# 习题二

一、填空题

（1） 已知$P\{X=k\}=c^{-1}\dfrac{\lambda^k}{k!},k=0,1,2,\cdots,$其中$\lambda>0$，则$c=$_____.（$e^{\lambda}$）

解：$1=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c^{-1}\dfrac{\lambda^k}{k!}=c^{-1}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{\lambda^k}{k!}=c^{-1}e^{\lambda}$，故$c=e^{\lambda}$.

（2） 设$X$服从泊松分布，且$P\{X=2\}=2P\{X=1\}$，则$P\{X=3\}=$_____.（$\dfrac{32}{3}e^{-4}$）

解：因为$X$服从泊松分布，且$P\{X=2\}=2P\{X=1\}$，则有$\dfrac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}=2\cdot\dfrac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$，解之得：$\lambda=4$，

故$P\{X=3\}=\dfrac{4^3}{3!}e^{-4}=\dfrac{32}{3}e^{-4}$.

（3） 设离散型随机变量$X$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.3, & -1\le x<0\\ 0.8, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$$

则$P\{X=-1\}=$_________ ,(0.3)　　$P\{X=1.5\}=$________.(0)

解：$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1-0)=0.3-\lim\limits_{x\to -1^-}F(x)=0.3-0=0.3;$

$P\{X=1.5\}=F(1.5)-F(1.5-0)=0.8-\lim\limits_{x\to 1.5^-}F(x)=0.8-0.8=0$.

（4） 设随机变量$X$的分布函数为$F(x)=a+b\arctan x$，则密度函数$f(x)=$______.$\left(\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}\right)$

解：因为$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(a+b\arctan x)=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\arctan x)=1\end{cases}$，即$\begin{cases}a-\dfrac{\pi}{2}b=0\\ a+\dfrac{\pi}{2}b=1\end{cases}$，解之得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=\dfrac{1}{\pi}\end{cases}$，

故$F(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\arctan x$，$f(x)=F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

(5) 已知$X$的概率函数为

| $X$ | -1 | 0 | 1 |
| --- | --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

则 $Y=X^2$ 的概率函数为______.

| $X^2$ | 0 | 1 |
| --- | --- | --- |
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |

(6) 设随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，则 $2X$ 的密度函数为_____. $\left(f_{2X}(x)=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}\right)$

解：由定理 2.1， $f_{2X}(x)=\dfrac{1}{|2|}f_X(\dfrac{x}{2})=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\pi(1+\dfrac{x^2}{4})}=\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$.

2. 选择题

（1）设离散型随机变量 $X$ 的概率函数 $P\{X=k\}=b\lambda^k, k=1,2,\cdots,$ 且 $b>0$，则（C）成立.

（A） $\lambda=b+1$　　（A） $\lambda>0$ 的任何实数

（C） $\lambda=\dfrac{1}{b+1}$　　（D） $\lambda=\dfrac{1}{1-b}$

分析：由概率函数的性质，$1=\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}b\lambda^k=b\cdot\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，解之得：$\lambda=\dfrac{1}{b+1}$

（2）设 $X$ 的分布函数为 $F(x)$，$a,b$ 为实数，且 $a<b$，则（A　C）正确.

（A） $P\{X\le a\}=F(a)$　　（B） $P\{X<a\}=F(a)$

（C） $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$　　（D） $P\{a\le X<b\}=F(b)-F(a)$

（3）任何一个连续型随机变量的密度函数 $f(x)$ 一定满足（C）

（A） $0\le f(x)\le 1$　　（B）在定义域内单调不减

（C） $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$　　　　（D） $f(x) > 0$

（4）已知随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} kx, 0<x<1 \\ 0, \quad 其它 \end{cases}$. 则 $k=$（A）

（A） 2　　　　（B）大于零的任何数

（C） $\frac{1}{2}$　　　　（D）1

分析：由密度函数的性质知，$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^1 kxdx = k\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{k}{2}$，故 $k=2$.

（5）若 $X$ 服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布，$Y=3X-1$，则（B　D）

（A） $Y$ 服从 $[0,2]$ 上的均匀分布　　（B） $Y$ 服从 $[-1,5]$ 上的均匀分布

（C） $P\{0\le Y\le 2\}=1$　　　　（D） $P\{0\le X\le 2\}=1$

分析：由 2.4 节知，若 $X$ 服从区间 $[0,2]$ 上的均匀分布，$Y$ 为 $X$ 的线性函数，则 $Y$ 服从 $[-1,5]$（相应区间）上的均匀分布，则 $P\{0\le Y\le 2\}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P\{0\le X\le 2\}=\frac{2}{2}=1$.

（6）设 $X\sim N(1,1)$，其密度函数为 $\varphi(x)$，分布函数为 $\Phi(x)$，则（C）成立.

（A） $P\{X\le 0\}=P\{X\ge 0\}=0.5$　　（B） $\varphi(x)=\varphi(-x)$

（C） $P\{X\le 1\}=P\{X\ge 1\}=0.5$　　（D） $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

分析：方法一：最简单的方法是利用密度函数 $\varphi(x)$ 的几何图形：以 $x$=1 为对称轴的倒扣的钟形，又 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1$，故 $P(X\le 1)=\int_{-\infty}^{1}\varphi(x)dx=0.5$，$P(X\ge 1)=\int_{1}^{+\infty}\varphi(x)dx=0.5$ 知，选项（C）正确，其他选项错误。

方法二：利用附表 3 查表可知选项（A）错误，选项（C）正确；由 $\varphi(x)$ 的几何图形知选项（B）错误，选项（D）只是对服从标准正态分布的随机变量才正确，故选项（D）错误.

（7） 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\sigma$ 增大时，概率 $P(|X-\mu|<\sigma)$ 是（C）.

（A）单调递增　　　　（B）单调递减

（C）保持不变　　　　　　　　　　　　（D）增减不定

分析：方法一：因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$，故

$P(|X-\mu|<\sigma) = P(|\dfrac{X-\mu}{\sigma}|<1) = 2\Phi_0(1)-1$ 与 $\mu,\sigma$ 无关, 故选(C).

方法二：$P(|X-\mu|<\sigma) = P(-\sigma < X-\mu < \sigma) = P(-1 < \dfrac{X-\mu}{\sigma} < 1) = \Phi_0(1)-\Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1)-1$.

方法三：

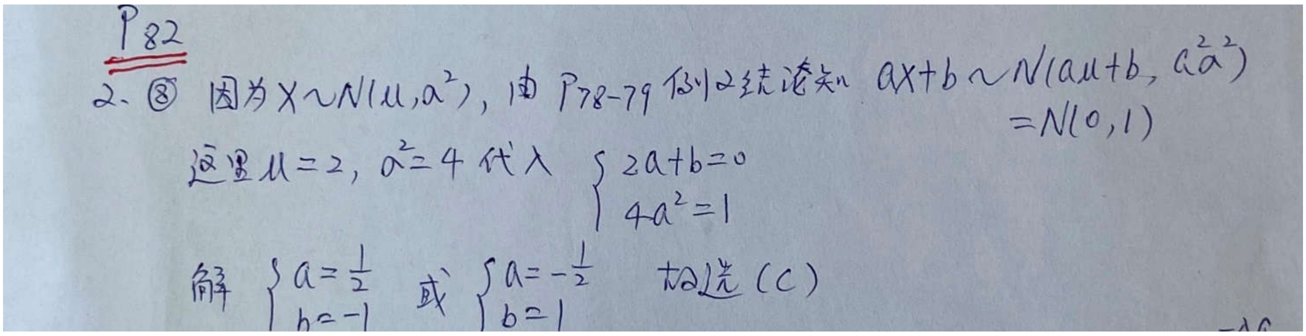
$$P(|X-\mu|<\sigma) = P(-\sigma < X-\mu < \sigma) = P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = \Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$$
$$= \Phi(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}) = \Phi_0(1)-\Phi_0(-1) = 2\Phi_0(1)-1 .$$

（8）已知随机变量 $X \sim N(2,4)$，且 $aX+b$ 服从标准正态分布，则（C）.

（A）$a=2, b=-2$　　　　　　　　（B）$a=-2, b=-1$

（C）$a=-\dfrac{1}{2}, b=1$　　　　　　　　（D）$a=-\dfrac{1}{2}, b=-1$

分析：见下面图片.



P82

2. ⑧ 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，由 P78-79 例2结论知 $aX+b \sim N(a\mu+b, a^2\sigma^2) = N(0,1)$

这里 $\mu=2$, $\sigma^2=4$ 代入 $\begin{cases} 2a+b=0 \\ 4a^2=1 \end{cases}$

解 $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=1 \end{cases}$ 故选(C)

（9）设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为任意两个随机变量的分布函数，令 $F(x) = aF_1(x)+bF_2(x)$，则下列各组数中能使 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数的是（B）.

（A）$a=\dfrac{2}{3}, b=\dfrac{2}{3}$　　　　　　　　（B）$a=\dfrac{3}{5}, b=\dfrac{2}{5}$

（C）$a=\dfrac{3}{2}, b=\dfrac{1}{2}$　　　　　　　　（C）$a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}$

分析：因为 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为任意两个随机变量的分布函数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)=1$.

若 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数，则 $1=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[aF_1(x)+bF_2(x)] = a+b$，即 $a+b=1$，只有选项(B)满足条件 $a+b=1$.

（10）设 $X \sim N(\mu,25)$， $Y \sim N(\mu,100)$，记 $p_1 = P\{X \le \mu-5\}$， $p_2 = P\{Y \ge \mu+10\}$，则（A）.

（A） $p_1 = p_2$　　　　（B） $p_1 > p_2$

（C） $p_1 < p_2$　　　　（C）无法确定

分析：因为 $X \sim N(\mu,25)$，则 $p_1 = P\{X \le \mu-5\} = \Phi(\mu-5) = \Phi_0(\dfrac{\mu-5-\mu}{5}) = \Phi_0(-1) = 1-\Phi_0(1)$

或者　$p_1 = P\{X \le \mu-5\} = P\{\dfrac{X-\mu}{5} \le -1\} = \Phi_0(-1) = 1-\Phi_0(1)$；

又 $Y \sim N(\mu,100)$，则

$$p_2 = P\{Y \ge \mu+10\} = 1-P\{Y < \mu+10\} = 1-\Phi(\mu+10) = 1-\Phi_0(\frac{\mu+10-\mu}{10}) = 1-\Phi_0(1).$$

故 $p_1 = p_2$

3. 一汽车沿街道行驶，需要经过 3 个设有红绿信号灯的路口，若每个信号灯显示红绿两种信号的时间相等，且各个信号灯工作相互独立. 若以 $X$ 表示汽车首次遇到红灯前已通过的路口数，求 $X$ 的概率分布.

解：由题意知，$X$ 的可能取值为 0，1，2，3；设 $A_i$ 表示经过第 $i$ 个路口时信号灯为红灯，则 $\overline{A_i}$ 表示经过第 $i$ 个路口时信号灯为绿灯，$i=1,2,3$，且 $A_1, A_2, A_3$ 相互独立，则

$$P\{X=0\} = P(A_1) = \frac{1}{2},$$

$$P\{X=1\} = P(\overline{A}_1 A_2) = P(\overline{A}_1)P(A_2) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X=2\} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

$$P\{X=3\} = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

所以 $X$ 的概率分布为

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

4. 一袋中共有 10 个球，其中 7 个白球，3 个黑球. 每次从袋中任取一个，在下述三种情况下，分别求直至取到白球为止所需抽取次数的概率函数：

（1） 每次取出的球不再放回去；

（2） 每次取出的球仍放回去；

（3） 每次取出一个球后，总是另取一个白球放回袋中.

解: （1）设 $X$ 表示直至取到白球为止抽取球的次数，则 $X$ 的可能取值为 1，2，3，4，故

$$P\{X=1\}=\frac{7}{10},\qquad P\{X=2\}=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30},$$

$$P\{X=3\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{120},\qquad P\{X=4\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{7}=\frac{1}{120}.$$

所以 $X$ 的概率函数为

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{120}$ | $\frac{1}{120}$ |

（2）设 $Y$ 表示直至取到白球为止抽取球的次数，则 $Y$ 的可能取值为 $1,2,3,\cdots\cdots$,

故 $Y$ 的概率分布为

$$P\{Y=k\}=\left(\frac{3}{10}\right)^{k-1}\times\frac{7}{10},\quad k=1,2,3,\cdots\cdots.$$

（3）设 $Z$ 表示直至取到白球为止抽取球的次数，则 $Z$ 的可能取值为 1，2，3，4.

$$P\{Z=1\}=\frac{7}{10},\qquad P\{Z=2\}=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}=\frac{24}{100},$$

$$P\{Z=3\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{54}{1000},\qquad P\{Z=4\}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}\times\frac{10}{10}=\frac{6}{1000}.$$

则 $Z$ 的概率分布为

| $Z$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{24}{100}$ | $\frac{54}{1000}$ | $\frac{6}{1000}$ |

5.（拉普拉斯分布）随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=Ae^{-|x|},-\infty<x<+\infty .$$

求 （1）常数 $A$；（2） $P\{0<X<1\}$， $P\{-1\le X\le 1\}$；（3） $X$ 的分布函数 $F(x)$.

解：（1）由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}dx=-2Ae^{-x}\Big|_{0}^{+\infty}=2A$，可得 $A=\frac{1}{2}$.

偶函数在对称区间上的积分

（2） $P\{0<X<1\}=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(-e^{-x})\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$，

$$P\{-1\le x\le 1\}=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=2\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-e^{-1}.$$

（3）因为 $X$ 的分布函数 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$，又 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$，故

当 $x<0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{x}dx=\frac{1}{2}e^{x}$.

当 $x\ge 0$ 时， $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx$

$$=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{x}dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-x}dx=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$

所以 $X$ 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$.

6. 由某商店过去的销售记录知道，某种商品每月的销售数量可以用参数 $\lambda=10$ 的泊松分布来描述. 为了以95%以上的把握保证不脱销，问商店在月初至少应进该商品多少件？（假定上个月没有存货）

解：见 2.3 节课件中例题.

7. 在某公共汽车站，甲、乙、丙三人分别独立的等 1 路，2 路，3 路汽车. 设每个人等车时间（单位：分钟）均服从 $[0,5]$ 上的均匀分布. 求 3 人中至少有 2 个人等车时间不超过 2 分钟的概率.

解：设 $X$ 表示每个人等车的时间，则 $X \sim U[0,5]$，$X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5},0\le x\le 5\\ 0,\quad 其它\end{cases}.$$

等车时间不超过 2 分钟的概率为

$$P\{X\le 2\}=\int_0^2 \frac{1}{5}dx=\frac{2}{5}.$$

设 $Y$ 表示 3 个人中等车时间不超过 2 分钟的人数，由题意知 $Y \sim B(3,\frac{2}{5})$，

所以 3 人中至少有 2 个人等车时间不超过 2 分钟的概率为

$$P\{Y\ge 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1+C_3^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^0=\frac{44}{125}.$$

8. 设顾客在某银行的窗口等候服务的时间 $X$（单位：分钟）服从参数为 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的指数分布. 某顾客在窗口等候服务，若超过 10 分钟，他就离开. 他一个月内要到银行 5 次. 以 $Y$ 表示一个月内他未等到服务而离开的次数. 试求 $Y$ 的分布，并计算 $P\{Y\ge 1\}$.

解： 因为 $X$ 服从参数为 $\lambda=\frac{1}{5}$ 的指数分布，则 $X \sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x},x>0\\ 0,\qquad x\le 0\end{cases}$，

则顾客未等到服务而离开的概率为：$P\{X>10\}=\int_{10}^{+\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x}dx=e^{-2}$.

所以由题意知 $Y$ 的概率分布为 $Y \sim B(5,e^{-2})$； 且

$$P\{Y\ge 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_5^0(e^{-2})^0(1-e^{-2})^5=1-(1-e^{-2})^5.$$

9. 公共汽车门的高度是男子与车门顶碰头的概率在 0.01 以下来设计的. 设男子身高（单位：厘米）为 $X \sim N(170,6^2)$，问车门高度应如何确定？

解： 见学习通.

或者：设车门的高度为 $a$，而男子与车门顶碰头等价于身高 $X\ge$ 车门高度 $a$，故 $a$ 应满足

$$P\{X\ge a\}=1-P\{X<a\}=1-\Phi(a)=1-\Phi_0(\frac{a-170}{6})<0.01$$

即 $\Phi_0(\frac{a-170}{6})\ge 0.99$，查表可得 $\frac{a-170}{6}\ge 2.33$，解之得 $a\ge 183.98$.

所以车门高度应至少为 183.98 厘米.

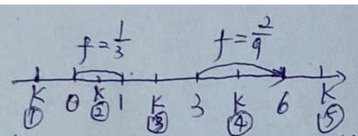
10. 设随机变量 $X$ 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3},0\le x\le 1\\ \dfrac{2}{9},3\le x\le 6\\ 0,\quad 其它\end{cases}$$

若常数 $k$ 使得 $P\{X \geq k\} = \dfrac{2}{3}$，求 $k$ 的取值范围.

解:

10. [redacted]




$1°$ 当 $k \leq 0$ 时，$P(X \geq k) = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{3}dx + \int_3^6 \frac{2}{9}dx = 1$

$2°$ 当 $0 < k \leq 1$ 时，$P(X \geq k) = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \int_k^1 \frac{1}{3}dx + \int_3^6 \frac{2}{9}dx = \frac{1}{3}(1-k) + \frac{2}{3}$

又 $P(X \geq k) = \frac{2}{3}$，故 $\frac{1}{3}(1-k) + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$，则 $k=1$

$3°$ 当 $1 < k \leq 3$ 时，$P(X \geq k) = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \int_k^3 0dx + \int_3^6 \frac{2}{9}dx = \frac{2}{3}$

故 $1 < k \leq 3$ 满足题意.

$4°$ 当 $3 < k \leq 6$ 时，$P(X \geq k) = \int_k^6 \frac{2}{9}dx = \frac{2}{9}(6-k)$，令 $\frac{2}{9}(6-k) = \frac{2}{3}$

得 $k=3 \notin (3,6]$ 舍去

$5°$ 当 $k > 6$ 时 $P(X \geq k) = \int_k^{+\infty} f(x)dx = \int_k^{+\infty} 0dx = 0$

综上所述，则 $k$ 的取值范围为 $1 \leq k \leq 3$

11. 已知 $X$ 的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\lambda(1+x^2)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

求 $Y = \ln X$ 的密度函数.

解: 由 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \dfrac{2}{\lambda(1+x^2)}dx = \dfrac{2}{\lambda}\arctan x\Big|_0^{+\infty} = \dfrac{\pi}{\lambda}$，得 $\lambda = \pi$.

则 $Y$ 的分布函数为：

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{\ln X \leq y\} = P\{X \leq e^y\} = \int_0^{e^y} \frac{2}{\pi(1+x^2)}dx = \frac{2}{\pi}\arctan e^y.$$

所以 $Y$ 的密度函数为 $f_Y(y) = F_Y'(y) = \dfrac{2e^y}{\pi(1+e^{2y})}$.

12. 在电源电压不超过 200V，200~240V，超过 240V 三种情况下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1，0.001，0.2. 假设电源电压服从正态分布 $N(220, 625)$，试求

（1）该电子元件损坏的概率；

（2）该电子元件损坏时，电源电压在 200~240 伏的概率.

解: 见下面图片或者学习通.

12.（1）设电源电压为 $X$，则 $X \sim N(220, 625)$，设 $A_1, A_2, A_3$ 分别表示电压不超过 200V，200～240V，超过 240V，$B$ 表示电子原件损坏.

又由题意知 $P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=0.001$，$P(B|A_3)=0.2$

且 $P(A_1)=P(X\le 200)=\Phi(200)=\Phi_0\left(\frac{200-220}{25}\right)=\Phi_0(-0.8)=1-\Phi_0(0.8)=0.2119$

$P(A_2)=P(200<X\le 240)=\Phi(240)-\Phi(200)=\Phi_0\left(\frac{240-220}{25}\right)-\Phi_0\left(\frac{200-220}{25}\right)$

$=2\Phi_0(0.8)-1=0.5762$

$P(A_3)=P(X>240)=1-P(A_1)-P(A_2)=0.2119$

12.（1）由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.2119\times 0.1+0.5762\times 0.001+0.2119\times 0.2=0.0641462$$

（2）由贝叶斯公式得

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.5762\times 0.001}{0.0641462}=0.009$$

13 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda=2$ 的指数分布，证明 $Y=1-e^{-2X}$ 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布.

解：　见下面图片.

13. 证明：由题意知 $X\sim f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-2X}\le y)=P(e^{-2X}\ge 1-y)$

1° 当 $1-y\le 0$ 时，即 $y\ge 1$ 时 $F_Y(y)=1$（此时 $e^{-2X}$ 为正，$1-y$ 为负，$\{e^{-2X}\ge 1-y\}$ 是必然事件）

2° 当 $1-y>0$ 即 $y<1$ 时 $F_Y(y)=P(e^{-2X}\ge 1-y)=P(X\le -\frac{1}{2}\ln(1-y))$

$=F_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))$

此时 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\left[F_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))\right]'=\frac{1}{2(1-y)}f_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))$

又 $f_X(-\frac{1}{2}\ln(1-y))=\begin{cases}2e^{-2\cdot(-\frac{1}{2}\ln(1-y))}, & -\frac{1}{2}\ln(1-y)>0 \Leftrightarrow y>0, 又 y<1\\ 0 & -\frac{1}{2}\ln(1-y)\le 0\end{cases}$

$=\begin{cases}2(1-y), & 0<y<1\\ 0 & y\le 0\end{cases}$，故 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

综上所述有 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$　故 $Y$ 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布.

14. 设随机变量 $Y=\sin X$，试在下面两种情形下求 $Y$ 的概率密度函数.

（1）$X\sim U[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$；（2）$X\sim U[0,\pi]$

解： 见下面图片或者学习通.

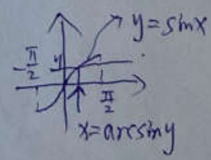
14. (1) $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{\pi}{2}\\ 0, & 其它\end{cases}$，$F_Y(y)=P(\sin X\le y)$

1° 当 $y<-1$ 时，$\{\sin X\le y\}$ 为不可能事件，故 $F_Y(y)=0$

2° 当 $y>1$ 时，$\{\sin X\le y\}$ 为必然事件，故 $F_Y(y)=1$

3° 当 $-1\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(\sin X\le y)=P(X\le \arcsin y)$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{\pi}(\arcsin y+\frac{\pi}{2})$$




故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \frac{1}{\pi}(\arcsin y+\frac{\pi}{2}), & -1\le y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$，故 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

P84. 四

14. (2) $X\sim f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0\le x\le \pi\\ 0, & 其它\end{cases}$，$F_Y(y)=P(\sin X\le y)$

注意到当 $0\le x\le\pi$ 时，$0\le\sin x\le 1$，故1°当 $y<0$ 时，$\{\sin X\le y\}$ 是不可能事件

则 $F_Y(y)=0$。2° 当 $y>1$ 时，$\{\sin X\le y\}$ 是必然事件，则 $F_Y(y)=1$

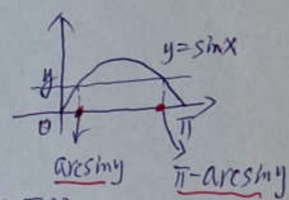
3° 当 $0\le y\le 1$ 时，$\sin X\le y \Leftrightarrow 0\le X\le\arcsin y$ 或 $\pi-\arcsin y\le X\le\pi$

故 $F_Y(y)=P(\sin X\le y)$

$$=P(0\le X\le\arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\le X\le\pi)$$

$$=\int_0^{\arcsin y}\frac{1}{\pi}dx+\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2}{\pi}\arcsin y$$

或概率为区间长度除以 $\pi$




故 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{2}{\pi}\arcsin y, & 0\le y\le 1\\ 1, & y>1\end{cases}$，从而 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & 0\le y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$