习题 2-3

1. 如果 X 服从 0—1 分布，且 X 取 1 的概率是它取 0 概率的两倍. 写出 X 的概率函数，并求分布函数.

解 由题设知，$P\{X=1\}=2P\{X=0\}$，则 $P\{X=1\}+P\{X=0\}=3P\{X=0\}=1$，所以 X 的概率函数为 $P\{X=0\}=\dfrac{1}{3}$，$P\{X=1\}=\dfrac{2}{3}$.

X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{3}, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}.$$

2. 一批产品共 20 件，其中正品 15 件，次品 5 件. 有放回的抽取，每次只取一件，直到取得正品为止. 假定每件产品被抽到的机会相等，求抽取次数的概率函数，并计算抽取次数是偶数的概率.

解 设 X 表示抽取的次数，因为是有放回的抽取，则 X 的可能取值为 1, 2, 3, ……，其概率函数为

$$P\{X=1\}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4},\quad P\{X=2\}=\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4^2},$$

$$P\{X=3\}=\frac{5}{20}\cdot\frac{5}{20}\cdot\frac{15}{20}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4^3},$$

…………

$$P\{X=k\}=\left(\frac{5}{20}\right)^{k-1}\times\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots;$$

几何级数求和

抽取次数为偶数的概率为

$$P_{偶}=\sum_{m=1}^{\infty}P(X=2m)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{2m-1}=\frac{3}{4^2}+\frac{3}{4^4}+\cdots=\frac{\frac{3}{4^2}}{1-\frac{1}{4^2}}=\frac{1}{5}..$$

3. 某血库急需 AB 型血，现从献血者中获得，根据经验，每 100 名献血者中只有 2 名身体合格的 AB 型血的人. 今对献血者一个接一个进行化验，以 X 表示第一次找到合格的 AB 型血的人时，献血者已被化验的人数.（1）求 X 的分布；（2）证明：对任何两个正整数 m,n，有 $P\{X>m+n\,|\,X>m\}=P\{X>n\}$，说明此式的直观意义.

解　见下面图片。

3. (1) $X=1,2,3,\cdots\cdots$

$P(X=k)=\left(\frac{98}{100}\right)^{k-1}\times\frac{2}{100}=(0.98)^{k-1}\times 0.02$ （几何分布）

(2) $P(X>m+n\mid X>m)=\frac{P(X>m+n,X>m)}{P(X>m)}=\frac{P(X>m+n)}{P(X>m)}=\frac{\sum\limits_{k=m+n+1}^{\infty}(0.98)^{k-1}\times 0.02}{\sum\limits_{k=m+1}^{\infty}(0.98)^{k-1}\times 0.02}$

又上式的分子、分母均为几何级数，利用几何级数求和公式（$\frac{第一项}{1-公比}=S$）

得：$P(X>m+n\mid X>m)=\frac{\frac{(0.98)^{m+n}\times 0.02}{1-0.98}}{\frac{(0.98)^{m}\times 0.02}{1-0.98}}=(0.98)^n$

又 $P(X>n)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(0.98)^{k-1}\times 0.02=\frac{(0.98)^n\times 0.02}{1-0.98}=(0.98)^n$

故 $P(X>m+n\mid X>m)=P(X>n)$

上式的直观意义：在检验有m个人不合格的条件下，再检验n个人仍都不合格的概率，与从开始检验n个人都不合格的概率相等，该性质称为无记忆性.

4. 若每次射击中靶的概率为 0.7，射击 10 次，求（1）命中 3 次的概率；（2）至少命中 3 次的概率.

解　设 X 表示 10 次射击命中的次数，则 $X\sim B(10,0.7)$.

（1）$P\{X=3\}=C_{10}^{3}0.7^{3}0.3^{7}\approx 0.009$.

（2）$P\{X\geq 3\}=1-P\{X<3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}\approx 0.9984$.

5. 从一批废品率为 0.1 的产品中重复抽取 20 个进行检查，求这 20 个产品中废品率不大于 0.15 的概率.

解　见下面图片。

5. 设X表示抽取的20个产品中废品的个数，由题意知 $X\sim B(20,0.1)$

又这20个产品中废品率为 $\frac{X}{20}$，则 $P\{\frac{X}{20}\leq 0.15\}=P\{X\leq 3\}$

$=\sum\limits_{i=0}^{3}C_{20}^{i}(0.1)^{i}(0.9)^{20-i}=\cdots$

6. 设随机变量 X 服从泊松分布，已知 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，写出概率函数，并求 $P\{X=4\}$.

解　设 $X\sim P(\lambda)$，其中 $\lambda>0$，则由 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，得

$$\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$$

解之得 $\lambda=2$.

所以 X 的概率函数为 $P\{X=k\}=\dfrac{2^k}{k!}e^{-2}, k=0,1,2,\cdots$.

$$P\{X=4\}=\frac{2^4}{4!}e^{-2}\approx 0.090224.$$

7. 一批产品的废品率为 0.01，用泊松分布近似求 500 件产品中废品为 2 件的概率，以及废品不超过 2 件的概率.

解　设 X 表示 500 件产品中废品的个数，则可认为 $X\sim B(500,0.01)$，因为 $n=500$ 较大，$p=0.01$ 较小，$np=5$，所以 X 近似服从 $P(5)$. 查表得：

$P\{X=2\}\approx \dfrac{5^2}{2!}e^{-5}=0.084224$.

$P\{X\le 2\}=P\{X=0\}+P\{x=1\}+P\{X=2\}\approx 0.006738+0.033690+0.084224=0.124652$.

8-10 题　见下面图片。

8. 由题意知，X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & x\in[0,5]\\ 0, & 其它\end{cases}$

方程 $4x^2+4Xx+X+2=0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta=(4X)^2-4\times4\times(X+2)\ge 0$

$\Leftrightarrow X^2-X-2\ge 0 \Leftrightarrow X\ge 2$ 或 $X\le -1$

故所求概率为 $p=P(X\ge 2)+P(X\le -1)=\int_2^5\frac{1}{5}dx+\int_{-\infty}^{-1}0\,dx=\frac{3}{5}$

9. 由题意知，X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

故所求概率为 $P(X>500+100\mid X>500)=P(X>100)$　利用了68页例3的结论

$=\int_{100}^{+\infty}f(x)dx=\int_{100}^{+\infty}\frac{1}{1000}e^{-\frac{1}{1000}x}dx=-e^{-\frac{1}{1000}x}\Big|_{100}^{+\infty}=e^{-0.1}$

10. 设 X 表示自动取款机对每位顾客的服务时间，则 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

(1) 至少等候3分钟等价于取款机对前一位顾客的服务时间 $\ge$ 3分钟

故所求概率为 $P(X\ge 3)=\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=-e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_3^{+\infty}=e^{-1}$

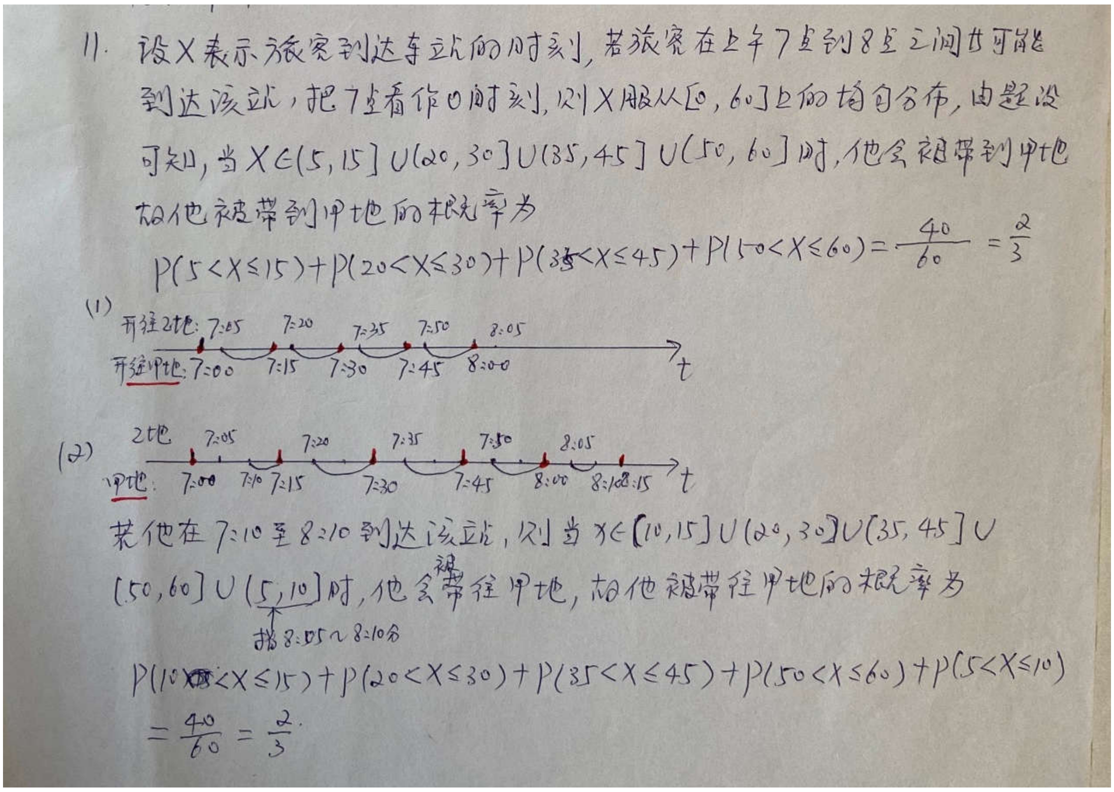
(2) 等候时间在 3~6 分钟之间等价于取款机对前一位顾客的服务时间在 3~6 分钟之间，则所求概率为 $P(3\le X\le 6)=\int_3^6 f(x)dx$

$=\int_3^6\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=-e^{-\frac{1}{3}x}\Big|_3^6=e^{-1}-e^{-2}$

上述概率仍为 $e^{-1}-e^{-2}$，因为指数分布无记忆性，可得上述两事件的概率相等.

11. 设在某火车站，从上午 7 时起每隔 15 分钟有一列开往甲地的火车；又从上午 7 点 5 分起，每隔 15 分钟有一列开往乙地的火车. 一旅客在上午 7 点到 8 点之间到达该站是等可能的，且见到火车就上，他被带到甲地的概率是多大？如果他在 7 点 10 分到 8 点 10 分之间到达该站是等可能的，且见到火车就上，他被带到甲地的概率又是多大？

解 见下面图片.


11. 设 X 表示旅客到达车站的时刻，若旅客在上午7点到8点之间等可能到达该站，把7点看作0时刻，则 X 服从 $[0,60]$ 上的均匀分布，由题设可知，当 $X\in(5,15]\cup(20,30]\cup(35,45]\cup(50,60]$ 时，他会被带到甲地
故他被带到甲地的概率为
$P(5<X\le 15)+P(20<X\le 30)+P(35<X\le 45)+P(50<X\le 60)=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$

(1)

(2)

若他在7:10至8:10到达该站，则当 $X\in[10,15]\cup(20,30]\cup[35,45]\cup[50,60]\cup(5,10]$ 时，他会被带往甲地，故他被带往甲地的概率为
指8:05~8:10分
$P(10<X\le 15)+P(20<X\le 30)+P(35<X\le 45)+P(50<X\le 60)+P(5<X\le 10)$
$=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$

12.（1）设 $X\sim N(0,1)$，求 $P\{0.02<X<2.33\}$；$P\{-1.85<X<1.04\}$；$P\{X\le 0\}$.

（2）设 $X\sim N(4,9)$，求 $P\{4<X<9.88\}$；$P\{X>9.88\}$；$P\{X=9.88\}$；$P\{|X|<9.88\}$.

解（1）$P\{0.02<X<2.33\}=\Phi_0(2.33)-\Phi_0(0.02)=0.990097-0.5080=0.482097$；

$$P\{-1.85<X<1.04\}=\Phi_0(1.04)-\Phi_0(-1.85)=\Phi_0(1.04)-[1-\Phi_0(1.85)]$$

$$=\Phi_0(1.04)+\Phi_0(1.85)-1=0.8508+0.96784-1=0.81864；$$

$P\{X\le 0\}=0.5$.

（2）$P\{4<X<9.88\}=\Phi_0(\frac{9.88-4}{3})-\Phi_0(\frac{4-4}{3})$

$$=\Phi_0(1.96)-\Phi_0(0)=0.975-0.5=0.475；$$

$P\{X > 9.88\} = 1-\Phi(9.88) = 1-\Phi_0(\frac{9.88-4}{3}) = 1-\Phi_0(1.96) = 1-0.975 = 0.025$;

$P\{X = 9.88\} = 0$;

$P\{|X| < 9.88\} = P\{-9.88 < X < 9.88\} = \Phi(9.88)-\Phi(-9.88)$

$$= \Phi_0(\frac{9.88-4}{3}) - \Phi_0(\frac{-9.88-4}{3}) = \Phi_0(1.96)-\Phi_0(-4.627)$$

$$= \Phi_0(1.96)-[1-\Phi_0(4.627)] = 0.974998145.$$

13. 设 $X \sim N(108,9)$，求（1）$P\{101.1 < X < 117.6\}$；（2）常数 a，使 $P\{X < a\} = 0.90$；（3）常数 a，使 $P\{|X-a| > a\} = 0.01$.

解 （1）$P\{101.1 < X < 117.6\} = \Phi(117.6)-\Phi(101.1)$

$$= \Phi_0(\frac{117.6-108}{3}) - \Phi_0(\frac{101.1-108}{3}) = \Phi_0(3.2)-\Phi_0(-2.3)$$

$$= \Phi_0(3.2)+\Phi_0(2.3)-1 = 0.9993129+0.98928-1 = 0.9885929.$$

（2）$P\{X < a\} = \Phi(a) = \Phi_0(\frac{a-108}{3}) = 0.9$，查标准正态分布函数值表，得 $\frac{a-108}{3} = 1.28$，

所以 $a = 111.84$.

（3）$P\{|X-a| > a\} = 1-P\{|X-a| \le a\} = 1-P\{0 \le X \le 2a\}$

$$= 1-\left[\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right)-\Phi_0\left(\frac{0-108}{3}\right)\right] = 1-\left[\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right)-\Phi_0\left(-36\right)\right]$$

$$= 1-\left[\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right)-(1-\Phi_0(36))\right] = 2-\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right)-\Phi_0(36)$$

$$= 2-\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right)-1 = 1-\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right) = 0.01. \quad （注意：\Phi_0(36)=1）$$

即 $\Phi_0\left(\frac{2a-108}{3}\right) = 0.99$，查标准正态分布函数值表，得 $\frac{2a-108}{3} = 2.33$，所以

$$a = 57.495.$$

14-16 题 见下面图片。

P76

14. 由Φ(x)知，

$P(|X|\le 10)=P(-10\le X\le 10)=\Phi(10)-\Phi(-10)\overset{\mu=0,\ \sigma=40}{=\!=}\Phi_0(\frac{10-0}{40})-\Phi_0(\frac{-10-0}{40})$

$=\Phi_0(\frac{1}{4})-\Phi_0(-\frac{1}{4})=2\Phi_0(\frac{1}{4})-1=2\times0.5987-1=0.1974$

设 Y 表示三次测量中误差绝对值不超过10的次数，则 $Y\sim B(3,0.1974)$

则 $P(Y\ge1)=1-P(Y=0)=1-C_3^0(0.1974)^0(1-0.1974)^{3-0}\approx0.483$

15. 已知 X 服从 $N(72,\sigma^2)$，由题意知 $P(X\ge90)=4\%$

则 $P(X\ge90)=1-P(X<90)=1-\Phi(90)=1-\Phi_0(\frac{90-72}{\sigma})=1-\Phi_0(\frac{18}{\sigma})$

$=4\%$，故 $\Phi_0(\frac{18}{\sigma})=0.96$，查表可得 $\frac{18}{\sigma}=1.75$，$\sigma\approx10$

故 X 近似 $N(72,10)$

(1) $P(X<60)=\Phi(60)=\Phi_0(\frac{60-72}{10})=\Phi_0(-1.2)=1-\Phi_0(1.2)=1-0.8849=0.1151$

(2) $P(65<X<80)=\Phi(80)-\Phi(65)=\Phi_0(\frac{80-72}{10})-\Phi_0(\frac{65-72}{10})$

$=\Phi_0(0.8)-\Phi_0(-0.7)=\Phi_0(0.8)-1+\Phi_0(0.7)=0.7881+0.7580-1=0.5461$

16. 根据3σ准则测量值能以超过0.997的概率落在 $\mu-3\sigma=0.2-3\times0.05$ 与 $\mu+3\sigma=0.2+3\times0.05$ 之间，即测量值以超过0.997的概率落在0.05与0.35之间，若一次测量值不落在其间，则认为测量值不合理，而 $0.367>0.35$，所以该数据可认为异常而予以剔除。