习题 1-4

1. 某晶体管厂有三个车间生产同一型号的电子管，已知有$\frac{1}{2}$合产品是第一个车间生产的，其他两个车间各生产$\frac{1}{4}$，第一、第二两个车间生产的产品废品率为 2%，第三车间生产的产品废品率为 4%，现从该厂产品中任取一个，问取到的产品是废品的概率是多少？

解 设 A_i 表示“取到的产品是第 i 个车间生产的”，$i=1,2,3$, 设 B 表示“取到的产品是废品”，显然 A_1,A_2,A_3 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{2}\times 2\%+\frac{1}{4}\times 2\%+\frac{1}{4}\times 4\%=0.025\cdot$$

2. 盒子中有 10 个乒乓球，其中 6 个是新球，第一次比赛时任取 3 个球使用，用完后放回，第二次比赛时也任取 3 个球，求第二次取出的三个球都是新球的概率.

解 设 A_i 表示“第一次比赛时取到的 3 个球中有 i 个新球”，$i=0,1,2,3$, 设 B 表示“第二次比赛时取出三个新球”，显然 A_0,A_1,A_2,A_3 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}\frac{C_6^3}{C_{10}^3}+\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}\frac{C_5^3}{C_{10}^3}+\frac{C_6^2C_4^1}{C_{10}^3}\frac{C_4^3}{C_{10}^3}+\frac{C_6^3}{C_{10}^3}\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{144}\cdot$$

3. 有两个口袋，甲袋中装有两个白球、一个黑球，乙袋中装有一个白球、两个黑球. 由甲袋任取一球放入乙袋，再从乙袋中取出一球，求从乙袋中取到白球的概率.

解 设 A 表示“由甲袋中取到白球放入乙袋”，则 $\overline{A}$ 表示“由甲袋中取到黑球放入乙袋”，且 A 与 $\overline{A}$ 构成完备事件组。

设 B 表示“从乙袋中取到白球”，由全概率公式，得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}\approx 0.417.$$

4. 上题中若发现从乙袋中取出的是白球，问从甲袋中取出后放入乙袋的球，黑、白哪种颜色的可能性大？

解 由贝叶斯公式得 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\dfrac{\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{4}{5}.$

$$P(\overline{A}|B)=1-P(A|B)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5},$$

或者 $P(\overline{A}|B)=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(B)}=\dfrac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{1}{5}.$

由于 $P(A|B)>P(\overline{A}|B)$，所以从甲袋中取出白球放入乙袋的可能性大.

5. 有朋友自远方来，他乘火车、轮船、汽车、飞机来的可能性分别是 0.3、0.2、0.1、0.4. 如果他乘火车、轮船、汽车来的话，迟到的概率分别为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{12}$，而乘飞机不会迟到. 结果他迟到了，试问他乘火车来的概率是多少？

解 分别用 A_1，A_2，A_3，A_4 表示乘火车、轮船、汽车、飞机,用 B 表示“他迟到了”，A_1，A_2，A_3，A_4 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=0.15；$$

由贝叶斯公式：$P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.15}=0.5\cdot$

6. 已知男性有 5%是色盲患者，女性有 0.25%是色盲患者，今从男女比例为 22 ： 21 的人群中随机挑选一人，发现恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 分别用 A_1，A_2 表示挑选到男性、女性,用 B 表示“挑到色盲患者”,则 A_1，A_2 构成完备事件组，由贝叶斯公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{\frac{22}{43}\times 5\%}{\frac{22}{43}\times 5\%+\frac{21}{43}\times 0.25\%}=\frac{440}{461}\approx 0.9544\cdot$$

7. 某学生接连参加同一课程的两次考试，第一次考试及格的概率为 p. 若第一次及格，则第二次及格的概率也为 p；若第一次不及格，则第二次及格的概率为$\frac{p}{2}$.

(1) 若至少有一次及格他就能取得某种资格，求他取得该资格的概率；

(2) 若已知他第二次已经及格，求他第一次及格的概率.

解 用 A_i 表示 “第 i 次考试及格”，i=1,2，用 B 表示“该学生取得该资格”，由题意 $B=A_1+A_2$，且 $P(A_1)=p$， $P(A_2|A_1)=p$，$P(A_2|\overline{A}_1)=\frac{p}{2}$,

由乘法公式，得：$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=p\cdot p=p^2$；

由全概率公式,得：$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)=p\times p+(1-p)\times\frac{p}{2}=\frac{p}{2}(1+p)$；

(1) 由加法公式：$P(B)=P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)=p+\frac{p}{2}(1+p)-p^2=\frac{p}{2}(3-p)$；

(2) $P(A_1|A_2)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\dfrac{p^2}{\frac{p}{2}(1+p)}=\dfrac{2p}{1+p}\cdot$

8. 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“•”和“一”. 由于干扰，当发出信号“•”时，收报台分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“•”和“一”；当发出信号“一”时，收报台分别以概率 0.9 和 0.1 收到“一”和“•”. 求当收报台收到信号“•”时，发报台发出的信号也是“•”的概率.

解 设 A_1 表示“发报台发出信号“•””，A_2 表示“发报台发出信号“一””，设 B 表示

"收报台收到信号"·"", 则 A_1，A_2 构成完备事件组，由贝叶斯公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.4\times 0.1}=\frac{12}{13}\approx 0.923.\cdot$$