习题 1-5

1．已知$P(A)=0.3$，$P(B)=0.4$，在下面两种情形下，求$P(A+B)$及$P(AB)$.

(1) 当事件 A 与 B 互不相容时；

(2) 当事件 A 与 B 相互独立时.

解 (1) 由于 A 与 B 互不相容，有$P(AB)=P(\Phi)=0$，

从而$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.4-0=0.7$；

(2) 由于 A 与 B 相互独立，有$P(AB)=P(A)P(B)=0.3\times 0.4=0.12$，

从而$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.4-0.12=0.58$.

2. 已知事件 A 与 B 相互独立，且$P(\overline{A}\overline{B})=\dfrac{1}{9}$，$P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，求$P(A)$，$P(B)$.

解 因为 A 与 B 相互独立，所以 A 与$\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与$\overline{B}$ 也相互独立，则

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-P(A))(1-P(B))=\dfrac{1}{9}$， ①

$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)(1-P(B))$，

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-P(A))P(B)$，由已知条件

$P(A)(1-P(B))=(1-P(A))P(B)$ ②

联立①②两个方程，求得$P(A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$.

3. 甲、乙两人射击，甲击中的概率为 0.7，乙击中的概率为 0.6. 两人同时射击，并假定中靶与否是独立的. 求 (1) 两人都中靶的概率；(2) 甲中而乙不中的概率；(3) 甲不中而乙中的概率；(4) 甲乙都不中的概率；(5)两人至少有一人中靶的概率.

解 设 A 表示“甲击中”，B 表示“乙击中”，由题意知 A 与 B 相互独立，且$P(A)=0.7,\ \ P(B)=0.6$. 则

(1) $P(AB)=P(A)P(B)=0.7\times 0.6=0.42$；

(2) $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.7\times(1-0.6)=0.28$；

(3) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.7)\times 0.6=0.18$；

(4) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=(1-0.7)(1-0.6)=0.12$；.

(5) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7+0.6-0.42=0.88$.

4. 加工一个产品要经过三道工序，第一、第二、第三道工序生产出废品的概率分别为

0.1、0.05、0.2. 若假定各道工序是否出废品是独立的，求经过三道工序最终生产的产品是废品的概率.

解 A_i 表示“第 i 道工序出废品”，$i = 1$，2，3，由题意知 A_1，A_2，A_3 相互独立，且 $P(A_1)=0.1,\quad P(A_2)=0.05,\quad P(A_3)=0.2$. 则所求概率为：

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=1-P(\overline{A_1+A_2+A_3})=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)\\&=1-(1-0.1)\times(1-0.05)\times(1-0.2)\\&=0.316.\end{aligned}$$

5. 三个人独立地破译一份密码，已知各人能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{3}$，问三人中至少有一人能将此密码译出的概率为多少？

解 A_i表示“第 i 个人译出密码”，$i=1$，2，3，由题意知 A_1，A_2，A_3 相互独立，则所求概率为

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)\\&=1-(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{4})\times(1-\frac{1}{3})=\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

6. 一批产品中有 20％的一等品，现进行有放回抽样检验，每次取 1 个，共重复取 5 次，求（1）取出的 5 个产品中恰有 2 个一等品的概率；（2）取出的 5 个产品中至少有 3 个一等品的概率；(3)取出的 5 个产品中至多有 2 个一等品的概率.

解 由题意知，这是一个 5 重伯努利试验，设 A 表示“一等品”，则 $p=P(A)=20\%=0.2$，$1-p=0.8$，故所求概率为：

（1）$P_5(2)=C_5^2(0.2)^2 0.8^3=0.2048;$

（2）$P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^3(0.2)^3(0.8)^2+C_5^4(0.2)^4(0.8)+C_5^5(0.2)^5(0.8)^0=0.05792;$

（3）$P_5(0)+P_5(1)+P_5(2)=1-[P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)]=1-0.05792=0.94208.$

7. 随机地掷一个骰子，连掷 6 次，求（1）恰有一次出现“3 点”的概率；(2) 至多有两次出现“3 点”的概率.

解 由题意知，这是一个 6 重伯努利试验，设 A 表示“掷一次出现 3 点”，则 $p=P(A)=\frac{1}{6}$，$1-p=\frac{5}{6}$. 故所求概率为：

(1) $P_6(1)=C_6^1(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5\approx 0.402$；

(2) $\sum_{i=0}^{2}P_6(i)=C_6^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^6+C_6^1(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^5+C_6^2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^4\approx 0.938$.

8. 假设某人做一次实验成功的概率为 0.2，求做 20 次实验至少成功一次的概率.

解 由题意知，这是一个 20 重伯努利试验，设 A 表示“做一次实验取得成功”，则 $p=P(A)=0.2$，$1-p=0.8$，设 B 表示“做 20 次实验至少成功一次”， 则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P_{20}(0)=1-C_{20}^{0}\times 0.2^{0}\times 0.8^{20}\approx 0.9885.$$

9. 某机构有一个由7位专家组成的顾问小组,若每位专家贡献正确意见的概率是0.7,现在该机构对某方案可行与否个别征求各位专家的意见,并按多数人意见作出决策,求该机构作出正确决策的概率.

解 由题意知,这是一个 7 重伯努利试验,设 A 表示"单个专家给出正确意见",则 $p=P(A)=0.7$,$1-p=0.3$,故所求概率为:

$$\sum_{i=4}^{7}P_{7}(i)=\sum_{i=4}^{7}C_{7}^{k}(0.7)^{k}(0.3)^{7-k}\approx 0.874.$$