习题 1-3

1. 一个家庭中有三个小孩，已知其中一个是女孩，求至少有一个是男孩的概率(假定男、女出生率一样).

解 设 A 表示“至少有一个男孩”，设 B 表示“其中一个是女孩”，则 A={(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，男，男)}，B={(女，女，女)，(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)}，因此

$$P(A|B)=\frac{m_{AB}}{m_B}=\frac{6}{7}.$$

2. 某车间分两个组生产同一种产品，各组生产情况如下表所示.

	合格品数	废品数	合计
第一组	67	2	69
第二组	28	1	29
合计	95	3	98

从这个车间的产品中任取一件，用 A 表示“取到的产品是第一组生产的”，用 B 表示“取到的产品是合格品”，试求 $P(A)$，$P(B)$，$P(AB)$，$P(B|A)$，$P(A|B)$，$P(\overline{A}|AB)$.

解 由题意，有 $P(A)=\frac{69}{98}$，$P(B)=\frac{95}{98}$，$P(AB)=\frac{67}{98}$；

故 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{67}{95}$，$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{67}{69}$，$P(\overline{A}|AB)=\frac{P(\overline{A}AB)}{P(AB)}=\frac{0}{67}=0$.

3. 某人忘记电话号码最后一位，于是他随意地拨号，(1) 求他拨号不超过 3 次而接通所需电话的概率；(2) 若已知最后一个数字是奇数，那么此概率又是多少？

解 (1) 设 A_i 表示第 i 次拨号接通电话，i = 1, 2, 3. A 表示“拨号不超过 3 次”，则

$A=A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$，并且 $A_1,\overline{A_1}A_2,\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$ 两两互不相容，由于末位数字有 0-9 共 10 种选择，因此

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A_1+\overline{A_1}A_2+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=P(A_1)+P(\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)\\&=P(A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\,\overline{A_2})\\&=\frac{1}{10}+\frac{9}{10}\times\frac{1}{9}+\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

(2) 最后一个数字是奇数，则有 5 种情况，与（1）类似，第 1 次接通，概率为 1/5；第 1 次不通，第 2 次接通的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$；前 2 次不通，第 3 次接通的概率为 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$；故所求概率为 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$.

4. 设某种动物由出生活到 10 岁的概率为 0.8，而活到 15 岁的概率为 0.5. 问现为 10 岁的这种动物能活到 15 岁的概率是多少？

解 设 A 表示“该动物能够活到 10 岁”，设 B 表示“该动物能够活到 15 岁”，又“活到 15 岁”一定“活到 10 岁”，由随机事件包含定义知 $B \subset A$，从而有 $AB = B$，由已知 $P(A) = 0.8$，$P(B) = 0.5$，从而 $P(AB) = P(B) = 0.5$，则

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625.$$

5. 某单位同时装有两种报警系统Ⅰ与Ⅱ，每种系统单独使用时，其有效的概率分别为 0.92、0.90，在报警系统Ⅱ有效的条件下，报警系统Ⅰ有效的概率为 0.93，若发生意外时，求

(1) 两种报警系统都有效的概率；

(2) 在报警系统Ⅰ有效的条件下，报警系统Ⅱ有效的概率；

(3) 两种报警系统至少有一种有效的概率；

(4) 两种报警系统都失灵的概率.

解 设 A 表示“系统Ⅰ有效”，B 表示“系统Ⅱ有效”，由已知 $P(A) = 0.92$，$P(B) = 0.90$，$P(A|B) = 0.93$，从而

(1) $P(AB) = P(B)P(A|B) = 0.9 \times 0.93 = 0.837$；

(2) $P(B|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)} = \dfrac{0.837}{0.92} \approx 0.91$；

(3) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.92 + 0.9 - 0.837 = 0.983$；

(4) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B) = 0.017$.

6. 已知 10 只产品中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两只都是正品；

(2) 两只都是次品；

(3) 一只是正品，一只是次品.

解 设 A 表示“第 1 次取到正品”，设 B 表示“第 2 次取到正品”，则

(1) $P(AB) = P(A)P(B|A) = \dfrac{8}{10} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{28}{45}$；

(2) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A}) = \dfrac{2}{10} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{45}$；

(3) $P(A\overline{B} + \overline{A}B) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$

$$= \frac{8}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{8}{9} = \frac{16}{45}.$$

7. 已知 $P(A) = 0.5$，$P(B) = 0.6$，$P(B|A) = 0.8$，求 $P(AB)$ 与 $P(\overline{A}\,\overline{B})$.

解 （1）$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.4$；

（2）$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.7$，

即 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.3$.

8. 设 A，B 两个事件，已知 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$，$P(B|\overline{A})=\dfrac{5}{6}$. 求

(1) $P(\overline{A}B)$；(2) $P(AB)$；(3) $P(A|B)$；(4) $P(A+B)$.

解 由 $P(\overline{A})=1-P(A)=0.6$，有

(1) $P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.5$；

(2) （方法一）由于 $P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)$，则 $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.3$.

（方法二）因为 $P(B|\overline{A})=\dfrac{5}{6}$，则 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{5}{6}\Rightarrow P(AB)=0.3$.

(3) $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{3}{8}$；

(4) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.9$.