习题四

1. 填空题

（1）解： 10张 $\begin{cases} 8\text{张}2\text{元} \\ 2\text{张}5\text{元} \end{cases}$

设 X 表示抽到的3张奖券金额，则 X 的取值为6元（3张2元）, 9元（2张2元，1张5元），12元（1张2元，2张5元），且 X 的概率分布为

$$P\{X=6\}=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}，\ P\{X=9\}=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}，\ P\{X=12\}=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}.$$

故 $EX=6\times\frac{7}{15}+9\times\frac{7}{15}+12\times\frac{1}{15}=\frac{117}{15}$.

(2) 解：$\begin{cases} EX=np=6 & (1) \\ DX=npq=3.6 & (2), \\ q=1-p & (3) \end{cases}$

(2)式除以(1) 式得：q=0.6, p=0.4, 则 $\begin{cases} q=0.6 \\ p=0.4 \\ n=15 \end{cases}.$

(3) 解：因为 $X\sim P(\lambda)$，则 $EX=\lambda=2$，故 $DX=\lambda=2$，$P(X=1)=\frac{2^1e^{-2}}{1!}=2e^{-2}$.

(4) 解：因为 $X\sim U[2,6]$，则 $EX=\frac{2+6}{2}=4$， $DX=\frac{(6-2)^2}{12}=\frac{4}{3}$，

故 $E(-2X+3)=-2EX+3=-5$； $D(-2X+3)=(-2)^2DX=\frac{16}{3}$.

(5) 解：因为 $X\sim f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$，对照正态分布的密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，可知 $\sigma=2$，

故 $DX=\sigma^2=4$.

(6) 解：因为 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，则 $X\sim f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，且 $EX=\frac{1}{\lambda}=1$；

$$Ee^{-2X}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\frac{1}{3}；$$

故 $E(X+e^{-2X})=EX+E(e^{-2X})=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$.

（7）解：已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $DX=4$， $DY=2$，则

$D(3X-2Y)=3^2DX+(-2)^2DY=36+8=44$.

（8）解：二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

因为 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$，则 a+b+0.4+0.1=1，故 a+b=0.5， (1)

又 $P\{X=0\}=a+0.4$， (2)

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$ (3)

又事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，且由(1)，(2)，(3)得

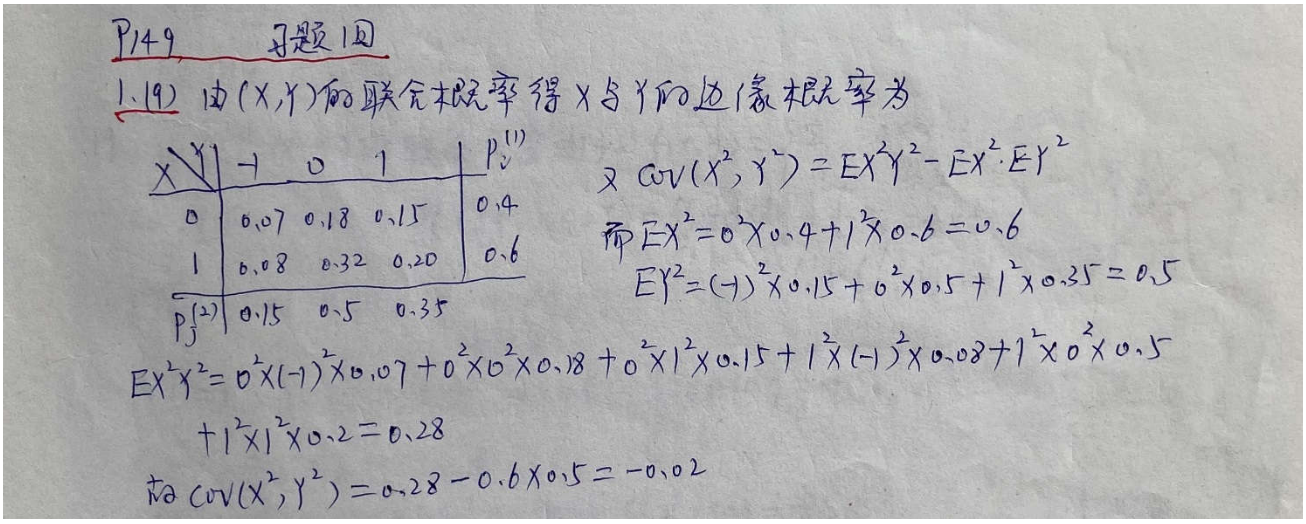
$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}=(a+0.4)(a+b)=0.5(a+0.4)$， （4）

而 $P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$， （5）

故由(4)，(5)，有 $a=0.5(a+0.4)$，解之得， a=0.4，b=0.1.

则 $E(XY)=0\times0\times0.4+0\times1\times0.4+1\times0\times0.1+1\times1\times0.1=0.1$.

（9）解：见下面图片.


P149 习题四

1.(9) 由(X,Y)的联合概率得X与Y的边缘概率为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_i^{(1)}$
0	0.07	0.18	0.15	0.4
1	0.08	0.32	0.20	0.6
$p_j^{(2)}$	0.15	0.5	0.35	

又 $cov(X^2,Y^2)=EX^2Y^2-EX^2\cdot EY^2$

而 $EX^2=0^2\times0.4+1^2\times0.6=0.6$

$EY^2=(-1)^2\times0.15+0^2\times0.5+1^2\times0.35=0.5$

$EX^2Y^2=0^2\times(-1)^2\times0.07+0^2\times0^2\times0.18+0^2\times1^2\times0.15+1^2\times(-1)^2\times0.08+1^2\times0^2\times0.5$

$+1^2\times1^2\times0.2=0.28$

故 $cov(X^2,Y^2)=0.28-0.6\times0.5=-0.02$

(10) 解：因为$Cov(Z,Y)=Cov(X-0.4,Y)=Cov(X,Y)-Cov(0.4,Y)=Cov(X,Y)$,

又$DZ=D(X-0.4)=DX$，故$\rho_{ZY}=\dfrac{Cov(Z,Y)}{\sqrt{DZ}\sqrt{DY}}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho_{XY}=0.9$.

(11) 解：$D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)=DX+DY-2\rho\sqrt{DX}\sqrt{DY}$

$$=16+9-2\times0.2\times\sqrt{16}\times\sqrt{9}=20.2.$$

2.选择题

(1) 分析：$EX=\sum_{n=1}^{\infty}nP(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)}$发散，故$EX$不存在。选（D)

(2)分析：因为$X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，则$X$服从参数为$\lambda=\dfrac{1}{2}$的指数分布，故有$EX=\dfrac{1}{\lambda}=2$，$DX=\dfrac{1}{\lambda^2}=4$；

则$E(2X+1)=2EX+1=5$；$D(2X+1)=4DX=16$. 故选(A)(B)

(3) 分析：因为$X\sim f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot\frac{1}{2}}}$,

对照正态分布的密度函数$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，可知$\mu=1,\sigma=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，故$X\sim N(1,\dfrac{1}{2})$

从而$EX=\mu=1,\quad DX=\sigma^2=\dfrac{1}{2}$. 故选(A)

(4) 分析:显然选(B)(D),略.

(5) 分析：因为X与Y不相关，则相关系数$\rho_{XY}=0\Rightarrow Cov(X,Y)=0$；显然选(A)(B),略.

(6) 分析：因为X与Y满足$D(X+Y)=D(X-Y)$，即

$DX+DY+2Cov(X,Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)\Rightarrow Cov(X,Y)=0\Rightarrow\rho_{XY}=0$；故选（B).

(7) 分析：显然选（C)，略.

(8) 分析：由题意与 112 页(3.3.7)式知，选项（B)正确；由选项（B）与二项分布的期望与方差公式知选项（D)也正确；故选(B)(D).

(9) 分析：见下面图片.

P150　习题四

2.(9) $cov(X_1,X_i)=E(X_1X_i)-EX_1\cdot EX_i=\begin{cases}0, & i\neq 1 \ (X_1与X_i独立)\\ DX_1, & i=1\end{cases}$

故 $cov(X_1,Y)=cov(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}cov(X_1,\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}cov(X_1,X_i)$

$=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2$

而 $D(X_1+Y)=D(X_1+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=D(X_1+\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n))$

$=D(\frac{n+1}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n)\xlongequal{独立}\frac{(n+1)^2}{n^2}DX_1+\frac{1}{n^2}DX_2+\cdots+\frac{1}{n^2}DX_n$

$=\frac{(n+1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n^2+3n}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2$

$D(X_1-Y)=D(X_1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=D(X_1-\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n))=D(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n)$

$\xlongequal{独立}\frac{(n-1)^2}{n^2}DX_1+\frac{1}{n^2}DX_2+\cdots+\frac{1}{n^2}DX_n=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n^2-n}{n^2}\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

故选(B)

(10) 分析：见下面图片.

2.(10) 由题意知 $X\sim B(n,\frac{1}{2})$，$Y\sim B(n,\frac{1}{2})$ 且 $X+Y=n$ 则 $Y=-X+n$

X与Y是线性关系且斜率为负，故 $\rho_{X,Y}=-1$，故选(D)

(11) 分析：因为 X 服从参数为 λ 的泊松分布，则 $EX=\lambda$，故 $DX=\lambda$. 故

一阶原点矩：$v_1=EX=\lambda$；　　二阶原点矩：$v_2=EX^2=DX+(EX)^2=\lambda+\lambda^2$；

一阶中心矩：$\mu_1=E(X-EX)=0$；　　二阶中心矩：$\mu_2=E(X-EX)^2=DX=\lambda$.

故选(A)(B)(C)(D).

3-19 题见下面图片:

3. X表示同时需要调整的部件数，则 $X=0,1,2,3$

$P(X=0)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.9\times0.8\times0.7=0.504$

$P(X=3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006$

$P(X=2)=0.1\times0.2\times(1-0.3)+0.1\times(1-0.2)\times0.3+(1-0.1)\times0.2\times0.3=0.092$

$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)-P(X=3)=0.398$

故 $EX=0\times0.504+1\times0.398+2\times0.092+3\times0.006=0.6$

$EX^2=0^2\times0.504+1^2\times0.398+2^2\times0.092+3^2\times0.006=0.82$

$DX=EX^2-(EX)^2=0.82-0.6^2=0.46$

10. 证明：因为X与Y独立，则 X^2 与 Y^2 也独立，故 $E(XY)^2=E(X^2Y^2)=EX^2\cdot EY^2$

故 $D(XY)=E(XY)^2-(E(XY))^2=EX^2\cdot EY^2-(EX\cdot EY)^2=EX^2EY^2-(EX)^2(EY)^2$

$=[DX+(EX)^2]\cdot[DY+(EY)^2]-(EX)^2(EY)^2=DX\cdot DY+DX\cdot(EY)^2+(EX)^2DY+(EX)^2(EY)^2$

$-(EX)^2(EY)^2=DXDY+(EX)^2DY+(EY)^2DX$

4. 因为X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

则 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{x\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2x}_{\text{奇函数}}dx=0$（奇函数在对称区间上积分为零）

又 $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{x^2\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2x}_{\text{偶函数}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}x^2\cos^2x\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cdot\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}dx+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos2x\,dx}_{\text{幂函数×三角函数，用分部积分法求}}\right]=\cdots=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}$

P150 习题四

5. 已知 $P(X=k)=\frac{1}{5}$, $k=1,2,3,4,5$

则 $EX=\sum_{k=1}^{5}k\cdot P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}k\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times(1+2+3+4+5)=\frac{1}{5}\times 15=3$

$EX^2=\sum_{k=1}^{5}k^2P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}k^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\times(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)=\frac{1}{5}\times 55=11$

$E(X+2)^2=E(X^2+4X+4)=EX^2+4EX+4=11+4\times 3+4=27$

$DX=EX^2-(EX)^2=11-3^2=2$

6. 因为X服从 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 上的均匀分布，则 $X\sim f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\\ 0, & 其他\end{cases}$

则 $EY=E\sin\pi X=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\pi x\cdot f(x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\sin\pi x\cdot 1}_{奇函数}dx=0$

7. 已知 $X\sim f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<2\\ cx+b, & 2\le x\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$，且 $EX=2$, $P(1<X<3)=\frac{3}{4}$

则 (1) $\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1\\ EX=2\\ P(1<X<3)=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\int_0^2 ax\,dx+\int_2^4(cx+b)dx=1\\ EX=\int_0^2 x\cdot ax\,dx+\int_2^4 x(cx+b)dx=2\\ P(1<X<3)=\int_1^2 ax\,dx+\int_2^3(cx+b)dx=\frac{3}{4}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2+(c\cdot\frac{x^2}{2}+bx)\Big|_2^4=1\\ a\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+(c\cdot\frac{x^3}{3}+b\cdot\frac{x^2}{2})\Big|_2^4=2\\ a\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+c\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_2^3+bx\Big|_2^3=\frac{3}{4}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2a+2b+6c=1\\ \frac{8}{3}a+6b+\frac{56}{3}c=2\\ \frac{3}{2}a+b+\frac{5}{2}c=\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\ b=1\\ c=-\frac{1}{4}\end{cases}$

(2) $EY=Ee^X=\int_{-\infty}^{+\infty}e^xf(x)dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{1}{4}x\,dx+\int_2^4 e^x\cdot(-\frac{1}{4}x+1)dx$

$=\frac{1}{4}\int_0^2 x\,de^x-\frac{1}{4}\int_2^4 x\,de^x+\int_2^4 e^x dx$

$=\frac{1}{4}[xe^x\Big|_0^2-\int_0^2 e^x dx]-\frac{1}{4}[xe^x\Big|_2^4-\int_2^4 e^x dx]+e^x\Big|_2^4$

$=\frac{1}{4}[2e^2-e^2+1]-\frac{1}{4}[4e^4-2e^2-e^4+e^2]+e^4-e^2=\frac{1}{4}(e^4-2e^2+1)=\frac{1}{4}(e^2-1)^2$

$EY^2=E(e^X)^2=Ee^{2X}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2x}f(x)dx=\int_0^2 e^{2x}\cdot\frac{1}{4}x\,dx+\int_2^4 e^{2x}(-\frac{1}{4}x+1)dx$

$=\cdots=\frac{1}{16}(e^4-1)^2$，故 $DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{16}(e^4-1)^2-[\frac{1}{4}(e^2-1)^2]^2$

$=\frac{1}{4}e^2(e^2-1)^2$

(11)

P151 习题四

8. 设 X 的密度函数为 $f(x)$，则 $e^{\lambda x}f(x)\geq 0$，

故 $EY=Ee^{\lambda X}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\lambda x}f(x)dx\geq\int_{a}^{+\infty}e^{\lambda x}f(x)dx$

又当 $x\in[a,+\infty)$ 时，且 $\lambda>0$，$e^{\lambda x}\geq e^{\lambda a}$，故 $EY\geq\int_{a}^{+\infty}e^{\lambda x}f(x)dx\geq\int_{a}^{+\infty}e^{\lambda a}f(x)dx$

$=e^{\lambda a}\int_{a}^{+\infty}f(x)dx=e^{\lambda a}P(X\geq a)$，即 $EY\geq e^{\lambda a}P(X\geq a)$

故 $P(X\geq a)\leq e^{-\lambda a}EY$

P151 习题四

9. $P(X<x)=1-P(X\geq x)=1-\int_{x}^{+\infty}f(t)dt$，

又当 $t>x>0$ 时，$\frac{t}{x}>1$ 故 $\int_{x}^{+\infty}f(t)dt\leq\int_{x}^{+\infty}\frac{t}{x}f(t)dt=\frac{1}{x}\int_{x}^{+\infty}tf(t)dt$

$\leq\frac{1}{x}\int_{0}^{+\infty}tf(t)dt=\frac{1}{x}EX$

故 $P(X<x)=1-\int_{x}^{+\infty}f(t)dt\geq 1-\frac{EX}{x}$

14. (1) 若将一笔资金按比例 x，$1-x$ 分别投资到证券 A，B 上，形成投资组合 P，收益率为 r_P，记 $\sigma_A^2=Dr_A$，$\sigma_B^2=Dr_B$，则 $r_P=xr_A+(1-x)r_B$，其方差

$Dr_P=D(xr_A+(1-x)r_B)=x^2Dr_A+(1-x)^2Dr_B+2x(1-x)\mathrm{cov}(r_A,r_B)$

$=x^2\sigma_A^2+(1-x)^2\sigma_B^2+2x(1-x)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B+(1-x)^2\rho_{A,B}^2\sigma_B^2-(1-x)^2\rho_{AB}^2\sigma_B^2=\underbrace{[x\sigma_A+(1-x)\rho_{A,B}\sigma_B]^2}_{凑成完全平方项}+(1-\rho_{A,B}^2)(1-x)^2\sigma_B^2$ (1)式

1° 当 $x=1$ 时，代入上式得 $Dr_P=\sigma_A^2$，又 A 为风险证券，则 $\sigma_A^2>0$，从而 $Dr_P>0$，

故组合 P 为风险证券

2° 当 $x\neq 1$ 时，又 $|\rho_{A,B}|\neq 1$，故 $1-\rho_{A,B}^2\neq 0$，则 $Dr_P\geq(1-\rho_{A,B})^2(1-x)^2\sigma_B^2>0$

综上，当 $|\rho_{A,B}|\neq 1$，对 $\forall x$，$Dr_P>0$，故组合 P 为风险证券

(2) 若 $|\rho_{A,B}|=1$，1° 当 $\rho_{A,B}=1$ 时，代入(1)式得 $Dr_P=[x\sigma_A+(1-x)\sigma_B]^2\overset{令}{=}0$

当 $\sigma_A\neq\sigma_B$ 时，$x=\frac{\sigma_B}{\sigma_B-\sigma_A}$ 时 $Dr_P=0$，此时为无风险组合.

2° 当 $\rho_{A,B}=-1$ 时，代入(1)式，得 $Dr_P=[x\sigma_A-(1-x)\sigma_B]^2\overset{令}{=}0$，得 $x=\frac{\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}$，此时 P 为无风险组合

第7页

P151 习题四

11. 设X, Y分别表示两人的出价，则由题意知，X与Y独立，且

$X \sim f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[1,2]\\ 0, & 其它\end{cases}$, $Y \sim f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[1,2]\\ 0, & 其它\end{cases}$

令 $Z=\max(X,Y)$，下面求 EZ，则需先求 $F_Z(z)$，然后再求密度函数 $f_Z(z)$

由X, Y的密度函数可求得X, Y的分布函数分别为

$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ x-1, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$, $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ y-1, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

则由P110 (3.3.5)式得 $F_Z(z)=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}0, & z<1\\ (z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$

故Z的密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}2(z-1), & 1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$$

故期望成交价格：$EZ=\int_{-\infty}^{+\infty} z f_Z(z)dz=\int_1^2 z\cdot 2(z-1)dz=\int_1^2(2z^2-2z)dz$

$$=\left(2\cdot\frac{z^3}{3}-z^2\right)\Big|_1^2=\frac{5}{3}$$

13. 由 r_A 与 r_B 的协方差矩阵 $\begin{pmatrix}16 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}$ 知 $Dr_A=16$，$Dr_B=9$，$cov(r_A,r_B)=6$

(1) $\rho_{r_A,r_B}=\dfrac{cov(r_A,r_B)}{\sqrt{Dr_A}\cdot\sqrt{Dr_B}}=\dfrac{6}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}}=\dfrac{1}{2}$

(2) $r_p=xr_A+(1-x)r_B$，故其方差 $Dr_p=D[xr_A+(1-x)r_B]$

$=x^2Dr_A+(1-x)^2Dr_B+2x(1-x)cov(r_A,r_B)=16x^2+9(1-x)^2+12x(1-x)$

$=13x^2-6x+9$

(3) 对 Dr_p 求一阶导得 $(Dr_p)_x'=26x-6=0$ 得 $x=\frac{6}{26}=\frac{3}{13}$

故当 $x=\frac{3}{13}$ 时 Dr_p 最小

要使 $Dr_p\le\min(Dr_A,Dr_B)$，即 $13x^2-6x+9\le\min(16,9)=9$

解得 $0\le x\le\frac{6}{13}$，故当 $0\le x\le\frac{6}{13}$ 时 $Dr_p\le\min(Dr_A,Dr_B)$

P151 习题四

12. 已知(X,Y)的联合分布为

Y\X	-1	0	1	2
1	0.1	0.1	0.2	0.1
2	0	0.1	0.1	0.3

(1) 则X的边缘分布为

X	-1	0	1	2
P	0.1	0.2	0.3	0.4

Y的边缘分布为

Y	1	2
P	0.5	0.5

(2) 因为 $P(X=-1, Y=1)=0.1 \neq P(X=-1)\cdot P(Y=1)=0.1\times 0.5=0.05$

故X与Y不独立

(3) 因为 $EXY=(-1)\times 1\times 0.1+0\times 1\times 0.1+1\times 1\times 0.2+2\times 1\times 0.1+(-1)\times 2\times 0$

$+0\times 2\times 0.1+1\times 2\times 0.1+2\times 2\times 0.3=1.7$

又 $EX=-1\times 0.1+0\times 0.2+1\times 0.3+2\times 0.4=1$

$EY=1\times 0.5+2\times 0.5=1.5$

故X与Y的协方差 $Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=1.7-1\times 1.5=0.2$

15. (1) 求股票价格的平均变化率，即求Er，则先求r的边缘分布，

由(r, r_f)的联合分布可知r的边缘分布为（即联合分布求列和）

r	-3%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
P	0.1	0.105	0.175	0.26	0.125	0.13	0.065	0.04

故 $Er=-3\%\times 0.1+1\%\times 0.105+2\%\times 0.175+3\%\times 0.26+4\%\times 0.125+5\%\times 0.13$

$+6\%\times 0.065+7\%\times 0.04=2.755\%$

(2) 由题意知，即求条件期望 $E(r|r_f=1.5\%)$，故先求在$r_f=1.5\%$条件下

r的条件分布 $P(r=r_i|r_f=1.5\%)$

又 $P\{r_f=1.5\%\}=0.025+0.05+0.1+0.15+0.075+0.05+0.025+0.025=0.5$

则 $P(r=-3\% \mid r_f=1.5\%)=\dfrac{P(r=-3\%,\ r_f=1.5\%)}{P(r_f=1.5\%)}=\dfrac{0.025}{0.5}=0.05$

$P(r=1\% \mid r_f=1.5\%)=\dfrac{P(r=1\%,\ r_f=1.5\%)}{P(r_f=1.5\%)}=\dfrac{0.05}{0.5}=0.1$

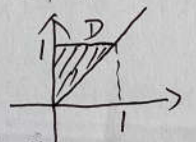
……，同理得 r 的条件分布 $P(r=r_i \mid r_f=1.5\%)$ 为：

r	-3%	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%
$P(r \mid r_f=1.5\%)$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.15	0.1	0.05	0.05

故 $E(r \mid r_f=1.5\%)=-3\%\times0.05+1\%\times0.1+2\%\times0.2+3\%\times0.3+4\%\times0.15$

$+5\%\times0.1+6\%\times0.05+7\%\times0.05=3\%$

16. 画出区域 D 草图为：



，则 D 的面积 $S_D=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

故 (X,Y) 的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\ 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

求 X 和 Y 的协方差和相关系数，下面给出两种解法.

方法一： $EX=\cancel{\iint_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dxdy}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dxdy=\iint_D x\cdot 2\,dxdy$

把X看作二元函数的特殊情况，利用定理4.2求

$=\int_0^1 dx\int_x^1 2x\,dy=\int_0^1 2x(1-x)\,dx=\frac{1}{3}$

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dy=\iint_D y\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 2y\,dy=\frac{2}{3}$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x,y)\,dy=\iint_D x^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 2x^2\,dy=\int_0^1 2x^2(1-x)\,dx=\frac{1}{6}$

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x,y)\,dy=\iint_D y^2\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 2y^2\,dy=\int_0^1 \frac{2y^3}{3}\Big|_x^1\,dx$

$=\frac{1}{2}$，故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$，

$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$，

$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dy=\iint_D xy\cdot 2\,dxdy=\int_0^1 dx\int_x^1 2xy\,dy=\frac{1}{4}$

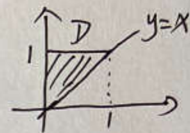
故 $cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$，

相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\cdot\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}$

(十)

P152 习题四

16. 方法二：已知 $(X,Y)\sim f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1,\ 0<x<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$



区域 $D=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<x<y<1\}$

要求X和Y的协方差与相关系数，下面先求EX，EY，而要求EX，EY，

则先由联合密度 $f(x,y)$ 求X的边缘密度 $f_X(x)$ 和Y的边缘密度 $f_Y(y)$：

当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 2dy=2(1-x)$

故X的边缘密度为 $f_X(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$

当 $0<y<1$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 2dx=2y$

故Y的边缘密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

故 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{3}$

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^1 y\cdot 2y\,dy=\frac{2}{3}$

$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1 x^2\cdot 2(1-x)dx=\frac{1}{6}$

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_0^1 y^2\cdot 2y\,dy=\frac{1}{2}$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$，$DY=EY^2-(EY)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$

而 $EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\iint_D xy\cdot 2\,dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 xy\cdot 2dy=\frac{1}{4}$

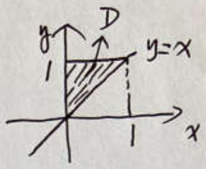
故X与Y的协方差 $Cov(X,Y)=EXY-EX\cdot EY=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{36}$

故X与Y的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\cdot\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}$

(十一)

P152

17. 已知 $f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$



$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dy=\iint_D x\cdot 8xy\,dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 x\cdot 8xy\,dy$

$=\int_0^1 8x^2\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_x^1dx=\int_0^1 4x^2(1-x^2)dx=\frac{8}{15}$

$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dy=\iint_D y\cdot 8xy\,dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 8xy^2dy$

$=\int_0^1 8x\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_x^1dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x(1-x^3)dx=\frac{4}{5}$

$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dy=\iint_D xy\cdot 8xy\,dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 xy\cdot 8xy\,dy$

$=\int_0^1 8x^2\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_x^1dx=\frac{8}{3}\int_0^1 x^2(1-x^3)dx=\frac{4}{9}$

故协方差 $cov(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{4}{9}-\frac{8}{15}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{225}$

$\cancel{EX^2}\ EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dy=\int_0^1dx\int_x^1 x^2\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 8x^3\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_x^1dx$

$=4\int_0^1 x^3(1-x^2)dx=\frac{1}{3}$，故 $DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{3}-(\frac{8}{15})^2=\frac{11}{225}$

$EY^2=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)dy=\int_0^1dx\int_x^1 y^2\cdot 8xy\,dy=\int_0^1 8x\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_x^1dx$

$=2\int_0^1 x(1-x^4)dx=\frac{2}{3}$，故 $DY=EY^2-(EY)^2=\frac{2}{3}-(\frac{4}{5})^2=\frac{2}{75}$

故相关系数 $\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\frac{4}{225}}{\sqrt{\frac{11}{225}}\cdot\sqrt{\frac{2}{75}}}=\frac{2\sqrt{66}}{33}$

18. 因为 $X\sim N(1,3^2)$，则 $EX=1$，$DX=9$，又 $Y\sim N(0,4^2)$，则 $EY=0$

$DY=16$，又 $\rho_{X,Y}=-\frac{1}{2}$，则 $cov(X,Y)=\rho\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=-\frac{1}{2}\times 3\times 4=-6$

(1) $EZ=E(\frac{X}{3}+\frac{1}{2}Y)=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{3}$

$DZ=D(\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot cov(X,Y)$

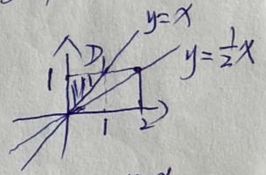
$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(-6)=3$

(2) $cov(X,Z)=cov(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2})=\frac{1}{3}cov(X,X)+\frac{1}{2}cov(X,Y)=\frac{1}{3}DX+\frac{1}{2}\times(-6)$

$=0$，故 $\rho_{X,Z}=0$

第7页

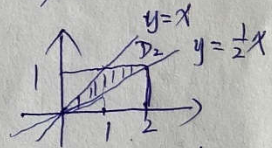
19. 由题意(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$



故$P(U=0,V=0)=P(X\le Y, X\le 2Y)=\iint\limits_{D_1}\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}S_{D_1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

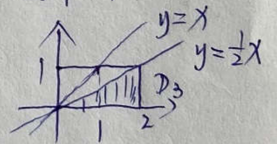
或$\int_0^1 dx\int_x^1\frac{1}{2}dy=\frac{1}{4}$

$P(U=0,V=1)=P(\underbrace{X\le Y, X>2Y}_{=\varnothing(空集)})=0$



$P(U=1,V=0)=P(X>Y, X\le 2Y)=\iint\limits_{D_2}\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}S_{D_2}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$



$P(U=1,V=1)=P(X>Y, X>2Y)=\iint\limits_{D_3}\frac{1}{2}dxdy=\frac{1}{2}S_{D_3}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 2\times 1=\frac{1}{2}$

故~~(X,Y)~~ (U,V)的联合概率分布为

U\V	0	1	$p_i^{(1)}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$p_j^{(2)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$E(UV)=0\times0\times\frac{1}{4}+0\times1\times0+1\times0\times\frac{1}{4}+1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

故$EU=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

$EV=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$EU^2=1^2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$，$EV^2=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$DU=EU^2-(EU)^2=\frac{3}{4}-(\frac{3}{4})^2=\frac{3}{16}$，$DV=EV^2-(EV)^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

故$cov(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，$\rho_{U,V}=\frac{cov(U,V)}{\sqrt{DU}\cdot\sqrt{DV}}=\frac{\frac{1}{8}}{\sqrt{\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$