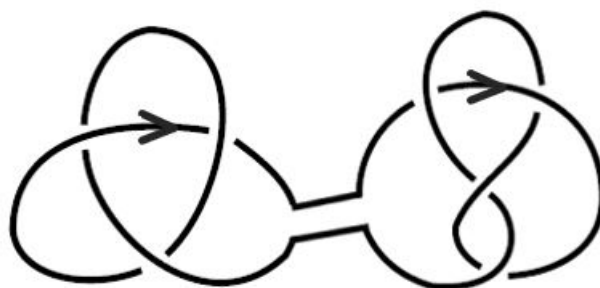
Exploramos cómo podemos aprovechar la suma conexa para el estudio de ciertos nudos.

**Definición 10.** Denominamos **nudo primo** a aquel que no puede expresarse como suma conexa de dos nudos orientados distintos al nudo trivial. Por lo contrario, los nudos que sí son resultado de la suma conexa de dos nudos orientados no triviales se denominan **nudos compuestos**.

A continuación, un ejemplo de un nudo simple y de uno compuesto:



Nudo primo



Nudo compuesto

Este concepto nos permite plantearnos si es posible simplificar el estudio de un

nudo en otros más simples. La idea sería explorar si es posible descomponer un nudo orientado en suma conexa de nudos primos. De esta forma, teniendo tabuladas las características de los nudos primos podríamos obtener información de estos nuevos nudos compuestos más complejos.

Pero previamente debemos verificar si la descomposición en nudos primos es única.

**Teorema 1.** *Todo nudo orientado puede descomponerse de forma única como suma conexa de nudos primos.*

Este teorema fue demostrado por Schubert, en 1949.

La demostración, que se basa en el estudio de superficies de Seifert (superficies diferenciales en  $S^3$  orientadas con borde, cuyo borde coincide con el nudo estudiado) y en el estudio del género de estas superficies, puede consultarse en la siguiente referencia de la bibliografía [10].

A pesar del resultado anterior, no se conoce un método satisfactorio de resolver la factorización de nudos desde el punto de vista de la complejidad (página 26 de [9]). Sí que se conocen métodos específicos para algunos tipos de nudos, como los nudos alternados (un diagrama es alternado si al recorrer el nudo en cualquier sentido se van alternando los cruces por encima y por debajo, y un nudo es alternado si tiene un diagrama alternado).

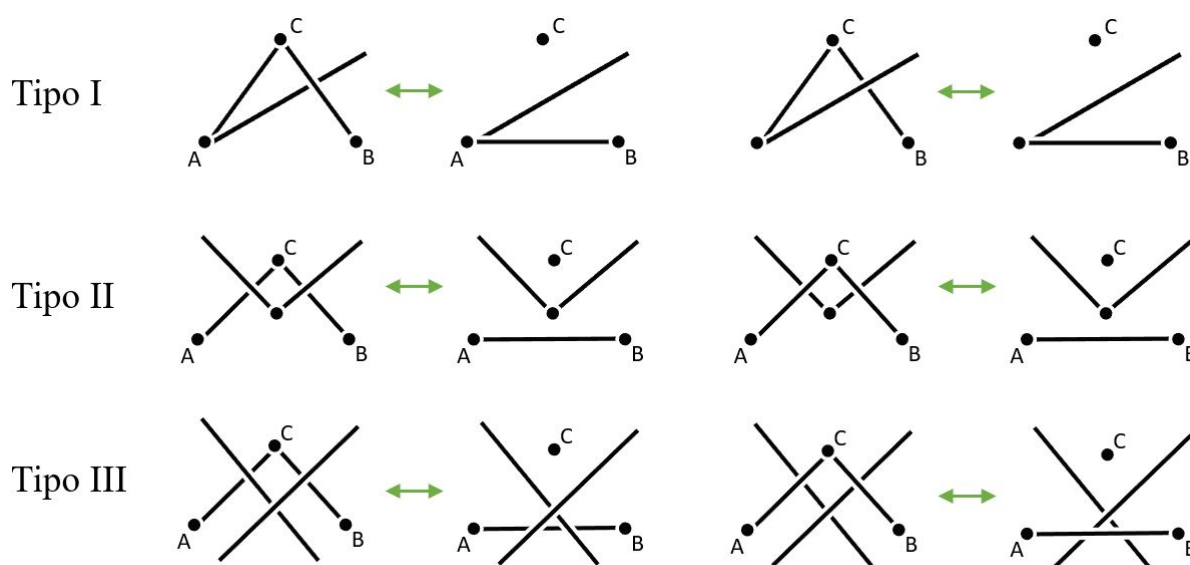
# 3. Estudio de equivalencia

En el capítulo anterior planteábamos la importancia de saber discernir si dos nudos dados son equivalentes. En algunos diagramas con pocos cruces es posible intuirlo a simple vista, pero la intuición no es una herramienta válida en matemáticas. Además, a medida que incrementa la complejidad de los diagramas va siendo más necesario disponer de algún procedimiento sistemático para este propósito.

## 3.1. Movimientos de Reidemeister

En 1920, Reidemeister ideó una técnica para estudiar las posibles transformaciones que permiten modificar un diagrama de tal forma que el nudo que representan permanezca invariable.

**Definición 11.** *Los movimientos de Reidemeister en un diagrama son las siguientes transformaciones:*



La gran utilidad de estos movimientos en el estudio de diagramas de nudos es consecuencia del siguiente teorema.

**Teorema 2.** (*Reidemeister, 1927 páginas 24-32 de [15]*): Dos nudos poligonales son equivalentes si y sólo si sus respectivos diagramas se pueden transformar uno en otro mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister.

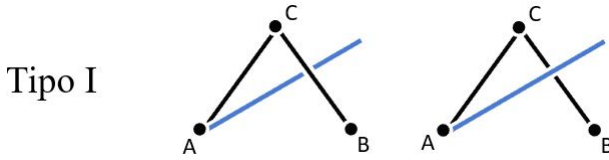
### Demostración:

**Condición suficiente** (páginas 9-14 de [13])

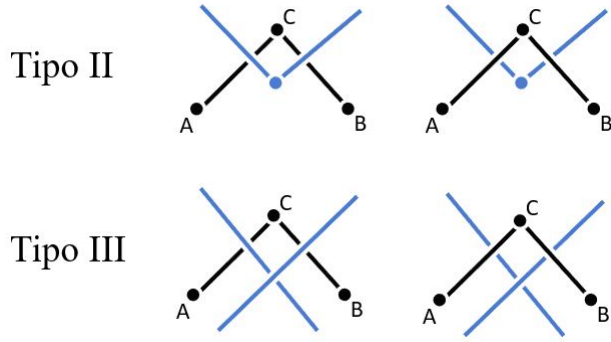
Sea  $\pi(K)$  un diagrama de un nudo  $K$ , a continuación verificaremos que si aplicamos sobre él un movimiento de Reidemeister el diagrama resultante sigue representando a un nudo equivalente a  $K$ .

Para ello estudiaremos cada tipo de movimiento de Reidemeister:

**Tipo I:** Si analizamos las dos posibles distribuciones de partida del diagrama para este tipo de movimiento, vemos que las aristas correspondientes al segmento marcado en azul son las únicas que podrían obstaculizar la aplicación de una isotopía planar para transformar  $AC \cup CB$  en  $AB$ . Pero observamos que en ninguno de los dos casos la arista podrá atravesar el interior del triángulo  $ABC$ , ya que comparte un vértice con el triángulo y no puede ser coplanar con él.



**Tipo II, III:** Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que el plano de proyección del diagrama es  $xy$ . En todos los diagramas representados en la imagen siguiente, las aristas y vértices marcados en azul sí podrían intersectar con el interior de  $ABC$ . Si así fuera, tomamos  $z_0$  el máximo valor de las coordenadas  $z$  de los puntos de estas aristas y  $z_1$  la mínima coordenada  $z$  de  $A, B, C$ . Si aplicamos una translación a  $ABC$  de  $z_0 - z_1$  en dirección del eje  $z$ , ya no habrá ningún elemento de  $K$  que intersecte con  $ABC^\circ$ . Seguidamente, igual que en el caso anterior, podemos aplicar una isotopía planar para transformar  $AC \cup CB$  en  $AB$ .



Así pues, queda demostrado que si al diagrama de un nudo le aplicamos un movimiento de Reidemeister, cualquier nudo correspondiente al nuevo diagrama es equivalente al nudo inicial.

### Condición necesaria

En primer lugar, definimos el concepto de  $\Delta$ -**movimiento** (página 4 de [3]): Si  $AB$  es una arista de un nudo poligonal  $K$  y  $ABC$  un triángulo tal que  $ABC \cap K = AB$ , entonces  $K' = (K \setminus AB) \cup BC \cup CA$  define otro nudo poligonal. Decimos que  $K'$  es el resultado de aplicar un  $\Delta$ -movimiento a  $K$  y que  $K$  es el resultado de aplicar un  $\Delta^{-1}$ -movimiento a  $K'$ .

Plantearemos la demostración de la condición necesaria en tres pasos:

**Paso 1:** Demostraremos que la transformación del diagrama de un nudo cuando se le aplica un  $\Delta$ -movimiento o  $\Delta^{-1}$ -movimiento puede generarse a partir de una secuencia finita de movimientos de Reidemeister.

**Paso 2:** Comprobaremos que dos proyecciones regulares del mismo nudo poligonal pueden transformarse entre ellas siguiendo los movimientos de Reidemeister.

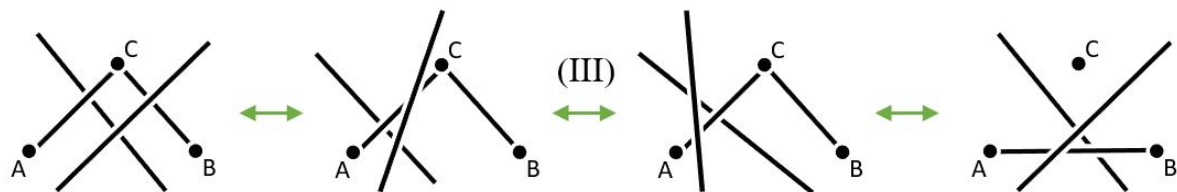
**Paso 3:** Finalmente, probaremos que dos proyecciones de nudos poligonales equivalentes también pueden transformarse mediante movimientos de Reidemeister.

### Paso 1

En primer lugar, observamos que en la definición de los movimientos de Reidemeister las aristas que cruzan  $ABC$  en el diagrama pueden hacerlo tanto por encima como por debajo. La única combinación no contemplada en el movimiento de tipo III es



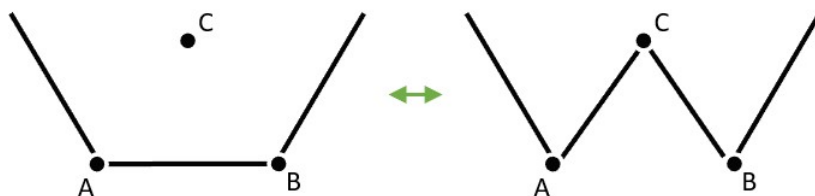
el caso en el que las aristas crucen una por encima y la otra por debajo. Sin embargo, este caso se puede obtener a partir de movimientos de Reidemeister de la siguiente forma:



Hay que tener en cuenta también que las aristas que cruzan  $ABC$  en el diagrama necesariamente lo harán íntegramente por delante o por detrás. No es posible que la arista cruce por delante un lado de  $ABC$  y por detrás otro lado, ya que en este caso el  $\Delta$ -movimiento requeriría atravesar la arista y podría no generar un nudo equivalente. Lo mismo sucederá con todo par de aristas que estén conectadas por un vértice ubicado en el interior del triángulo.

Teniendo en cuenta los comentarios anteriores, en esta demostración contemplaremos sólo los diagramas en los que las aristas crucen el triángulo  $ABC$  por detrás y omitiremos el estudio de los diagramas en que una o varias aristas crucen por delante.

Empezamos observando que al aplicar un  $\Delta$ -movimiento sobre un nudo se realiza una transformación sobre su diagrama como la de la siguiente figura:



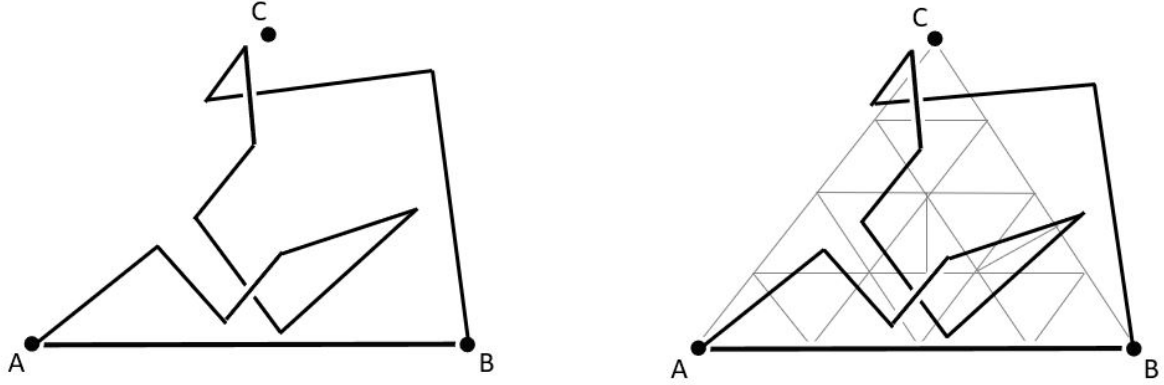
Supongamos que tras el  $\Delta$ -movimiento la proyección del nuevo nudo sigue siendo regular. En caso contrario, aplicaríamos una rotación sobre el plano de proyección suficientemente pequeña para que no cambie la disposición del resto de elementos del diagrama y que la nueva proyección pase a serlo.

Si no hubiera ningún elemento del diagrama en el interior de  $ABC$ , sería posible aplicar el  $\Delta$ -movimiento sin necesidad de aplicar ningún movimiento de Reidemeister.

Supongamos entonces que sí los hay. En este caso, podemos subdividir el triángulo  $ABC$  en tantos triángulos como sea necesario, de tal forma que cada triángulo elemental

$A'B'C'$  sólo contenga un vértice, un punto de cruce o sea cruzado por una sólo arista.

Representamos un ejemplo de subdivisión de triángulos en la siguiente imagen:



Como el número de vértices, aristas y puntos de cruce es finito, el número de triángulos elementales  $A'B'C'$  también lo será.

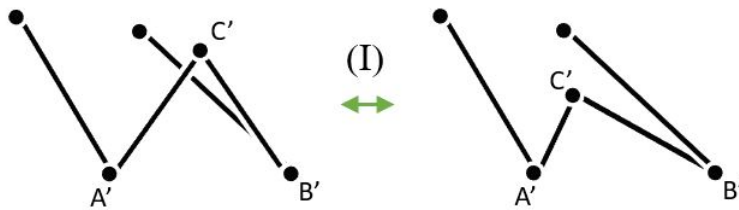
Analizamos cada una de las posibles situaciones:

1. Ninguna arista cruza  $A'B'C'$ .

En este caso, es posible aplicar el  $\Delta$ -movimiento sin necesidad de aplicar ningún movimiento de Reidemeister.

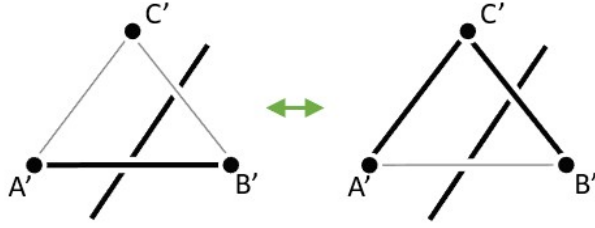
2. Una de las aristas del vértice  $A'$  o  $B'$  cruza  $A'B'C'$ .

Para evitar esta intersección será suficiente con aplicar un movimiento tipo I, tal como muestra la figura:

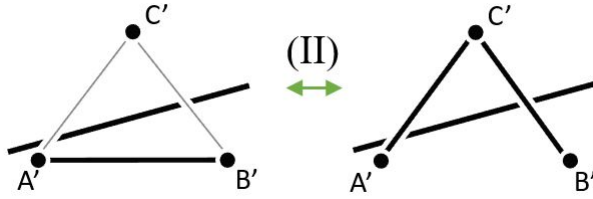


3. Una arista que no limita con  $A'$  ni con  $B'$  cruza  $A'B'C'$ .

Si la arista cruza  $A'B'$ , se puede transformar  $A'B' \leftrightarrow A'C' \cup C'B'$  sin necesidad de aplicar ningún movimiento de Reidemeister.

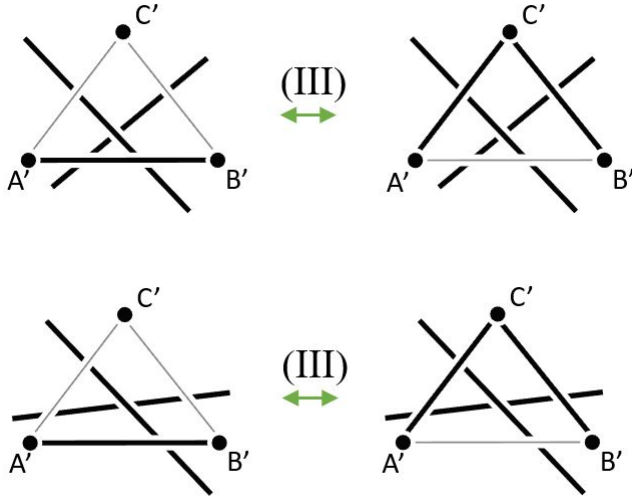


Si, por lo contrario, la arista cruza los lados  $A'C'$  y  $C'B'$ , podemos realizar la transformación mediante un movimiento de tipo II.

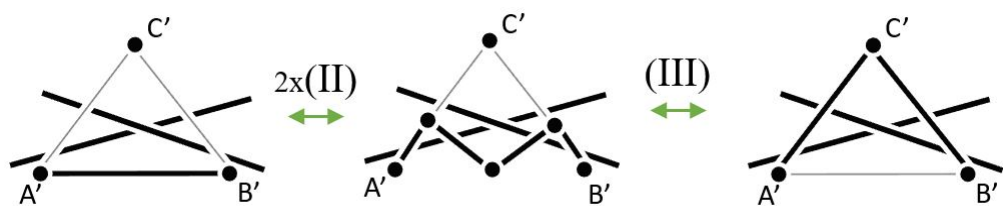


4.  $A'B'C'$  contiene un punto de cruce.

En este caso, si las aristas del cruce cruzan los tres lados del triángulo  $A'B'C'$ , aplicando el movimiento III podemos transformar  $A'B'$  en  $A'C' \cup C'B'$  directamente, tal como se detalla en las siguientes figuras.

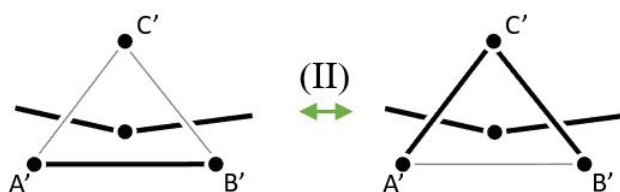


Si, por lo contrario, las aristas del cruce cruzan sólo dos lados de  $A'B'C'$ , será necesario aplicar la siguiente secuencia de movimientos de Reidemeister para realizar la transformación.

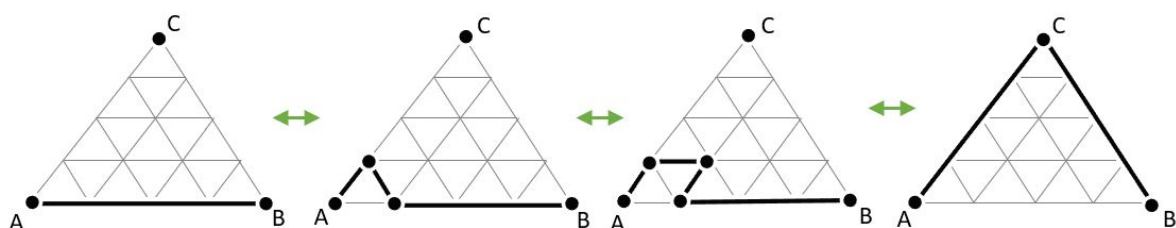


5.  $A'B'C'$  contiene un vértice.

En este caso, la transformación requiere aplicar un movimiento de tipo II tal como se representa en la imagen.



Tras demostrar que en cada una de las situaciones anteriores es posible transformar  $A'B'$  en  $A'C' \cup C'B'$  en cada uno de los triángulos, observamos que ello nos permite realizar la transformación global  $AB \leftrightarrow AC \cup CB$  acumulando transformaciones en cada uno de los triángulos tal como muestra el siguiente diagrama (realizándolas también sobre los triángulos invertidos cuando sea necesario).



Así pues, concluimos que es posible hacer la transformación de  $AB$  por  $AC \cup CB$  planteada al inicio del Paso 1. Además, como los movimientos de Reidemeister son reversibles, también es posible hacer la transformación inversa para aplicar cualquier  $\Delta^{-1}$ -movimiento.

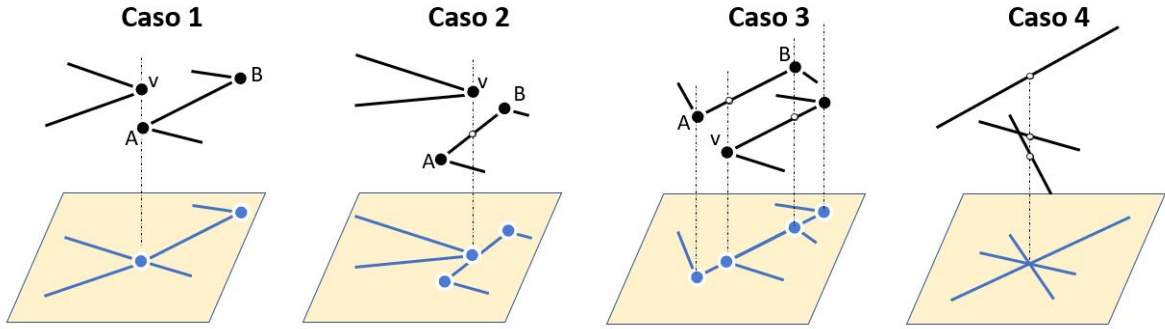
## Paso 2:

Dos proyecciones regulares de un nudo poligonal son el resultado de proyectar el mismo nudo sobre planos distintos. Podríamos obtener la segunda proyección aplicando

una rotación sobre el nudo y proyectando sobre el plano original.

Si estudiamos la proyección del nudo durante esta rotación, vemos que se van produciendo desplazamientos en los elementos proyectados que en ocasiones implicarán transiciones por proyecciones no regulares.

En la Proposición 2 identificábamos los siguientes cuatro casos en los que una proyección es no regular:



También argumentábamos que se podían representar los planos de proyección como puntos de  $S^2$ , y que los puntos correspondientes a planos de proyección no regulares constituyen un conjunto de medida 0 respecto a  $S^2$ .

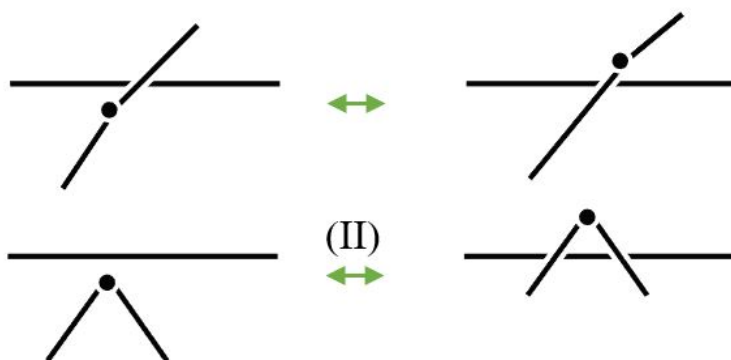
En consecuencia, si tomamos  $p_1, p_2 \in S^2$  dos puntos correspondientes a dos planos de proyección regulares, es posible encontrar un camino  $\alpha$  que une  $p_1$  y  $p_2$  de tal forma que el conjunto de puntos de  $\alpha$  correspondientes a planos de proyección no regulares son puntos aislados.

Además, como los planos de proyección del caso 1 son un conjunto finito de puntos (ya que los vértices también lo son), es posible definir este camino de forma que no pase por ninguno de estos puntos.

Si aplicamos la rotación sobre el plano de proyección siguiendo este camino, la transformación de los diagramas puede requerir las siguientes transiciones por proyecciones no regulares:

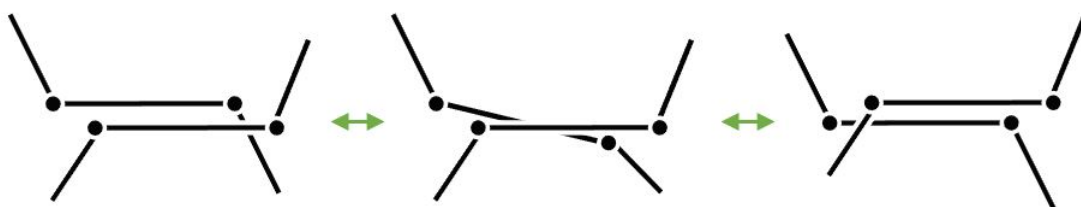
- **Caso 2:** Un vértice cruza una arista.

Pueden darse las situaciones de los siguientes diagramas. En el primer caso no es necesario aplicar ningún movimiento de Reidemeister, en el segundo hay que aplicar un movimiento de tipo II.



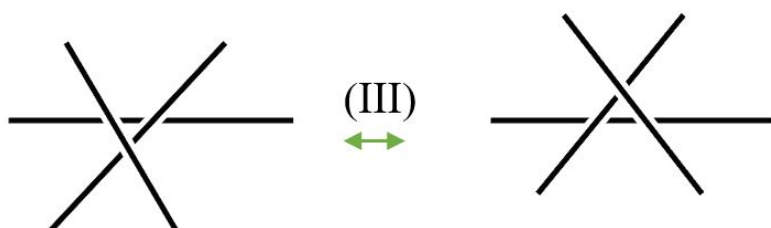
- **Caso 3:** Dos aristas paralelas en el diagrama se cruzan.

La transformación en este caso tampoco requiere aplicar movimientos de Reidemeister.



- **Caso 4:** Un punto de cruce cruza una arista.

Se puede aplicar la transformación en el diagrama mediante un movimiento de tipo III



Este procedimiento nos permite asegurar que es posible transformar dos proyecciones regulares del mismo nudo mediante movimientos de Reidemeister.

### Paso 3:

Sean  $K, K'$  dos nudos equivalentes y  $h : S^3 \rightarrow S^3$  un homeomorfismo que mantiene la orientación tal que  $K' = h(K)$ .

Tal como se describe en la demostración de la Proposición 1, para todo vértice  $A \in K$  es posible definir una cadena finita de 3-símplices que conecten  $A$  con  $h(A)$  y no

contengan ningún otro vértice de  $K$  ni ninguna arista que no incida en  $A$ . Y a partir de esta cadena es posible construir una secuencia de isotopías ambiente cuya composición transforma  $A$  en  $h(A)$  y deja invariables los demás vértices de  $K$ .

Cada una de estas isotopías ambientes se corresponde con un  $\Delta$ -movimiento ya que los 3-símplices en los que se realiza la transformación no contienen otros elementos de  $K$ .

Así pues, dos nudos equivalentes se pueden transformar mediante secuencia finita de  $\Delta$ -movimientos, y por lo tanto también de movimientos de Reidemeister sobre sus diagramas.

■

El teorema anterior es una poderosa herramienta para demostrar la equivalencia de dos nudos. Si analizamos sus diagramas y somos capaces de transformar uno de ellos en el otro usando los movimientos de Reidemeister, podemos concluir que ambos nudos son equivalentes.

Cabría pensar que esta técnica nos podría servir también para demostrar la no equivalencia, por lo menos en los casos cuyos diagramas tengan un número de cruces reducido. Al fin y al cabo, tanto el número de cruces como los movimientos posibles en cada diagrama son finitos, con lo que podríamos diseñar un algoritmo que fuera explorando todas las combinaciones y, si al finalizar no hemos podido generar el diagrama del nudo comparado, concluir que los dos nudos son distintos.

El problema en este planteamiento es que podría suceder que para transicionar del diagrama de un nudo a otro equivalente fuera necesario aplicar movimientos de Reidemeister que incrementaran el número de cruces más allá del diagrama origen y destino. Al ser así, la exploración de los posibles movimientos a aplicar a un diagrama podría ir generando nudos cada vez con más cruces y no tener un final.

La pregunta clave para discernir la viabilidad del uso de la fuerza bruta en el estudio de la clasificación de nudos es: dados dos diagramas equivalentes, ¿hay una cota máxima de número de movimientos de Reidemeister necesarios para transformar uno en el otro? Si es que sí y ésta es razonable, quizás siga siendo viable la resolución algorítmica para los nudos más reducidos usando este método.

En 2010, Cornwall y Lackenby [5] lograron demostrar una cota para este número de movimientos. Si  $n$  es la suma de cruces de los dos diagramas a comparar, la cota

descrita es:

$$K(n) = 2^{2^{2^{\dots 2^n}}} \text{ donde la altura de la torre de doses es } 10^{1,000,000n}.$$

Parece claro que habrá que buscar otras estrategias.

## 3.2. Invariantes

Tal como se describe en la página 14 de [4], definimos:

**Definición 12.** Un *invariante de nudos* es una función  $f$  que asigna a cada nudo  $K$  un objeto  $f(K)$  de tal forma que a nudos equivalentes le son asignados objetos equivalentes.

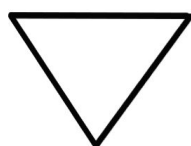
Si dos nudos toman un valor distinto para determinado invariante, podemos descartar que sean equivalentes. No obstante, la afirmación recíproca en general no es cierta ya que la función  $f$  anterior no necesariamente es inyectiva.

Hay dos características que son deseables de un invariante:

1. Que sea fácil de calcular.
2. Que tome valores lo más diversos posible, de forma que nos permita diferenciar una amplia variedad de nudos.

Durante el siglo XX y XXI, muchos esfuerzos de la investigación en la teoría de nudos han consistido en buscar invariantes que tengan un buen comportamiento respecto a las dos características anteriores.

En las próximas secciones estudiaremos algunos de estos invariantes y calcularemos su valor para cada uno de los siguientes nudos.



$K_e = \text{Trivial}$



$K_t = \text{Trébol derecho}$



$K_o = \text{Ocho}$



$K_t \# K_o$

Como ya hemos planteado previamente en este documento, la suma conexa se



define sobre nudos orientados. No obstante, en este capítulo daremos por supuesto este hecho sin explicitarlo ya que los invariantes que estudiaremos no distinguen las diferentes sumas conexas de dos nudos con diferentes orientaciones. Tal como hemos hecho en la imagen anterior, nos referiremos a sumas conexas de nudos y representaremos diagramas de estas sumas conexas sin especificar que se trata de nudos orientados.

### 3.2.1. Número de desanudamiento

Podríamos plantearnos la cuestión de si sería posible transformar el diagrama de un nudo cualquiera en un diagrama del nudo trivial modificando algunos de sus cruces. La modificación consistiría en una operación local que sucede dentro de un disco del plano de proyección en el que hay un único cruce, que intercambiaría el orden de los lados que los forman de forma que el lado superior pasara a ser el inferior y viceversa.

**Proposición 4.** *Dado un diagrama de un nudo, es posible transformarlo en un diagrama del nudo trivial cambiando un número finito de cruces.*

#### **Demostración:**

La demostración se basa en el siguiente recurso (minuto 19 de [\[22\]](#)).

Si elegimos un punto arbitrario del diagrama (que no se corresponda con ningún cruce) y una orientación, podemos ir recorriéndolo hasta que volvamos a regresar al punto de partida. Durante el recorrido realizamos la siguiente operación: cada vez que visitamos por primera vez un cruce, si el lado que estamos recorriendo pasa por debajo intercambiamos los lados de ese cruce. Cuando sea un cruce que ya hemos visitado, no lo modificamos (esta vez lo recorreremos por debajo).

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que el diagrama es la proyección del nudo sobre el plano  $xy$ . En este caso, tras haber aplicado los intercambios de cruces observamos que el diagrama se corresponde con un nudo que va descendiendo por el eje  $z$  hasta llegar a un punto cuya proyección coincide con la del punto de salida. Si unimos ambos extremos con una línea paralela al eje  $z$ , observamos que el nudo resultante es equivalente al nudo trivial. Así pues, este procedimiento transforma el diagrama en el del nudo trivial.

Como el número de cruces de cualquier diagrama es finito, el número de cambios a aplicar en el procedimiento anterior también lo será.

■

Como hemos comprobado que es posible realizar esta transformación en un número finito de cambios, debe haber un número mínimo de cambios necesario para cada nudo. Será de interés observar cuál es este número.

**Definición 13.** *El **número de desanudamiento** (**unknotting number**) de un nudo  $K$  es el mínimo número de cruces que es necesario cambiar para transformar algún diagrama de  $K$  en un diagrama del nudo trivial. Se representa  $u(K)$ .*

El número de desanudamiento es un invariante difícil de calcular para diagramas con un número de cruces elevado. No obstante, tiene algunas propiedades que nos permite restringir su valor.

**Proposición 5.** *Sean  $K_1, K_2$  dos nudos, el número de desanudamiento cumple las siguientes propiedades:*

1.  $u(K_1) \leq \frac{c(K_1)}{2}$ , donde  $c(K_1)$  es el mínimo número de cruces de un diagrama de este nudo.
2.  $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$
3. *Teorema de Scharlemann: Si  $u(K_1) = 1$ , entonces  $K_1$  es un nudo primo (páginas 37-55 de [18]).*

### **Demostración:**

1. Sigamos el procedimiento descrito en la demostración de la Proposición 4 sobre un diagrama de  $K_1$  que tenga  $c(K_1)$  cruces. Sea  $c$  el número de cruces que hemos tenido que intercambiar tras recorrer el diagrama.

Si  $c \leq \frac{c(K_1)}{2}$ , entonces  $u(K_1) \leq c \leq \frac{c(K_1)}{2}$

Si  $c > \frac{c(K_1)}{2}$ , podríamos modificar el algoritmo y aplicar el criterio contrario: cada vez que visitemos un cruce por primera vez nos aseguramos de recorrerlo por debajo. Con esta nueva estrategia también obtendremos el nudo trivial tras haber aplicado  $c(K_1) - c$  cambios. Con lo que  $u(K_1) \leq c(K_1) - c \leq c(K_1) - \frac{c(K_1)}{2} = \frac{c(K_1)}{2}$

2. Es posible convertir cada uno de los nudos  $K_1$  y  $K_2$  en el nudo trivial intercambiando  $u(K_1)$  y  $u(K_2)$  cruces respectivamente. Como la suma conexa de dos nudos triviales es también el nudo trivial, entonces podemos convertir el nudo  $K_1 \# K_2$  en el nudo trivial intercambiando  $u(K_1) + u(K_2)$  cruces, con lo que  $u(K_1 \# K_2) \leq u(K_1) + u(K_2)$ .

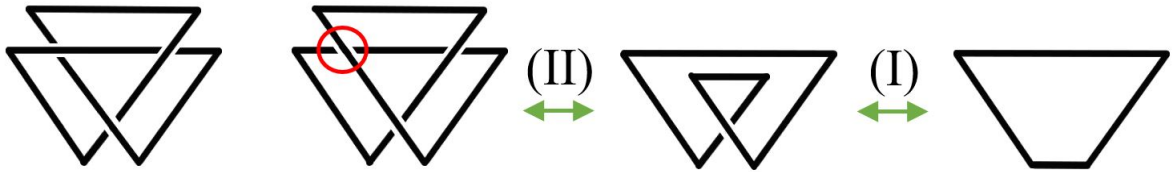
3. Demostrado por Scharlemann en 1985 (páginas 37-55 [18]).

■

A continuación calculamos el valor de este invariante para los siguientes nudos:

**Nudo trivial:** Por definición, el número de desanudamiento del nudo trivial es  $u(K_e) = 0$ .

**Nudo trébol derecho:** Observamos en la siguiente imagen que intercambiando un punto de cruce obtenemos el diagrama del nudo trivial. Así pues, el número de desanudamiento es  $u(K_t) = 1$ . En consecuencia, según el resultado de la proposición anterior, éste es un nudo primo.



**Nudo ocho:** Igual que en el caso anterior, podemos obtener el nudo trivial intercambiando un solo cruce. Su número de desanudamiento es  $u(K_o) = 1$  y por lo tanto el nudo ocho también es primo.



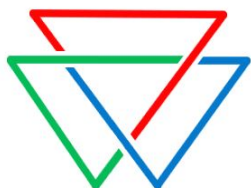
**Nudo  $K_t \# K_o$ :** Se trata de un nudo suma conexa de dos nudos no triviales. Así pues, no es primo, con lo que su número de desanudamiento es  $u(K_t \# K_o) > 1$ . Por otro lado,  $u(K_t \# K_o) \leq u(K_t) + u(K_o) = 1 + 1 = 2$ , con lo que obtenemos  $u(K_t \# K_o) = 2$ .

### 3.2.2. 3-colorabilidad

Algunos invariantes están relacionados con la colorabilidad de un diagrama. Todos ellos consisten en analizar las formas en las que es posible asignar colores a cada uno de los arcos del diagrama. El arco de un diagrama es el fragmento de curva de la proyección que está delimitado por dos cruces en los que hay discontinuidad por el hecho de “pasar por encima”.

Este concepto de arco es aplicable indistintamente de si el diagrama se corresponde a un nudo poligonal o no poligonal. No obstante, en los diagramas de las siguientes secciones se representarán como nudos poligonales por coherencia con el resto de figuras del trabajo.

Por ejemplo, la siguiente podría ser una coloración de un diagrama del trébol derecho.



**Definición 14.** Decimos que el diagrama de un nudo  $K$  es **3-colorable** si es posible colorear sus arcos con tres colores aplicando las siguientes restricciones:

1. Todos los arcos que convergen en un cruce tienen el mismo color o bien tienen todos ellos distinto color.
2. Se usa más de un color en el diagrama.

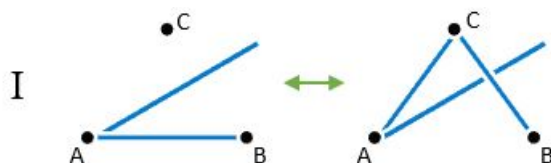
Todos los diagramas de un mismo nudo son 3-colorables o no 3-colorables, hecho que se demuestra en la siguiente proposición.

**Proposición 6.** La 3-colorabilidad es un invariante de nudos.

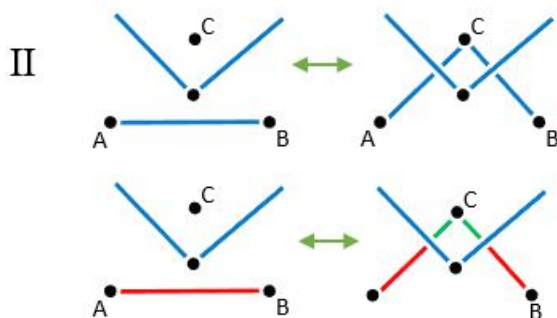
### Demostración:

Para demostrar esta proposición analizaremos cómo afecta cada uno de los movimientos de Reidemeister a la 3-colorabilidad para cada una de las posibles distribuciones iniciales de colores. En cada caso estudiamos de qué color son los arcos incidentes en el esquema y averiguamos si algún aspecto del movimiento altera este color.

Como el movimiento I solo involucra a un color, es evidente que mantiene la coloración.

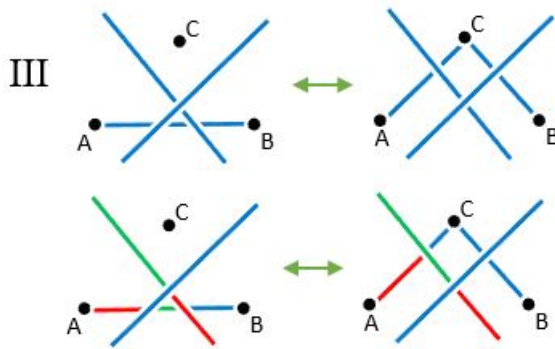


Para el movimiento II, si los arcos que intervienen tienen un solo color también es inmediato que el movimiento no afecta a la 3-coloración. Si, por lo contrario, los arcos tienen asignados distintos colores, el siguiente gráfico demuestra cómo se mantienen los colores de los arcos incidentes (en este caso es necesario incorporar un tercer color, pero éste no afecta a la 3-colorabilidad).



Finalmente, analizamos el movimiento III. Igual que en los casos anteriores, el análisis es trivial cuando todos los arcos tienen asignado el mismo color, y en el diagrama se muestra cómo se mantiene el color de los arcos incidentes en el caso de que se use más de un color en la coloración.

Observamos que no hay otras posibles coloraciones en los arcos incidentes que las planteadas (salvo intercambio de colores).



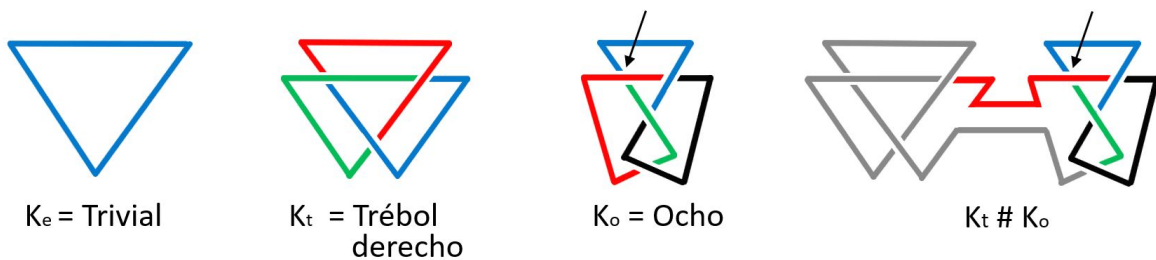
Así pues, la 3-colorabilidad es un invariante de nudos.

■

A continuación calculamos el valor de este invariante para los siguientes nudos:

**Nudo trivial:** No es posible colorear este nudo con más de un color, así que no es 3-colorable.

**Nudo trébol derecho:** En la siguiente imagen se representa una 3-coloración del nudo, así que se trata de un nudo 3-colorable.



**Nudo ocho:** Si empezamos a colorear en el punto de cruce marcado con la flecha en la imagen anterior, observamos que no es posible completar la 3-coloración. El arco representado en color negro no puede ser asignado a ningún color, ya que repetiría alguno de los arcos incidentes en alguno de los tres puntos de cruce en los que converge. Así pues, no es 3-colorable.

**Nudo  $K_t \# K_o$ :** Igual que en el caso anterior, si empezamos a colorear en el punto de cruce marcado en la imagen tenemos una nueva contradicción en el arco representado en negro, que debería ser verde o rojo según el extremo del arco que analicemos. De lo que obtenemos que tampoco es 3-colorable.

Como observamos en los ejemplos anteriores, un inconveniente de este invariante es que solo puede tomar dos valores, con lo que únicamente es capaz de diferenciar entre dos tipologías de nudos.

### 3.2.3. Número de 3-coloraciones

**Definición 15.** Denominamos el **número de 3-coloraciones** del diagrama de un nudo  $K$  al número de formas distintas en que se pueden colorear sus arcos usando 3 colores y respetando la primera restricción de la Definición 14 (en esta ocasión aceptamos como coloración válida aquella en la que se use un mismo color para todo el diagrama). Lo representamos como  $\tau(K)$ .

**Proposición 7.** El número de tres-coloraciones es un invariante de nudos.

#### **Demostración:**

Revisando las imágenes detalladas en la demostración de la Proposición 6, observamos que una vez fijados los colores de los arcos incidentes, el resto de arcos que intervienen en el movimiento tienen predeterminado el color, sin existir ningún grado de libertad en la asignación.

Por lo tanto, los movimientos de Reidemeister no alteran el número de 3-coloraciones, con lo que es un invariante de nudos.

■

Para calcular este invariante podemos usar técnicas combinatorias o algebraicas. En este trabajo no estudiaremos algoritmos con los que poder revisar todas las posibles coloraciones, pero sí expondremos la siguiente idea basada en el álgebra lineal que nos permite calcular el número de 3-coloraciones de forma más directa (minuto 58 de [22]).

Observamos que, si asignamos los 3 colores a los elementos del conjunto  $\{0, 1, 2\}$ , la suma módulo 3 de los colores de los arcos incidentes a cada cruce debe ser nula. Esto permite plantear el problema de posibles coloraciones como un sistema de ecuaciones en  $\mathbb{Z}_3$ , incorporando una incógnita para cada uno de los arcos y una ecuación para cada cruce.

Si representamos este sistema mediante una aplicación lineal  $A : \mathbb{Z}_3^n \rightarrow \mathbb{Z}_3^n$ , observamos que la dimensión del núcleo de esta transformación nos indica el número de variables libres. Por lo tanto, se corresponde con el número de arcos que pueden colorearse independientemente.

Hay que tener en cuenta que cada arco libre de coloración multiplica el número

de coloraciones por 3, así que podemos calcular el valor del invariante como:

$$\tau(K) = 3^{\dim \ker A}$$

La siguiente propiedad nos da una herramienta muy útil para poder calcular este invariante en el caso de nudos compuestos.

**Proposición 8.** Sean  $K_1, K_2$  dos nudos, tenemos que  $\tau(K_1 \# K_2) = \frac{\tau(K_1)\tau(K_2)}{3}$

### **Demostración:**

Los diagramas de dos nudos  $K_1, K_2$  se pueden 3-colorear de  $\tau(K_1)$  y  $\tau(K_2)$  formas, respectivamente. Teniendo en cuenta que las posibles coloraciones de cada uno de los nudos es independiente de la coloración del otro, obtenemos que hay un total de  $\tau(K_1)\tau(K_2)$  formas distintas de aplicar 3-coloraciones a los dos nudos.

Al aplicar la suma conexa de ambos nudos en este diagrama, solo aquellas coloraciones de  $K_1$  y de  $K_2$  tales que los colores de los arcos conectados coincidan serán válidas en el nuevo nudo. Es decir, cada coloración en  $K_1$  fija el color del arco en el que se realiza la suma conexa, con lo que sólo una de las tres posibles coloraciones del arco de  $K_2$  conectado es compatible con la coloración del diagrama resultante.

En consecuencia, sólo una de cada tres posibles coloraciones independientes de  $K_1$  y  $K_2$  es válida al aplicar la suma conexa.

$$\text{Así pues, } \tau(K_1 \# K_2) = \frac{\tau(K_1)\tau(K_2)}{3}$$

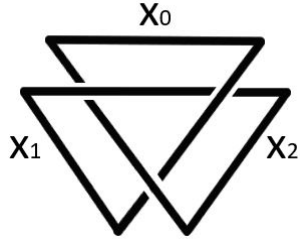
■

Calculamos el valor de este invariante para los siguientes nudos:

**Nudo trivial:** El nudo trivial se puede 3-colorear de tres formas: una para cada color.

**Nudo trébol derecho:** Definimos tres variables  $x_0, x_1, x_2$  correspondientes a los arcos de la imagen.





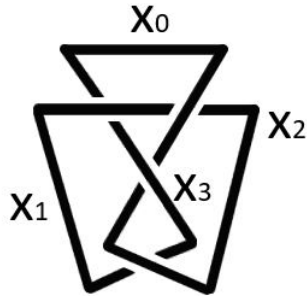
Todos los cruces deben verificar la siguiente ecuación en  $\mathbb{Z}_3$ :

$$x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

Así que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , y  $\dim \ker A = 2$ .

Por lo tanto,  $\tau(K_t) = 3^2 = 9$

**Nudo ocho:** Definimos cuatro variables  $x_0, x_1, x_2, x_3$  correspondientes a los arcos de la imagen.



Las ecuaciones en  $\mathbb{Z}_3$  para cada cruce son:

$$\begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Correspondientes a la siguiente transformación:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que el rango de  $A$  es 3, así que  $\dim \ker A = 1$ .

Con lo que  $\tau(K_o) = 3^1 = 3$

**Nudo  $K_t \# K_o$ :** Finalmente, si aplicamos el resultado de la proposición anterior, obtenemos que.

$$\tau(K_t \# K_o) = \frac{\tau(K_t)\tau(K_o)}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

A partir de los resultados previos, planteamos el siguiente corolario con el que completaremos la demostración que nos había quedado pendiente en la Proposición 3.

**Corolario 1.** *El trébol derecho no tiene inverso respecto a la suma conexas.*

**Demostración:**

Según el resultado anterior, el número de 3-coloraciones del trébol derecho es  $\tau(K_t) = 9$  y el del nudo trivial  $\tau(K_e) = 3$ .

Supongamos que existiera un nudo orientado  $K$  tal que  $K_t \# K = K_e$ . En este caso tendríamos que  $\frac{\tau(K_t)\tau(K)}{3} = \tau(K_e) \implies \frac{9\tau(K)}{3} = 3 \implies \tau(K) = 1$ .

Pero  $\tau(K) \geq 3$ , puesto que cualquier nudo admite al menos ser colorado de forma completa con cada uno de los tres colores.

Por lo tanto, no existe tal nudo  $K$  y el trébol derecho no tiene inverso respecto a la suma conexas.

■

### 3.2.4. Comparativa de resultados

En la siguiente tabla resumimos los resultados obtenidos en el cálculo de los invariantes para cada uno de los nudos: trivial, trébol derecho, ocho y  $K_t \# K_o$ .

Nudo	Número desanudamiento	3-colorabilidad	Número 3-coloraciones
Trivial	0	No	3
Trébol derecho	1	Sí	9
Ocho	1	No	3
$K_t \# K_o$	2	No	9

Observamos que ninguno de los invariantes nos ha permitido demostrar que los cuatro nudos analizados sean distintos. No obstante, la combinación de los tres invariantes sí nos permite llegar a esta conclusión.

---

## 4. Conclusiones

---

Una parte importante en la preparación de todo TFG es la búsqueda inicial de referencias bibliográficas. Al abordar esta tarea, hay dos cuestiones que me han sorprendido del material que he encontrado.

En primer lugar, la gran cantidad de información disponible. Con una simple búsqueda en internet de los términos “teoría de nudos” o “knot theory” se obtienen referencias a docenas de artículos, libros, presentaciones o trabajos sobre esta temática. Incluso si la búsqueda se restringe a conceptos más específicos como la suma conexa, los movimientos de Reidemeister o determinados invariantes, es fácil encontrar mucha información. La abundancia de fuentes es un claro reflejo del interés que suscita esta teoría.

Por otro lado, la mayor parte de información disponible me ha parecido poco detallada o que dejaba lagunas. Incluso los principales libros de referencia pasaban de puntillas por algunos conceptos o razonamientos básicos, obviándolos o dándolos por hechos para avanzar rápidamente a ideas más avanzadas de la teoría. Supongo que cada autor elige dónde decide profundizar más y qué prefiere pasar por alto, y quizás el hecho de que el nudo sea un objeto tan intuitivo o cotidiano induzca también a hacer un tratamiento menos riguroso de algunas ideas.

En consecuencia, en diversas partes del trabajo he tenido que combinar información de diversas fuentes y completar las carencias que éstas dejaban (siempre a partir de las valiosas aportaciones del tutor del trabajo, por supuesto).

Hay dos casos que querría remarcar: la definición de nudo orientado y la demostración del teorema de Reidemeister. En el primer caso, he encontrado una definición que me ha parecido correcta para el nudo polinomial, pero he tenido que improvisar una redacción original para la generalización al nudo manso. En el caso del teorema de Reidemeister, las demostraciones que he encontrado han resultado muy parciales, a menudo con enfoques muy dispares, y todas ellas dejaban muchas partes por supuestas. Estoy especialmente satisfecho del resultado de esta parte del trabajo, que se ha basado en la recopilación de ideas de distintas demostraciones (en ocasiones incluso de algún teorema distinto) para acabar elaborando una demostración que creo que es mucho más detallada y completa que cualquiera de las referencias.

Aunque el trabajo no pretende llegar demasiado lejos, durante su preparación me he documentado de aspectos más avanzados de la teoría de nudos: otros invariantes, conceptos y aplicaciones. Me ha parecido un área de estudio fascinante que actualmente suscita mucho interés en una amplia comunidad de científicos. En consecuencia, vive una situación de aportaciones y nuevos resultados continuos, por lo que es una teoría en progreso y transformación permanentes.

Además de sus múltiples aplicaciones, la teoría de nudos conecta distintas áreas de las matemáticas, como el álgebra, el análisis, la geometría y la topología (minuto 14 de [20]). Y esto es algo que siempre resulta interesante para un matemático.

Personalmente, me quedo con ganas de más. Me gustaría haber incluido en el trabajo información de otros invariantes, como el grupo del nudo, el polinomio de Alexander o el de Jones. Debido a mi formación previa como informático, también me interesa toda la parte computacional del estudio de nudos: algoritmos, modelización de nudos y técnicas para automatizar su análisis. Pero por razones de espacio, todo ello no habría sido compatible con el enfoque de exposición detallada de los fundamentos que he pretendido dar a este trabajo.

Seguro que en el ámbito personal seguiré informándome sobre esta teoría y sus progresos y, quien sabe, quizás pueda ser objeto de un eventual futuro TFM.

---

# A. Bibliografía

---

- [1] Wikipedia, Knot Theory, 2020.
- [2] Wikipedia, Teoría de Nudos, 2020.
- [3] BURDE, G., AND ZIESCHANG, H. *Knots*. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 2003.
- [4] CONTRERAS, J. S. Invariantes polinomiales de nudos. Master's thesis, Universitat de Sonora, 2019.
- [5] COWARD, A., AND LACKENBY, M. An upper bound on Reidemeister moves. *American Journal of Mathematics* 136 (2014), 1023–1066.
- [6] CROWELL, R. H., AND FOX, R. H. *Introduction to knot theory*. Ginn Co., Boston, Mass., 1963.
- [7] DE SANTI, G. An introduction to the theory of knots. *Unpublished lecture notes* (2002).
- [8] LEE, J. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, New York, 2000.
- [9] MOLINA, J. L. C. Introducción a la teoría de nudos. In *V jornadas de Física y Matemáticas* (2011), Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- [10] MORINIGO, M. A. *Prime factorization of knots*. University of California, 2005.
- [11] PERKO, K. The history of the Perko pair. *Unpublished lecture notes* (2016).
- [12] PICCIRILLO, L. The Conway knot is not slice. *Annals of Mathematics* 191, 2 (2020), 581 – 591.
- [13] POULTER, W. *Knot Theory and the Jones Polynomial*. Lakehead University, 2018.
- [14] PUTMAN, A. The generalized Schoenflies theorem. *Unpublished lecture notes* (2015).
- [15] REIDEMEISTER, K. *Elementare Begründung der Knotentheorie*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5, 1927.

- [16] ROBERTS, J. Knots knots. *Unpublished lecture notes* (2015).
- [17] RODRÍGUEZ, E. V. Knots and Seifert surfaces. Master's thesis, Universitat de Barcelona, 2020.
- [18] SCHARLEMANN, M. Unknotting number one knots are prime. *Inventiones mathematicae* 82 (1985), 37–55.
- [19] SILVER, D. S. Orígenes de la teoría de nudos. *Investigación y ciencia 2006-03* (2006).
- [20] STROGATZ, S. Untangling why knots are important. *Quanta Magazine* (2022).
- [21] VIORATO, J. R. Introducción a la teoría de los nudos 1 [Vídeo]. In *Escuela Fico Gonzáles Acuña de Nudos y 3-variedades* (2016), CIMAT, Guanajuato.
- [22] VIORATO, J. R. Introducción a la teoría de los nudos 2 [Vídeo]. In *Escuela Fico Gonzáles Acuña de Nudos y 3-variedades* (2016), CIMAT, Guanajuato.