第七章 向量代数与空间解析几何

7.1-7.2 向量及其线性运算 数量积 向量积 混合积

一、填空题

1. 设 $\mathbf{a}=\{3,2,1\}, \mathbf{b}=\{2,\frac{4}{3},k\}$，若 $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$，则 $k=-\frac{26}{3}$；若 $\mathbf{a}//\mathbf{b}$，则 $k=\frac{2}{3}$。

2. 已知三点 $A(3,1,2), B(1,-1,1), C(2,0,k)$ 共线，则 $k=\frac{3}{2}$。

3. 已知 $|\mathbf{a}|=2, |\mathbf{b}|=3$，夹角 $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，则 $|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{13}$。

4. $\mathbf{a}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$，则 $|2\mathbf{a}-\mathbf{b}|=\sqrt{83}$，$\mathrm{Prj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=-\frac{4}{\sqrt{11}}$，

$\cos\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=-\frac{4}{\sqrt{154}}$。

5. 设 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=2$，则 $[(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}+\mathbf{a})=4$。

6. 平行于向量 $\mathbf{a}=\{6,-7,6\}$ 的单位向量 $\mathbf{b}=\pm\frac{1}{11}\{6,-7,6\}$。

7. 设 $\mathbf{a}=\{2,1,2\}, \mathbf{b}=\{4,-1,10\}, \mathbf{c}=\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}$，则 $\lambda=3$。

二、计算题

1. 已知单位向量 $\mathbf{P_0}$ 与 x 轴和 y 轴的夹角都是 $\frac{\pi}{3}$，与 z 轴的夹角为钝角，又 $\mathbf{a}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，试计算：（1）$\mathbf{P_0}\cdot\mathbf{a}$；（2）$\mathbf{P_0}\times\mathbf{a}$；（3）$(\mathbf{P_0}\times\mathbf{a})\cdot(2\mathbf{P_0}-3\mathbf{a})$。

（$1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \{\sqrt{2}-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}, 0$）

2. 设 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 为非零向量，$|\mathbf{b}|=2$，$\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|\mathbf{a}+x\mathbf{b}|-|\mathbf{a}|}{x}$。（1）

3. 已知三向量 $\mathbf{a}=\{2,3,-1\}, \mathbf{b}=\{1,-2,3\}, \mathbf{c}=\{1,-2,-7\}$，若向量 $\mathbf{d}$ 分别与 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直，且 $\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}=10$，求 $\mathbf{d}$。（$\mathbf{d}=\{1,-1,-1\}$）

4. 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\mathbf{a}=\{8,9,-12\}$ 同向，且点 $A(2,-1,7)$，$|\overrightarrow{AB}|=34$，求点 B 的坐标。（$B(18,17,-17)$）

5. 设向量 $\mathbf{a}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$，$\mathbf{b}=3\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$。（1）求向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦；（2）求向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影；（3）若 $|\mathbf{c}|=3$，求向量 $\mathbf{c}$，使得三向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 所构成的平行六面体的体积最大。（$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{1}{\sqrt{29}}\{2,3,4\}$; $\mathrm{Prj}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}=-\frac{1}{\sqrt{29}}$; $\mathbf{c}=\frac{1}{\sqrt{318}}\{3,42,-33\}$）

7.3-7.4 曲面及其方程　空间曲线及其方程

一、下列方程表示什么曲面：

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=1$（椭球面）

2. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z=0$（椭圆抛物面）

3. $16x^2+4y^2-z^2=64$（单叶双曲面）

4. $x^2-y-z^2=0$（双曲抛物面）

二、求过两曲面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与 $x^2-y^2-z^2=0$ 的交线，而母线平行于 z 轴的柱面方程。（$5x^2-3y^2=1$）

三、求曲线 $\begin{cases} y^2=6-z \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的旋转曲面 S 的方程，并求出 S 和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的交线在 xOy 坐标面上的投影。（$z=6-x^2-y^2$，$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$）

四、求下列各平面曲线的旋转曲面的方程：

1. $\begin{cases} x^2+4y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕 x 轴和 y 轴旋转。（$x^2+4(y^2+z^2)=1$，$x^2+4y^2+z^2=1$）

2. $\begin{cases} z=\sqrt{y} \\ x=0 \end{cases}$ 分别绕 y 轴和 z 轴旋转。（$y=x^2+z^2$，$z^4=x^2+y^2$）

五、求螺旋线 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程。

（$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$，$\begin{cases}y=a\sin\dfrac{z}{b}\\ x=0\end{cases}$，$\begin{cases}x=a\cos\dfrac{z}{b}\\ y=0\end{cases}$）

7.5-7.6 平面及其方程　空间直线及其方程

一、求过点 $P(1,-5,1)$ 和 $Q(3,2,-1)$，且平行于 y 轴的平面方程。（$x+z-2=0$）

二、求过点 $(1,0,1)$，且经过平面 $x+y-5z-1=0$ 与 $2x+3y-z+2=0$ 的交线的平面方程。（$13x+18y-20z+7=0$）

三、求过点 $P(-3,5,9)$，且与直线 $L_1:\begin{cases}y=3x+5\\ z=2x-3\end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases}y=4x-7\\ z=5x+10\end{cases}$ 都相交的直线方程。（$\begin{cases}4x-2y+z+13=0\\ 32x+7y-12z+169=0\end{cases}$）

四、求过点 $M(3,-2,1)$，且与直线 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$ 垂直相交的直线方程。（$\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{9}=\dfrac{z-1}{-1}$）

五、已知直线 $\dfrac{x-a}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z-1}{a}$ 在平面 $3x+4y-az=3a-1$ 内，求 a。（$a=1$）

六、求点 $M(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点的坐标。（$(-\dfrac{5}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})$）

七、求直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$ 在平面 $4x-y+z=1$ 上的投影直线方程。（$\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\ 4x-y+z-1=0\end{cases}$）

八、若直线过点 $M(-1,0,4)$，平行于平面 $3x-4y+z-10=0$，且与直线 $L:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}$ 相交，求此直线方程。（$\dfrac{x+1}{24}=\dfrac{y}{29}=\dfrac{z-4}{44}$）

九、求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $L:\begin{cases}x+y-z+1=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离。（$d=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$）

十、设有两直线 $L_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{m} = \dfrac{z-3}{2}$ 和 $L_2: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -1+2t \\ z = -1-3t \end{cases}$。

1. 试问 m 为何值时，L_1 和 L_2 相交。（$m = -3$）

2. 当 L_1 和 L_2 相交时，求过两直线的平面方程。（$5x + y - z - 5 = 0$）

十一、已知直线 $L_1: x = t+1, y = 2t-1, z = t$ 和 $L_2: x = t+2, y = 2t-1, z = t+1$，求两直线之间的距离。（$d = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$）

十二、设一平面垂直于平面 $z = 0$，并且通过点 $(1,-1,1)$ 到直线 $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 的垂线，求此平面的方程。（$x - 2y - 3 = 0$）

十三、直线 $L: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求旋转曲面的方程。（$x^2 + y^2 = 1 + z^2$）

十四、证明：平面 $6x + 3y - 2z + 12 = 0$ 通过直线 $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z+3}{3}$。

十五、求异面直线 $L_1: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$ 与 $L_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{0}$ 之间的距离。（$d = 1$）