

第十二章 微分方程

11.1 微分方程的基本概念、11.2 可分离变量的微分方程

一、指出下列方程中哪些是微分方程：

1. $y'' - 3y' + 2y = x$ (是微分方程)
2. $y^2 - 3y + 2 = x$ (不是微分方程)
3. $y' = x + y + y^2 \cos x$ (是微分方程)
4. $y^2 + 1 = 3x + 2xy + \sin x$ (不是微分方程)

二、指出下列微分方程的阶，同时指出它是线性的，还是非线性的：

1. $x(y')^2 - 2yy' + x = 1$ (一阶非线性微分方程)
2. $x^2y'' - xy' + y = \ln x$ (二阶线性微分方程)
3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ (一阶非线性微分方程)
4. $(7x+3y)dx + (x+y)dy = 0$ (一阶非线性微分方程)

三、指出下列各题中的函数是否为所给微分方程的解，如果是解，是通解，还是特解？

1. $xy' = 2y, y = 5x^2$ (D)
A. 是解 B. 不是解 C. 是通解 D. 是特解
2. $y'' + \omega y = 0, y = 3 \sin \omega x - 4 \cos \omega x$ (B)
A. 是解 B. 不是解 C. 是通解 D. 是特解
3. $y'' - 2y' + y = 0, y = x^2 e^x$ (B)
A. 是解 B. 不是解 C. 是通解 D. 是特解
4. $y' = 3xy, y = Ce^{\frac{3}{2}x^2}$ (C)
A. 是解 B. 不是解 C. 是通解 D. 是特解

四、求下列可分离变量的微分方程解：

1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ ($y^2 + 1 = C(x^2 - 1)$)

2. $y' = e^{5x-2y}, y(0) = 0$ ($5e^{2y} = 2e^{5x} + 3$)

3. $y' = \frac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$ ($1+y^2 = C(1+x^2)$)

4. $y' = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$ ($y + \sqrt{y^2-1} = C(x + \sqrt{x^2-1})$)

5. $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$ ($(e^x + 1)(e^y - 1) = C$)

6. $(y+1)^2 \frac{dy}{dx} + x^2 = 0$ ($x^3 + (y-1)^3 = C$)

7. $y' \sin x = y \ln y$ ($y = e^{C \tan \frac{x}{2}}$)

五、小船从河边点 O 处出发驶向对岸(两岸为平行直线)。设船速为 a ，船行方向始终与河岸垂直，又设河宽为 h ，河中任一点处的水流速度与该点到两岸距离的乘积成正比(比例系数为 k)。求小船的航行路线。(答案见教材)

11.3 齐次微分方程

一、求下列齐次微分方程的解：

1. $xy' - y - \sqrt{y^2 - x^2} = 0$ ($y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^2$)

2. $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ ($y = x \tan(\ln x + C)$)

3. $(xy' - y) \cos^2 \frac{y}{x} + x = 0$ ($\frac{y}{x} + \frac{1}{2} \sin \frac{2y}{x} = C - \ln x^2$)

4. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}, y(1) = 0$ ($y = -x \ln(1 - \ln x)$)

5. $y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = 1$ ($x + y = x^2 + y^2$)

6. $(1 + 2e^{\frac{x}{y}})dx + 2e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$ ($x + 2ye^{\frac{x}{y}} = C$)

二、设有连接点 $O(0,0)$ 和 $A(1,1)$ 的一段向上凸的曲线弧 \widehat{OA} ，对于 \widehat{OA} 上任一点

$P(x,y)$ ，曲线弧 \widehat{OP} 与直线段 \overline{OP} 所围图形的面积为 x^2 ，求曲线弧 \widehat{OA} 的

方程。($y = x(1 - 4\ln x)$)

11.4 一阶线性微分方程

一、求下列一阶线性微分方程的解：

$$1. \quad xy' + y = e^x, \quad y(1) = e \quad (y = \frac{e^x}{x})$$

$$2. \quad y' + y \cos x = e^{-\sin x} \quad (y = e^{-\sin x} (x + C))$$

$$3. \quad (x^2 + 1)y' + 2xy = 4x^2 \quad (y = \frac{1}{x^2 + 1} (\frac{4}{3}x^3 + C))$$

$$4. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad y(\pi) = 1 \quad (y = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x})$$

$$5. \quad \frac{d\rho}{d\theta} + 5\rho = 4 \quad (\rho = \frac{4}{5} + Ce^{-5\theta})$$

$$5. \quad y' + \frac{2 - 3x^2}{x^3}y = 1, \quad y(1) = 0 \quad (y = \frac{x^3}{2} (1 - e^{\frac{1}{x^3} - 1}))$$

二、设有一质量为 m 的质点作直线运动。从速度等于零的时刻起，有一个与运动方向一致、大小与时间成正比（比例系数为 k_1 ）的力作用于它，此外还受一与速度成正比（比例系数为 k_2 ）的阻力作用。求质点的速度与时间的

函数关系。($v = \frac{k_1}{k_2}t - \frac{k_1 m}{k_2^2} (1 - e^{-\frac{k_2}{m}t})$)

11.5 全微分方程

一、求下列全微分方程的通解：

$$1. \quad (5x^4 + 3xy^2 - y^3)dx + (3x^2y - 3xy^2 + y^2)dy = 0.$$

$$(x^5 + \frac{3}{2}x^2y^2 - xy^3 + \frac{1}{3}y^3 = C)$$

$$2. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x - y^2}{2xy + 2y^3} \quad (-\frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \frac{1}{2}y^4 = C)$$

$$3. e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0 \quad (xe^y - y^2 = C)$$

$$4. (x+y)(dx-dy) = dx+dy \quad (x-y = \ln|x+y| + C)$$

11.6 可降阶的高阶微分方程

一、求下列高阶微分方程的解：

$$1. y^{(4)} = xe^x + 2. \quad (y = xe^x - 4e^x + \frac{x^4}{12} + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4)$$

$$2. y'' = y' + x. \quad (y = C_1e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2)$$

$$3. y'' = 1 + (y')^2. \quad (y = -\ln|\cos(x+C_1)| + C_2)$$

$$4. 2xy'y'' - (y')^2 = 1. \quad (y = \frac{2}{3C_1}(C_1x-1)^{\frac{3}{2}} + C_2)$$

$$5. y'' + (y')^2 = 1, y(0) = y'(0) = 0. \quad (y = \ln \operatorname{ch} x)$$

$$6. y'' = 3\sqrt{y}, y(0) = 1, y'(0) = 2. \quad (y = (\frac{1}{2}x+1)^4)$$

二、设有一质量为 m 的物体，在空间中由静止开始下落，如果空气阻力为 $R = c^2v^2$

(其中 c 为常数， v 为物体的运动速度)，试求物体下落的距离 s 与时间 t 的关系。

$$(s = \frac{m}{c^2} \ln \operatorname{ch}(\sqrt{\frac{g}{m}} ct))$$

11.7 二阶常系数齐次线性微分方程

一、求下列常系数齐次微分方程的解：

$$1. y'' - 3y' + 2y = 0. \quad (y = C_1e^x + C_2e^{2x})$$

$$2. y'' + a^2y = 0. \quad (y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)$$

$$3. y^{(4)} - 16y = 0. \quad (y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

$$4. 4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0. \quad (y = (2+x)e^{-\frac{x}{2}})$$

$$5. y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15. \quad (y = 3e^{-2x} \sin 5x)$$

二、 设圆柱形浮筒的直径为 0.5 m, 铅直放在水中, 当稍向下压后突然放开, 浮筒在水中上下振动的周期为 2 s, 求浮筒的质量。 ($M = 195\text{kg}$)

11.8 二阶常系数非齐次线性微分方程

一、 求下列常系数非齐次微分方程的解:

$$1. y'' + 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^{2x}.$$

$$(y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (\frac{1}{12}x^2 - \frac{7}{72}x + \frac{109}{864})e^{2x})$$

$$2. y'' + 3y' + 2y = (x + 3)e^{-2x}. \quad (y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - x(\frac{1}{2}x + 4)e^{-2x})$$

$$3. 25y'' - 10y' + y = (3x^2 + x)e^{\frac{x}{5}}. \quad (y = (C_1 + C_2 x)e^{\frac{x}{5}} + \frac{1}{300}x^3(2 + 3x)e^{\frac{x}{5}})$$

$$4. y'' - 2y' + 5y = 3x^2 e^x (\cos 2x + \sin 2x).$$

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \\ (-\frac{1}{4}e^x[(x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{16})\cos 2x - x(x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8})\sin 2x])$$

$$5. y'' + 4y + 3\sin 3x = 0, y(\pi) = y'(\pi) = 1.$$

$$(y = \frac{7}{5}\sin 2x + \cos 2x + \frac{3}{5}\sin 3x)$$

$$6. y'' - 6y' + 5y = 4x + 1, y(0) = y'(0) = 1.$$

$$(y = -\frac{1}{4}e^x + \frac{9}{100}e^{5x} + \frac{4}{5}x + \frac{29}{25})$$

$$7. y'' - 6y' + 9y = (2x + 1)e^{3x}, y(0) = y'(0) = 1.$$

$$(y = (1 - \frac{13}{6}x)e^{3x} + \frac{1}{6}(2x^3 + 3x^2 + x)e^{3x})$$

二、 一链条悬挂在一钉子上, 起动时一端离开钉子 8 m, 另一端离开钉子 12 m, 分别在以下两种情况下求链条滑下来所需要的时间:

(1) 若不计钉子对链条所产生的摩擦力;

(2) 若摩擦力为 1 m 长的链条的重量。

$$((1) \sqrt{\frac{10}{g}} \ln(5 + 2\sqrt{6}) \text{秒}; \quad (2) \sqrt{\frac{10}{g}} \ln \frac{19 + 4\sqrt{22}}{3} \text{秒})$$