习题 3-1

1.试给出二维随机变量的实例.

见 3.1 节的课件

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y}, x\geq 0, y\geq 0\\ 0, \qquad \text{其它}\end{cases}.$$

求（1）(X,Y) 关于 X，Y 的边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$；（2）$P\{1<X\leq 2, 1<y\leq 2\}$.

解 （1）由 $F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F(x,y)$, 可得

当 $x<0$ 时，$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}0=0$.

当 $x\geq 0$ 时，$F_X(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}(1-2^{-x}-2^{-y}+2^{-x-y})=1-2^{-x}$.

所以

$$F_X(x)=\begin{cases}1-2^{-x}, x\geq 0\\ 0, \quad x<0\end{cases}.$$

同理可求得

$$F_Y(y)=\begin{cases}1-2^{-y}, y\geq 0\\ 0, \quad y<0\end{cases}.$$

（2）$P\{1<X\leq 2, 1<y\leq 2\}=F(2,2)-F(2,1)-F(1,2)+F(1,2)=\dfrac{1}{16}$.

3. 二元函数 $G(x,y)=\begin{cases}0, x+y<0\\ 1, x+y\geq 0\end{cases}$ 是否可以作为某个二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数？说明理由.

解 见下面图片或 3. 1 节的课件.

3. 构造平面区域 $\{(x,y)|-1<x\leq 1, -1<y\leq 1\}$，假设 $G(x,y)$ 为 (X,Y) 的分布函数，
则 $P\{-1<x\leq 1, -1<y\leq 1\}=G(1,1)-G(-1,1)-G(1,-1)+G(-1,-1)$
$=1-1-1+0=-1$，矛盾，故 $G(x,y)$ 不是 (X,Y) 的分布函数.

4. 设(X,Y)的联合分布为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_i^{(1)}$
x_1	0.1	a	0.2	0.4
x_2	0.2	0.2	b	c
$p_j^{(2)}$	d	e	f	1

求a,b,c,d,e,f.

解　根据联合概率分布和边缘概率分布的性质,得

$0.1+a+0.2=0.4$，故$a=0.1$；则$e=a+0.2=0.1+0.2=0.3$；

又$0.4+c=1$，故$c=0.6$；而$c=0.2+0.2+b$, 得$b=0.2$；

显然$d=0.1+0.2=0.3$，$f=0.2+b=0.2+0.2=0.4$.

故$a=0.1,\quad b=0.2,\quad c=0.6,\quad d=0.3\quad ,e=0.3,\quad f=0.4$.

5. 盒中装着标有号码 1，2，2，3 的 4 个球，从中任取一个并且不再放回，然后再从盒中任取一球. 以X，Y分别表示第一、第二次取到的球上的号码数，求(X,Y)的联合分布（假设盒中各球被取到的机会相同）.

解 由题意知，X，Y的可能取值均为 1，2，3，从而(X,Y)可取（1，2）、（1，3）、（2，1）、（2，2）、（2，3）、（3，1）和（3，2）.

利用乘法公式, 可得

$P\{X=1,Y=1\}=0$,（因为$\{X=1,Y=1\}$是不可能事件）

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P\{X=1,Y=3\}=P\{X=1\}P\{Y=3\mid X=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12};$$

$$P\{X=2,Y=1\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\qquad P\{X=2,Y=2\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$P\{X=2,Y=3\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$；　　$P\{X=3,Y=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，

$P\{X=3,Y=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$，　　$P\{X=3,Y=3\}=0$（因为$\{X=3,Y=3\}$是不可能事件）.

故(X,Y)的联合概率分布为

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

6. 将两封信投入 3 个邮箱，设X，Y分别表示投入第一、二号邮箱中信的数目，求（1）X 和Y 的联合概率分布；（2）X 和Y 的边缘概率分布；（3）X 和Y 的边缘分布函数；（4）X 和Y 的分布函数值$F(1,1.2)$；（5）$P\{X=Y\}$.

解 （1）由题意知，X，Y 的可能取值均为 0，1，2，从而(X,Y)可取（0，0）、（0，1）、（0，2）、（1，0）、（1，1）、（1，2）和（2，0）．由乘法原理和古典概型公式可得

$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$，

$P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1C_1^1}{3^2}=\frac{2}{9}$（第 1 封信往 3 个邮箱中投放有 3 中放法，第 2 封信往 3 个邮箱中投放也有 3 中放法，故基本事件总数为 3^2=9，而事件$\{X=0,Y=1\}$表示第一号邮箱中有 0 封信，第二号邮箱中有 1 封信，该事件等价于 2 封信中有 1 封信放入第二号邮箱，另 1 封信放入第三号邮箱。从 2 封信中取 1 封信投入第二号邮箱中有C_2^1种取法，从剩下的 1 封信中取 1 封信投入第三号邮箱中有C_1^1种取法，则有利于事件$\{X=0,Y=1\}$的基本事件数为$C_2^1C_1^1$种取法）。同理理解下列概率：

$P\{X=0,Y=2\}=\dfrac{C_2^2}{3^2}=\dfrac{1}{9}$,

$P\{X=1,Y=0\}=\dfrac{C_2^1C_1^1}{3^2}=\dfrac{2}{9}$， $P\{X=1,Y=1\}=\dfrac{2!}{3^2}=\dfrac{2}{9}$， $P\{X=1,Y=2\}=0$（该事件为不可能事件），

$P\{X=2,Y=0\}=\dfrac{1}{9}$， $P\{X=2,Y=1\}=0$， $P\{X=2,Y=2\}=0$.

X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

（2）关于 X 和 Y 的边缘概率分布分别为

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

由 X 和 Y 的边缘概率分布可得 X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{4}{9}, & 0\le x<1\\ \frac{8}{9}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}.$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{4}{9}, & 0\le y<1\\ \frac{8}{9}, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}.$$

6.（4）$F(1,1.2)=\sum\limits_{\substack{x_i\le 1\\ y_j\le 1.2}} p_{ij}=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)$

$+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

（5）$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=2\}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

7. 设 X 和 Y 均服从$[0,4]$上的均匀分布，且 $P\{X\le 3,Y\le 3\}=\frac{9}{16}$，求 $P\{X>3,Y>3\}$.

解　见 3.1 节的课件。

8. 设(X,Y)的分布函数为$F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan y)$, 求（1）常数 A,B；（2）边缘分布函数 $F_X(x)$， $F_Y(y)$；（3） $P\{X\le 2,Y>\frac{\sqrt{3}}{3}\}$.

解　见 3.1 节的课件。

9. 设二维随机变量(X,Y)的密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}ce^{-2(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

求（1）常数c；（2）(X,Y)的分布函数$F(x,y)$；（3）边缘密度函数$f_X(x),f_Y(y)$；（4） $P\{(X,Y)\in G\}$，其中G 是由$x+y=1,x=0,y=0$围成的平面区域.

解　见下面图片.

9. (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}ce^{-2(x+y)}dy=c\int_0^{+\infty}e^{-2x}dx\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy$

$=c\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2x}\big|_0^{+\infty})\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2y}\big|_0^{+\infty})=\frac{1}{4}c$ 故 $c=4$

(2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy$

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时 $F(x,y)=0$

当 $x>0$ 且 $y>0$ 时 $F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4e^{-2(x+y)}dxdy=4\int_0^x e^{-2x}dx\int_0^y e^{-2y}dy$

$=4\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2x}\big|_0^x)(-\frac{1}{2}e^{-2y}\big|_0^y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-2y})$

故 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-2y}), & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

(3) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$

当 $x\le 0$ 时 $f_X(x)=0$

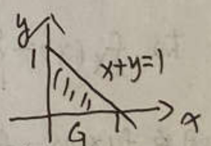
当 $x>0$ 时 $f_X(x)=\int_0^{+\infty}4e^{-2(x+y)}dy=4e^{-2x}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-2y}dy=4e^{-2x}\cdot(-\frac{1}{2}e^{-2y}\big|_0^{+\infty})$

$=2e^{-2x}$

故 $f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，同理 $f_Y(y)=\begin{cases}2e^{-2y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

(4) $P\{(X,Y)\in G\}=\iint_G f(x,y)d\sigma$

$=\int_0^1dx\int_0^{1-x}4e^{-2(x+y)}dy$



$G=\{(x,y)|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$

$=\int_0^1 4e^{-2x}(-\frac{1}{2}e^{-2y})\big|_0^{1-x}dx=\int_0^1 2e^{-2x}(1-e^{-2(1-x)})dx$

$=2\int_0^1(e^{-2x}-e^{-2})dx=2(-\frac{1}{2}e^{-2x}-e^{-2}x)\big|_0^1=2(-\frac{1}{2}e^{-2}-e^{-2}+\frac{1}{2})=1-3e^{-2}$

10. 如果 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，那么 (X,Y) 一定服从二维正态分布吗？分析下面的例子：

$$(X,Y)\sim f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y).$$

解　见下面图片.

10. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}(1+\sin x\sin y)dy$

$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dy+\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\sin x\sin y\,dy}_{\text{关于}y\text{为奇函数，故积分为0}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy}_{\text{标准正态分布，积分为1}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ 故 $X\sim N(0,1)$

同理 $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}$　$Y\sim N(0,1)$，但 (X,Y) 不服从二维正态分布