山东财经大学 2023-2024 学年第一学期期末试题

概率论与数理统计（16200041）试卷 (A)

参考答案与评分标准

一、单项选择题（本题共 7 小题，每小题 3 分，满分 21 分）

1．C　2． B　3．A　4．B　5．A　6． C　7． D

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1．$\dfrac{2}{5}$　2．0.8　3．$\dfrac{1}{2}$　4．2　5．$\dfrac{1}{2}$

三、计算题（本题共 4 小题，每小题 12 分，满分 48 分）

1．设 $A_i(i=1,2,3)$ 表示产品分别是由甲厂、乙厂和丙厂生产的，B 表示产品为正品，则由题意得：

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2)=\frac{1}{3},\quad P(A_3)=\frac{1}{6},$$

$$P(B|A_1)=\frac{9}{10},\quad P(B|A_2)=\frac{4}{5},\quad P(B|A_3)=\frac{19}{20},$$　（4 分）

（1）由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{19}{20}=\frac{7}{8}.$$　（4 分）

（2）令 Y 表示有放回的抽取产品 3 次，抽取到正品的次数，则 $Y\sim B\left(3,\dfrac{7}{8}\right)$，

所求概率为 $P\left(Y\geq 1\right)=1-P(Y=0)=1-C_3^0\left(\dfrac{7}{8}\right)^0\left(1-\dfrac{7}{8}\right)^3=\dfrac{511}{512}$.　（4 分）

2．（1）由概率函数的性质得：$1=\dfrac{1}{2}+\left(1-\dfrac{3}{2}\theta\right)+\theta^2$，　（2 分）

解得 $\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=1$（舍）.　（2 分）

（2）$P\left(-\dfrac{1}{2}<X<\dfrac{3}{2}\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)=\dfrac{1}{2}$.　（4 分）

（3）$EX=-\dfrac{1}{4}$，$EX^3=-\dfrac{1}{4}$，$E\left(X^3+2X\right)=-\dfrac{3}{4}$.　（4 分）

3.（1）由联合密度函数的性质得：$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 cxydxdy=\frac{1}{4}c$，

所以 $c=4$.　（4 分）

（2）由（1）知 $f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 4xydy=2x$，

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时，$f_X(x)=0$，

所以 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$

同理，$f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$　（4 分）

则有 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y)$，故而 X 与 Y 独立.　（2 分）

（3）因为 X 与 Y 独立，故 X 与 Y 不相关，所以 $\rho_{X,Y}=0$.　（2 分）

注：本题如按相关系数的计算公式进行计算，根据其正确性酌情给分.

4. 由 $X\sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 知其密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$　（2 分）

似然函数为 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}x_i}\right)=\frac{1}{\lambda^n}e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i}$，　（2 分）

取自然对数得 $\ln L=-n\ln\lambda-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i$，　（2 分）

令 $\frac{d\ln L}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，　（2 分）

解得极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}$，　（2 分）

所以极大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}$.　（2 分）

四、应用题（本题满分 12 分）

设一年内发生重大人身事故的人数为 X，则 $X \sim B(5000, 0.005)$，　（2 分）

则 $EX = 25, DX = 24.875$，　（2 分）

由中心极限定理知 X 近似服从 $N(25, 24.875)$，　（2 分）

利润为 $Y = 0.5 \cdot 160 - 2X = 80 - 2X$ （万元），　（1 分）

则有 $P(20 \le Y \le 40) = P(20 \le 80 - 2X \le 40) = P(20 \le X \le 30)$　（2 分）

$\approx \Phi_0\left(\dfrac{30-25}{\sqrt{24.875}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{20-25}{\sqrt{24.875}}\right) = 2\Phi_0\left(\dfrac{5}{\sqrt{24.875}}\right) - 1$　（2 分）

$\approx 2\Phi_0(1) - 1 = 0.6826$.　（1 分）

五、证明题（本题满分 4 分）

$P\{a < \min(X, Y) \le b\} = P\{\min(X, Y) > a\} - P\{\min(X, Y) > b\}$

$= P\{X > a, Y > a\} - P\{X > b, Y > b\}$　（2 分）

$= P\{X > a\}P\{Y > a\} - P\{X > b\}P\{Y > b\}$ （独立性）　（1 分）

$= \left[P\{X > a\}\right]^2 - \left[P\{X > b\}\right]^2$ （同分布）　（1 分）