

第五章 定积分

5.1 定积分的定义与性质

一、选择题:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right) = (\text{A})$.
 A. $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ B. $\ln 3$ C. $\int_0^1 x dx$ D. $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
- $I = \int_a^b |x| dx = (\text{C}) \quad (a < b)$.
 A. $-\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ B. $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ C. $\frac{1}{2}(b|b| - a|a|)$ D. $-\frac{1}{2}(b|b| - a|a|)$
- 设 $A = \int_0^1 e^{-x^2} dx$, $B = \int_1^2 e^{-x^2} dx$, 则 (B) .
 A. $A = B$ B. $A > B$ C. $A < B$ D. $A - B$ 的符号不定
- 积分区间相同, 被积函数也相同的两个定积分的值一定 (A) .
 A. 相等 B. 不相等 C. 相差一个无穷小 D. 相差一个常数
- 设 $f(u)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 x 与 t 无关, 则 (B) .
 A. $\int_a^b x f(x) dx = x \int_a^b f(x) dx$ B. $\int_a^b t f(x) dx = t \int_a^b f(x) dx$
 C. $\int_a^b t f(x) dt = t \int_a^b f(x) dt$ D. $\int_a^b x f(t) dx = x \int_a^b f(t) dx$
- 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $a < b$, 则下列积分一定不为零的是 (C) .
 A. $\int_a^b 0 dx$ B. $\int_a^b f(x) dx$ C. $\int_a^b dx$ D. $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx$
- 下列积分中, 值为零的是 (D) .
 A. $\int_{-1}^1 x^2 dx$ B. $\int_{-2}^1 x^3 dx$ C. $\int_{-1}^1 dx$ D. $\int_{-1}^1 x^2 \sin x dx$

二、1. 利用定积分的定义计算 $\int_a^b x^2 dx$ $(\frac{1}{3}(b^3 - a^3))$

2. 用定积分表示下列极限: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$ $(\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx)$

5.2 定积分基本公式

一、选择题:

1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ ($a \leq x \leq b$) 是 $f(x)$ 的 (B).

A. 不定积分 B. 一个原函数 C. 全体原函数 D. 在 $[a, b]$ 上的定积分

2. 设非零函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数, 则 $f(x) =$ (B).

A. $\int f'(x)dx$ B. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt$ C. $\frac{d}{dx} \int_a^x f'(t)dt$ D. $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x)dx$

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x)$ 是单调减少函数, 而 $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$,

则 (C).

A. $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 但不可导 B. $F'(x) = 0$

C. $F(x)$ 为增函数 D. $F(x)$ 为减函数

二、求下列极限:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t^{\frac{3}{2}} dt}{x(x - \sin x)} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin 3t dt}{x \ln(1+x)} = \frac{3}{2}$

三、1. 方程 $\int_1^y \frac{\sin t}{t} dt + \int_x^0 e^{-t^2} dt = 0$ 决定了隐函数 $y = y(x)$, 求 $\frac{dy}{dx}$. ($\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^{x^2} \sin y}$)

2. 设 $x = \int_1^t u \ln u du$, $y = \int_t^1 u^2 \ln u du$, 求 $\frac{dy}{dx}$. ($\frac{dy}{dx} = -t$)

四、1. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$, 求 $\int_0^2 f(x)dx$. ($\int_0^2 f(x)dx = \frac{3}{2}$)

2. 设 $\int_0^x f(t^2)dt = x^5$, 求 $\int_0^1 f(x)dx$. ($\int_0^1 f(x)dx = \frac{5}{3}$)

五、计算下列各定积分:

1. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{3}$

2. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3}$

3. $\int_0^{\pi/4} \tan^2 \theta d\theta = 1 - \frac{\pi}{4}$

$$4. \int_0^{2\pi} |\sin x| dx = 4$$

六、利用定积分的奇偶性化简计算下列积分：

$$1. \int_{-1}^1 \frac{x + \sin x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{2\pi}{3}$$

$$2. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^3 x}{x^2+1} dx = 0$$

$$3. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x (\sin^4 x + \ln \frac{3+x}{3-x}) dx = \frac{5\pi}{16}$$

七、计算下列定积分：

$$1. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x+1, & x > 0 \end{cases}, \text{ 求 } \int_{-1}^2 f(x) dx. \quad \left(\frac{13}{3} \right)$$

$$2. \text{ 求 } \int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1} dx. \quad (1)$$

5.3 定积分的换元法

一、计算下列定积分：

$$1. \int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

$$2. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} + \frac{\ln 3}{2}$$

$$3. \int_1^e \frac{1}{x(2 + \ln^2 x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \tan x} dx = \frac{\pi}{4}$$

$$5. \int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = 1$$

$$6. \int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$7. \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx = \pi - \frac{8}{3}$$

$$8. \int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2-\sqrt{3})$$

$$9. \int_1^2 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{二、设 } f(x) = \int_0^x e^{2t-t^2} dt, \text{ 求 } \int_0^1 (x-1)^2 f(x) dx. \quad \left(\frac{1}{6}(e-2) \right)$$

定积分的分部积分法

一、计算下列定积分：

$$1. \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

$$2. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{x}{\sin^2 x} dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{9} \right) \pi - \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$$

$$3. \int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$4. \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x| dx = 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

$$5. \int_0^{2\pi} \left| x - \frac{\pi}{2} \right| \cos x dx = 2$$

$$6. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$7. \int_0^1 x^2 \ln(1+x) dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18}$$

$$8. \int_0^1 x f''(x) dx = \frac{1}{2} f'(2) - \frac{1}{4} [f(2) - f(0)]$$

$$9. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos^4 x \sin^2 x + \sin^5 x) dx = \frac{\pi}{16}$$

5.4 反常积分

一、计算下列无穷限的反常积分：

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx = +\infty \quad (\text{发散})$$

$$2. \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx = \frac{1}{4}$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx = \frac{1}{3}$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$$

二、计算下列无界函数的反常积分：

$$1. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_0^1 \ln x dx = -1$$

$$3. \int_0^1 \frac{2}{(x-1)^2} dx = +\infty \quad (\text{发散})$$

$$4. \int_1^e \frac{\ln x}{(1-x)^2} dx = +\infty \quad (\text{发散})$$

三、计算下列反常积分：

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \pi$$

$$2. \int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2} dx = +\infty \quad (\text{发散})$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+x)} dx = \frac{\pi}{2}$$