习题 2-1

略.

习题 2-2

1. 判断下列各式是否可以作为某个随机变量的概率函数？

（1）$P\{X=k\}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k, k=0,1,2,\cdots$

（2）$P\{X=k\}=(\frac{1}{2})^k, k=1,2,\cdots$

利用几何级数(等比级数)求和公式

解（1） 因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^k=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}\neq 1$，不满足概率函数的第二个性质，所以该式不能作为概率函数.

（2）因为$P\{X=k\}>0,(k=1,2,\cdots)$，且$\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^k=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$，满足概率函数的两个性质，所以该式可作为某个随机变量的概率函数.

2. 设随机变量X的概率函数为$P\{X=k\}=c(\frac{2}{3})^k,(k=1,2,3)$，求$c$的值.

解 由$\sum\limits_{k=1}^{3}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=1}^{3}c(\frac{2}{3})^k=\frac{38}{27}c=1$可得$c=\frac{27}{38}$.

3. 一袋中装有 5 只球，分别编号 1，2，3，4，5. 在袋中同时取出 3 只，用X表示取出的 3 只球中的最大号码，写出X的概率函数.

解 由题意，X的可能取值为 3，4，5，则X的概率函数为

$P\{X=3\}=\frac{1}{C_5^3}=\frac{1}{10}$，（事件$\{X=3\}$表示取出的 3 个球只能从 1, 2, 3 号球中取这 1 种情况）

$P\{X=4\}=\frac{C_3^2C_1^1}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，（事件$\{X=4\}$表示取出的 3 个球中必有 4 号球，有$C_1^1$种取法，另 2 个球只能从 1, 2, 3 号球这 3 个球中任取 2 个球，有C_3^2种取法，故有利于事件$\{X=4\}$的基本事件数为$C_3^2C_1^1$）

$P\{X=5\}=\dfrac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}$.（事件$\{X=5\}$表示取出的 3 个球中必有 5 号球，有$C_1^1$种取法，另 2 个球只能从 1,2,3,4 号球这 4 个球中任取 2 个球，有C_4^2种取法，故有利于事件$\{X=5\}$的基本事件数为$C_4^2C_1^1$）

所以X的概率函数为

X	3	4	5
P	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$

4. 设随机变量X的概率函数为$P\{X=k\}=\dfrac{k}{15},k=1,2,3,4,5$，求（1）$P\{X=1或X=2\}$；（2）$P\{\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{5}{2}\}$；（3）$P\{1\le X\le 2\}$，$P\{1<X\le 2\}$.

解（1）$P\{X=1或X=2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$；

（2）$P\{\dfrac{1}{2}<X\le\dfrac{5}{2}\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\dfrac{1}{5}$；

（3）$P\{1\le X\le 2\}=P\{X=1\}+P\{X=2\}=\dfrac{1}{5}$；

$P\{1<X\le 2\}=P\{X=2\}=\dfrac{2}{15}$.

5. 一批产品共 10 个，其中有 4 个是次品. 现从中任取 4 个，求取出的 4 个产品中次品数X的概率函数.

解　由题意，X的可能取值为 0, 1, 2，3，4，则X的概率函数为

$P\{X=0\}=\dfrac{C_4^0C_6^4}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{14}$，　$P\{X=1\}=\dfrac{C_4^1C_6^3}{C_{10}^4}=\dfrac{8}{21}$，　$P\{X=2\}=\dfrac{C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\dfrac{3}{7}$，

$P\{X=3\}=\dfrac{C_4^3C_6^1}{C_{10}^4}=\dfrac{4}{35}$，　$P\{X=4\}=\dfrac{C_4^4C_6^0}{C_{10}^4}=\dfrac{1}{210}$.

所以 X 的概率函数为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{210}$

6. 一批零件中有 7 个正品、3 个次品. 安装机器时从这批零件中任取一个，若取到正品，则停止抽取；若取到次品，则放在一边继续抽取，直到取出正品为止. 求在取到正品前所取出的次品数的概率函数.

解　设 X 表示在取到正品前所取出的次品数，则 X 的可能取值为 0，1，2，3，且有

$$P\{X=0\}=\frac{C_7^1}{C_{10}^1}=\frac{7}{10},\qquad P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_7^1}{C_{10}^1C_9^1}=\frac{7}{30},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^1C_2^1C_7^1}{C_{10}^1C_9^1C_8^1}=\frac{7}{120},\qquad P\{X=3\}=\frac{C_3^1C_2^1C_1^1C_7^1}{C_{10}^1C_9^1C_8^1C_7^1}=\frac{1}{120}.$$

所以 X 的概率函数为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{1}{120}$

7. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} c\lambda e^{-\lambda x}, x>a, (\lambda>0); \\ 0, \quad x\le a. \end{cases}$$

求常数 c 及 $P\{a-1<X\le a+1\}$.

解　由 $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_a^{+\infty}c\lambda e^{-\lambda x}dx=-ce^{-\lambda x}\Big|_a^{+\infty}=ce^{-\lambda a}$，得：$c=e^{\lambda a}$.

$$P\{a-1<X\le a+1\}=\int_{a-1}^{a+1}f(x)dx=\int_{a-1}^{a}0dx+\int_a^{a+1}\lambda e^{\lambda a}e^{-\lambda x}dx=-e^{\lambda a}e^{-\lambda x}\Big|_a^{a+1}=1-e^{-\lambda}.$$

8. 设 $F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x}{2}, 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$，判断 $F(x)$ 是否为某一随机变量的分布函数？

解　见课件.

因为 $F(x)$ 满足随机变量分布函数的四条性质，所以可作为某一随机变量的分布函数.

9. 设随机变量 X 的概率分布为

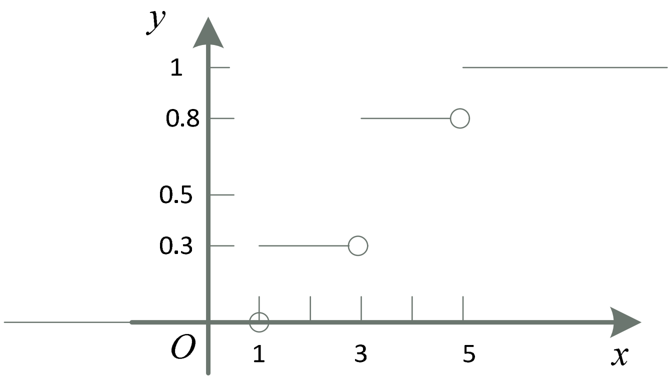
$P\{X=1\}=0.3$，$P\{X=3\}=0.5$，$P\{X=5\}=0.2$

试写出 X 的分布函数 $F(x)$，并画出图形.

解 由分布函数的定义 $F(x)=P\{X\le x\}$ 和题设，可得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.3, & 1\le x<3\\ 0.8, & 3\le x<5\\ 1, & x\ge 5\end{cases}$$

$F(x)$ 的图形为



10. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.4, & -1\le x<1\\ 0.8, & 1\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases},$$

试求（1）X 的概率分布；（2）$P\{X<2\mid X\ne 1\}$.

解 （1）X 的概率分布为

X	−1	1	3
P	0. 4	0. 4	0. 2

（2）$P\{X<2\mid X\ne 1\}=\dfrac{P\{X<2,X\ne 1\}}{P\{X\ne 1\}}=\dfrac{P\{X=-1\}}{1-P\{X=1\}}=\dfrac{0.4}{1-0.4}=\dfrac{2}{3}$.

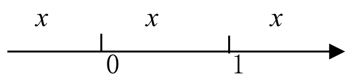
11. 已知随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{A\sqrt{x}},0<x<1;\\ 0,\quad 其它.\end{cases}$$

求（1）常数 A；（2）分布函数 $F(x)$；（3）$P\{X\le 0.5\}$，$P\{X=0.5\}$，$P\{-1<X\le 0.5\}$.

解 （1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1\dfrac{1}{A\sqrt{x}}dx=\dfrac{2\sqrt{x}}{A}\Big|_0^1=\dfrac{2}{A}=1$， 得 $A=2$.

（2）$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.



当 $x<0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$；

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^x\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt=\sqrt{x}$；

当 $x\ge 1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{0}0dt+\int_0^1\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt+\int_1^{+\infty}0dt=1$.

所以 $F(x)=\begin{cases}0,\quad x<0\\ \sqrt{x},0\le x<1\\ 1,\quad x\ge 1\end{cases}$.

（3）$P\{X\le 0.5\}=F(0.5)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，　　　$P\{X=0.5\}=0$，

$$P\{-1<X\le 0.5\}=F(0.5)-F(-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,\qquad x<-1\\ a+b\arcsin x,-1\le x<1\\ 1,\qquad x\ge 1\end{cases}；$$

求（1）常数 a,b；（2）密度函数 $f(x)$.

解 （1）因为连续型随机变量的分布函数是连续函数，得

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -1^-}F(x)=F(-1)\\ \lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)\end{cases},$$

$$\begin{cases}a+b\arcsin(-1)=0\\ a+b\arcsin 1=1\end{cases},$$

解上式可得：$a=\dfrac{1}{2},b=\dfrac{1}{\pi}$.

（2）根据密度函数 $f(x)$ 在其连续点处有 $f(x)=F'(x)$，在不连续点处的值可任意定义，得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},-1<x<1\\ 0,\quad 其它\end{cases}.$$

13. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0,\quad x<1\\ \ln x,1\le x<e\\ 1,\quad x\ge e\end{cases},$$

求（1）$P\{X<2\}$，$P\{0<X\le 3\}$，$P\{2<X<\dfrac{5}{2}\}$；（2）X 的概率密度 $f(x)$.

解 （1）$P\{X<2\}=F(2)=\ln 2$，$P\{0<X\le 3\}=F(3)-F(0)=1-0=1$，

$$P\{2<X<\frac{5}{2}\}=F(\frac{5}{2})-F(2)=\ln\frac{5}{2}-\ln 2=\ln\frac{5}{4}.$$

（2）根据密度函数 $f(x)$ 在其连续点处有 $f(x)=F'(x)$，在不连续点处的值可任意定义(此处定义函数值为 0)，得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},1\le x\le e\\ 0,\quad 其它\end{cases}.$$