姓名：________________ 学号：________________

上册 五六七章 小测验

（共 31 分，10 分为本次测验满分数，高于 10 分的额外分累加入下次成绩）

一、选择题(每题 1 分)

1. 关于闭区间$[a,b]$上的定积分定义$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$，下列表述错误的是（ D ）

（A）定积分的值与ξ_i的选取方式无关

（B）定积分的值与Δx_i的划分方式无关

（C）λ不可以用所有Δx_i区间长度中最小值来表示

（D）λ可以用所有Δx_i区间长度的中位数来表示

2. 设$F(x)$是连续函数$f(x)$的一个原函数，则必有（ A ）

（A）$F(x)$是偶函数$\Leftrightarrow f(x)$是奇函数 （B）$F(x)$是奇函数$\Leftrightarrow f(x)$是偶函数

（C）$F(x)$是周期函数$\Leftrightarrow f(x)$是周期函数 （D）$F(x)$是单调函数$\Leftrightarrow f(x)$是单调函数

3. 设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解：$y_1(x),y_2(x)$，C为任意常数，则该方程的通解为（B）

（**非齐次方程的两个特解之差是对应齐次方程的解**）

（A）$C[y_1(x)-y_2(x)]$ （B）$y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

（C）$C[y_1(x)+y_2(x)]$ （D）$y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

二、填空题（每题 1 分）

1. 已知函数$y=y(x)$在任意点x处的增量$\Delta y=\frac{y}{1+x^2}\Delta x+\alpha$，且当$\Delta x\to 0$时，$\alpha$是$\Delta x$的高阶无穷小量，$y(0)=\pi$，则$y(1)=$ $\underline{\pi e^{\frac{\pi}{4}}}$.（微分方程）

2. $x(y''')^2+2x^2y'^2+x^3y=x^4+1$是_3_阶微分方程.

3. 设函数$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t^2-x^2)dt=$ $\underline{xf(-x^2)}$.（换元法）

4. 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__必要__条件，而$f(x)$在$[a,b]$上连续是$f(x)$在$[a,b]$上可积的__充分___条件.

三、判断题（每题 1 分）

1. $|f(x)|$在$[a,b]$上可积，但$f(x)$在$[a,b]$上不一定可积（ 对 ）

2. 若$f(x)+g(x)$在$[a,b]$上可积，则$f(x)$与$g(x)$也均在上可积（ 错 ）

3. 微分方程的通解包含了微分方程所有的解（ 错 ）

四、计算题（每题 3 分）

1. 已知$f(x)$连续，且$\int_0^x tf(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知$f(1)=1$，求$\int_1^2 f(x)dx$的值。（换元法）

令$2x-t=u$，则$\int_0^x tf(2x-t)dt=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)du$，对 x 求导：

左端求导=$(\int_x^{2x}(2x-u)f(u)du)'=(2x\int_x^{2x}f(u)du-\int_x^{2x}uf(u)du)'=2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)$

右端求导=$\left(\frac{1}{2}\arctan x^2\right)'=\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^4}=\frac{x}{1+x^4}$，即$2\int_x^{2x}f(u)du-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}$，带入$x=1$得：

$2\int_1^2 f(u)du-f(1)=\frac{1}{2}$，即$\int_1^2 f(x)dx=\frac{3}{4}$

2. 求极限 $\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，其中 $f(x)$ 连续

$$\lim_{x\to a}\frac{x}{x-a}\int_a^x f(t)dt \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x\to a}\frac{\int_a^x f(t)dt+xf(x)}{1}=af(a)$$

3. 计算 $\int_1^e \sin(\ln x)dx$

令 $u=\ln x, x=e^u$，当 $x=1$ 和 0 时，$u=0$ 和 1，带入原积分得：

$$\int_1^e \sin(\ln x)dx=\int_0^1 \sin u de^u=\left[e^u\sin u\right]_0^1-\int_0^1 e^u\cos udu$$

$$=e\sin1-\int_0^1\cos ude^u=e\sin1-\left[e^u\cos u\right]_0^1-\int_0^1\sin ude^u$$

$$=e\sin1-e\cos1+1-\int_0^1\sin ude^u$$

故 $\int_0^1\sin ude^u=\dfrac{e\sin1-e\cos1+1}{2}$

4. 求曲线 $y=e^x$ 与直线 $x=1, x=2及y=0$ 所围区域的面积。.

$$A=\int_1^2 e^x dx=e^2-e$$

五、证明题（每题 3 分）

---

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x)<1$, 求证：方程 $2x-\int_0^x f(t)dt=1$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个实根.（介值定理）

证明：构造辅助函数 $G(x)=2x-\int_0^x f(t)dt-1$

1）则 $G(0)=-1<0$，且 $G(1)=1-\int_0^1 f(t)>0$，即 $G(0)\cdot G(1)<0$；

2）又 $G'(x)=2-f(x)>0$，所以 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上为单调递增函数；

结合 1）、2）知，$G(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有且只有一个实根。

2. 设 $f(x)>0$，且在 $[a,b]$ 上连续，$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)}, x\in[a,b]$. 证明：（1）$F'(x)\ge2$;（2）方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

方法同上。

3. 验证函数 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx\ (C_1,C_2为常数)$ 是微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ 的通解

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y &=-C_1k^2\cos kx-C_2k^2\sin kx+k^2y\\ &=-k^2(C_1\cos kx+C_2\sin kx)+k^2y=-k^2y+k^2y=0\end{aligned}$$

所以 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是方程的解；另外，因为 C_1, C_2 是**两个独立的任意常数**，故 $y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$ 是方程的通解。