



**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**Δομές Δεδομένων**

**Εξεταστική Περίοδος Φεβρουαρίου 2024 – 08.02.2024**

**Διδάσκουσα: Δρ. Κάτια Παπακωνσταντινοπούλου**

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΑΜ: ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΕΠΟΠΤΗ:	
---	--

**Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες**

**Απαντήστε σε όλα τα θέματα**

Θέμα	Βαθμός
1	
2	
3	
4	
5	
Σύνολο:	

## ΘΕΜΑ 1 (14 μονάδες)

Απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις, κυκλώνοντας τις σωστές απαντήσεις (σε κάποιες ερωτήσεις ενδέχεται να υπάρχουν παραπάνω από μία σωστές απαντήσεις ή και καμία – για να πάρετε όλες τις μονάδες θα πρέπει να κυκλώσετε ΟΛΕΣ τις σωστές απαντήσεις). Δε χρειάζεται δικαιολόγηση.

1. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί;
  - a.  $3n^4 + 9n^2 - 15n = O(n^5)$
  - b.  $5n^4 + 8n^3 + 4n^5 - 10n = O(n^4)$
  - c.  $(\log n)^n = O(n^{100})$
  - d.  $\log(10^n) = O(n)$
2. Οι παρακάτω δομές δεδομένων είναι μη γραμμικές:
  - a. γράφος
  - b. στοίβα
  - c. δέντρο
  - d. συνδεδεμένη λίστα
3. Το μέγιστο πλήθος κόμβων που μπορεί να έχει ένα δυαδικό δέντρο ύψους  $k$ , στο οποίο η ρίζα βρίσκεται σε ύψος 0 είναι:
  - a.  $2^{k-1} - 1$
  - b.  $2^k - 1$
  - c.  $2^k + 1$
  - d.  $2^{k+1} - 1$
4. Έστω  $T1$  ένα AVL δέντρο με  $N$  κλειδιά, και  $T2$  ένα μη κενό δέντρο 2-3-4 επίσης με  $N$  κλειδιά. Έστω  $h$  το πλήθος των επιπέδων του δέντρου  $T2$ . Το πλήθος των επιπέδων του  $T1$  είναι πάντα:
  - a. μικρότερο ή ίσο από  $h-1$
  - b. μικρότερο ή ίσο από  $\log h$
  - c. μεγαλύτερο ή ίσο από  $2h$
  - d. μεγαλύτερο ή ίσο από  $h$
5. Ποια από τις παρακάτω δομές είναι κατάλληλη για μια εφαρμογή στην οποία τα νέα στοιχεία που εισέρχονται μπορούν να μπουν σε οποιοδήποτε σημείο της;
  - a. Συνδεδεμένη λίστα
  - b. Στοίβα
  - c. Ουρά
6. Ποια είναι η πολυπλοκότητα των  $get()$  και  $put()$  σε ένα hash map;
  - a.  $O(1)$
  - b.  $O(\log n)$
  - c.  $O(n)$
7. Για ένα γράφο υλοποιημένο με πίνακα γειτνίασης, ο οποίος αποτελείται από  $n$  κόμβους,
  - a. Ο έλεγχος αν υπάρχει η ακμή από τον κόμβο  $i$  στον κόμβο  $j$  δε γίνεται σε χρόνο λιγότερο από  $O(n)$
  - b. Η εύρεση όλων των γειτόνων του κόμβου  $i$  γίνεται σε  $O(1)$
  - c. Η εύρεση των κοινών γειτόνων δυο κόμβων  $i$  και  $j$  απαιτεί χρόνο  $O(n)$
  - d. Μπορούμε να μειώσουμε το μέγεθος της αναπαράστασης αν ο γράφος είναι μη κατευθυνόμενος

## ΘΕΜΑ 2 (14 μονάδες)

(α) [8 μονάδες] Δίνεται ο ακόλουθος ορισμός των κόμβων μίας απλά συνδεδεμένης λίστας.

```
class Node{
    int key;
    Node next;
    Node(int x){ key = x; next = null; } }
```

Να γράψετε σε Java τη μέθοδο `Node delete(Node h, int x)` η οποία κάνει αναζήτηση και στη συνέχεια διαγραφή ενός κόμβου με κλειδί `x` από την *ταξινομημένη* (σε φθίνουσα σειρά) λίστα με κεφαλή `h`. Η μέθοδος θα πρέπει να δουλεύει ως εξής: Αν το κλειδί `x` υπάρχει στη λίστα, η μέθοδος θα πρέπει να τυπώνει τη θέση του πρώτου κόμβου ο οποίος έχει το κλειδί `x`, και να επιστρέφει την κεφαλή της λίστας που προκύπτει μετά τη διαγραφή (μπορεί να υπάρχουν κι άλλοι κόμβοι με το ίδιο κλειδί αλλά δεν μας απασχολεί αυτό). Διαφορετικά, θα πρέπει να επιστρέφει την κεφαλή της λίστας, αφού τυπώσει μήνυμα ότι το στοιχείο δεν υπάρχει. Η λίστα δεν έχει κόμβους-φρουρούς και τερματίζεται με `null`. Η μέθοδος πρέπει να τρέχει σε χρόνο  $O(N)$  για μια λίστα με  $N$  κόμβους.

**Προσοχή:** Δεν πειράζει αν ξεχάσετε κάποιο semicolon ή παρένθεση, κτλ. Σημασία έχει να υπάρχει η λογική και να φαίνονται καθαρά οι εντολές της μεθόδου και η εμβέλεια των βρόχων (αν χρησιμοποιήσετε κάποιο βρόχο).

**(β) [2 μονάδες]** Δεδομένου ότι η παραπάνω λίστα είναι ταξινομημένη, θα μπορούσατε να τροποποιήσετε τη μέθοδο διαγραφής που προτείνετε, έτσι ώστε να εκτελείται σε (περίπου)  $k/3$  βήματα, αν το στοιχείο προς διαγραφή βρίσκεται στη θέση  $k$  της λίστας; Περιγράψτε τη μέθοδό σας.

**(γ) [4 μονάδες]** Σας δίνεται ένα δυαδικό δέντρο, όπου κάθε κόμβος που δεν είναι null, εκτός από τα δεδομένα που περιέχει, έχει όπως συνήθως, δύο συνδέσμους προς το αριστερό και δεξιό υποδέντρο. Έστω  $l, r$ , οι 2 σύνδεσμοι αυτοί, όπως φαίνονται στον παρακάτω ορισμό.

```
class Node {  
    ...  
    Node l, r; }  
}
```

Η παρακάτω μέθοδος παίρνει ως είσοδο έναν κόμβο  $h$  και υπολογίζει μια τιμή  $k$ , η οποία εξαρτάται από τη μορφή του δέντρου που ξεκινά από τον κόμβο  $h$ .

```
void foo(Node h) {  
    if (h==null) k=0;  
    else k=1+max{foo(h.l), foo(h.r)};  
}
```

i) Φτιάξτε ένα δυαδικό δέντρο με  $N=15$  κόμβους για το οποίο η μέθοδος `foo` υπολογίζει την τιμή  $k=5$ . Δε χρειάζεται να βάλετε συγκεκριμένες τιμές κλειδιών στους κόμβους, αρκεί μόνο να σχεδιάσετε τη μορφή του δέντρου (κόμβους και ακμές).

ii) Έστω ότι το δέντρο περιέχει  $N$  κόμβους (για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $N$ ) και είναι εκφυλισμένο σε αλυσίδα. Ποια τιμή υπολογίζει η `foo` (ως συνάρτηση του  $N$ , με συμβολισμό μεγάλου  $O$ ); Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

### ΘΕΜΑ 3 (20 μονάδες)

(α) [6 μονάδες] Έστω ότι έχουμε έναν ελαχιστοστρεφή σωρό (δηλαδή ένα σωρό με το ελάχιστο στοιχείο στη ρίζα του) που υποστηρίζει τις βασικές λειτουργίες insert και getmin, όπως τις είδαμε στο μάθημα. Ο σωρός αρχικά έχει την ακόλουθη μορφή (το στοιχείο στη θέση 0 του πίνακα δεν χρησιμοποιείται, για αυτό και το στοιχείο 4 βρίσκεται στη θέση 1):

	4	6	10	8	9	24	28	32	25	12
--	---	---	----	---	---	----	----	----	----	----

Σχεδιάστε την αναπαράσταση του σωρού αυτού ως πλήρες δυαδικό δέντρο.

Στη συνέχεια να εκτελέσετε εισαγωγή του κλειδιού 7 και μετά του κλειδιού 3. Να σχεδιάσετε τα 2 δυαδικά δέντρα που προκύπτουν όταν ολοκληρώνεται η κάθε εισαγωγή. Αν σας διευκολύνει στην παρουσίαση, μπορείτε προαιρετικά να σχεδιάσετε και τα ενδιάμεσα δέντρα που προκύπτουν μετά από κάθε ανάδυση, κατά τη διάρκεια των εισαγωγών.

(β) [6 μονάδες] Στον αρχικό σωρό του ερωτήματος (α) (προτού εισαχθούν τα κλειδιά 7 και 3), εκτελέστε μια κλήση της getmin. Δείξτε βήμα-βήμα τι λειτουργίες πρέπει να γίνουν και σχεδιάστε τα ενδιάμεσα δέντρα που προκύπτουν κατά την εκτέλεση της getmin. Σχεδιάστε και το τελικό δυαδικό δέντρο που προκύπτει όταν ολοκληρωθεί η μέθοδος.

(γ) [8 μονάδες] Έστω ένας ελαχιστοστρεφής δυαδικός σωρός με ακέραια κλειδιά και τις εξής ιδιότητες: ο σωρός έχει 6 κόμβους, και περιέχει 3 επίπεδα, το επίπεδο 0 που περιέχει τη ρίζα, το επίπεδο 1 και το επίπεδο 2. Η μεταδιατεταγμένη διάσχιση στο δέντρο επισκέπτεται τελευταίο το κλειδί 20. Η προδιατεταγμένη διάσχιση επισκέπτεται τέταρτο το κλειδί 7. Τέλος, στην ενδοδιατεταγμένη διάσχιση, το πρώτο κλειδί που επισκεπτόμαστε είναι το 9 και το προτελευταίο είναι το 5. Σχεδιάστε ένα σωρό που ικανοποιεί όλες αυτές τις ιδιότητες (υπάρχουν αρκετές πιθανές λύσεις). Αιτιολογήστε συνοπτικά την απάντησή σας (3-4 γραμμές αρκούν).



#### ΘΕΜΑ 4 (10 μονάδες)

(α) [4 μονάδες] Έστω ότι εφαρμόζετε κατακερματισμό με χωριστή αλυσίδωση σε 9,000 αντικείμενα, και έχετε χρησιμοποιήσει πίνακα μεγέθους 4,500. Ποιο είναι το μέσο μήκος μιας λίστας σε αυτό τον πίνακα κατακερματισμού; Ποιο είναι το μήκος που μπορεί να έχει μια λίστα σε αυτό το σύστημα στη χειρότερη περίπτωση; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(β) [6 μονάδες] Έστω ότι για το παραπάνω πλήθος αντικειμένων θέλετε να φτιάξετε και ένα σύστημα κατακερματισμού με γραμμική διερεύνηση. Ποιο είναι το ελάχιστο μέγεθος πίνακα που θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε; Αν τελικά χρησιμοποιήσετε πίνακα μεγέθους 12,000, ποιο σύστημα είναι καλύτερο ως προς το μέσο πλήθος διερευνήσεων για **επιτυχείς** αναζητήσεις, αυτό ή εκείνο του ερωτήματος (α); Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Υπενθυμίζεται ότι για επιτυχείς αναζητήσεις, το μέσο πλήθος διερευνήσεων στη γραμμική διερεύνηση είναι  $(1 + 1/(1 - \alpha))/2$ , όπου  $\alpha$  ο συντελεστής φορτίου.

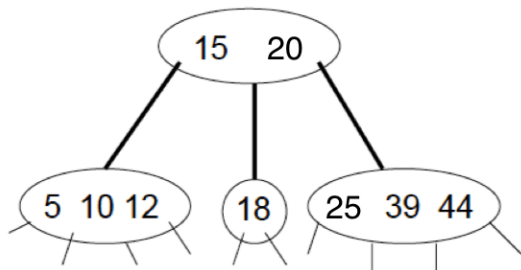
## ΘΕΜΑ 5 (22 μονάδες)

(α) [6 μονάδες] Θεωρήστε ένα ισορροπημένο δέντρο 2-3-4 με  $n$  κλειδιά. Έστω ότι το μετατρέπετε στην ισοδύναμη αναπαράσταση σε δέντρο κόκκινου-μαύρου.

- Ποιο από τα δύο αυτά δέντρα έχει μεγαλύτερο ύψος; Περιγράψτε με φυσική γλώσσα πώς προκαλείται η αύξηση ή μείωση στο ύψος του δέντρου κατά τη μετατροπή, δηλαδή ποια είναι τα βήματα που μπορεί να προκαλέσουν την αύξηση ή μείωση αυτή.
- Ποιο θα είναι το μέγιστο και ποιο το ελάχιστο ύψος του τελικού δέντρου κόκκινου-μαύρου, αν το αρχικό δέντρο 2-3-4 έχει ύψος  $h$ ; Δικαιολογήστε σύντομα τις απαντήσεις σας.

(β) [3 μονάδες] Δεδομένου ενός δέντρου 2-3-4, ζητείται να δώσουμε την ισοδύναμη αναπαράσταση σε δέντρο κόκκινου-μαύρου. Είναι μοναδική η απάντηση που μπορούμε να δώσουμε, ή είναι να υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές απαντήσεις; Δικαιολογήστε σύντομα την απάντησή σας.

(γ) [7 μονάδες] Θεωρήστε το δέντρο 2-3-4 που φαίνεται παρακάτω. Εκτελέστε ανοδική εισαγωγή των κλειδιών 47, 16, 17, 19, 40, 45, 42 στο δέντρο αυτό. Δείξτε πώς μεταβάλλεται το δέντρο όταν ολοκληρώνεται κάθε εισαγωγή (συνολικά θα πρέπει να σχεδιάσετε 7 δέντρα).





**(δ) [6 μονάδες]** Για το αρχικό δέντρο του προηγούμενου ερωτήματος, καθώς και για το τελικό δέντρο που προέκυψε, σχεδιάστε από ένα ισοδύναμο δέντρο κόκκινου-μαύρου.





