例 质量为 m 的物体自空中落下，它除受重力外，还受到一个与速度平方成正比的阻力的作用。比例系数为 k， k 为正常数。该下落物体的收尾速度(即最后物体做匀速直线的速度)将是：

☆ (A) $\sqrt{\dfrac{mg}{k}}$.　　(B) $\dfrac{g}{2k}$.

(C) gk.　　(D) $\sqrt{gk}$.

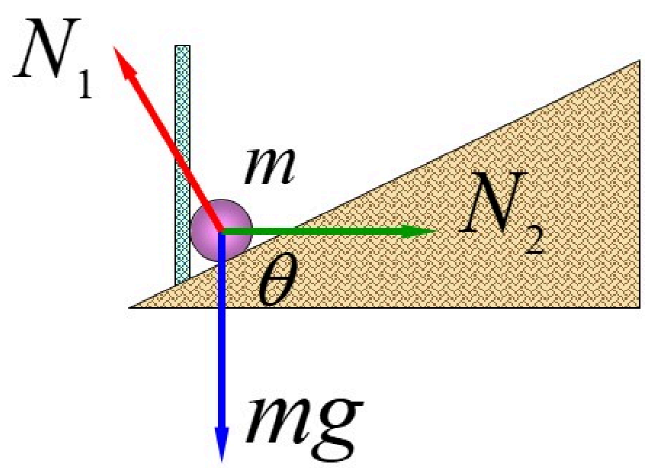
例：在倾角为 θ 的固定光滑的斜面上，放一质量为 m 的小球，球被竖直的木板挡住，当竖直木板被迅速拿开的瞬间，小球获得的加速度

（A） $g\sin\theta$

（B） $g\cos\theta$

★（C） $g\,\mathrm{tg}\,\theta$

（D） $\dfrac{g}{\cos\theta}$



$$a=\frac{N_1\sin\theta}{m}=g\,\mathrm{tg}\,\theta$$

$$N_1\cos\theta=mg$$

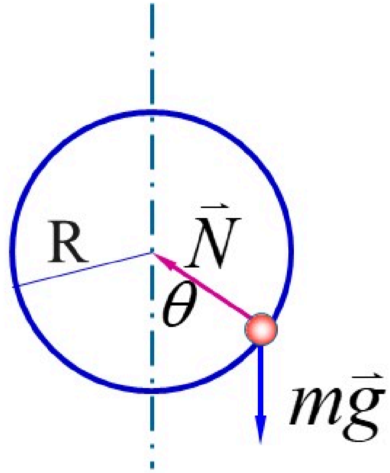
$$N_1\sin\theta=N_2$$

例 一小环可在半径为R的大圆环上无摩擦地滑动，大圆环以其竖直直径为轴转动，如图所示。当圆环以恒定角速度ω转动，小环偏离圆环转轴而且相对圆环静止时，小环所在处圆环半径偏离竖直方向的角度θ为

（A） $\theta=\pi/2$ （B） $\theta=\arccos(g/R\omega^2)$

（C） $\theta=\mathrm{arctg}(R\omega^2/g)$ （D）需由小珠质量决定

解： 对小环受力分析，有：

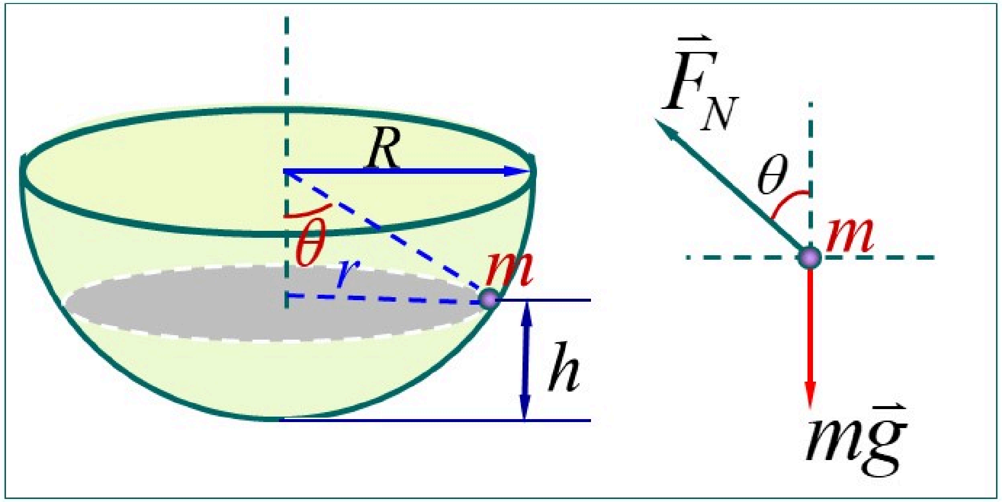


$$N\cos\theta=mg$$

$$N\sin\theta=m\omega^2R\sin\theta$$

从以上二式可得到： $\cos\theta=\dfrac{g}{\omega^2R}$

例 在一只半径为R的半球形碗内，有一质量为 m 的小球，当球以角速度 ω 在水平面内沿碗内壁作匀速圆周运动时，它离碗底有多高？



解：设小球位置如图

$$F_N \cos\theta = mg$$

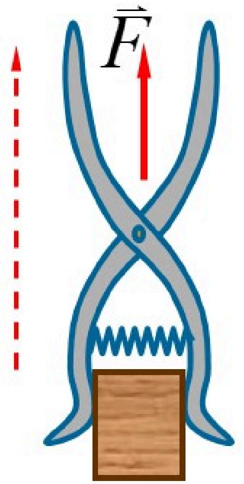
$$F_N \sin\theta = m\omega^2 r$$

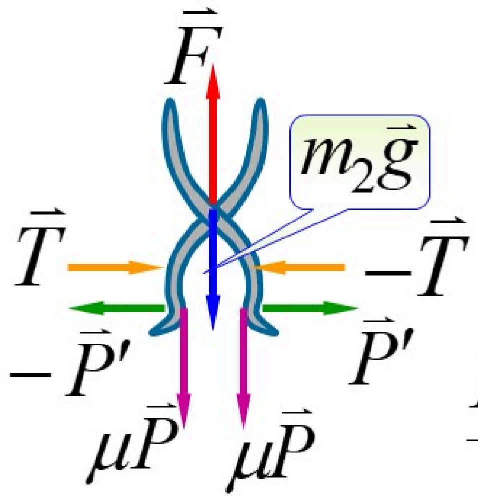
$$r = R\sin\theta,\quad \cos\theta = \frac{R-h}{R}$$

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}$$

例 一质量为$m_2=0.5\mathrm{kg}$的夹子，以压力$P=120\mathrm{N}$夹着质量$m_1=1.0\mathrm{kg}$的木板，已知夹子与木板间的摩擦系数$\mu=0.2$问以多大的力竖直向上拉时，才会使木板脱离夹子.

解： 设木板加速度$\vec{a}_1$；夹子加速度$\vec{a}_2$.

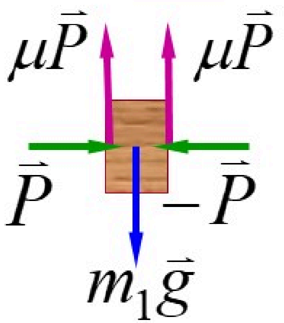




$$\begin{cases} F-2\mu P-m_2g=m_2a_2 \\ 2\mu P-m_1g=m_1a_1 \end{cases}$$

脱离条件 $a_2>a_1$

$$\frac{F-2\mu P-m_2g}{m_2}>\frac{2\mu P-m_1g}{m_1}$$



$$F>\frac{2\mu P(m_1+m_1)}{m_1}=72\mathrm{N}$$

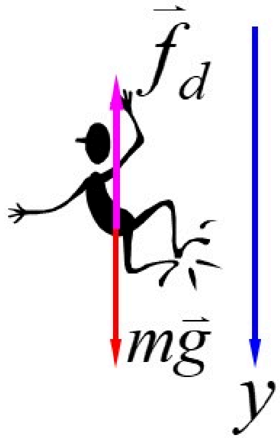
注意起重机爪钩提升物体速度安全问题.

例 一跳空运动员质量为 **80kg**，一次从 **4000m** 高空的飞机上跳出，以雄鹰展翅的姿势下落，有效横截面积 **A** 为 **0.6m²**。以空气密度为 **1.2kg/m³**，和阻力系数 **C = 0.6** 计算，他下落的终极速率多大？

已知：$f_d = C\rho A v^2 / 2 \quad C = 0.6$

$$\rho = 1.2\mathrm{kg/m}^3,\ A = 0.6\mathrm{m}^2$$

解：$mg - \dfrac{1}{2}C\rho A v^2 = ma$



$$a = 0 \quad v = v_L$$

$$v_L = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$

例 已知一物体质量 m 沿水平方向运动，初速度为 v_0 ，所受的阻力为 $f=-kv$ ，求停止运动时，物体运动的距离。

解：

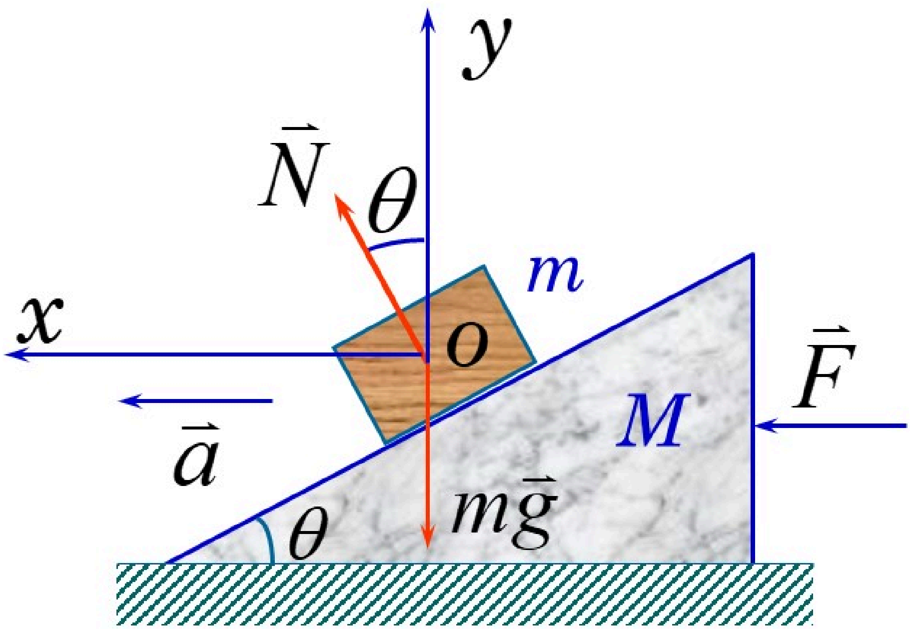
$$f=-kv=ma=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad -kv=mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$-\frac{k}{m}\mathrm{d}x=\mathrm{d}v \qquad -\frac{k}{m}\int_0^x\mathrm{d}x=\int_{v_0}^0\mathrm{d}v$$

$$-\frac{k}{m}x=-v_0 \qquad x=\frac{m}{k}v_0$$

例 质量为 m 的木块放在质量为 M 倾角为 θ 的光滑斜劈上，斜劈与地面的摩擦不计，若使 m 相对斜面静止，需在斜劈上施加多大的水平外力？木块对斜劈的压力为多少？



解1 确定木块为研究对象，

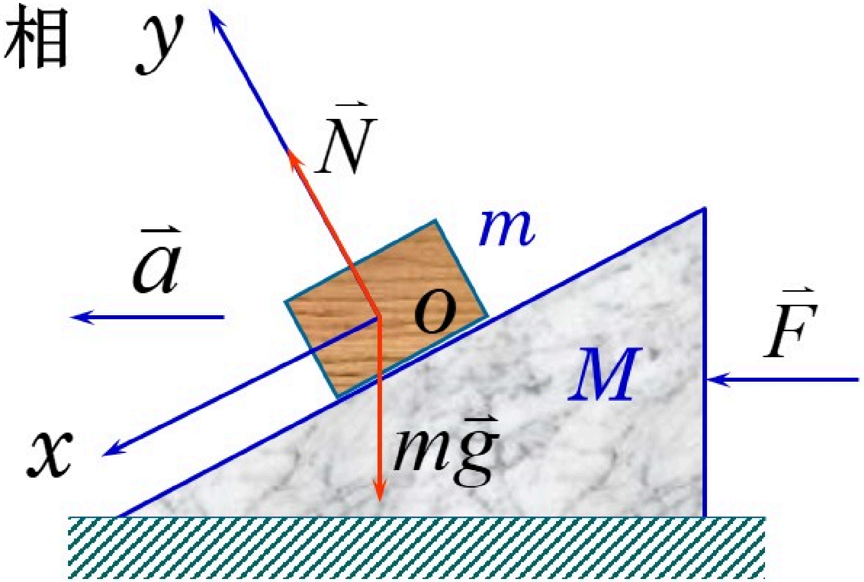
在地面上建立坐标系，要想使 m 相对 M静止，m 在水平方向与 M 的加速度相同

$$\begin{cases} N\sin\theta = ma \\ N\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

联立求解：
$$\begin{cases} a = g\,\mathrm{tg}\theta \\ N = mg/\cos\theta \end{cases}$$

则外力 $F=(m+M)a=(m+M)g\mathrm{tg}\theta$

由牛顿第三定律，m对M的压力与N大小相等方向相反，数值为$N=mg/\cos\theta$



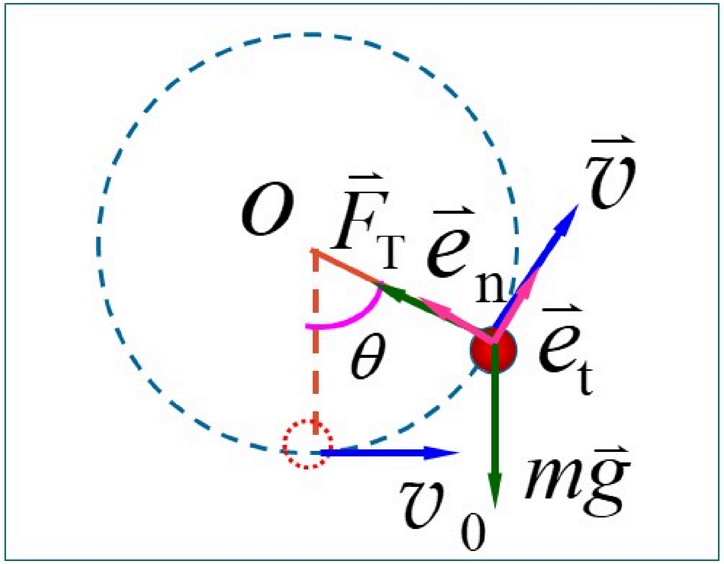
解2 沿斜面建立坐标系， 坐标系建立得好坏，对解题难易程度有直接影响，但对结果无影响.

$$\begin{cases} mg\sin\theta = ma\cos\theta \\ N - mg\cos\theta = ma\sin\theta \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} a = g\mathrm{tg}\theta \\ N = mg/\cos\theta \end{cases}$$

此种方法更简单.

例 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球，另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$，求小球在任意位置的速率及绳的张力.



解
$$\begin{cases} F_T - mg\cos\theta = ma_n \\ -mg\sin\theta = ma_t \end{cases}$$

$$F_T - mg\cos\theta = mv^2/l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{l}\frac{dv}{d\theta}$$

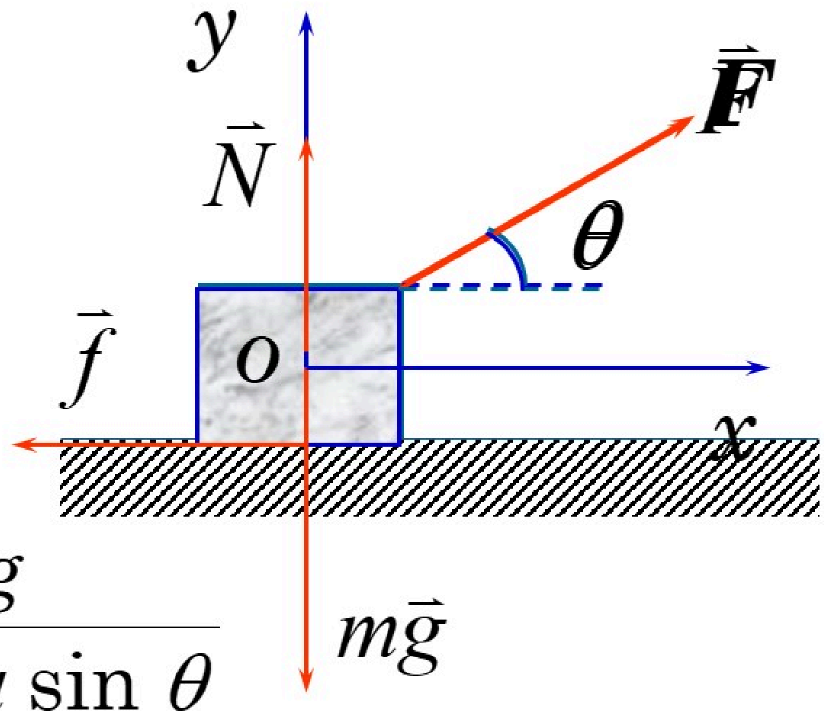
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\,d\theta$$

$$F_T = m\left(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta\right)$$

例 质量为m的物体在摩擦系数为μ的平面上作匀速直线运动，问当力与水平面成θ角多大时最省力？

解： 建立坐标系，受力分析，列受力方程。



$$\begin{cases} F\cos\theta-\mu N=0 \\ N+F\sin\theta-mg=0 \end{cases}$$

联立求解： $F=\dfrac{\mu mg}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$

分母有极大值时，F有极小值， $y=\cos\theta+\mu\sin\theta$

$\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta=0$， $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}\theta^2>0$， $\theta=arctg\mu$

例 质量为 m 的物体，在 $F=F_0-kt$ 的外力作用下沿 x 轴运动，已知 $t=0$ 时，$x_0=0, v_0=0$，求：物体在任意时刻的加速度 a，速度 v 和位移 x 。

解： $$a=\frac{F}{m}=\frac{F_0-kt}{m}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \therefore \mathrm{d}v=\frac{F_0-kt}{m}\mathrm{d}t$$

$$\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t \frac{F_0-kt}{m}\mathrm{d}t \qquad v=\frac{F_0}{m}t-\frac{k}{2m}t^2$$

由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 有 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$

$$\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t \left(\frac{F_0}{m}t-\frac{k}{2m}t^2\right)\mathrm{d}t \qquad x=\frac{F_0}{2m}t^2-\frac{k}{6m}t^3$$

例 一质量为 m 的物体，最初静止于 x_0 处, 在力 $F=-k/x^2$ 的作用下沿直线运动，试证明：物体在任意位置 x 处的速度为

$$v=\sqrt{2\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)}$$

证明： $\because F=ma \qquad a=\dfrac{F}{m}=-\dfrac{k}{mx^2}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

a 中不显含时间 t，要进行积分变量的变换 $a\mathrm{d}x=v\mathrm{d}v$

$$v\mathrm{d}v=-\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x$$

两边积分 $\displaystyle\int_0^v v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}-\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x$

$$\frac{v^2}{2}=\frac{k}{m}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)$$

则 $v=\sqrt{2\left(\dfrac{k}{m}\right)\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}\right)}$

例　一质量m，半径 r 的球体在水中静止释放沉入水底. 已知阻力$F_r = -6\pi r\eta v$, η 为粘滞系数, **求** $v(t)$.

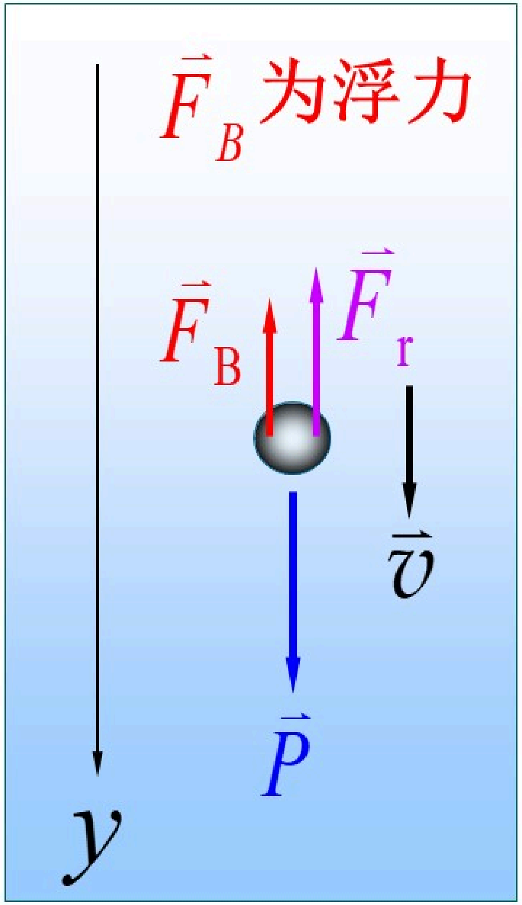
解　取坐标如图

$$mg - F_B - 6\pi\eta r v = ma$$

令 $F_0 = mg - F_B \qquad b = 6\pi\eta r$

$$F_0 - bv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{F_0}{b}\right)$$

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{v - (F_0/b)} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

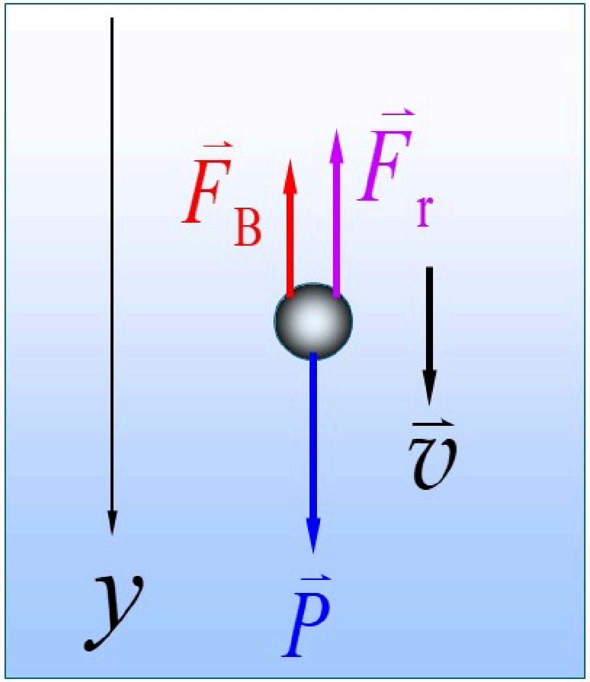
$$v = \frac{F_0}{b}\left[1 - \mathrm{e}^{-(b/m)t}\right]$$

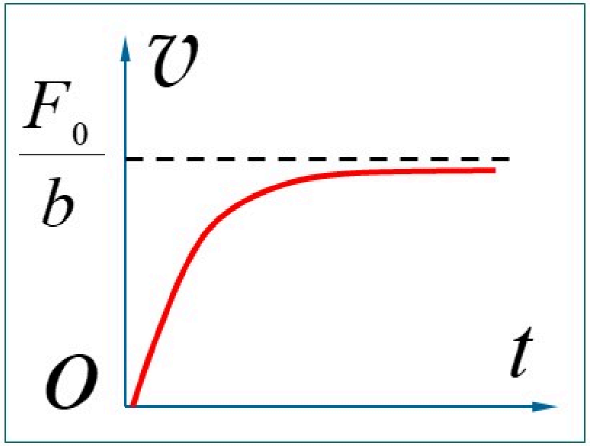
$t \to \infty$， $v_L \to F_0/b$（极限速度）

当 $t = 3m/b$ 时

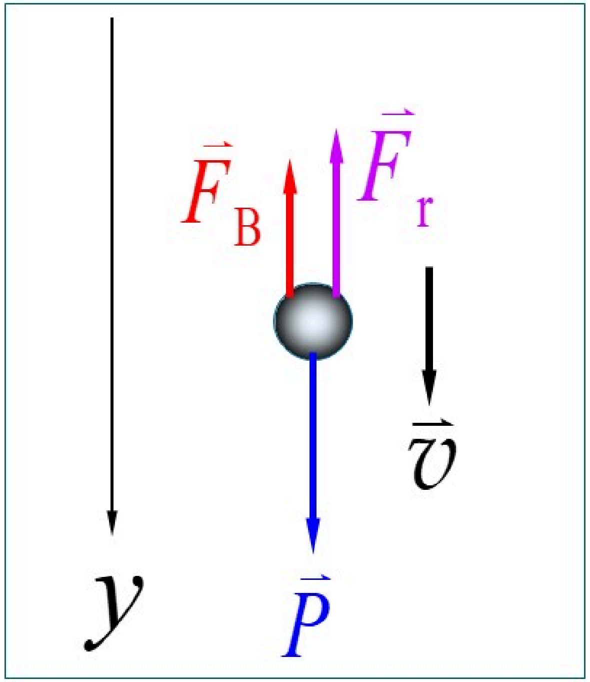
$$v = v_L(1-0.05) = 0.95v_L$$

一般认为 $t \geq 3m/b$， $v \to v_L$





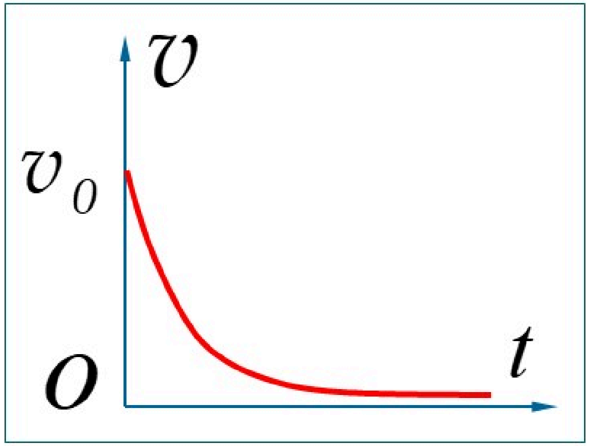
若球体在水面上是具有竖直向下的速率 v_0，且在水中的重力与浮力相等，即 $F_B = P$．则球体在水中仅受阻力 $F_r = -bv$ 的作用



$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -bv$$

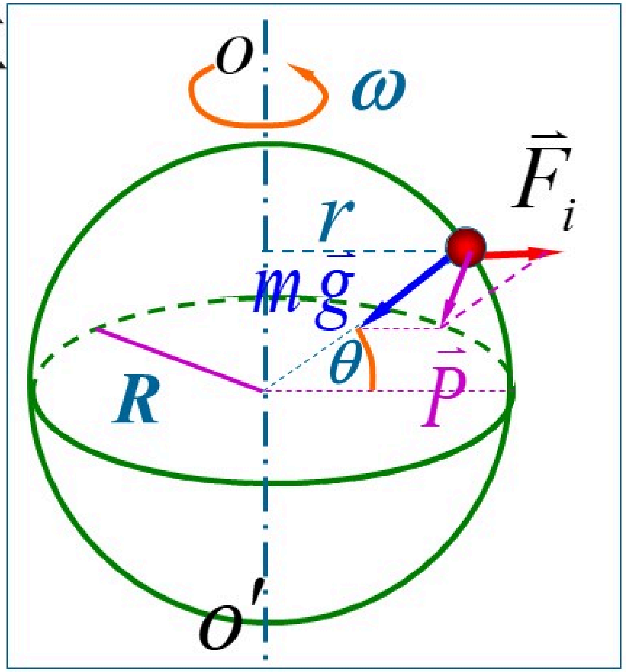
$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{b}{m}\int_0^t \mathrm{d}t$$

$$v = v_0 \mathrm{e}^{-(b/m)t}$$



例 由于地球的自转，故物体在地球表面所受的重力与物体所处的纬度有关，试找出他们之间的关系.

解： 在地面纬度θ处，物体的重力$\boldsymbol{P}$（视重）等于地球引力与自转效应的惯性离心力之矢量合，即



$$\vec{P} = m\vec{g} + \vec{F}_i$$

$$F_i = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\theta$$

$$P \approx mg - F_i\cos\theta$$

$$= mg(1-\omega^2 R\cos^2\theta/g) = mg(1-\frac{\cos^2\theta}{289})$$

物体的重力$\boldsymbol{P}$在两极最大，赤道最小.