第八章 多元函数微分法及其应用

8.1 多元函数的基本概念

一、选择题：

1. 已知 $f(\frac{1}{y},\frac{1}{x})=\frac{xy-x^2}{x-2y}$，则 $f(x,y)=$（ D ）。

A. $\frac{x-y}{xy-2x^2}$　　B. $\frac{x-y}{xy-2y^2}$　　C. $\frac{y-x}{xy-2x^2}$　　D. $\frac{y-x}{xy-2y^2}$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to -\frac{1}{2}}}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}=$（ C ）。

A. e^2　　B. $\frac{1}{\sqrt{e}}$　　C. $\frac{1}{e^2}$　　D. $\sqrt{e}$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)\sin\frac{3}{x^2+y^2}=$（ B ）。

A. 0　　B. 3　　C. $\frac{1}{3}$　　D. ∞

4. 如果 $f(0,0)=$（ B ），则函数 $f(x,y)=\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$ 在 $(0,0)$ 处连续。

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. 4　　D. -4

二、写出下列函数的定义域，并绘出定义域的图形：

1. $z=\ln(y^2-2x+1)$　（定义域 $D=\{(x,y)\,|\,y^2-2x+1>0\}$）

2. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\ (a,b>0)$　（定义域 $D=\{(x,y)\,|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$）

3. $z=\ln(y-x)+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$　（定义域 $D=\{(x,y)\,|\,y>x\ge 0,x^2+y^2<1\}$）

4. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R>r>0)$

（定义域 $D=\{(x,y,z)\,|\,r^2<x^2+y^2+z^2\le R^2\}$）

三、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln 2$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=0$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}}\dfrac{\sqrt{|x|}}{3x+2y}$ （极限不存在）

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{y}=2$

四、求下列函数的间断点：

1. $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ （间断点：$\{(x,y)\mid y^2=x\}$）

2. $z=\ln(1-x^2-y^2)$ （无间断点）

五、证明：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y^3}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

8.2 偏导数

一、选择题：

1. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数存在的（ D ）。

A．必要条件　　B. 充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分条件，也非必要条件

2. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续的充分必要条件是（ A ）。

A． $f(x,y)=f(0,0)+\alpha$，其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\alpha=0$

B. $f(x,y)$ 关于 x 连续，且关于 y 连续

C. $\lim\limits_{x\to 0}[\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)]=f(0,0)$

D. $\lim\limits_{y\to 0}[\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)]=f(0,0)$

3. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）。

A. 连续，且偏导数存在。　　B. 连续，但偏导数不存在。

C. 不连续，但偏导数存在。　　D. 不连续，且偏导数不存在。

二、填空题：

1. 设 $z=x^{\ln y}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{\dfrac{1}{y}x^{\ln y}\ln x}$。

2. 若 $u=\sqrt{\sin^2 x+\sin^2 y+\sin^2 z}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(0,0,\frac{\pi}{4})}=$ $\underline{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$。

3. 若 $z=e^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在点 $(2,\dfrac{1}{\pi})$ 处的值为 $\underline{\dfrac{\pi^2}{e^2}}$。

三、求下列函数的偏导数：

1. $z=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$。　（$\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$，$\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{u}{v^2}$）

2. $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$。

（$\dfrac{\partial z}{\partial x}=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)]$）

3. $u=\arctan(x-y)^z$。

（$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}$）

4. $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$。　（$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$）

四、解答题：

1. $f(x,y)=\ln(x+\ln y)$，求 $f_x(1,e),f_y(1,e)$。　（$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2e}$）

2. $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$。　（1）

3. $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$，

$f_{zzx}(2,0,1)$。 （$2,2,0,0$）

4. $z=\arctan\dfrac{y}{x}$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。 （$\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$）

5. $z=x\ln xy$，求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$。 （$0$）

8.3　全微分

一、选择题：

1. 已知$(axy^3-y^2\cos x)dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)dy$为某函数的全微分，则$a$和$b$的值分别等于（ B ）。

A. -2 和 2　　B. 2 和 -2　　C. -3 和 3　　D. 3 和 -3

2. 考虑二元函数的下面四条性质：

（1）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续；

（2）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数连续；

（3）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微；

（4）$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的两个偏导数存在。

则有（ A ）。

A. $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$　　B. $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$

C. $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　D. $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

二、填空题：

1. 设$f(x,y,z)=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$，则$df(1,1,1)=$ $\underline{dx+dy}$。

2. 设$f(x,y)=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$，则$df=$ $\underline{\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}}$。

3. 函数$z=e^{xy}$，当$x=1,y=1,\Delta x=0.15,\Delta y=0.1$时的全微分为 $\underline{0.25e}$。

三、求下列函数的全微分：

1. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$。（$dz=\dfrac{-xydx+x^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$）

2. $z=\ln(1+x^2+y^2)$（当$x=1,y=2$时）。（$dz|_{(1,2)}=\dfrac{1}{3}dx+\dfrac{2}{3}dy$）

3. $u=e^{xy}\sin(x+y)$。

（$du=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]dx+e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]dy$）

4. $u=x^{yz}$。（$du=yzx^{yz-1}dx+zx^{yz}\ln xdy+yx^{yz}\ln xdz$）

四、设$f(x,y)$可微，且$f(x,2x)=x,\ f_x(x,2x)=x^2$，求$f_y(x,2x)$。（$\dfrac{1}{2}(1-x^2)$）

五、设$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明：$f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$。

（$f_{xy}(0,0)=-1,\ f_{yx}(0,0)=1$）

8.4　多元复合函数的求导法则

一、填空题：

1. 设$z=u^2+v^2$，而$u=x+y,v=x-y$，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{4x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ $\underline{4y}$。

2. 设$z=e^{x-2y}$，而$x=\sin t,y=t^3$，则$\dfrac{dz}{dt}=$ $\underline{e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)}$。

3. 设$z=\arctan(xy)$，而$y=e^x$，则$\dfrac{dz}{dx}=$ $\underline{\dfrac{e^x(1+x)}{1+x^2e^{2x}}}$。

4. 设$u=\dfrac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，而$y=a\sin x,z=\cos x$，则$\dfrac{du}{dx}=$ $\underline{e^{ax}\sin x}$。

二、求下列函数的一阶偏导数（其中f是可微函数）：

1. $u=f(x^2-y^2,e^{xy})$　（$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2',\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$）

2. $u = yf(x^2-y^2)$ （$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xyf'(x^2-y^2)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = f(x^2-y^2)+2y^2f'(x^2-y^2)$）

三、求高阶偏导数（其中 f 具有二阶连续偏导数）：

1. $z = f(xy, x^2y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。 （$2yf_1'+2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2xf_2'+2x^3yf_{22}''$）

2. $z = f(\sin x, \cos y, e^{x+y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

（$e^{x+y}f_3' - \sin x \cdot f_1' + \cos^2 x \cdot f_{11}'' + 2e^{x+y}\cos x \cdot f_{13}'' + e^{2(x+y)}f_{33}''$）

四、1. 设 f 和 g 为可微函数，$u = f(x, xy), v = g(x+xy)$，求 $\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$。

（$(1+y)[f_1'(x,xy)+yf_2'(x,xy)]g'(x+xy)$）

2. 设$u = yf(\frac{x}{y}) + xg(\frac{y}{x})$，其中 f 和 g 具有二阶连续导数，求$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。（$0$）

3. 设$z = f(2x-y) + g(x, xy)$，其中 f 二阶可导，g 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。 （$-2f'' + xg_{12}'' + g_2' + xyg_{22}''$）

4. 设$z = f(e^x \sin y, x^2+y^2)$，其中 $f(u,v)$ 具连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

（$e^x \cos y \cdot f_1' + e^{2x}\sin y \cos y \cdot f_{11}'' + 2e^x(y\sin y + x\cos y)f_{12}'' + 4xyf_{22}''$）

5. 设$z = \frac{1}{x}f(xy) + y\varphi(x+y)$，其中 f 和 φ 具有连续二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

（$yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y)$）

6. 设函数在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$, $\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)} = 3$，

$\varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)|_{x=1}$。 （$51$）

7. 试用线性变换 $\xi = x+at, \eta = x-at$ 化简方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ （$a \neq 0$）。

（ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta}=0$ ）

五、证明题：

1. 设$\omega=f(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z})$，证明：$x\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+y\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+z\dfrac{\partial\omega}{\partial z}=0$。

2. 设$z=x\varphi(\dfrac{x}{y^2})$，验证：$2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$。

3. 设$u=f(x,y)$有连续二阶偏导数，设$x=\dfrac{s-\sqrt{3}t}{2},y=\dfrac{\sqrt{3}s+t}{2}$，

证明：$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$。

4. 设$z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中f为可导函数，验证：$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$。

8.5 隐函数的求导公式

一、填空题：

1. 已知$\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$，其中$z=f(x,y)$，

则$dz=$ $\underline{-\dfrac{\sin 2x}{\sin 2z}dx-\dfrac{\sin 2y}{\sin 2z}dy}$。

2. 已知$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx}=$ $\underline{\dfrac{x+y}{x-y}}$。

3. 函数$z=z(x,y)$是由方程$z=\varphi(\dfrac{x}{z},y)$所决定，其中$\varphi$具有连续的一阶偏导数，

则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\dfrac{z\varphi_1'}{z^2+x\varphi_1'}}$。

4. 由方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$所确定的函数$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的全微分$dz=$ $dx-\sqrt{2}dy$。

二、计算由下列方程所确定的隐函数的一阶偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$：

1. $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$　（$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}$）

2. $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$　（$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x+z}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y(x+z)}$）

三、计算由下列方程所确定的隐函数的二阶偏导数：

1. $z^3-3xyz=a^3$（a 为常数），求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。　（$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{z(z^4-2xyz^2-x^2y^2)}{(z^2-xy)^3}$）

2. $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$　（$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2ze^z-2xy^3z-y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3}$）

四、求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数：

1. $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ x^2+2y^2+3z^2=20 \end{cases}$，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{dz}{dx}$。　（$\frac{dy}{dx}=-\frac{x(6z+1)}{2y(3z+1)}$，$\frac{dz}{dx}=\frac{x}{3z+1}$）

2. $\begin{cases} z=e^u+u\sin v \\ y=e^u-u\cos v \end{cases}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial v}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$。

（$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v}{1+e^u(\sin v-\cos v)}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\cos v}{1+e^u(\sin v-\cos v)}$，

$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\cos v-e^u}{u[1+e^u(\sin v-\cos v)]}$，$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin v+e^u}{u[1+e^u(\sin v-\cos v)]}$）

3. 设 $u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中 f,φ 具有一阶连续偏导数，

且 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\frac{du}{dx}$。（$f_x+f_y\cos x-\frac{f_z}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cos x\cdot\varphi_2')$）

五、证明题：

1. 设 $z=f(x,y)$ 由方程 $F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定，证明：$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy$。

2. 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数，证明：由方程 $\Phi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的函数

$z=z(x,y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$。

8.6 多元函数微分学的几何应用

一、填空题：

1. 设在椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 上某一点的切平面过直线 $L:\dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{2z-1}{-2}$，则此切平面方程为 $x+2z-7=0,\ x+4y+6z-21=0$。

2. 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}$。

3. 曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 $2x+y-4=0$。

4. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{6}$。

5. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程为 $2x+4y-z-5=0$。

二、选择题：

1. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是（ C ）。

   A. $(1,-1,2)$　　B. $(-1,1,2)$　　C. $(1,1,2)$　　D. $(-1,-1,2)$

2. 在曲线 $\begin{cases}x=t\\ y=-t^2\\ z=t^2\end{cases}$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线（ A ）。

   A. 只有一条　　B. 只有两条　　C. 至少有三条　　D. 不存在

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=3,\ f_y(0,0)=1$，则（ C ）。

   A. $dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

   B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的法向量为 $\{3,1,1\}$

C. 曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{1,0,3\}$

D. 曲线$\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\{3,0,1\}$

三、解答题：

1. 求曲线 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ 在点$(\frac{\pi}{2} - 1, 1, 2\sqrt{2})$处的切线和法平面方程。

（切线：$\dfrac{x - (\frac{\pi}{2} - 1)}{1} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，法平面：$x + y + \sqrt{2}z = \dfrac{\pi}{2} + 4$）

2. 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$ 在点$(1,1,1)$处的切线和法平面方程。

（切线：$\dfrac{x - 1}{16} = \dfrac{y - 1}{9} = \dfrac{z - 1}{-1}$，法平面：$16x + 9y - z - 24 = 0$）

3. 求椭球面$x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$上平行于平面$x - y + 2z = 0$的切平面方程。

（$x - y + 2z = \pm\sqrt{\dfrac{11}{2}}$）

4. 设直线 $\begin{cases} x + y + b = 0 \\ x + ay - z - 3 = 0 \end{cases}$ 在平面S上，且平面S又与曲面$z = x^2 + y^2$相切于点$(1,-2,5)$，求a,b的值。　　（$a = -5$，$b = -2$）

5. 证明：曲面$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ $(a > 0)$上任何点处的切平面在各坐标轴上的截距之和等于a。

8.7　方向导数与梯度

一、填空题：

1. $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数为$\underline{\frac{1}{2}}$。

2. $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}u|_M=$ $\underline{\frac{2}{9}\{1,2,-2\}}$。

二、选择题：

1. 曲线 $\begin{cases} y=1-2x \\ z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x^2 \end{cases}$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处的切线与直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0 \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 的夹角 $\varphi=$（ B ）。

A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

2. 设函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 的某个邻域内可微分，则在点 (x,y) 处有 $\mathbf{grad}(uv)=$（ B ）。

A. $\mathbf{grad}u\cdot\mathbf{grad}v$ B. $u\mathbf{grad}v+v\mathbf{grad}u$

C. $u\mathbf{grad}v$ D. $v\mathbf{grad}u$

三、计算题：

1. 求函数 $z=\ln(x+y)$ 在抛物线 $y^2=4x$ 上点 $(1,2)$ 处沿着抛物线在该点处偏向 x 轴正方向的切线方向的方向导数。 （$\frac{\sqrt{2}}{3}$）

2. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=\frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。 （5）

3. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求 $\mathbf{grad}f(0,0,0)$ 和 $\mathbf{grad}f(1,1,1)$。 （$\{3,-2,-6\}$, $\{6,3,0\}$）

4. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧的法向量，求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数。 （$\frac{11}{7}$）

8.8 多元函数的极值及其求法

一、填空题：

1. 函数 $f(x,y)=2x^2+ay^2+4xy^2+2y$ 在点 $(-1,1)$ 处取得极值，则常数 $a=$ <u>3</u>。

2. 函数 $z=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值为 <u>$z(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$</u>。

3. 函数 $z=x^2+4xy+9y^2-x-3y$ 的极小值为 <u>$z(\frac{3}{10},\frac{1}{10})=-\frac{3}{10}$</u>。

二、设函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$，则以下结论正确的是（ D ）。

A．点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点。

B. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的驻点，而是极值点。

C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，而是可微点。

D. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点，也不是驻点。

三、在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使它到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短。 （$(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$）

四、求内接于半径为 a 的球，且有最大体积的长方体。 （$V_{\max}=\frac{8}{9}\sqrt{3}a^3$）

五、在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使得切平面与三个坐标面所围的四面体的体积最小，求切点的坐标。 （切点：$(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}})$，$V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc$）

六、抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一个椭圆，求原点到椭圆的最长和最短距离。 （$d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}}$，$d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}$）

七、设函数 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值。 （极小值：$z(9,3)=3$，极大值：$z(-9,-3)=-3$）