第十章 曲线积分与曲面积分

10.1 对弧长的曲线积分

一、求曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 从 $t = 0$ 到任意点间的那段弧的质量，设它各点的密度与该点到原点的距离的平方成反比，且在点 $(1,0,1)$ 处的密度为 1。

（ $\sqrt{3}(1-\frac{1}{e^t})$ ）

二、计算下列曲线积分：

1. $\int_L \sqrt{2y}\,ds$，其中 L 为旋轮线：$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ （$0 \le t \le 2\pi$ ）。（ $4\pi a^{\frac{3}{2}}$ ）

2. $\int_L (x+y)ds$，其中 L 是顶点为 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 的三角形边界。

（ $1+\sqrt{2}$ ）

3. $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$，其中 L 是由极坐标曲线 $r = a, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{4}$ 所围成的区域的边界曲线。（ $2(e^a-1)+\frac{\pi}{4}ae^a$ ）

4. $\int_L (x+y+z)ds$，其中 L 由直线 AB：$A(1,1,0), B(1,0,0)$ 及螺线 $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 组成。（ $\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi^2$ ）

三、 计算 $\int_L \cos\sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 是由 $y = x, y = \sqrt{R^2-x^2}, y = 0$ 所围成的第一象限部分的边界。（ $2\sin R+\frac{\pi}{4}R\cos R$ ）

四、 计算 $\int_L \sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中 L 是圆：$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$。（ $2\pi a^2$ ）

五、 计算 $\oint_L x\,ds$，其中 L 由直线 $x = 0, y = x$ 及曲线 $2-y = x^2$ 所围成的第一象限部分的整个边界。（ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{5}-1}{12}$ ）

10.2 对坐标的曲线积分

一、设一质点处于弹性力场中，弹力方向指向原点，弹力大小与质点到原点的距离成正比，比例系数为k。若质点从点$(0,a)$沿椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限部分移动到点$(0,b)$，求弹力所做的功。（$\dfrac{1}{2}k(a^2-b^2)$）

二、计算曲线积分 $\int_L (x^2+2xy)dx+(y^2-2xy)dy$，其中$L$是抛物线$y=x^2$ $(-1\le x\le 1)$沿x增加的方向。（$-\dfrac{14}{15}$）

三、计算 $\int_L y\sqrt{x}dx+xe^{y^2}dy$，其中$L$是曲线$y=\sqrt[3]{x}$从点$O(0,0)$到点$(1,1)$的一段弧。（$\dfrac{23}{22}$）

四、计算 $\int_L (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$，其中$L$是曲线$y=1-|1-x|$从点$(0,0)$到点$(2,0)$的一段。（$\dfrac{4}{3}$）

五、计算 $\int_{\widehat{ABC}} xdy-ydx$，其中$A(-1,0),B(0,1),C(1,0)$，$\widehat{AB}$为圆$x^2+y^2=1$的上半部分，$\widehat{BC}$为$L$是一段抛物线$y=1-x^2$。（$-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{3}$）

六、计算 $\oint_L xdy$，其中L是由直线$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$和两个坐标轴构成的三角形闭路，沿逆时针方向。（$3$）

七、计算 $\int_L (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$，其中$L$是曲线$x=t,y=t^2,z=t^3$从$t=0$到$t=1$的一段弧。（$\dfrac{1}{35}$）

八、已知平面力场$\overrightarrow{F}=\{y,x\}$，将单位质量的质点$M$从坐标原点沿直线移动到椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$在第一象限上，问终点在何处时，力$\overrightarrow{F}$做功最大？并求出功的最大值。（$(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}),W_{\max}=\dfrac{ab}{2}$）

10.3 格林公式及其应用

一、 利用曲线积分计算由旋轮线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ （$0 \le t \le 2\pi$ ）与 x 轴所围区域的面积。（$3\pi a^2$）

二、 利用格林公式计算下列曲线积分：

1. $\oint_L (x+y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy$ ，其中 L 是顶点为 $A(1,1), B(3,3), C(3,5)$ 的三角形的边界，沿逆时针方向。（-12）

2. $\oint_L xy^2 dx - x^2 y dy$ ，其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的逆时针方向。（0）

3. $\int_L (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy$ ，其中 L 是从点 $A(0,-1)$ 沿直线 $y = x - 1$ 到点 $M(1,0)$ ，再从点 M 沿圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的逆时针方向到点 $B(0,1)$ 。（$\frac{2}{3}$）

4. $\int_L [f(y)e^x - my] dx + [f'(y)e^x - m] dy$ ，其中 $f(y)$ 具有连续的导数，L 是连接点 $A(0, y_1)$ 和 $B(0, y_2)$ 的任何路径，且 L 与直线 AB 所围成的区域的面积为定值 S ，L 总是位于直线 AB 的左方。

（$mS + f(y_2) - f(y_1) - m(y_2 - y_1)$）

三、求 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} dy$ ，其中 L 为正方形 $|x| + |y| = 1$ 的逆时针方向。（2π）

四、设曲线积分 $\int_L xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0) = 0$ ，求 $\varphi(x)$ ，并计算积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$ 。（$\varphi(x) = x^2, \frac{1}{2}$）

五、求 $\int_L (y + 2xy) dx + (x^2 + 2x + y^2) dy$ ，其中 L 是 $x^2 + y^2 = 4$ 的上半圆，由点 $A(4,0)$ 到点 $B(0,0)$ 的弧段。（2π）

六、求 $\oint_L |y| dx + |x| dy$ ，其中 L 是以 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线。（-1）

七、证明：$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2 y - 4y^3) dy$ 在 xOy 面上是某一函数 $u(x,y)$ 的全

微分，并求$u(x,y)$。 （$u(x,y)=x^3+3x^2y^2-y^4+C$）

八、求抛物线$(x+y)^2=ax\ (a>0)$与x轴所围区域的面积。 （$\dfrac{a^2}{6}$）

九、设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续导数，求

$\int_L \dfrac{1+y^2f(xy)}{y}dx+\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$，其中$L$是从点$A(3,\dfrac{2}{3})$到点$B(1,2)$

的直线段。 （-4）

10.4　对面积的曲面积分

一、　计算下列曲面积分：

1. $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=R^2$。 （$\dfrac{8}{3}\pi R^4$）

2. $\iint\limits_{\Sigma}xyzdS$，其中$\Sigma$是平面$x+y+z=1$在第一卦限部分。 （$\dfrac{\sqrt{3}}{120}$）

3. $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中$\Sigma$是由圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$和平面$z=1$所围成的圆锥体的表面。 （$\dfrac{1}{2}\pi(\sqrt{2}+1)$）

4. $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中$\Sigma$是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被圆柱面$x^2+y^2=2ax\ (a>0)$所截下的那块曲面。 （$\dfrac{64}{15}\sqrt{2}a^4$）

5. $\iint\limits_{\Sigma}3zdS$，其中$\Sigma$是抛物面$z=2-x^2-y^2$（$z\ge 0$）。 （$\dfrac{111}{10}\pi$）

6. $\iint\limits_{\Sigma}xydS$，其中$\Sigma$是曲面$z=x^2+y^2$（$0\le z\le 1$）在第一卦限的部分。

（$\dfrac{5\sqrt{5}}{48}+\dfrac{1}{240}$）

二、求上半球壳$x^2+y^2+z^2=a^2\ (z\ge 0)$的质量，此壳的面密度$\rho=z$。（$\pi a^3$）

三、求均匀曲面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的重心坐标。 （$(0,0,\dfrac{a}{2})$）

10.5 对坐标的曲面积分

一、把对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$ 化为对面积的曲面积分：

1. Σ 为平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限部分的上侧。

（$\frac{1}{5}\iint\limits_{\Sigma}(3P + 2Q + 2\sqrt{3}R)dS$）

2. Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的内侧。（$-\iint\limits_{\Sigma}\frac{xP + yQ + zR}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dS$）

二、 计算 $\iint\limits_{\Sigma} f(x)dydz + g(y)dzdx + h(z)dxdy$，其中 $f(x), g(y), h(z)$ 为连续函数，Σ 为直角平行六面体 $0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c$ 的表面外侧。

（$abc[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c}]$）

三、 计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 在 $x \ge 0, y \ge 0$ 两卦限内被平面 $y = 0$ 及 $y = h\ (h > 0)$ 所截部分的外侧。（$\frac{1}{3}R^3h^2$）

四、 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$，其中 Σ 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $y = h\ (h > 0)$ 所围成的空间区域的整个边界的外侧。

（0）

五、 计算 $\oiint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z) + x]dydz + [2f(x,y,z) + y]dzdx + [f(x,y,z) + z]dxdy$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧。

（$\frac{1}{2}$）

10.6 高斯公式 通量与散度

一、利用高斯公式计算曲面积分：

1. $\oiint\limits_{\Sigma} xydydz + yzdzdx + zxdxdy$，其中 Σ 是由 $x + y + z = 1$ 和三个坐标面所

围成的四面体的外侧表面。（$\frac{1}{8}$）

2. $\oiint\limits_{\Sigma}(x-y+z)dydz+(y-z+x)dzdx+(z-x+y)dxdy$，其中$\Sigma$是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。（$\frac{4}{3}\pi abc$）

二、求向径$\mathbf{r}=\{x,y,z\}$通过圆锥体$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$（$0\le z\le 1$）全表面外侧的通量。（π）

三、求$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中$\Sigma$是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的上半部分的外侧。（$\frac{6}{5}\pi a^5$）

四、求

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{a+y}f[(a+x)(a+y)^2]dydz-\frac{1}{a+x}f[(a+x)(a+y)^2]dzdx+[(x^2+y^2)z+\frac{z^2}{3}]dxdy$$

其中Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的下半部分的上侧，常数$a>1$，f可导。

（$-\frac{2}{5}\pi$）

五、求 $\iint\limits_{\Sigma}(xz^2+ye^z)dydz+x^2ydzdx+(\sin^3 x+zy^3)dxdy$，其中$\Sigma$是下半球面 $z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 的上侧。（$\frac{6}{5}\pi a^5$）

六、计算 $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2$ $(0\le z\le 1)$，其法向量与z轴正向的夹角为锐角。（$-\frac{\pi}{2}$）

七、求下列向量场的散度：

1. $\vec{A}=yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$（$\mathrm{div}\vec{A}=0$）

2. $\vec{A}=\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$，其中$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$（$\mathrm{div}\vec{A}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$）

10.7 斯托克斯公式　环流量与旋度

一、利用斯托克斯公式计算曲线积分：$\oint\limits_{L}(z-x)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$，其中$L$

是椭圆$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从$z$轴正向往负向看，$L$的方向是顺时针方向。

（-2π）

二、求向量场$\vec{A}=(2z-3y)\mathbf{i}+(3x-z)\mathbf{j}+(y-2x)\mathbf{k}$的旋度。（$\mathbf{rot}\vec{A}=\{2,4,6\}$）