

2016-2017 概率论与数理统计 II (16300101) 模拟试题

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											
签字											

注意事项：所有的答案都必须写在答题纸（答题卡）上，答在试卷上一律无效。

学  
号

姓  
名

班  
级

院  
部

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设一组样本值为 11.20, 11.28, 11.12, 11.20, 11.40, 则样本均值  $\bar{x}$  = \_\_\_\_\_; 样本方差  $s^2$  = \_\_\_\_\_; 中位数  $m_{0.5}$  = \_\_\_\_\_.

2.  $X$  与  $Y$  相互独立, 且均服从  $N(0,1)$ , 则  $\frac{X^2}{Y^2}$  服从分布 \_\_\_\_\_.

3. 设总体  $X \sim P(\lambda), (\lambda > 0)$ ,  $(X_1, X_2 \cdots X_n)$  是来自总体的样本,  $\bar{X}$  为样本均值,  $S^2$  为样本方差, 则  $E\bar{X}$  = \_\_\_\_\_,  $D\bar{X}$  = \_\_\_\_\_;  $ES^2$  = \_\_\_\_\_.

4. 设  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  是未知参数  $\theta$  的两个无偏估计量, 如果  $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$  也是参数  $\theta$  的无偏估计量, 则  $a, b$  应满足 \_\_\_\_\_.

5. 在假设检验中, 当拒绝原假设时, 会犯 \_\_\_\_\_ 错误.

二、单项选择题（本题共 4 小题，每小题 3 分，满分 12 分）

1. 样本  $X_1, X_2, X_3, X_4$  取自正态总体  $X$ ,  $EX = \mu$  已知,  $DX = \sigma^2$  未知, 下列随机变量不是统计量的是 ( ).

(A)  $\bar{X} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 X_i$

(B)  $X_1 + X_4 - \mu$

(C)  $k = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2$

(D)  $S^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (X_i - \bar{X})^2$

2.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma^2$  已知, 当样本容量  $n \geq$  ( ) 时,  $\mu$  的置信水平为 0.95 的置信区间长不大于  $L$  (注:  $\Phi(1.96) = 0.975$ )

(A)  $15 \sigma^2 / L^2$  (B)  $15.3664 \sigma^2 / L^2$  (C)  $16 \sigma^2 / L^2$  (D) 16

3. 如果随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  相互独立, 且  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ , 则当  $n$  充分大时, 随机变量  $S_n$  近似服从正态分布, 只要满足 ( ).

(A) 有相同期望和方差

(B) 服从同一离散型分布

(C) 服从同一指数分布

(D) 服从同一连续型分布

4. 在比较两个正态总体方差是否相等的假设检验中, 选用 ( ).

(A)  $u$  检验法

(B)  $t$  检验法

(C)  $F$  检验法

(D)  $\chi^2$  检验法

三、判断题 (本题共 5 小题, 每小题 2 分, 满分 10 分; 正确的划 “ $\checkmark$ ” 错误的划 “ $\times$ ”)

1. 若随机变量序列  $\{X_n\}$  依概率收敛于  $X$ , 则  $\{X_n\}$  依分布收敛于  $X$ . ( )

2. 设  $\hat{\theta}$  为  $\theta$  的无偏估计量, 且  $D(\hat{\theta}) \neq 0$ , 则  $\hat{\theta}^2$  必为  $\theta^2$  的无偏估计量. ( )

3. 总体均值  $\mu$  的 95% 置信区间的含义为这个区间以 95% 的概率含  $\mu$  的真值.

(

)

4. 一致最小方差无偏估计一定是有效估计.

(

)

5. 假设检验中, 若显著性水平  $\alpha$  小于检验的  $P$  值, 则我们应接受原假设

$H_0$ .

(

)

四、计算题 (本题共 4 小题, 满分 47 分)

1. (本题满分 15 分) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自正态母体  $N(\mu, 1)$  的一个样本, 其中  $\mu$  为未知参数, 求 (1)  $\mu$  的矩法估计; (2)  $\mu$  的极大似然估计.

2. (本题满分 12 分) 设总体  $X$  服从指数分布  $Exp(\frac{1}{\theta})$ , 其密度函数为

$$p(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left\{-\frac{x}{\theta}\right\}, x > 0, \theta > 0$$

试计算  $\theta$  的费希尔信息量  $I(\theta)$ ; 并验证样本均值  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  是  $\theta$  的有效估计.

3. (本题满分 10 分) 已知某种材料的抗压强度  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 现随机地从其中抽取 10 个, 测得  $\bar{x} = 457.5, s = 35.2176$ , 分别对下列两种情况求出均值  $\mu$  的 95% 置信度的置信区间.

(1)  $\sigma = 30$

(2)  $\sigma$  未知.

(注:  $\Phi(1.96) = 0.975$   $t_{0.975}(9) = 2.2622$  )

4. (本题满分 10 分) 在一个单因子试验中, 因子 A 有三个水平, 每个水平下各重复 4 次, 具体数据如下:

水平	数据			
$A_1$	8	5	7	4
$A_2$	6	10	12	9
$A_3$	0	1	5	2

试计算误差平方和  $S_e$ , 因子 A 的平方和  $S_A$ , 总平方和  $S_T$ , 并指出它们各自的自由度.

## 五、应用分析题 (本题共 2 小题, 满分 16 分)

1. (本题满分 7 分) 某百货商场的日销售额服从正态分布, 去年的日均销售额为 53.6 (万元), 方差为 36, 今年随机抽查了 10 个日销售额, 测得日均销售额为  $\bar{x} = 57.7$ . 根据经验, 方差没有变化, 问今年的日均销售额与去年相比有无显著变化? ( $\alpha = 0.05$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ )

2. (本题满分 9 分) 现收集了 12 组合金钢中的碳含量  $x$  及强度  $y$  的数据, 经计算得  $\bar{x} = 0.1583$ ,  $\bar{y} = 49.125$ ,

$$\sum x_i^2 = 0.3194, \sum y_i^2 = 29304.25, \sum x_i y_i = 95.8050$$

(1) 建立  $y$  关于  $x$  的一元线性回归方程  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ ;

(2) 对建立的回归方程作显著性检验 ( $\alpha = 0.05$ ).

(注:  $F_{0.95}(1,10) = 4.96$ )

## 山东财经大学 2016-2017 学年第二学期模拟试题

### 概率论与数理统计 II 参考答案与评分标准

#### 一、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 11.24, 0.0112, 11.20                      2.  $F(1,1)$                       3.  
 $\lambda, \frac{\lambda}{n}, \lambda$   
4.  $a+b=1$                       5. 第一类 (或弃真)

#### 二、选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

1. C                      2. B                      3. C                      4. C

#### 三、判断题 (本大题共 5 小题, 每小题 2 分, 共 10 分)

1.  $\checkmark$                       2.  $\times$                       3.  $\checkmark$                       4.  $\times$                       5.  $\checkmark$

#### 四、计算题 (本题共 4 小题, 满分 47 分)

1. 解: (1) 因为  $x \sim N(\mu, 1)$ , 所以  $Ex = \mu$  .

$$\text{令 } Ex = \bar{x} = \mu$$

解

得

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

....., ..... 5'

$$(2) \because X \sim N(\mu, 1), \therefore p(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right]$$

$$\text{似然函数 } L(\mu) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \mu) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_i - \mu)^2}{2}\right] \right]$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}\right]$$

.....4'

$$\text{对数似然函数为 } \ln L(\mu) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{2}$$

$$\text{似然方程组为 } \frac{d \ln L(\mu)}{d \mu} = -\sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \quad \dots$$

.....4'

$$\text{解 之 得 : } \hat{\mu} = \bar{x}$$

....., ....., 2'

$$2. \text{ 解: } \ln p(x; \theta) = -\ln \theta - \frac{x}{\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x; \theta) = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} = \frac{x - \theta}{\theta^2}$$

$$\text{于是 } I(\theta) = E\left(\frac{x - \theta}{\theta^2}\right)^2 = \frac{\text{Var}(x)}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2} \quad \dots$$

....., . 6'

$$\text{而 } E\bar{x} = Ex = \theta$$

$\bar{x}$  是  $\theta$  的无偏估计;

$$\text{且其方差 } D\bar{x} = \frac{Dx}{n} = \frac{\theta^2}{n} = (nI(\theta))^{-1}, \text{ 达到了 C—R 下界,}$$

所以  $\bar{x}$  是  $\theta$  的有效估计.

...

....., . 6'

$$3. \text{ 解: } (1) 1 - \alpha = 0.95, \alpha = 0.05, \text{ 查表知 } u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96,$$

于是这种材料抗压强度均值  $\mu$  的 0.95 置信区间为



$$= [457.5 \pm 1.96 \times 30 / \sqrt{10}] = [438.9058, 476.0942]$$

...

..... 5'

(2)  $1 - \alpha = 0.95, \alpha = 0.05$ , 查表知  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = t_{0.975}(9) = 2.2622$

当  $\sigma$  未知时, 这种材料抗压强度均值  $\mu$  的 0.95 置信区间为

$$\begin{aligned} & [\bar{x} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}] \\ & = [457.5 \pm 2.2622 \frac{35.2176}{\sqrt{10}}] = [432.3064, 482.6936] \end{aligned}$$

..... 5'

4. 解: 列计算表如下:

水平	数据			$T_i$	$T_i^2$	$\sum y_{ij}^2$
A1	8	5	7	24	576	154
	4					
A2	6	10	12	37	1369	361
	9					
A3	0	1	5	8	64	30
	2					
和				69	2009	545

...

..... 4'

$$r = 3 \quad m = 4 \quad n = r \times m = 3 \times 4 = 12$$

$$S_T = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n} = 545 - \frac{69^2}{12} = 148.25 \quad f_T = n - 1 = 11$$

$$S_A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^r T_i^2 - \frac{T^2}{n} = \frac{1}{4} \times 2009 - \frac{69^2}{12} = 105.5 \quad f_A = r - 1 = 2$$

$$S_e = S_T - S_A = 148.25 - 105.5 = 42.75 \quad f_e = n - r = 9$$

..... 6'

## 五、应用分析题（本题共2小题，满分16分）

1. 设  $X$  表示超市的日销售额，且设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，其中  $\mu$  未知， $\sigma^2 = 36$

$$H_0: \mu = 53.6 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 53.6$$

..... 1'

$$\text{在 } H_0 \text{ 成立时, } U = \frac{\bar{X} - 53.6}{\sigma / \sqrt{10}} \sim N(0, 1)$$

$$\text{对于 } \alpha = 0.05, \quad u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$$

$$\text{拒绝域 } W = \{|u| \geq 1.96\}$$

..... 3'

$$\text{对于 } \bar{x} = 57.7$$

$$|u| = \left| \frac{57.7 - 53.6}{6 / \sqrt{10}} \right| = 2.16 > 1.96$$

故应拒绝  $H_0$ ，今年的日均销售额与去年相比有显著变化

.....

..... 3'

2. 解：（1）由条件计算得

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = 0.3194 - 12 \times 0.1583^2 = 0.0187$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 = 29304.25 - 12 \times 49.125^2 = 345.0625$$

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x} \cdot \bar{y} = 95.8050 - 12 \times 0.1583 \times 49.125 = 2.4872$$

则  $\beta_0, \beta_1$  的最小二乘估计为

$$\hat{\beta}_1 = \frac{l_{xy}}{l_{xx}} = \frac{2.4872}{0.0187} = 133.0053$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 49.125 - 133.0053 \times 0.1583 = 28.0703$$

因此  $y$  关于  $x$  的一元线性回归方程为  $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x = 28.0703 + 133.0053x$

..... 5'

(2) 由 (1) 计算各平方和得

$$S_T = l_{yy} = 345.0625 \quad f_T = n - 1 = 11$$

$$S_R = \hat{\beta}_1^2 l_{xx} = 133.0053^2 \times 0.0187 = 330.8107 \quad f_R = 1$$

$$S_e = S_T - S_R = 345.0625 - 330.8107 = 14.2518 \quad f_e = n - 2 = 10$$

$$\text{则 } F = \frac{MS_R}{MS_e} = \frac{S_R / f_R}{S_e / f_e} = \frac{330.8107 / 1}{14.2518 / 10} = 232.1185$$

对于  $\alpha = 0.05$ ,  $F_{1-\alpha}(1, n-2) = F_{0.95}(1, 10) = 4.96 < 232.1185$

因此在显著性水平 0.05 下, 回归方程是显著的.

..... 4'