山东财经大学 2019-2020 学年第一学期期末试题

线性代数 试卷(A)参考答案与评分标准

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 4 分，满分 20 分）

1. 49　　2. 1　　3. $a \neq \pm 2$　　4. 2019　　5. 正交

二、计算题（本题共 4 小题，满分 55 分）

1. （本题满分 5 分）过程此处略，$D = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$.

结果正确，方法不限，酌情给分.

2. （本题满分 10 分）$X = BA^{-1}$ ……1 分

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$ ……3 分

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 & -2 \\ -8 & 6 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$ ……8 分

（求逆矩阵必须有计算过程，方法不限）

$$= \begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \end{bmatrix}.$$ ……10 分

3. （本题满分 10 分）$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ………2 分

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ （阶梯形） ………5 分

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ （行简化阶梯形） ………7 分

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3.$ ………8 分

一个极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. ………9 分

$\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. ………10 分

（极大无关组的选取不惟一，做对的同样给分）

4. （本题满分 15 分）化简增广矩阵：

$$\overline{A}=(A\vdots B)=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array}\right]$$ ………2 分

$$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ （阶梯形） ………5 分

因 $r(A)=r(\overline{A})=2<5$，故方程组有无穷多解. ………6 分

继续化简：

阶梯形 $$\xrightarrow{\text{初等行变换}} \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -16 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ （行简化阶梯形） …8 分

一般解为 $\begin{cases} x_1 = \quad x_3 + x_4 + 5x_5 - 16 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 + 23 \end{cases}$ （x_3, x_4, x_5 为自由未知量）.

令$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，得特解：$\alpha_0 = \begin{bmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. ·········10 分

导出组的一般解为$\begin{cases} x_1 = \quad x_3 \ + x_4 + 5x_5 \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \end{cases}$（$x_3, x_4, x_5$为自由未知量）.

分别令$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，得导出组的基础解系：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ·········14 分

因此，方程组的通解为$X = \alpha_0 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3$（$c_1, c_2, c_3$为任意常数）. ·········15 分

5.（本题满分 15 分）因

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda - 4 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 6),$$ ·········3 分

故A的特征值为$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = 6$. ·········4 分

对$\lambda_1 = -1$，解方程组$(-E - A)X = O$：

$$-E - A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$（行简化阶梯形）.

一般解为$\begin{cases} x_1 = -3x_3 \\ x_2 = \ 2x_3 \end{cases}$，基础解系为$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. ·········7 分

对 $\lambda_2=1$，解方程组 $(E-A)X=O$：

$$E-A=\begin{bmatrix}0 & -3 & 0\\ -3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$（行简化阶梯形）

一般解为 $\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_3\\ x_2=0\end{cases}$，得基础解系为 $\alpha_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$. ………10 分

对 $\lambda_3=6$，解方程组 $(6E-A)X=O$：

$$6E-A=\begin{bmatrix}5 & -3 & 0\\ -3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$（行简化阶梯形）

一般解为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\ x_2=-5x_3\end{cases}$，基础解系为 $\alpha_3=\begin{bmatrix}-3\\ -5\\ 1\end{bmatrix}$. ………13 分

因 A 的三个特征值互异，故 A 可对角化.

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{bmatrix}-3 & \frac{1}{3} & -3\\ 2 & 0 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，则 P 为可逆矩阵，且

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 6\end{bmatrix}$$ ………15 分

三、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 因 $A^2-3A-10E=O$，

$A^2-3A-4E=6E$，

$(A-4E)(A+E)=6E$，

$(A-4E)\cdot\frac{1}{6}(A+E)=E$，　　　　　　………4 分

故 $A-4E$ 可逆.　　　　　　　　　　　………5 分（其他方法亦可给分）

2. 设 $k_1(\alpha+\beta)+k_2(\alpha-\beta)=0$，

则 $(k_1+k_2)\alpha+(k_1-k_2)\beta=0$.　　　　　　………2 分

因 α,β 线性无关，故

$$\begin{cases} k_1+k_2=0 \\ k_1-k_2=0 \end{cases}$$　　　　　　………3 分

即 $k_1=k_2=0$，故 $\alpha+\beta,\alpha-\beta$ 线性无关.　　………5 分

（其他方法亦可给分）

四、应用题（本题满分 10 分）

三平面交于惟一一点 $\Leftrightarrow$ 线性方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+1=0 \\ x+by+b^2z+1=0 \\ x+cy+c^2z+1=0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} x+ay+a^2z=-1 \\ x+by+b^2z=-1 \\ x+cy+c^2z=-1 \end{cases}$$

有惟一解.　　　　　………2 分

$\Leftrightarrow r(A)=r(\overline{A})=3$.　　　………3 分

$\Leftrightarrow$ 系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$（范德蒙行列式）

$=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$，

即 a,b,c 互异.　　　　………6 分

又

$$D_1=\begin{vmatrix}-1 & a & a^2\\ -1 & b & b^2\\ -1 & c & c^2\end{vmatrix}=-D,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & -1 & a^2\\ 1 & -1 & b^2\\ 1 & -1 & c^2\end{vmatrix}=0,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & a & -1\\ 1 & b & -1\\ 1 & c & -1\end{vmatrix}=0, \qquad \cdots\cdots\cdots 9\text{ 分}$$

故由克莱姆法则知，交点为

$$x=\frac{D_1}{D}=-1,\quad y=\frac{D_2}{D}=0,\quad z=\frac{D_3}{D}=0. \qquad \cdots\cdots\cdots 10\text{ 分}$$

五、简答题（本题满分 5 分）

举例说明阶梯形矩阵.　　　　　　………3 分（必须举例说明）

用途：求矩阵的秩、解线性方程组、求向量组的秩、求极大无关组等.　　　　　　………2 分（须至少答对 2 个）