习题 2-4

1. 已知离散型随机变量 X 的概率函数为

X	0	$\frac{\pi}{2}$	π
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

求 $Y=\frac{2}{3}X+\pi$ 及 $Z=\sin X$ 的概率函数.

解: $Y=\frac{2}{3}X+\pi$ 的概率函数为

Y	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$Z=\sin X$ 的概率函数为

Z	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

2. 设随机变量 $X \sim B(3,0.4)$，求 $Y=X^2-2X$ 的概率函数.

解：因为 X 的可能取值为 0，1，2，3，所以 Y 的可能取值为-1，0，3，并且有

$$P\{Y=-1\}=P\{X=1\}=C_3^1\times 0.4^1\times 0.6^2=0.432,$$

$$P\{Y=0\}=P\{X=0\}+P\{X=2\}=C_3^0\cdot 0.4^0\cdot 0.6^3+C_3^2\cdot 0.4^2\cdot 0.6=0.504,$$

$$P\{Y=3\}=P\{X=3\}=C_3^3\times 0.4^3\times 0.6^0=0.064.$$

即 $Y=X^2-2X$ 的概率函数为

Y	-1	0	3
P	0.432	0.504	0.064

3. 随机变量 X 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，试求 $Y = e^X$ 的密度函数.

解:

P81 习题2-4

3. 由题意知 $X \sim f_X(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1]\\ 0, & 其它\end{cases}$，Y的分布函数为: $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，$f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(\int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx\right)'=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=\begin{cases}1\cdot\frac{1}{y}, & 0\le \ln y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1\le y\le e\\ 0, & 其它\end{cases}$，综上所述，有 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{y}, & 1\le y\le e\\ 0, & 其它\end{cases}$

4. 设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2\\ 0, & 其它\end{cases}$，求 Y 的密度函数，其中（1）$Y=2X+1$；

（2）$Y=X^2$.

解法一：

4.(1) $Y=2X+1$ 为 X 的线性函数，由Th2.1知

$f_Y(y)=\frac{1}{2}f_X\left(\frac{y-1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{y-1}{2}}{2}, & 0<\frac{y-1}{2}<2\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{y-1}{8}, & 1<y<5\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) 设Y的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，则 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

又当 $x\le 0$ 时，$f_X(x)=0$，则

$F_Y(y)=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\int_{-\sqrt{y}}^{0} 0\,dx+\int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(\int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)dx\right)'=f_X(\sqrt{y})\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$

$=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2}, & 0<\sqrt{y}<2\\ 0, & 其它\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<y<4\\ 0, & 其它\end{cases}$

总之，有 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<y<4\\ 0, & 其它\end{cases}$

解法二：（1）Y 的分布函数为

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+1\le y\}=P\{X\le \frac{y-1}{2}\}=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} f(x)dx$.

当$\frac{y-1}{2}\le 0$时，即$y\le 1$时，$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{\frac{y-1}{2}} 0dx=0$.

当$0<\frac{y-1}{2}<2$时，即$1<y<5$时，$F_Y(y)=\int_{0}^{\frac{y-1}{2}} \frac{x}{2}dx=\frac{(y-1)^2}{16}$.

当$\frac{y-1}{2}\ge 2$时，即$y\ge 5$时，$F_Y(y)=\int_0^2\frac{x}{2}dx=1$.

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1\\ \frac{(y-1)^2}{16}, & 1<y<5\\ 1, & y\ge 5\end{cases}.$$

所以Y的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{8}, & 1<y<5\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

（2）Y的分布函数为

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$

当$y\le 0$时时，$F_Y(y)=0$.

当$0<y<4$时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y}\}=\int_0^{\sqrt{y}}\frac{x}{2}dx=\frac{y}{4}$.

当$y\ge 4$时， $F_Y(y)=1$.

所以

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \frac{y}{4}, & 0<y<4\\ 1, & y\ge 4\end{cases}$$

所以密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 0<y<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

5. 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，求 $Y=|X|$ 的密度函数.

解法一：

5. 设Y的分布函数为 $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(|X|\le y)$

1° 当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$，故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

2° 当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P(|X|\le y)=P(-y\le X\le y)=\int_{-y}^{y}\varphi_0(x)dx$

故 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\left(\int_{-y}^{y}\varphi_0(x)dx\right)_y'=\varphi_0(y)\cdot y'-\varphi_0(-y)(-y)'$

$=\varphi_0(y)+\varphi_0(-y)\xlongequal[\text{偶函数}]{\varphi_0(y)\text{为}}2\varphi_0(y)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$

综上所述有：$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

解法二： X 的密度函数为

$$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$Y=|X|$ 的密度函数为 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$.

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$

当 $y\ge 0$ 时，$F_Y(y)=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y}\varphi_0(x)dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

即 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}.$$

所以 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, & y\ge 0\\ 0, & y<0\end{cases}.$$