2019年高等数学II下册随堂测验

填空（每题2分）

1、若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微分，那么该函数在该点的全微分表示为 $\mathrm{d}z=$ $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy}$

2、已知 $e^{xy}+2z+e^{z}=0$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ $\underline{\dfrac{-ye^{xy}}{e^{z}+2}}$

3、设区域 D 为单连通区域，且函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在区域 D 内与路径无关的充分必要条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ __等于__ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$（填大于、小于或者等于）

计算（每题6分）

1、已知 $z=u^2+v^2$，$u=\dfrac{x}{y}$，$v=xy$。计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

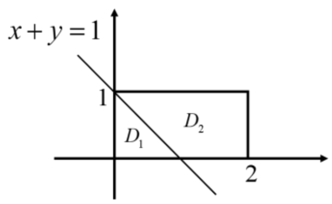
解：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=2u\frac{1}{y}+2vy=\frac{2x}{y^2}+2xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{2}{y^2}+2y^2$$

2、计算二重积分 $\iint\limits_D \min\{x+y,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$。

解：



$$I=\iint\limits_{D_1} x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\mathrm{d}y+\frac{3}{2}$$

$$=\int_0^1(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}=\frac{11}{6}$$

3、计算曲线积分 $\oint_L (2xy+y^2)dx+(2xy+x^2-x)dy$，其中 L 是区域 $x^2+y^2\le 1$ 的正向边界。

解：应用格林公式，其中 $P(x,y)=2xy+y^2, Q(x,y)=2xy+x^2-x$

$$I=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi R^2$$

$$(\text{或者}:-\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho\mathrm{d}\rho=-\pi R^2)$$