第九章 重积分

9.1 二重积分的概念与性质

一、利用二重积分的几何意义确定下列二重积分的值：

1. $\iint\limits_D (4-\sqrt{x^2+y^2})d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le 4$。 （$\frac{32}{3}\pi$）

2. $\iint\limits_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0$。 （$\frac{1}{6}\pi a^3$）

二、比较二重积分的大小：

1. $I_1=\iint\limits_D \ln^3(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \sin^3(x+y)d\sigma$，

   其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\ge 0, y\ge 0, \frac{1}{2}\le x+y\le 1\}$。 （$I_1<I_3<I_2$）

2. $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$，

   其中为矩形闭区域：$D=\{(x,y)\,|\,3\le x\le 5, 0\le y\le 1\}$。 （$I_1<I_2$）

三、利用二重积分的性质估计二重积分的值：$I=\iint\limits_{|x|+|y|\le 10}\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}d\sigma$。

（$\frac{100}{51}<I<2$）

四、设 $f(x,y)$ 为连续函数，求：$\lim\limits_{\rho\to 0^+}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)d\sigma$。 （$f(0,0)$）

9.2（1） 二重积分的计算（利用直角坐标）

一、计算下列二重积分：

1. $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{sgn}(x-y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。 （0）

2. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$，其中 D 是由 $y=x^2, y=4x^2$ 和 $y=1$ 所围成的闭区域。

（$\frac{2}{5}$）

3. $\iint\limits_D |y-x^2|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$。　（$\dfrac{11}{30}$）

4. $\iint\limits_D e^{-\frac{1}{2}y^2}dxdy$，其中 D 是由 $x=1, y=0$ 和 $y=\sqrt{x}$ 所围成的闭区域。（$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$）

二、交换下列二次积分的积分次序：

1. $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy=$

2. $\int_0^1 dx\int_x^{x^2} f(x,y)dy+\int_2^8 dx\int_x^8 f(x,y)dy=$

3. 设 $a>0$，则 $\int_0^{2a} dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)dy=$

4. $\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx=$

5. $\int_0^{\pi} dx\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)dy=$

三、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$[\int_a^b f(x)dx]^2\le(b-a)\int_a^b[f(x)]^2dx$。

9.2（2）　二重积分的计算（利用极坐标）

一、化下列二次积分为极坐标形式的二次积分：

1. $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\csc\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

2. $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy=$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_{\sec\theta\tan\theta}^{\sec\theta} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$

二、利用极坐标计算下列二重积分：

1. $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\}$。　（$-6\pi^2$）

2. $\iint\limits_D \dfrac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x+y\ge 1\}$。　（$2-\dfrac{\pi}{2}$）

3. $\iint\limits_D (2+\sqrt{x^2+y^2-2xy})dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$。

（$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}-1)+\dfrac{\pi}{2}$）

三、求由平面$z=x-y, z=0$与圆柱面$x^2+y^2=ax\ (a>0)$所围成的立体的体积。

（$\dfrac{a^3}{48}(3\pi+10)$）

四、设$f(x,y)$为闭区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le y, x\ge 0\}$上的连续函数，且

$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{8}{\pi}\iint\limits_D f(u,v)dudv$，求$f(x,y)$。

（$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\dfrac{4}{3\pi}(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3})$）

五、求$\iint\limits_D x[1+yf(x^2+y^2)]dxdy$，其中$D$是由$y=x^3, y=1, x=-1$所围成的闭区域，$f$是连续函数。（$-\dfrac{2}{5}$）

9.3（1） 三重积分的概念及计算

一、设$\Omega_1=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, z\ge 0\}$，

$\Omega_2=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$，则（ C ）。

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} xdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} xdxdydz$

B. $\iiint\limits_{\Omega_1} ydxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} ydxdydz$

C. $\iiint\limits_{\Omega_1} zdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} zdxdydz$

D. $\iiint\limits_{\Omega_1} xyzdxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyzdxdydz$

二、计算$\iiint\limits_{\Omega} ydxdydz$，其中$\Omega$是由$z=0, y+z=1$及$y=x^2$所围成的立体。（$\dfrac{8}{35}$）

三、计算$\iiint\limits_{\Omega} y\cos(x+z)dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=0, y=\sqrt{x}$及$x+z=\dfrac{\pi}{2}$所围成的立体。（$\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}$）

四、计算$\iiint\limits_{\Omega} xydxdydz$，其中$\Omega$是由$z=xy, x+y=1$及$z=0$所围成的立体。（$\dfrac{1}{180}$）

五、计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xz}{(1+y)^2}dxdydz$，其中$\Omega$是由$x=0,z=0,z=1-y^2$及$x=\sqrt{y}$所围成的立体。（$\frac{1}{48}$）

六、计算$\iiint\limits_{\Omega}e^{|z|}dxdydz$，其中$\Omega$单位球体：$x^2+y^2+z^2\le 1$。（$2\pi$）

七、计算$\iiint\limits_{\Omega}xdxdydz$，其中$\Omega$是由$z=xy,x+y+z=1$及$z=0$所围成的立体。

（$2\ln 2-\frac{11}{8}$）

9.3（2） 利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分

一、计算$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2}dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=x^2+y^2$及$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体。（$2\pi(2\ln 2-\frac{5}{4})$）

二、计算$\iiint\limits_{\Omega}xzdxdydz$，其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=12-x^2-y^2$所围成的立体。（$0$）

三、计算$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z)dxdydz$，其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$绕$z$轴旋转一周所得曲面与$z=4$所围成的立体。（$\frac{256}{3}\pi$）

四、计算$\iiint\limits_{\Omega}(x+z)dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$及$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$所围成的立体。（$\frac{\pi}{8}$）

五、计算$\iiint\limits_{\Omega}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ $(R>0)$及$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$所围成的立体。（$\frac{\pi}{3}(2-\sqrt{3})(1-\cos R^3)$）

六、计算$\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\frac{1}{x^2+y^2+z^2})dxdydz$，其中$\Omega$是由$z^2=x^2+y^2$，$z^2=3(x^2+y^2)$及$z=1$所围成的立体。（$(\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{3}}{27}+\ln\frac{3}{2})\pi$）

七、计算 $\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$，其中 Ω 是球体：$x^2+y^2+z^2\le 2z$。 （$\frac{8}{5}\pi$）

八、将 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$ 表示成柱面坐标下的累次积分，其中 Ω 是由 $2z=x^2+y^2, z=2$ 及 $z=1$ 所围成的立体。

（$\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}rdr\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz+\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{2}}^2 rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$）

9.4（1） 二重积分的应用

一、求由球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所围的且在圆柱面内部部分的立体的体积。 （$\frac{32}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$）

二、求由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和曲面 $z=x^2+y^2$ 所围成的立体的体积。 （$\frac{\pi}{6}$）

三、求球面 $x^2+y^2+z^2=25$ 被平面 $z=3$ 所分成的上半部分曲面的面积。（20π）

四、求由半球面 $z=\sqrt{12-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $x^2+y^2=4z$ 所围的立体的表面积。 （$\frac{64}{3}\pi$）

五、设有一半径为 R 的空球，另有一半径为 r 的变球与空球相割，如果变球的球心在空球的表面上，问 r 为何值时，含在空球内的变球的表面积最大？并求出最大表面积的值。 （$r=\frac{4}{3}R,\ S_{\max}=\frac{32}{27}\pi R^2$）

六、求坐标轴与 $2x+y=6$ 所围成的三角形均匀薄片的重心。 （$(1,2)$）

七、由螺线 $r=2\theta$ 与直线 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 围成的一平面薄片的面密度为 $\rho(r,\theta)=r^2$，求薄片的质量。 （$\frac{1}{40}\pi^5$）

八、求均匀椭圆板 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$（密度为 μ）关于直线 $y=mx$ 的转动惯量，并求使转动惯量最小的 m 值。 （$I(m)=\frac{\mu\pi ab(a^2m^2+b^2)}{4(1+m^2)}$；当 $m=0$ 时，转动惯

量最小，$I_{\min}=\dfrac{\mu\pi ab^3}{4}$（假设$a>b$））

九、求面密度为常数ρ的均匀半圆环薄片：$\sqrt{R_1^{\ 2}-y^2}\le x\le\sqrt{R_2^{\ 2}-y^2}, z=0$（其中$R_1<R_2$）对位于$z$轴上的点$M_0(0,0,a)$ $(a>0)$处的单位质量的质点的引力$\mathbf{F}$。

9.4（2） 三重积分的应用

一、 一物体由圆锥和与圆锥共底的半球拼成，圆锥的高等于球的半径a，物体上任意一点处的密度等于该点到圆锥顶点的平方，求此物体的质量。

（$\dfrac{28}{15}\pi a^5$）

二、 设有一半径为R的球体，P_0是此球表面上的一定点，球体上任一点的密度与该点到P_0的距离的平方成正比（比例常数$R>0$），求球体的重心。

（$(0,0,\dfrac{5}{4}R)$）

三、 设球在动点$P(x,y,z)$处的密度与该点到球心的距离成正比（比例系数为k）求质量为m的非均匀球体$x^2+y^2+z^2\le R^2$对于其直径的转动惯量。

（$\dfrac{k}{6}\pi^2R^6$）

四、 一匀质圆柱筒以柱面$x^2+y^2=a^2, x^2+y^2=b^2$ $(a<b)$和平面$z=0, z=h$ $(h>0)$为界面，在原点处有一质量为m的质点，求圆柱筒对该质点的引力。

五、 证明：$\int_0^x dv\int_0^v du\int_0^u f(t)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)dt$。

六、 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^1 dx\int_x^1 dy\int_x^y f(x)f(y)f(z)dz=\frac{1}{6}[\int_0^1 f(x)dx]^3。$$