§2.4 随机变量函数的分布

随机变量函数定义:

定义 设X是一随机变量, $y=g(x)$是连续函数, 则$Y=g(X)$也是随机变量, 称 $Y=g(X)$ 为**随机变量 X 的函数.**

问题:

已知X的分布 $\xrightarrow{Y=g(X)}$ 求Y的分布?

2.4.1 离散型随机变量函数的分布

例1 测量一个正方形的边长, 其结果是一个随机变量 X, X 的分布如表 1 所示. 求周长 Y 和面积 Z 的概率函数.

表1

X	7	8	9	10
P	0.1	0.3	0.4	0.2

解：显然，$Y=4X$，$Z=X^2$.

Y 所有可能的取值为 28, 32, 36, 40.

$P\{Y=28\}=P\{4X=28\}=P\{X=7\}=0.1$，

$P\{Y=32\}=P\{4X=32\}=P\{X=8\}=0.3$，

类似求出 $P\{Y=36\}$，$P\{Y=40\}$。

依此计算，可得 Y 的概率函数如表 2 所示.

表2

Y	28	32	36	40
P	0.1	0.3	0.4	0.2

同理可求出随机变量 Z 的概率函数如表 3 所示.

表3

Z	49	64	81	100
P	0.1	0.3	0.4	0.2

例2 已知X的概率函数，求$Y=X^2$的概率函数。

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.4	0.2

解: Y所有可能的取值为0, 1, 4。

$$P\{Y=0\} = P\{X^2=0\} = P\{X=0\} = 0.3,$$

$$P\{Y=1\} = P\{X^2=1\} = P\{X=-1\}+P\{X=1\} = 0.5,$$

$$P\{Y=4\} = P\{X^2=4\} = P\{X=2\} = 0.2,$$

故Y的概率函数为:

Y	0	1	4
P	0.3	0.5	0.2

或者解:

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.4	0.2
X^2	1	0	1	4

总结：一般地，设随机变量X的概率函数为

$$p_k=P\{X=x_k\}\quad (k=1, 2, \ldots)$$

并假设随机变量$Y=g(X)$是X的连续函数.

1) 若对于X的所有可能取值x_k，Y的取值$y_k=g(x_k)(k=1,2,\ldots)$全不相同（即映射g是一对一），则Y的概率函数为

$$P\{Y=y_k\}=P\{X=x_k\}=p_k\quad (k=1,2,\ldots)$$

2) 若X的所有可能取值x_k中至少有两个值$x_i\neq x_j$，其对应Y的取值$y_i=g(x_i)=y_j=g(x_j)$（即映射g是多对一），此时应将这些相等的值作为Y的一个取值，Y取该值的概率是X取相应值的概率之和.

2.4.2 连续型随机变量函数的分布

设随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$, 并假设 $y=g(x)$ 及其一阶导数是连续函数, 则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量.

$$\text{已知 } X \sim f_X(x) \xrightarrow{Y=g(X)} Y \sim f_Y(y)$$

步骤：（分布函数法）

第一步：求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\in I_y\}=\int_{I_y} f_X(x)dx$$

第二步：对 $F_Y(y)$ 求导得 $f_Y(y)$:

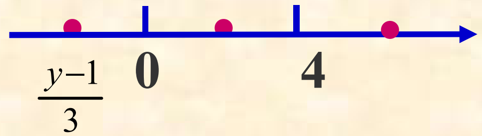
$$f_Y(y)=(F_Y(y))'$$

例1 设随机变量X服从[0,4]上的均匀分布, 求$Y=3X+1$的密度函数.

解法1: $X \sim f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{3X+1 \le y\} = P\{X \le \frac{y-1}{3}\} = \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx$$

1° 当 $\frac{y-1}{3} < 0$时, 即$y < 1$时, $F_Y(y) = 0$



2° 当$0 \le \frac{y-1}{3} \le 4$时, 即$1 \le y \le 13$时,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{\frac{y-1}{3}} \frac{1}{4}dx = \frac{y}{12} - \frac{1}{12}$$

3° 当 $\frac{y-1}{3} > 4$时, 即$y > 13$时,

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{4} \frac{1}{4}dx + \int_{4}^{\frac{y-1}{3}} 0dx = 1$$

所以Y的分布函数:
$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<1\\ \dfrac{y-1}{12} & 1\le y\le 13\\ 1 & y>13\end{cases}$$

于是Y的密度函数:
$$f_Y(y)=\begin{cases}1/12 & 1\le y\le 13\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故$3X+1$服从$[1, 13]$上的均匀分布.

解法2（教材，方法简单）

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{3X+1\le y\}=P\{X\le\frac{y-1}{3}\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx$$

积分上限函数求导

积分变限函数求导公式：

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x)dx=f(b(x))b'(x)-f(a(x))a'(x)$$

不求上面积分，上式两边直接对y求导：

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{3}} f_X(x)dx=f_X(\frac{y-1}{3})\cdot(\frac{y-1}{3})'=\frac{1}{3}f_X(\frac{y-1}{3})$$

又

$$f_X(\frac{y-1}{3})=\begin{cases}\frac{1}{4} & 0\le\frac{y-1}{3}\le 4\\ 0 & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4} & 1\le y\le 13\\ 0 & 其它\end{cases}$$

所以 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{12} & 1\le y\le 13\\ 0 & 其它\end{cases}$. 故$3X+1$服从[1,13]上的均匀分布.

总结：若随机变量X服从$[a,b]$上的均匀分布，则X的线性函数$Y=kX+c\ (k\ne 0)$服从相应区间上的均匀分布.

例2 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=aX+b$, 其中$a\neq 0$, b为任意常数, 则$Y\sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

证明: 记Y的分布函数为$F_Y(y)$,密度函数为$f_Y(y)$, X的分布函数为$\Phi(x)$,密度函数为$\varphi(x)$,则有

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{aX+b\le y\}$$

当$a>0$时, $F_Y(y)=P\{X\le \frac{y-b}{a}\}=\Phi(\frac{y-b}{a})$

当$a<0$时, $F_Y(y)=P\{X\ge \frac{y-b}{a}\}=1-P\{X<\frac{y-b}{a}\}$
$=1-\Phi(\frac{y-b}{a})$

$$\text{故} F_Y(y)=\begin{cases}\Phi(\frac{y-b}{a}) & a>0\\ 1-\Phi(\frac{y-b}{a}) & a<0\end{cases}$$

$$故\ F_Y(y)=\begin{cases}\Phi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a>0\\[2ex] 1-\Phi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a<0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}\Phi'\left(\dfrac{y-b}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a>0\\[2ex] -\dfrac{1}{a}\Phi'\left(\dfrac{y-b}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}\varphi\left(\dfrac{y-b}{a}\right) & a<0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|a|}\varphi\left(\frac{y-b}{a}\right)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left[\frac{y-b}{a}-\mu\right]^2}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|a|\sigma}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2a^2\sigma^2}}$$

即 $Y\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

结论：设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=aX+b$，其中$a\neq 0$，b为任意常数，

则$Y\sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2)$.

说明：正态分布的线性函数仍然服从正态分布。

如：$X\sim N(1, 4)$，$Y=2X+1$，则$Y\sim N(3, 16)$.

特别地：设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$，则$Y\sim N(0, 1)$

称为X的标准化随机变量

上一节例5 设$X\sim N(1, 4)$，求：(1)$P\{0<X<1.6\}$，(2)$P\{|X|\le 2\}$.

解 (1) $P\{0<X<1.6\}=\Phi(1.6)-\Phi(0)$

$$=\Phi_0\left(\frac{1.6-1}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-1}{2}\right)=\Phi_0(0.3)-\Phi_0(-0.5)$$

(2) $P\{|X|\le 2\}=P\{-2\le X\le 2\}$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=\Phi_0\left(\frac{2-1}{2}\right)-\Phi_0\left(\frac{-2-1}{2}\right)$$

或者(1) $P\{0<X<1.6\}$

$$\boxed{\frac{X-1}{2}\sim N(0,1)}$$

$$=P\left\{\frac{0-1}{2}<\frac{X-1}{2}<\frac{1.6-1}{2}\right\}$$

$$=P\left\{-0.5<\frac{X-1}{2}<0.3\right\}$$

$$=\Phi_0(0.3)-\Phi_0(-0.5)$$

可类似求(2)$P\{|X|\le 2\}$

上一节教材例7　若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，有

(1) $P\{|X-\mu| \le \sigma\} = P\{\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma\} = \Phi(\mu+\sigma) - \Phi(\mu-\sigma)$

$$= \Phi_0\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_0(1) - \Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1) - 1 = 0.6826.$$

(2) $P\{|X-\mu| \le 2\sigma\} = P\{\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma\} = \Phi(\mu+2\sigma) - \Phi(\mu-2\sigma)$

$$= \Phi_0\left(\frac{\mu+2\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{\mu-2\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi_0(2) - \Phi_0(-2) = 2\Phi_0(2) - 1 = 0.9545.$$

或者：　若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，有 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

(1) $P\{|X-\mu| \le \sigma\} = P\left\{\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right| \le 1\right\} = 2\Phi_0(1) - 1 = 0.6826.$

(2) 同理：$P(|X-\mu| \le 2\sigma) = P\left\{\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right| \le 2\right\} = 2\Phi_0(2) - 1 = 0.95456.$

定理2.1 设随机变量X的密度函数为$f_X(x)$, 则随机变量$Y=kX+b(k\neq 0)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right)$$

求线性函数$Y=kX+b$的密度函数方法: 可直接套用该定理结论或者用分布函数法

证明：对任意的 $y\in(-\infty,+\infty)$

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{kX+b\le y\}.$$

当$k>0$时， $F_Y(y)=P\{kX+b\le y\}=P\{X\le\frac{y-b}{k}\}=F_X\left(\frac{y-b}{k}\right);$

当$k<0$时, $F_Y(y)=P\{kX+b\le y\}=P\{X\ge\frac{y-b}{k}\}=1-F_X\left(\frac{y-b}{k}\right);$

所以Y的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\left(F_X\left(\frac{y-b}{k}\right)\right)'=\frac{1}{k}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right), & k>0\\ \left(1-F_X\left(\frac{y-b}{k}\right)\right)'=-\frac{1}{k}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right), & k<0\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right).$$

定理2.1 设随机变量X的密度函数为$f_X(x)$，则随机变量$Y=kX+b(k\neq 0)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right)$$

例(2017-2018) 设X的密度函数$f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，则$Y=2X$的密度函数$f_Y(y)=($ $)$.

解：$k=2, b=0,$

则$f_Y(y)=\frac{1}{|2|}\frac{1}{2}e^{-\left|\frac{y}{2}\right|} \quad =\frac{1}{4}e^{-\left|\frac{y}{2}\right|}$

注：若$Y=g(X)$不是线性函数，不能用定理2.1，此时用分布函数法求Y的密度函数。

注：若$Y=g(X)$不是线性函数，用分布函数法求Y的密度函数。

例3 设$X\sim N(0,1)$, 求$Y=X^2$的密度函数.

当 $y<0$ 时，$\{X^2\le y\}$是不可能事件

当 $y=0$ 时，$\{X^2\le y\}=\{X^2\le 0\}=\{X=0\}$

解: Y 的分布函数 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当 $y\le 0$时，$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$

当 $y>0$时，

$$F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\varphi_0(t)dt$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=2\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

所以Y的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0\\ 2\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt & y>0\end{cases}$$

所以Y的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0 \\ 2\int_0^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt & y>0 \end{cases}$$

于是Y 的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{1}{2}} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$$

注：若$X\sim N(0,1)$，则$X^2\sim\chi^2(1)$.

例4 设连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/(x+1) & 0<x<e-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$Y=\sqrt{X}$，求随机变量Y的密度函数$f_Y(y)$.

解法1： Y的分布函数为$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt{X}\le y\}$

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=0$，故$f_Y(y)=F_y'(y)=0.$

当$y>0$时，$F_Y(y)=P\{\sqrt{X}\le y\}=P\{0<X\le y^2\}=\int_0^{y^2}f(x)dx$

$$f_Y(y)=\left(\int_0^{y^2}f(x)dx\right)'=f(y^2)\cdot 2y$$

积分上限函数求导

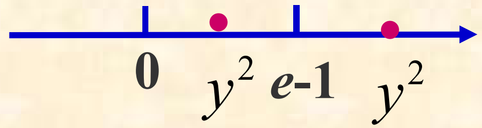
$$f_Y(y)=\begin{cases}2y\cdot\dfrac{1}{1+y^2}, & 0<y^2<e-1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2y}{1+y^2} & 0<y<\sqrt{e-1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

综上所述，于是Y的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1+y^2} & 0\le y<\sqrt{e-1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例4 设连续型随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}1/(x+1) & 0<x<e-1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$Y=\sqrt{X}$,求随机变量Y的密度函数$f_Y(y)$.

解法2(教材解法): Y的分布函数为$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\sqrt{X}\le y\}$

当$y<0$时, $F_Y(y)=0.$

当$y\ge0$时, $F_Y(y)=P\{\sqrt{X}\le y\}=P\{0<X\le y^2\}=\int_0^{y^2}f(x)dx$

当$0\le y^2<e-1$时, 即$0\le y<\sqrt{e-1}$, $F_Y(y)=\int_0^{y^2}\frac{1}{x+1}dx=\ln(1+y^2)$

当$y^2\ge e-1$时, 即$y\ge\sqrt{e-1}$, $F_Y(y)=\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx+\int_{e-1}^{y^2}0dx=1$

所以Y的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\\ \ln(1+y^2) & 0\le y<\sqrt{e-1}\\ 1 & y\ge\sqrt{e-1}\end{cases}$$

于是Y的密度函数

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2y}{1+y^2} & 0\le y<\sqrt{e-1}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

注：该例建议用解法1。

总结复习

一、离散型随机变量函数的分布

一般地，设随机变量X的概率函数为

$$p_k=P\{X=x_k\} \quad (k=1, 2, \ldots)$$

并假设随机变量$Y=g(X)$是X的连续函数.

1) 若对于X的所有可能取值x_k，Y的取值$y_k=g(x_k)(k=1,2,\ldots)$全不相同（即映射g是一对一），则Y的概率函数为

$$P\{Y=y_k\}=P\{X=x_k\}=p_k \quad (k=1,2,\ldots)$$

2) 若X的所有可能取值x_k中至少有两个值$x_i \neq x_j$，其对应Y的取值$y_i=g(x_i)=y_j=g(x_j)$（即映射g是多对一），此时应将这些相等的值作为Y的一个取值，Y取该值的概率是X取相应值的概率之和.

二、连续型随机变量函数的分布

设随机变量X的密度函数为$f_X(x)$, 并假设$y=g(x)$及其一阶导数是连续函数, 则$Y=g(X)$是连续型随机变量.

$$\text{已知 } X\sim f_X(x) \xrightarrow{Y=g(X)} Y\sim f_Y(y)$$

1、若$Y=g(X)=kX+b(k\neq 0)$是线性函数，则随机变量Y的密度函数套用定理2.1结论，为

$$f_Y(y)=\frac{1}{|k|}f_X\left(\frac{y-b}{k}\right)$$

或者用分布函数法求。

2、若$Y=g(X)$不是线性函数，则随机变量Y的密度函数用

分布函数法求。

步骤：（分布函数法）

第一步：求出 Y 的分布函数 $F_Y(y)$:

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=P\{X\in I_y\}=\int_{I_y} f_X(x)dx$$

不需要求出该积分，直接对积分上限函数求导

第二步：对 $F_Y(y)$ 求导得 $f_Y(y)$:

$$f_Y(y)=(F_Y(y))'$$

三、结论

1、若$X\sim U[a,b]$，则其线性函数$Y=aX+b$在相应区间仍服从均匀分布.

例如：若$X\sim U[-1,3]$，则$Y=-4X+5$服从区间$[-7,9]$上的均匀分布。

2、若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则$Y=aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$.

3、设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$, 则 $Y\sim N(0,1)$