第二章 导数与微分

2.1 导数概念

一、设 $f(x)=5x^2$，试按定义求 $f'(2)$.　（ $f'(2)=20$ ）

二、设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，试按定义求 $f'(a)$　$(a\neq 0)$.　（ $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$ ）

三、证明：$(\cos x)'=-\sin x$.

四、设 $f'(x_0)$ 存在，则

1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$ $\underline{-f'(x_0)}$；
2. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ $\underline{2f'(x_0)}$；
3. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0+bh)}{h}=$ $\underline{(a-b)f'(x_0)}$.

五、设 $f'(0)$ 存在，则

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=$ $\underline{f'(0)}$；
2. 若 $f(0)=0$，则 $f'(0)=$ $\underline{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}}$.

六、已知 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(x_0-2h)-f(x_0)}=4$，则 $f'(x_0)=$ $\underline{-\dfrac{1}{8}}$.

七、讨论下列函数在 $x=0$ 处的连续性与可导性：

1. $f(x)=|\sin x|$；　（在 $x=0$ 处连续，不可导）
2. $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x>0\\ \sin x, & x\leq 0\end{cases}$.　（在 $x=0$ 处连续，可导， $f'(0)=1$ ）

八、讨论 α 取何值时，下列函数在 $x=0$ 处（1）连续；（2）可导：$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

（ $\alpha>0$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续； $\alpha>1$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f'(0)=0$ ）

九、设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.　（ $f'(a)=\varphi(a)$ ）

十、设 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$，求 $f'(10)$.　（$f'(10)=9!$）

十一、已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ x, & x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$.　（$f'(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$）

十二、求曲线 $y=\ln x$ 在点 $(e,1)$ 处的切线方程.　（$y=\dfrac{x}{e}$）

十三、求曲线 $y=e^x$ 经过原点的切线方程.（$y=ex$）

十四、设 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，试用导数的定义证明：$f'(0)=0$，并用函数图形解释其几何意义.

2.2 求导法则（1）：导数的四则运算

一、求下列函数的导数：

1. $y=x^3-3x^2+4x-a^2$　（$y'=3x^2-6x+4$）
2. $y=3\sin x-4\cos x+\sin 1$　（$y'=3\cos x+4\sin x$）
3. $y=\ln x-2\lg x+5\log_2 x$　（$y'=\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x\ln 10}+\dfrac{5}{x\ln 2}$）
4. $y=(\sqrt{x}+1)(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1)$　（$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(1+\dfrac{1}{x})$）
5. $y=\dfrac{x\ln x}{1+x^2}$　（$y'=\dfrac{1+\ln x+x^2(1-\ln x)}{(1+x^2)^2}$）
6. $y=x^2\ln x\cdot\cos x$　（$y'=2x\ln x\cdot\cos x+x\cos x-x^2\ln x\cdot\sin x$）

二、设 $f(x)=(1+x^2)\arctan x$，求 $f'(0)$.　（$f'(0)=1$）

2.2 求导法则（2）：复合函数和反函数的导数

一、求下列函数的导数：

1. $y=(3x+6)^5$　（$y'=15(3x+6)^4$）
2. $y=\sin^3 2x$　（$y'=6\sin^2 2x\cdot\cos 2x$）

3. $y=\sqrt{a^2-x^2}$ （$y'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$）

4. $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$ （$y'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$）

5. $y=\arctan(x^3)$ （$y'=\dfrac{3x^2}{1+x^6}$）

6. $y=e^{-\cos^2\frac{1}{x}}$ （$y'=-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cdot e^{-\cos^2\frac{1}{x}}$）

二、设函数可导，证明：

1. 偶函数的导数是奇函数；
2. 奇函数的导数是偶函数；
3. 周期函数的导数是周期函数.

三、设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

1. $y=f(e^{-x^2})$ （$y'=-2xe^{-x^2}f'(e^{-x^2})$）

2. $y=f(\arcsin\dfrac{1}{x})$ （$y'=-\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}f'(\arcsin\dfrac{1}{x})$）

四、求下列函数的导数：

1. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$ （$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}})$）

2. $y=\arcsin(1-2x)$ （$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$）

3. $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$ （$y'=\dfrac{4\cos 2x}{(1-\sin 2x)^2}$）

4. $y=\ln(\sec x+\tan x)$ （$y'=\sec x$）

五、设 $g(x)=f(b+mx)+f(b-mx)$，其中 f 可导，求 $g'(0)$. （$g'(0)=0$）

六、求曲线 $y=\tan(\dfrac{\pi x^2}{4})$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

七、求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的经过点 $(2,0)$ 的切线方程. （$y=2-x$）

2.3 高阶导数

一、求下列函数的二阶导数：

1. $y = x\ln x$　（$y'' = \dfrac{1}{x}$）

2. $y = (1+x^2)\arctan x$　（$y'' = 2\arctan x + \dfrac{2x}{1+x^2}$）

3. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$　（$y'' = -\dfrac{2\sin(\ln x)}{x}$）

4. $y = x^x$　（$y'' = x^x(1+\ln x)^2 + x^{x-1}$）

二、求下列函数的 n 阶导数：

1. $y = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$　（$y^{(n)} = n!$）

2. $y = \sin(ax+b)$　（$y^{(n)} = a^n\sin(ax+b+n\cdot\dfrac{\pi}{2})$）

3. $y = \dfrac{1}{ax+b}$　（$y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$）

4. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$　（$y^{(n)} = (-1)^n\dfrac{2\cdot n!}{(x+1)^{n+1}}$）

三、设 $f(x)$ 二阶可导，求下列函数的二阶导数 y''：

1. $y = f(\sin x)$　（$y'' = f''(\sin x)\cos^2 x - f'(\sin x)\sin x$）

2. $y = e^{f(x)}$　（$y'' = e^{f(x)}\{[f'(x)]^2 + f''(x)\}$）

四、求函数 $y = x^3e^x$ 的 15 阶导数.　（$y^{(15)} = e^x(x^3 + 45x^2 + 630x + 2730)$）

五、设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的二阶导数，且 $f(0)=0$. 设

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

1. 确定 a 的值，使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续；

2. 求 $g'(x)$.

$$\left(a=f'(0),\ g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0\end{cases}\right)$$

六、试从公式 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 导出下列反函数的高阶导数公式：

1. $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{(y')^3}$；

2. $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

2.4 隐函数的导数 参数方程求导 相关变化率

一、求下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

1. $x^3+y^3=6xy$；　（$y'=\dfrac{2y-x^2}{y^2-2x}$）

2. $\sin(x+y)=y^2\cos x$；　（$y'=\dfrac{y^2\sin x+\cos(x+y)}{2y\cos x-\cos(x+y)}$）

3. $\ln(x^2+y^2)=\arctan\dfrac{y}{x}$.　（$y'=\dfrac{2x+y}{x-2y}$）

二、求曲线 $y^2=5x^4-x^2$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程.　（$9x-2y-5=0$）

三、证明：曲线 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ 上任意点处的切线在两坐标轴上的截距之和恒为 a.

四、设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $e^{xy}+\sin(x^2y)=y$，试求 $y'(0)$.　（$y'(0)=1$）

五、求下列函数的导数：

1. $y=x^{\sqrt{x}}$；　（$y'=\dfrac{x^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$）

2. $y=(\ln x)^x$；　（$y'=(\ln x)^x[\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}]$）

3. $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　（$y'=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x})$）

4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$.　（$y'=\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}[\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x^2+1}-\dfrac{1}{2(x-1)}]$）

六、设$x^y=y^x$，求$\dfrac{dy}{dx}$.　（$y'=\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$）

七、求下列隐函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$和二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

1. $x^4+y^4=16$；　（$y'=-\dfrac{x^3}{y^3}$，$y''=-\dfrac{48x^2}{y^7}$）

2. $e^y=xy+3$.　（$y'=\dfrac{y}{e^y-x}$，$y''=\dfrac{y[2(e^y-x)-ye^y]}{(e^y-x)^3}$）

八、已知$y-xe^y=1$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{x=0}$.　（$y'(0)=e$，$y''(0)=2e^2$）

九、求下列参数方程所确定的函数$y=y(x)$的导数，$\dfrac{dy}{dx}$：

1. $x=t^3+3t+1$，$y=3t^5+5t^3+1$；　（$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{5t(t^3+1)}{t^2+1}$）

2. $x=e^{-t}\sin t$，$y=e^t\cos t$；　（$\dfrac{dy}{dx}=e^{2t}$）

3. $x=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$，　$y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.　（$\dfrac{dy}{dx}=\begin{cases}1, & t>0\\ -1, & t<0\end{cases}$）

十、求曲线$x=\dfrac{3at}{1+t^2}$，　$y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}$在$t=2$处的切线和法线的方程.

（$4x+3y-12a=0$，$3x-4y+6a=0$）

十一、设$x=at^3$，$y=bt^2$，求$\dfrac{dy}{dx}$，　$\dfrac{d^2y}{dx^2}$.　（$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2b}{3at}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{2b}{9a^2t^4}$）

十二、设$\begin{cases}x=\ln(1+t)\\ y=\arctan t\end{cases}$，　求$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.　（$\dfrac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=1$）

十三、设$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\arctan\end{cases}$，求$\dfrac{d^3y}{dx^3}$.　（$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t}{2}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1+t^2}{4t}$，$\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{t^4-1}{8t^3}$）

十四、设 $y=y(x)$ 是由方程 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3 \\ e^y\sin t-y+1=0 \end{cases}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}|_{t=0}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}$.

（$\frac{dy}{dx}|_{t=0}=\frac{e}{2}$，$\frac{d^2y}{dx^2}|_{t=0}=\frac{e}{4}(2e-3)$）

十五、一个球形雪球的体积以 1cm³/min 的速度减少，求雪球的直径为 10cm 时，雪球直径的减少速度.　（$-\frac{1}{50\pi}$ (cm / min)）

十六、将水注入深 8m，上顶直径为 8m 的正圆锥形容器中， 注水速度为 4m³/min，当水深为 5m 时，其表面上升的速度为多少？表面上升的加速度又为多少？

（$\frac{16}{25\pi}$ (m/min)，$-\frac{2}{5}(\frac{16}{25\pi})^2$ (m/min²)）

2.5 函数的微分

一、填空题：

1. $\frac{1}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}\frac{1}{1+(2x)^2}d(2x)=\frac{1}{2}d(\arctan 2x)=d(\frac{1}{2}\arctan 2x)$;

2. $\frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+2x}}d(2x)=d(\sqrt{1+2x})$;

3. $\frac{f'(\arctan x)}{1+x^2}dx=f'(\arctan x)d(\arctan x)=d[f(\arctan x)]$;

4. $d(2^{\arctan^3 x})=2^{\arctan^3 x}\ln 2\, d(\arctan^3 x)$

二、计算微分:

1. $d(x^2\ln x+\arcsin 2x)=(2x\ln x+x+\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}})dx$

2. $d(\arctan e^{\sqrt{x}})=\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}(1+e^{2\sqrt{x}})}dx$

3. $d\left(\frac{2^x}{x^2+1}\right)=\frac{2^x\ln 2\cdot(x^2+1)-x2^{x+1}}{(x^2+1)^2}dx$

4. $u=u(x),v=v(x)$ 为可导函数，求 $y=\arctan\frac{u}{v}$ 的微分。（$dy=\frac{u'v-uv'}{u^2+v^2}dx$）

三、用微分法求隐函数或参数方程决定函数的导数:

1. $y=y(x)$ 由方程 $x^2y+e^y=\ln^x$ 决定，求 $\frac{dy}{dx}$.　（$\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x^2y}{x(x^2+e^y)}$）

2. $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=e^{2t}-2e^t+3\\y=3e^{4t}-4e^{3t}+7\end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

（$\frac{dy}{dx}=6e^{2t}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{6e^t}{e^t-1}$）

四、求 arctan1.05 的近似值.

五、利用微分的近似公式证明：$(1+x)^\alpha\approx1+\alpha x$.