习题一

1．填空题

（1）一套 4 卷选集随机地放到书架上，则指定的一本书放在指定位置上的概率是 $\underline{\frac{3!}{4!}=\frac{1}{4}}$

（2）袋中装有 5 个球（3 新 2 旧），每次取一个，不放回地抽取两次，则第二次取到新球的概率为____．（$\frac{3}{5}$）

解：设 A 表示“第一次取到新球”，则 $\overline{A}$ 表示“第一次取到旧球”，且 A 与 $\overline{A}$ 构成完备事件组。设 B 表示“第二次取到新球”，由全概率公式，得

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}.$$

（3）已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A，B，C 全不发生的概率为____．（$\frac{3}{8}$）

解：由 $ABC\subset AB$，有 $0\le P(ABC)\le P(AB)=0$，即 $P(ABC)=0$；则

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A+B+C)=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)]=\frac{3}{8}.$$

（4）设 A、B 是两个事件，若 $P(A)=P(B)$，且 $P(B-A)=\frac{1}{4}$，则 $P(A-B)=$____．（$\frac{1}{4}$）

解：由于 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}$，则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}$.

（5）设有 A、B 两事件，已知 $P(AB)=\frac{1}{12}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$____．（$\frac{1}{3}$）

解：由于 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{3}$，则 $P(A)=3P(AB)=\frac{1}{4}$．又 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$，则 $P(B)=2P(AB)=\frac{1}{6}$．故 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}$.

（6）若事件 A、B 满足 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{B}|A)=\frac{3}{5}$，则 $P(B)=$____．（$\frac{1}{5}$）

解：由于 $P(\overline{B}|A)=\frac{3}{5}$，则 $P(B|A)=1-P(\overline{B}|A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$，即 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{2}{5}$，从而

有 $P(AB)=\frac{2}{5}P(A)=\frac{2}{15}$. 又由 $P(A|B)=\frac{2}{3}$，则 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}$，则 $P(B)=\frac{3}{2}P(AB)=\frac{1}{5}$.

(7) 设事件 A 与 B 相互独立，两事件中只有 A 发生及只有 B 发生的概率都是 $\frac{1}{4}$，则 $P(A)=$____. (0.5)

解：由题意知，$\begin{cases} P(A\overline{B})=\frac{1}{4} \\ P(\overline{A}B)=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A)P(\overline{B})=\frac{1}{4} \\ P(\overline{A})P(B)=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(A)(1-P(B))=\frac{1}{4} \\ P(B)(1-P(A))=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$.

(8) 甲、乙、丙三台机器加工同一型号产品，其产量各占总产量的 30%，35%，35%，各机器加工产品的废品率分别为 5%，4%，3%现从三台机器加工的产品中随机取一件，取到废品的概率为____. (0.0395)

解：设 A_1,A_2,A_3 分别表示“取到的产品是甲、乙、丙机器加工的”，设 B 表示“取到的产品是废品”，显然 A_1,A_2,A_3 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=30\%\times5\%+35\%\times4\%+35\%\times3\%=0.0395\cdot$$

2 选择题

(1) 某人射击三次，以 A_i 表示“第 i 次射击击中目标”(i = 1，2，3)，则事件(A，C)表示至少击中一次.

(A) $A_1+A_2+A_3$ (B) $\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_3$

(C) $\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ (D) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

分析：$\Omega-\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3=\Omega-\overline{A_1+A_2+A_3}=A_1+A_2+A_3$.

(2) 从一批产品中任取一件，共重复抽取三次. 以 A_i 表示“第 i 次取到正品”($i=1$，2，3)，事件 $A_1A_2+A_2A_3+A_1A_3$ 表示(A，D).

(A) 三次中至少有两次取到正品
(B) 三次中恰好有两次取到正品
(C) 三次中至少有一次取到废品
(D) 三次中最多有一次取到废品

分析：略

(3) 设 A 与 B 互不相容，且概率都不为零，则(D)正确.

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容 (B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容
(C) $P(AB)=P(A)P(B)$ (D) $P(A-B)=P(A)$

分析：(A) 因为 A 与 B 互不相容，但 $A+B$ 不一定是 Ω，则 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}$ 不一定等于 $\varnothing$；

(B)当 A 与 B 对立时，则 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A+B}=\overline{\Omega}=\varnothing$， 则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容

(C) $P(AB)=0\neq P(A)P(B)>0$

(D) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-0=P(A)$

（4）如果 A 与 B 为对立事件，且 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则(A，B，C，D)成立.

（A） $P(\overline{AB})=1$ （B） $P(B|A)=0$

（C） $P(\overline{A}|B)=1$ （D） $P(A+B)=1$

（5）设 $P(A)>0$， $P(B)>0$，则(A，D)正确.

(A)若 A 与 B 独立，则 A 与 B 必相容

(B)若 A 与 B 独立，则 A 与 B 必互不相容

(C)若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 独立

(D)若 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 不独立

分析： 1.4 节课件已证“当 $P(A)>0$， $P(B)>0$ 时，A 与 B 互不相容一定不独立”，其逆否命题为“独立一定相容”故选项（A）(D)正确。(B)(C)错

（6）设随机事件 A，B 满足 $B\subset A$，则(A，D)正确.

（A） $P(A+B)=P(A)$ （B） $P(AB)=P(A)$

（C） $P(B|A)=P(B)$ （D） $P(A-B)=P(A)-P(B)$

（7） n 张彩票中有 m 张有奖，今有 k 个人各买 1 张，则至少有 1 人中奖的概率是(B).

（A） $\frac{m}{C_n^k}$ （B） $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$ （C） $\frac{C_m^1 C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$ （D） $\sum_{i=1}^{k}\frac{C_m^i}{C_n^k}$

分析：因为 n 张彩票中有 m 张有奖，则 n-m 张不中奖，本题本质是“从 n 个球中不放回地摸出 k 个球”这种摸球问题，k 个人中没有人中奖的概率为 $\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$，则至少有 1 人中奖的概率是 $1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$.

（8）从一套扑克牌(52 张)中任取 4 张，则 4 张牌的数字完全相同的概率是(C).

（A） $\frac{1}{C_{13}^1}$ （B） $\frac{C_{13}^1}{C_{52}^1}$ （C） $\frac{C_{13}^1 C_4^4}{C_{52}^4}$ （D） $\frac{C_4^4}{C_{52}^4}$

（9）某城市有 50%的居民订日报，65%的居民订晚报，85%的居民至少订这两种报纸中的一种，则同时订这两种报纸的居民的百分比是(A).

（A）30% （B）85% （C）15% （D）32.5%

分析：设 A=“订日报”，B=“订晚报”，由题意知，P(A)=50%, P(B)=65%, P(A+B)=85%, 又 P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB), 则 P(AB)=50%+65%-85%=30%，故选项(A)正确。

（10）10 张奖券中含有 3 张中奖的奖券，每人购买一张，则前 3 个购买者中恰有一人中奖的概率为(D).

（A） $C_{10}^3\times 0.7^2\times 0.3$ （B） $C_3^1\times 0.3\times 0.7^2$

(C) $\dfrac{7}{40}$　　　　　　　　　　(D) $\dfrac{21}{40}$

分析：方法一：前 3 个购买者中恰有一人中奖的概率为

$$P=\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{3\times\frac{7\times 6}{2!}}{\frac{10\times 9\times 8}{3!}}=\frac{21}{40}.$$

方法二 ：设 A_i 表示第 i 人中奖，i=1, 2, 3，10 张奖券中含有 3 张中奖的奖券，(注意：每人购买一张，相当于不放回抽取，不是重复独立实验，因此不是伯努利概型。)前 3 个购买者中恰有一人中奖的概率为

$$P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\overline{A_2}A_3)$$
$$=P(A_1)P(\overline{A_2}\mid A_1)P(\overline{A_3}\mid A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})P(\overline{A_3}\mid\overline{A_1}A_2)+P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}\mid\overline{A_1})P(A_3\mid\overline{A_1}\overline{A_2})$$
$$=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}+\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{21}{40}.$$

3. 从一副扑克牌(共 52 张)中任取 5 张，求下列事件的概率.

(1) 5 张牌具有同一花色；

(2) 3 张牌有同一大小，另 2 张牌有另一相同的大小；

(3) 5 张牌中有两个不同的对，且没有 3 张牌大小相同；

(4) 5 张牌中恰有 4 张牌具有相同大小.

解 分别用 A、B、C、D 表示上述四个事件，则

(1) 5 张牌具有同一花色：先选花色 C_4^1，在同一种花色中再选牌 C_{13}^5，则有利于 A 的基本事件数为 $C_4^1C_{13}^5$，故所求概率为：$P(A)=\dfrac{C_4^1C_{13}^5}{C_{52}^5}\approx 0.00198$；

(2) 4 种花色中选 3 种花色有 C_4^3 种选法，3 张牌有同一大小有 C_{13}^1，再在 4 种花色中选 2 种花色有 C_4^2 种选法，2 张牌有另一相同的大小，则需要从剩下的 12 个数中选 1 个数，有 C_{12}^1 种选法，则有利于 B 的基本事件数为 $C_4^3C_{13}^1\cdot C_4^2C_{12}^1$，故所求概率为：

$$P(B)=\frac{C_4^3C_{13}^1C_4^2C_{12}^1}{C_{52}^5}\approx 0.00144\text{；}$$

(3) 5 张牌中有两个不同的对，有 $C_4^2C_4^2C_{13}^2$ 种选法, 去掉已取的两种数字（8 张牌），从剩下的 44 张中任取 1 张 C_{44}^1 种取法，则有利于 C 的基本事件数为 $C_4^2C_4^2C_{13}^2C_{44}^1$，故所求概率为：

有 $P(C)=\dfrac{C_4^2C_4^2C_{13}^2C_{44}^1}{C_{52}^5}\approx 0.0475$；

(4) $P(D)=\dfrac{C_4^4C_{13}^1C_{48}^1}{C_{52}^5}\approx 0.00024$.

4. 甲从 2、4、6、8、10 中任取一数，乙从 1、3、5、7、9 中任取一数，求甲取得的数大于乙取得的数的概率.

解 设 A 表示“甲取得的数大于乙取得的数”，则

$$P(A)=\frac{1+2+3+4+5}{5\times 5}=\frac{3}{5}.$$

5. 将 n 个球随机地放人 N 个盒子中去，设 $N\geq n$，且盒子的容量不限，求下列事件的概率.

(1) 每个盒子至多有一个球的概率；

(2) 某一指定的盒子恰好有 k（$k\leq n$）个球的概率.

解 与习题 1-2, 第 9 题类似理解。

(1) 设 A 表示“每个盒子至多有一个球”，则

$$P(A)=\frac{P_N^n}{N^n}=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n};$$

(2) 设 B 表示“某一指定的盒子恰好有 k（$k\leq n$）个球”，则

$$P(B)=\frac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}.$$

6. 从 5 双不同尺码的手套中任取 4 只，求至少有 2 只配成一双的概率.

解 见 1.2 节课件。或

设 A 表示“至少有 2 只配成一双”，设 B 表示“仅配成一双”，设 C 表示“恰配成两双”，则有利于 B 的基本事件数为 $C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1$（从 5 双手套中取 1 双，且这 1 双全取出，有 $C_5^1C_2^2$，然后从剩下的 4 双手套中取两双，其中每 1 双只取 1 只，有 $C_4^2C_2^1C_2^1$ 种取法。），有利于 C 的基本事件数为 $C_5^2C_2^2C_2^2$（从 5 双手套中取 2 双，且这 2 双全取出，有 $C_5^2C_2^2C_2^2$。），

$$P(B)=\frac{C_5^1C_2^2C_4^2C_2^1C_2^1}{C_{10}^4}=\frac{4}{7},\quad P(C)=\frac{C_5^2C_2^2C_2^2}{C_{10}^4}=\frac{1}{21},$$

又 $A=B+C$，$BC=\Phi$，所以 $P(A)=P(B)+P(C)=\dfrac{13}{21}$.

7. 袋中装有 8 个大小和形状相同的球，其中 5 个白球，3 个黑球. 从袋中取球两次，每次取一个. 第一次取一球观察其颜色后放回袋中，然后再取第二个球，计算 (1) 取到的两个球中有黑球的概率；(2) 取到的两个球颜色不同的概率.

解 见 1.2 节课件中的例题。或

(1) 设 A 表示“两个球中有黑球”，则 $\overline{A}$ 表示“两个球全是白球”，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_5^1C_5^1}{C_8^1C_8^1}=1-\frac{5^2}{8^2}=\frac{39}{64};$$

(2) 设 B 表示“取到的两个球颜色不同”，则

$$P(B)=\frac{5\times 3+3\times 5}{8^2}=\frac{15}{32}.$$

8. 在一次羽毛球比赛中，设立奖金 1000 元. 比赛规定：谁先胜三盘，谁获得全部奖金. 设甲、乙两人球技相当，现已打了三盘，甲 2 胜 1 负. 由于特殊原因比赛中止. 问这 1000 元奖金应如何分配才算公平？

解 见学习通习题一。

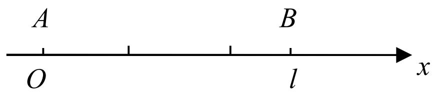
或者：应以预期获胜的概率为权重来分配这笔奖金，于是求出甲乙两人获胜的预期概率即可。

由题意知，比赛采取的应是五局三胜制，比赛已打了三盘，甲胜了 2 盘，因此甲再胜一盘即可获胜，即甲第 4 局胜或者第 4 局负但第 5 局胜。设 A_i=“第 i 局甲胜”，

则甲获胜的预期概率为：$P=P(A_4+\overline{A_4}A_5)=P(A_4)+P(\overline{A_4})P(A_5)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}.$

于是甲应分奖金$1000\times\frac{3}{4}=750$(元),乙应分奖金 250 元。

9. 在长为 l 的线段 AB 上随机地投两点 C、D，求 C 点距 D 点的距离比距 A 点的距离近的概率.



解 见学习通习题一。

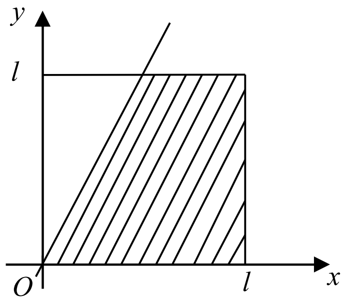
或者：设 H 表示“C 点距 D 点的距离比距 A 点的距离近”，如右上图建立坐标系，分别用 x、y 表示 C、D 的坐标. 由 C、D 两点在线段 AB 上，所以 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant y\leqslant l\}$，事件 H 发生的充要条件是 $|x-y|<x$. 求解该绝对值不等式：

(1) 当 $x<y$ 时，$y<2x$;

(2) 当 $x\geqslant y$ 时，不等式恒成立.

即 H 对应的区域 G 为右下图的阴影部分，从而得

$$P(H)=\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega)}=\frac{l^2-\frac{1}{2}\times\frac{l}{2}\times l}{l^2}=\frac{3}{4}=0.75\cdot$$



10. 设 A，B 是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，问分别在什么条件下，$P(AB)$取得最大值和最小值？最大值和最小值各为多少？

解 见学习通。

或者：

因为$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=1.3-P(A+B)$,

又 $P(A)\le P(A+B)\le 1$，$P(B)\le P(A+B)\le 1$，则 $0.7=\max\{P(A),P(B)\}\le P(A+B)\le 1$; 故

（1）当$P(A+B)=P(B)=0.7$时，$P(AB)_{\max}=1.3-0.7=0.6;$

（2）当$P(A+B)=1$时，$P(AB)_{\min}=1.3-1=0.3.$

11. 一袋中装有 $N-1$ 只黑球及 1 个白球，每次从袋中随机地摸出一球，并换入一个黑球，这样继续下去，问第 k 次摸球时，摸到黑球的概率是多少？

解 见学习通习题一。

或者：设 A 表示“第 k 次摸到黑球”，则 $\overline{A}$ 表示“第 k 次摸到白球”，因为 N 个球中只有 1 个白球，而第 k 次摸到白球等价于第 1 次摸到黑球（$C_{N-1}^1=N-1$种取法），第 2 次摸到黑球（$C_{N-1}^1=N-1$种取法），……，第 k-1 次摸到黑球（$C_{N-1}^1=N-1$种取法），第 k 次摸到白球（1 种取法），则有利于 $\overline{A}$ 的基本事件数为$(N-1)\times(N-1)\times\cdots\times(N-1)\times 1=(N-1)^{k-1}$，基本事件总数 $C_N^1C_N^1\cdots C_N^1=N\times N\times\cdots\times N=N^k$，故所求概率为：

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{(N-1)^{k-1}}{N^k}.$$

12. 设 A、B 是两事件，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，证明事件 A 与 B 相互独立的充分必要条件是 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$.

证　**必要性：** 由 $0<P(B)<1$，因此 $0<P(\overline{B})=1-P(B)<1$；又 A 与 B 独立，得 $P(A|B)=P(A)$，且 A 与 $\overline{B}$ 也独立，即 $P(A|\overline{B})=P(A)$；从而 $P(A|B)=P(A)=P(A|\overline{B})$.

充分性： 由 $P(A|B)=P(A|\overline{B})$，即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，化简可得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A 与 B 独立.

13. 一学生参加某门课程的考试，试题全为单项选择题，每题有四个可供选择的答案. 如果该学生知道答案，便选择正确的答案，否则便从四个答案中随机地选取一个. 假设该学生知道其答案的试题占全部试题的 75%. 对给定的一道试题，试求该学生选择的答案正确的概率.

解 设 A 表示“学生知道这道给定试题的答案”，则 $P(A)=0.75$，$P(\overline{A})=0.25$；设 B 表示“该学生选择的答案正确”，由题意 $P(B|A)=1$，$P(B|\overline{A})=\dfrac{1}{4}$，根据全概率公式

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.75\times1+0.25\times\frac{1}{4}=0.8125.$$

14. 某保险公司将被保险人划分为三类：“谨慎的”、“一般的”、“冒失的”. 统计资料表明，上述三种人在一年内发生事故的概率依次为 0.05、0.15 和 0.30，三种被保险人所占的比例依次为 20%、50%和 30%，求(1) 被保险人在一年内出事故的概率；(2) 已知某被保险人在一年之内出了事故，他是“谨慎的”客户的概率有多大？

解 用 $A_i\ (i=1,2,3)$分别表示“谨慎的”、“一般的”、“冒失的”的被保险人，用 B 表示“被保险人在一年内出事故”，

(1) 显然 A_1,A_2,A_3 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=20\%\times0.05+50\%\times0.15+30\%\times0.30=0.175;$$

(2) $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\dfrac{20\%\times0.05}{0.175}=\dfrac{2}{35}.$

15. 有一袋麦种，其中一等麦种占 80%，二等麦种占 18%，三等麦种占 2%，已知一、二、三等麦种的发芽率分别为 0.8、0.2、0.1，现从袋中任取一粒麦种，试求它的发芽率；若试验后发现它未发芽，问它是一等麦种的概率是多少？

解 用 A_i 表示“取出的是第 i 等麦种”，$i=1,2,3$，用 B 表示“取出的麦种发芽”，显然 A_1,A_2,A_3 构成完备事件组，由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=80\%\times0.8+18\%\times0.2+2\%\times0.1=0.678;$$

从而 $P(\overline{B})=1-P(B)=0.322$， $P(A_1|\overline{B})=\dfrac{P(A_1)P(\overline{B}|A_1)}{P(\overline{B})}=\dfrac{80\%\times(1-0.8)}{0.322}\approx 0.497$.

16. 甲、乙、丙三人向同一飞机射击，击中的概率分别是 0.4、0.5、0.7. 如果只有一人击中，则飞机被击落的概率为 0.2；如果只有两人击中，则飞机被击落的概率为 0.6；如果三人都击中，则飞机必被击落. 求飞机被击落的概率.

解 见学习通习题一或 1.5 节课件中的例题。

17. 上题中，若三人的射击水平相当，击中飞机的概率均为 0.6，其他条件不变，问飞机被击落的概率是多少?

解 （解法一）同 16 题做法。

（解法二）设 A_i 表示飞机被 i 个人击中，i=0,1, 2,3 ， B 表示飞机被击落, 则 A_0, A_1, A_2, A_3 构成完备事件组。又因为 3 个人击中飞机的概率均为 0.6，由题意，此为 3 重伯努利试验，设 A 表示“击中飞机”，则 $p=P(A)=0.6$， $q=1-p=0.4$， 于是,

$P(A_0)=C_3^0\times(0.6)^0\times(0.4)^3=0.064$， $P(A_1)=C_3^1\times 0.6\times 0.4^2=0.288$，

$P(A_2)=C_3^2\times 0.6^2\times 0.4^1=0.432$， $P(A_3)=C_3^3\times 0.6^3\times 0.4^0=0.216$， 故

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.064\times 0+0.288\times 0.2+0.432\times 0.6+0.216\times 1=0.5328.$$

18. 甲、乙两选手进行乒乓球单打比赛，已知在每局中甲胜的概率为 0.6, 乙胜的概率为 0.4. 比赛可采用三局二胜制或五局三胜制，问哪一种比赛制度对甲更有利?

解 见学习通习题一。

或者:

三局两胜制：甲胜有两种情况：（1）甲胜且比两局，其概率为：$P_1=0.6\times 0.6=0.36$;（2）甲胜且比 3 局，即前 2 局中甲只胜 1 局（即前两局中甲胜乙负或乙胜甲负），第 3 局甲胜，其概率为： $P_2=C_2^1\times 0.6\times 0.4\times 0.6=0.288.$

则甲胜的概率为 $P_{甲胜}=P_1+P_2=0.36+0.288=0.648.$

五局三胜制：甲胜有三种情况：（1）甲胜且比三局（即甲三连胜），其概率为：$P_1=0.6\times 0.6\times 0.6=0.216$;（2）甲胜且比 4 局，即前 3 局中甲 2 胜 1 负，第 4 局甲胜，其概率为： $P_2=C_3^2\times 0.6^2\times 0.4\times 0.6=0.2592$;（3）甲胜且比 5 局，即前 4 局中甲 2 胜 2 负，第 5 局甲胜，其概率为： $P_3=C_4^2\times 0.6^2\times 0.4^2\times 0.6=0.20736.$

则甲胜的概率为 $P_{甲胜}=P_1+P_2+P_3=0.216+0.2592+0.20736=0.68256.$

故五局三胜制这种比赛制度对甲更有利。

19. （下赌注问题）17 世纪末，法国的 DeMere'爵士与人打赌，在“一颗骰子连续掷 4 次至少出现一次 6 点”的情况下他赢了钱，可是在“两颗骰子连掷 24 次至少出现一次双 6 点”的情况下却输了钱，从概率论的角度解析这是为什么？

解 设 A_1 表示“一颗骰子掷一次出现 6 点”，B 表示“一颗骰子连续掷 4 次至少出现一次 6 点”；一颗骰子连续掷 4 次，这是 4 重的伯努利试验，这时 $p_1=P(A_1)=\frac{1}{6}$，$q_1=1-p_1=\frac{5}{6}$. 设 A_2 表示“两颗骰子掷一次出现双 6 点”，C 表示“两颗骰子连掷 24 次至少出现一次双 6 点”，两颗骰子连掷 24 次，这是 24 重的伯努利试验，这时 $p_2=P(A_2)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，$q_2=1-p_2=\frac{35}{36}$.

则一颗骰子连续掷 4 次至少出现一次 6 点的概率为：

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P_4(0)=1-C_4^0(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^4\approx 0.518,$$

而两颗骰子连掷 24 次至少出现一次双 6 点的概率为：

$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-P_{24}(0)=1-C_{24}^0(\frac{1}{36})^0(\frac{35}{36})^{24}\approx 0.491,$$

从概率的角度 DeMere'爵士第一种情况赢钱概率高，第二种情况输钱概率高.

20. 已知某种疾病患者自然痊愈率为 0.25. 为试验一种新药对该病是否有效，将该药给 10 个病人服用，且规定若 10 个病人中至少有 4 个病人服药后治愈，则认为该药有效，反之则认为无效. 求（1）虽然新药有效，且将痊愈率提高到 0.35，但通过试验被认为无效的概率；（2）虽然新药完全无效，但通过试验被认为有效的概率.

解 本题可理解为一个 10 重伯努利试验，用 B 表示“试验被认为有效”，即至少有 4 个病人服药后治愈.

（1）设 A_1 表示“新药有效”，即此时病人服药后的痊愈率提高到 $p_1=P(A_1)=0.35$，$q_1=1-p_1=0.65$.

$$P(\overline{B}|A_1)=\sum_{i=0}^{3}P_{10}(i)=\sum_{i=0}^{3}C_{10}^i\times 0.35^i\times 0.65^{10-i}\approx 0.514;$$

（2）用 A_2 表示“新药无效”，即病人服药后的痊愈率仍保持 $p_2=P(A_2)=0.25$ 不变，$q_2=1-p_2=0.75$，则

$$P(B|A_2)=\sum_{i=4}^{10}P_{10}(i)=1-\sum_{i=0}^{3}P_{10}(i)=1-\sum_{i=0}^{3}C_{10}^i\times 0.25^i\times 0.75^{10-i}\approx 0.224.$$