第三章 微分中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

一、证明 $\dfrac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(n+1)^2} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{n^2}$,其中$a>1,\ n\geq 1$.

二、对$f(x)=x^3$在$[-2,3]$上求出满足拉格朗日中值定理的ξ. （$\xi=\pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$）

三、设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上可导，试证：在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内至少存在一点 ξ，使得：$f'(\xi)\sin 2\xi+2f(\xi)\cos 2\xi=0$. （提示：令 $F(x)=f(x)\sin 2x$）

四、$f(x)$ 可导，且$1<f(x)<4, f'(x)\neq 2x$ 证明方程 $f(x)=x^2$在（1，2）内有且仅有一根.

五、$f(x)$ 为可导函数，$f(0)=1,\ f'(x)=2f(x)$ 求证：$f(x)=e^{2x}$。（提示：考虑等式$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$）

六、$f(x)$ 为二阶可导函数，$F(x)=(x-a)^2 f(x), f(b)=0$, 求证：存在$\xi\in(a,b)$ 使：$F''(\xi)=0$.

3.2 洛必达法则

一、求下列各极限:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{e^x-x-1}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}+\dfrac{1}{1-x}\right)=\dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\dfrac{1}{e}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\quad(a_i>0,1\le i\le n)$

二、$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 求 $f'(0)$，$f''(0)$.（$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，$f''(0)=\dfrac{1}{3}$）

三、已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-ax+2}{1+\cos(\pi x)}=b$ 求常数 a,b.（$a=2$，$b=-\dfrac{2}{\pi^2}$）

四、求 a,b，使 $x\to 0$ 时 $f(x)=\sin 2x+ax+bx^3$ 为尽可能高阶无穷小，并求它的阶.

（$a=-2$，$b=\dfrac{4}{3}$，$n=5$）

3.3 泰勒公式

一、$f(x)=x\arctan x$ 在 $x_0=1$ 处展开为二阶 Taylor 公式.

（$x\arctan x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{4}(\pi+2)(x-1)+\dfrac{1}{4}(x-1)^2-\dfrac{8\xi}{(1+\xi)^3}(x-1)^3$）

二、$f(x)=x^4-5x^3+5x^2+x+2$ 展开为 $x-1$ 的多项式.

（$f(x)=4-4(x-1)^2-(x-1)^3+(x-1)^4$）

三、求 $x\to 0$ 时，无穷小量 $e^x-1-x+x\sin x$ 的阶.（2 阶）

四、求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2+2\cos x-2}{x^4}$　（$\dfrac{1}{12}$）

五、$0<x<\dfrac{1}{2}$　证明 $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 的绝对误差不超过 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的误差不超过 0.01 的近似值.

3.4-3.7(1) 函数的单调性、极值和最值

一、求函数的极值点和单调区间

1. $f(x)=\sqrt[3]{x-1}(x-3)^2$;

（单增区间: $(-\infty,\frac{9}{7})$, $(3,+\infty)$, 单减区间: $(\frac{9}{7},3)$;

极大值点：$x=\frac{9}{7}$，极小值点：$x=3$）

2. $f(x)=(x-1)^3x^2+4$

（单增区间: $(-\infty,0)$, $(\frac{2}{5},+\infty)$, 单减区间: $(0,\frac{2}{5})$;

极大值点：$x=0$，极小值点：$x=\frac{2}{5}$）

二、证明不等式:

1. $\frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$ $(0<x<1)$;

2. $\sin x+\cos x>1+x-x^2$ $(x>0)$;

3. $f(x)$ 在 $[0,c]$ 有严格单调递减的导函数 $f'(x)$, $f(0)=0$，则 $0<a<b<a+b<c$ 有：$f(a+b)<f(a)+f(b)$.

三、讨论方程 $\ln x=ax$ $(a>0)$ 有几个实根.

（$a>\frac{1}{e}$时，没有实根; $a=\frac{1}{e}$时，有一个实根 $x=e$; $0<a<\frac{1}{e}$时,有两个实根。）

四、$x>0$ 时方程 $ax+\frac{1}{x^2}=1$ 有且仅有一个根，求 a 的取值范围.（$a\le 0$ 或 $a=\frac{2}{3\sqrt{3}}$）

五、求 $y=\frac{x-1}{x+4}$ 在 $[0,4]$ 上的最大值，最小值.（最大值 $\frac{3}{8}$，最小值 $-\frac{1}{4}$）

六、$0\le x\le 1, p>1$，证明：$2^{1-p}\le x^p+(1-x)^p\le 1$

3.4-3.7(2) 曲线的凹凸性、函数图形的描绘、曲率

一、确定下列函数曲线的凹凸区间和拐点:

1. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$;

（凹区间: $(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$, $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$, 凸区间: $(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}})$; 拐点: $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{3}{4})$）

2. $y=xe^{-x}$; （凹区间: $(2,+\infty)$, 凸区间: $(-\infty,2)$; 拐点: $(2,2e^{-2})$）

3. $\begin{cases}x=t^2\\ y=3t+t^2\end{cases}$ （t 为参数）决定函数 $y=y(x)$.

（$t<0$ 时曲线为凹的，$t>0$ 时曲线为凸的，曲线无拐点。）

二、求下列函数曲线的渐近线:

1. $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x-1}$; （铅直渐近线: $x=0$ 和 $x=1$, 水平渐近线: $y=1$.）

2. $y=\dfrac{x^3}{(x-1)(2-x)}$. （铅直渐近线: $x=1$ 和 $x=2$, 斜渐近线: $y=-x-3$.）

三、作出函数 $y=\dfrac{x^3-2}{2(x-1)^2}$ 的曲线.

四、求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任意点处的曲率.