Trabajo Práctico 2.2
Generadores Pseudoaleatorios de Distribuciones de Probabilidad

Renzo Aimaretti
renzoceronueve@gmail.com

Facundo Sosa Bianciotto
facundososabianciotto@gmail.com

Vittorio Maragliano
maraglianovittorio@gmail.com

Ignacio Amelio Ortiz
nameliortiz@gmail.com

Nicolás Roberto Escobar
escobar.nicolas.isifrro@gmail.com

Juan Manuel De Elia
juanmadeelia@gmail.com

Mayo 2025

Resumen

Este trabajo desarrolla la implementación de generadores de números pseudoaleatorios para diversas distribuciones de probabilidad, abordando tanto distribuciones continuas como discretas. Cada distribución se fundamenta teóricamente, se implementa computacionalmente en Python y se testea mediante herramientas visuales y estadísticas. Se utilizan métodos como la transformada inversa y el método de rechazo, conforme a los lineamientos clásicos expuestos por Thomas Naylor en su obra *Técnicas de Simulación en Computadoras.*

1. Introducción

La generación de números pseudoaleatorios que sigan una distribución de probabilidad específica es un aspecto clave en simulación computacional. A partir de un generador uniforme confiable, se pueden construir generadores para cualquier distribución mediante distintas transformaciones. En este trabajo se presentan los generadores para distribuciones seleccionadas, junto a su justificación teórica, construcción algorítmica y evaluación empírica.

2. Distribuciones Continuas

2.1. Distribución Uniforme

Densidad:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b \tag{1}$$

Transformada Inversa:

$$x = a + (b-a)u, \quad u \sim U(0,1) \tag{2}$$

Método de Rechazo: Aunque la transformada inversa es directa y eficiente, también se implementó el método de rechazo. Se tomó una función constante mayor o igual que $f(x)$ (es decir, la propia constante de la densidad) y se aceptaron los valores x generados dentro del intervalo $[a, b]$ con probabilidad proporcional a $f(x)$. Dado que $f(x)$ es constante, todos los valores fueron aceptados.

Resultados: Con $a = 2$, $b = 5$ y 10.000 muestras:

- Media empírica: 3.4951 (teórica: 3.5)
- Varianza empírica: 0.7568 (teórica: 0.75)

2.2. Distribución Exponencial

Densidad:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \tag{3}$$

Transformada Inversa:

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(u), \quad u \sim U(0,1) \tag{4}$$

Método de Rechazo: Se utilizó una cota mayor M sobre $f(x)$, y se generaron candidatos x de una distribución uniforme en $[0,b]$ (por ejemplo, $b = 10$), con $u \sim U(0,1)$. Se aceptó x si $u < \frac{f(x)}{M}$. El valor de M fue tomado como λ, el valor máximo de la función en $x = 0$.

Resultados: Con $\lambda = 1{,}5$ y 10.000 muestras:

- Media empírica: 0.6657 (teórica: 0.6667)
- Varianza empírica: 0.4532 (teórica: 0.4444)

2.3. Distribución Normal

Densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{5}$$

Método de Box-Muller: Se generaron dos variables $u_1, u_2 \sim U(0,1)$ y se aplicó:

$$z = \sqrt{-2\ln u_1}\cos(2\pi u_2), \quad x = \mu + \sigma z \tag{6}$$

Método de Rechazo: También se implementó el método de rechazo utilizando como propuesta una distribución uniforme acotada en $[-5,5]$ y como cota $M = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Se generó x uniforme y $u \sim U(0,1)$, aceptando si $u < \frac{f(x)}{M}$.

Resultados: Con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$:

- Media empírica: -0.0062 (teórica: 0)
- Desviación estándar empírica: 1.0003 (teórica: 1)

3. Distribuciones Discretas

3.1. Distribución Binomial

Probabilidad:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{7}$$

Método de Bernoulli: Se generaron n ensayos de Bernoulli con probabilidad p, sumando los éxitos.

Método de Rechazo: Se generó un valor x entre 0 y n y un número uniforme u. Se aceptó x si $u < \frac{P(x)}{M}$, con $M = \max P(x)$ precomputado.

Resultados: Con $n = 10$, $p = 0{,}5$:

- Media empírica: 5.012 (teórica: 5)
- Varianza empírica: 2.48 (teórica: 2.5)

3.2. Distribución Poisson

Probabilidad:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \tag{8}$$

Algoritmo de Knuth: Se acumularon productos de variables uniformes hasta que el resultado fue menor que $e^{-\lambda}$.

Método de Rechazo: Se generó un valor k natural en un intervalo razonable (por ejemplo, $[0, 15]$) y se aceptó si $u < \frac{P(k)}{M}$ con M estimado como el máximo de $P(k)$.

Resultados: Con $\lambda = 4$:

- Media empírica: 3.995 (teórica: 4)
- Varianza empírica: 3.92 (teórica: 4)

3.3. Distribución Empírica

Método: Se utilizó la transformación de la función de distribución acumulada (CDF). Para cada valor $u \sim U(0, 1)$, se asignó un valor x_i tal que $F(x_i - 1) < u \leq F(x_i)$.

Método de Rechazo: Se propuso un valor x del conjunto definido y se aceptó con probabilidad $P(x)/M$, donde $M = \max P(x)$.

Resultados: Las muestras obtenidas replicaron con precisión la distribución definida.

4. Conclusión

Se logró implementar generadores para diversas distribuciones continuas y discretas utilizando la transformada inversa, el método de rechazo y otros algoritmos clásicos. Las muestras fueron validadas mediante estadísticas de primer y segundo orden, y contrastadas con sus modelos teóricos. Incluso en casos donde el método de rechazo no es necesario, se aplicó para cumplir con los requerimientos del trabajo práctico.

Referencias

- Naylor, T.H. (1982). *Técnicas de simulación en computadoras.*
- Ross, S.M. (2006). *Simulación.*
- Documentación oficial de Numpy y Scipy.