习题 3-2

1. 设 X 表示随机在 1~4 的 4 个数中任取的一个整数，Y 表示在$1\sim X$ 中随机的取出一个整数. 求（1）(X,Y) 的联合分布及边缘分布；（2）在 $X=3$时，Y 的条件分布.

解 (1) 由题意知, X,Y 可能取值均为 1, 2, 3, 4，且

不可能事件

$P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{4}$，　$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1,Y=4\}=0$；

$P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，　$P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，　$P\{X=2,Y=3\}=P\{X=2,Y=4\}=0$；

$P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，　$P\{X=3,Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，　$P\{X=3,Y=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，

$P\{X=3,Y=4\}=0$；　$P\{X=4,Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，　$P\{X=4,Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，

$P\{X=4,Y=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$，　$P\{X=4,Y=4\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$.

故(X,Y)的联合分布为：

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

关于 X,Y 的边缘分布分别为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	1	2	3	4
P	$\frac{25}{48}$	$\frac{13}{48}$	$\frac{7}{48}$	$\frac{1}{16}$

（2）$P\{Y=1 \mid X=3\}=\dfrac{P\{X=3,Y=1\}}{P\{X=3\}}=\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{3}$ ，同理可得

$P\{Y=2 \mid X=3\}=\dfrac{1}{3}$，$P\{Y=3 \mid X=3\}=\dfrac{1}{3}$，$P\{Y=4 \mid X=3\}=0$（此式可不写）.

故得在 $X=3$ 时，Y 的条件分布为

Y	1	2	3
$P\{Y \mid X=3\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

2. 解

则 $(X,Y)=(1,1),(1,2),\cdots,(6,6)$

2、由题意知，$X=1,2,\cdots,6$；$Y=1,2,\cdots,6$，

$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，（$X=1,Y=1$ 含义是第一枚骰子出现1点，两枚骰子中最大值点数为1，即第2枚骰子也出现1点）

$P(X=1,Y=2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ （$X=1,Y=2$ 含义是第1枚骰子出现1点，第2枚骰子出现2点，最大点数 $Y=2$，则

同理 $P(X=1,Y=3)=P(X=1,Y=4)=P(X=1,Y=5)=P(X=1,Y=6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P(X=2,Y=1)=0$ （$X=2,Y=1$ 含义是第1枚骰子出现2点，2枚骰子最大点数为1，这是不可能事件，故概率为0）

同理 $P(X=i,Y=j)=0$，这里 $i=3,4,5,6$，$j<i$

$P(X=2,Y=2)=\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{36}$ （这里 $X=2,Y=2$ 含义：第1枚骰子出现2点，第2枚骰子出现1点或2点）

$P(X=2,Y=j)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，这里 $j>2$，（$P(X=2,Y=j)$，$j>2$ 与 $P(X=1,Y=2)$ 求法类似）

$P(X=3,Y=3)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{36}$，$P(X=3,Y=j)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，$j>3$

$P(X=4,Y=4)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{36}$，$P(X=4,Y=j)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，$j>4$，$P(X=5,Y=5)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$

$P(X=5,Y=6)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，$P(X=6,Y=6)=\frac{1}{6}\times\frac{6}{6}=\frac{6}{36}$ 故 (X,Y) 的联合分布为见课后答案

第2页

第 3 题，第 4 题见下面图片。

3.

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_i^{(1)}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3}+\alpha+\beta$
$p_j^{(2)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}+\alpha$	$\frac{1}{18}+\beta$	

要使 X 与 Y 独立，则

$$\begin{cases} P(X=1, Y=2)=P(X=1)P(Y=2) \\ P(X=1, Y=3)=P(X=1)P(Y=3) \end{cases}$$

即 $\begin{cases} \frac{1}{9}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{9}+\alpha\right) \\ \frac{1}{18}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{18}+\beta\right) \end{cases}$，解得 $\begin{cases} \alpha=\frac{2}{9} \\ \beta=\frac{1}{9} \end{cases}$

4. 由题意知，事件"$X^2=Y^2$"等价于"$X=0, Y=0$"或"$X=1, Y=-1$"或"$X=1, Y=1$"，假设 X 与 Y 独立，则

$$P\{X^2=Y^2\}=P(X=0, Y=0)+P(X=1, Y=-1)+P(X=1, Y=1)$$

$$\overset{\text{由独立}}{=} P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=-1)+P(X=1)P(Y=1)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{10}{16}\neq 1$$，矛盾，故 X 与 Y 不独立.

5. 设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2},$$

试求 $P\{X=Y\}$.

解 显然 $P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，故关于 X 的概率分布为

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

同理 Y 的概率分布同 X 的概率分布，又 X 与 Y 独立，则

$$P\{X=Y\}=P\{X=-1, Y=-1\}+P\{X=1, Y=1\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}+P\{X=1\}P\{Y=1\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

6. 解

6. (1) 因为 $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$，故联合密度函数 $f(x,y)=f_X(x)f(y|x)$

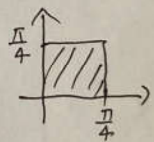
(2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f(y|x)dx$

(3) $f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f(y|x)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f(y|x)dx}$

7. 解

7.(1) 因为 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\int_0^{\frac{\pi}{4}}C\sin(x+y)dy=C\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{4})]dx$

$=C(\sqrt{2}-1)$，则 $C=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$



(2) 当 $x<0$ 或 $x>\frac{\pi}{4}$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

当 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}+1)\sin(x+y)dy$

$=(\sqrt{2}+1)(-\cos(x+y)|_0^{\frac{\pi}{4}})=(\sqrt{2}+1)(\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{4}))$

故 X 的边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}(\sqrt{2}+1)(\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{4})), & 0\le x\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & 其它\end{cases}$

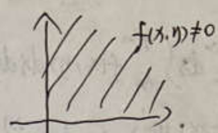
同理 Y 的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}(\sqrt{2}+1)(\cos y-\cos(y+\frac{\pi}{4})), & 0\le y\le\frac{\pi}{4}\\ 0, & 其它\end{cases}$

(3) 显然 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立

8. 解

P105. 习题3-2

8.(1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy$



当 $x\le0$ 或 $y\le0$ 时 $F(x,y)=0$

当 $x>0$, $y>0$ 时 $F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^y xe^{-(x+y)}dy=\int_0^x xe^{-x}dx\cdot\int_0^y e^{-y}dy$

$=(-e^{-y})|_0^y(-\int_0^x x\,de^{-x})=(1-e^{-y})(-xe^{-x}|_0^x+\int_0^x e^{-x}dx)$

$=(1-e^{-y})(1-e^{-x}-xe^{-x})$

故 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-y})(1-e^{-x}-xe^{-x}) & x>0,y>0\\ 0 & 其它\end{cases}$

(2) $P\{-1\le X\le1, 0\le Y\le2\}=F(1,2)-F(-1,2)-F(1,0)+F(-1,0)$

= ……

或 $P\{-1\le X\le1, 0\le Y\le2\}=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2 f(x,y)dy=\int_0^1 dx\int_0^2 xe^{-(x+y)}dy=(1-e^{-2})(1-2e^{-1})$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当 $x\le0$ 时 $f_X(x)=0$

当 $x>0$ 时 $f_X(x)=\int_0^{+\infty}xe^{-(x+y)}dy=xe^{-x}\int_0^{+\infty}e^{-y}dy=xe^{-x}(-e^{-y})|_0^{+\infty}$

$=xe^{-x}$

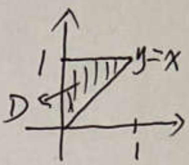
故 $f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0 & 其它\end{cases}$ 　同理 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 故 X 与 Y 独立.

第 9 题，第 10 题见下面图片。

P106 习题3-2

9. 先求X与Y的边缘密度函数.



由图可知，在D上，$f(x,y)=8xy$

若将D看作X型区域，则 $D_x=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ x\le y\le 1\}$

则当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$ 上、下限与此一致.

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_x^1 8xy\,dy=4x(1-x^2)$

故X的边缘密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}4x(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

将D看作Y型区域，则 $D_y=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y\}$

故当 $y<0$ 或 $y>1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$ 上.下限与此范围一致

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^y 8xy\,dx=4y^3$

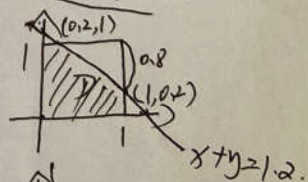
故Y的边缘密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}4y^3, & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，则X与Y ~~独立~~ 不独立

10. 设X，Y分别表示从(0,1)中任取的2个数，则由题意知，X与Y相互独立，且服从区间[0,1]上的均匀分布，故 $f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

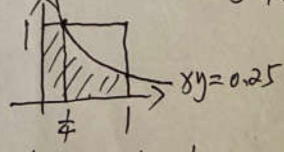
$f_Y(y)=\begin{cases}1, & y\in[0,1]\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，又X与Y独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

显然(X，Y)服从区域 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ 上的均匀分布



(1) $P(X+Y<1.2)=\dfrac{S(G_1\cap D)}{S(D)}=\dfrac{1-\frac{1}{2}\times 0.8\times 0.8}{1\times 1}=0.68$

(2) 设 $G_2=\{(x,y)\mid xy<0.25\}$



则 $S(G_2\cap D)=1\times\frac{1}{4}+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{0.25}{x}dx$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4$

故 $P(XY<0.25)=\dfrac{S(G_2\cap D)}{S(D)}=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4}{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln 4=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$

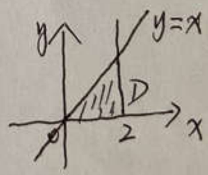
11. 解

11. 因为 $X \sim U[0,2]$，$Y \sim Exp(2)$，故 X 与 Y 的密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x\in[0,2]\\ 0, & 其它\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

又 X 与 Y 互相独立，则 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-2y}, & 0\le x\le 2,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$



故 $P(X>Y)=\iint\limits_{x>y} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D} e^{-2y}\,dxdy$

$$=\int_0^2 dx\int_0^x e^{-2y}\,dy=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{-4}$$