第一章 函数与极限

1.2-1.3 数列和函数的极限

一、 根据数列或函数极限的定义证明下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=0$；　　　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{5n+1}=\dfrac{2}{5}$；

3. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=-4$；　　　　4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}=0$；

5. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=1$，并求正数 X，使得当 $x>X$ 时，就有 $\left|\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-1\right|<0.01$.

（$X=101^2$）

二、设 $\{x_n\}$ 为一数列.

1. 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$；

2. 问：(1)的逆命题"若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"是否成立？若成立，证明之；若不成立，举出反例.　（逆命题不成立。反例：$x_n=(-1)^n$。）

三、判断下列命题的正误：

1. 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 必收敛；　（正确）

2. 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 必发散；　（错误）

3. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，而数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 必发散。（正确）

四、证明：对任一数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

五、证明：$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

六、根据函数的图形写出下列极限（如果极限存在）：

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{sgn} x=-1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{sgn} x=1$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{sgn} x$ 不存在

3. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$， $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$ 不存在

七、证明：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有界.

八、证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限存在的充分必要条件是左极限，右极限均存在并且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

九、设 $f(x)=|x|$，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

十、设 $f(x)=\operatorname{sgn} x$，求 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$， $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ 和 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在

1.4 无穷小与无穷大

一、填空题

1. 当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷小；当 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}$ 是无穷大.

2. 当 $x\to 0^-$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷小；当 $x\to 0^+$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 是无穷大.

3. 当 $x\to 1$ 时，$\ln x$ 是无穷小；当 $x\to 0^+$ 时，$\ln x$ 是负无穷大；当 $x\to+\infty$ 时，$\ln x$ 是正无穷大.

二、选择题

当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 是（D）

（A）无穷小；　　　　（B）无穷大；

（C）有界的，但不是无穷小；　　　　（D）无界的，但不是无穷大.

三、证明函数 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界，但当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 不是无穷大.

四、判断下列命题的正确性：

1. 两个无穷小的和也是无穷小.　（正确）
2. 两个无穷大的和也是无穷大.　（错误）
3. 无穷小与无穷大的和一定是无穷大.　（正确）
4. 无穷小与无穷大的积一定是无穷大.　（错误）
5. 无穷小与无穷大的积一定是无穷大.　（错误）
6. 无穷大与无穷大的积也是无穷大.　（正确）

五、举例说明：

1. 两个无穷小的商不一定是无穷小；

2. 无限个无穷小的和不一定是无穷小.

六、根据定义证明：

1. 当 $x \to 0$ 时，$f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ 为无穷小；

2. 当 $x \to 0^+$ 时，$f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ 为无穷大；

3. 当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) = e^x$ 为无穷小.

1.5 极限运算法则

一、计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2x + 4) = 12$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n - 1}{x - 1} = n$ （n 是正整数）

5. $\lim\limits_{x\to 1}(\dfrac{3}{1 - x^3} - \dfrac{1}{1 - x}) = 1$

6. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$

二、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to \infty}(3 - \dfrac{1}{x})(2 + \dfrac{1}{x^2}) = 6$

2. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2 + 1}{4x^2 + x - 1} = \dfrac{3}{4}$

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2 + x + 1}{5x^3 - x^2 + 1} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x-5}{10x+1}=\infty$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2})=\dfrac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}(|a|<1,\ |b|<1)=\dfrac{1-b}{1-a}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}=\dfrac{1}{3}$

三、若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b)=0$，求 a,b 的值．（$a=1,b=-1$）

四、若 $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{a}{1-x^2}-\dfrac{x}{1-x})=\dfrac{3}{2}$，求 a 的值．（$a=2$）

五、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-2}=\infty$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^2-4x-3)=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x^2+1}{4x^2+6x+5}=\infty$.

六、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to1}(x^2-1)\cos\dfrac{1}{x-1}=0$

2. $\lim\limits_{x\to0}x^3\sin\dfrac{1}{x}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)\arctan x}{x^2}=0$.

七、设 $f(x)=\begin{cases}x, & |x|\le1\\ x^2-5, & |x|>1\end{cases}$，分别求函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 的左极限、右极限和极限.（$-4,-1$，不存在）

八、设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$，试求 $f(x)$ 的表达式．（$f(x)=\begin{cases}-1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$）

1.6 极限存在的两个准则 两个重要极限

一、利用夹逼定理求下列极限：

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{1}{n^2+n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n+n}\right)=0$

3. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}(\arctan x)^2=0$

二、证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}=3$.

三、设 $a=\max\{a_1,\ a_2,\ldots,\ a_m\}$ $(a_k>0,\ k=1,2,\ldots,m)$，证明：$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\ldots+a_m^n}=a$.

四、设 $a>1$，证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$

五、利用数列的单调有界准则证明下列数列收敛，并求出极限：

1. $x_1=\sqrt{2},x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\ \ldots,x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},\ \ldots$；（$\lim_{n\to\infty}x_n=2$）

2. $x_1=1,\ x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1},\ \ldots,\ x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}},\ \ldots$ （$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$）

六、设 $x_1=a,\ y_1=b\ (0<a<b)$，$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$.

1. 证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加，数列 $\{y_n\}$ 单调减少且满足 $x_n<y_n(n=1,2,\ldots)$；

2. 证明数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛，并且有相同的极限.

七、计算下列极限:

1. $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x}{4x}=\frac{3}{4}$

2. $\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}(\alpha,\beta\neq0)=\frac{\alpha}{\beta}$

3. $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{\pi}{x}=\pi$

4. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=1$

5. $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\arctan x}=\frac{1}{2}$

6. $\lim_{x\to0^+}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}=\sqrt{2}$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \sin\frac{1}{3^n} = 0$.

八、计算下列极限:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n = e$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{x+5} = e^2$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-x} = \frac{1}{e}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x-1}{2x+1})^x = \frac{1}{e}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{2\cot x} = e^2$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n = 1$.

九、已知$\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}} = 2$，求$a$的值.（$a=\ln 2$）

十、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ \dfrac{x^2}{1-\cos x}, & x>0\end{cases}$，求$f(0^-)$，$f(0^+)$和$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.（$2,2,2$）

十一、设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan ax}{x}, & x<0\\ x^2+x, & x\ge 0\end{cases}$，已知$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$存在，求$a$的值.（$a=0$）

1.7　无穷小的比较

一、比较下列各对无穷小：

1. $1-x^2$, $(1-x)^2$ $(x\to 1)$　（后者高阶）

2. $1-x^3$, $1-x^2$ $(x\to 1)$　（同阶）

3. $1-\cos x$, x^2 $(x\to 0)$　（同阶）

4. $\tan x-\sin x$, x^2 $(x\to 0)$　（前者高阶）

二、证明：当$x\to 0$时，有以下等价无穷小成立：

1. $\arcsin x \sim x$；

2. $\tan x - \sin x \sim \dfrac{x^3}{2}$.

三、利用等价无穷小代换计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x^2}{x \sin x} = 1$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x^2} = 0$

3. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})} = \dfrac{1}{2}$

四、当 $x \to 0$ 时，下列四个无穷小中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小?

A. x^2　　B. $1 - \cos x$　　C. $\sqrt{1 - x^2} - 1$　　D. $x - \tan x$　　　（D）

五、证明：若 α 是 β 的高阶无穷小，则 $\alpha + \beta \sim \beta$ 。

六、证明无穷小的等价关系具有下列性质：

1. $\alpha \sim \alpha$ （自反性）;

2. 若 $\alpha \sim \beta$，则 $\beta \sim \alpha$ （对称性）;

3. 若 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则 $\alpha \sim \gamma$ （传递性）.

1.8-1.9 函数的连续性与间断点　连续函数的运算与初等函数的连续性

一、求函数 $y = x^2 + 3x + 1$，当 $x = 1, \Delta x = 0.1$ 时的增量。

二、下列函数的间断点，并指出其类型：

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$，（$x = 0$ 为可去间断点，$x = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ 为无穷间断点）;

2. $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} + 2}{2^{\frac{1}{x}} - 2}$，（$x = 0$ 为跳跃断点，$x = 1$ 为无穷间断点）;

3. $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$ （$x = 0$ 为跳跃断点）.

三、求函数 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ 的连续区间.（$(-\infty, -1), (1, 2), (2, +\infty)$）

四、求函数 $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 1\\ 2x+5, & x>1\end{cases}$ 的间断点和连续区间，并指出间断点的类型。

（连续区间：$(-\infty,1),(1,+\infty)$， $x=1$ 为跳跃间断点）

五、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, & x\ne 4\\ a, & x=4\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求 a 的值。.（$a=8$）

六、利用初等函数的连续性计算极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{\sin x}{x}}=e$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\dfrac{3}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=0$

七、判断下列命题的正确性：

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义

1. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为连续函数，则 $f[g(x)]$ 也为连续函数。（正确）

2. 若 $f(x)$ 为连续函数， $g(x)$ 有间断点，则 $f[g(x)]$ 必有间断点（错误）

3. 若 $f(x)$ 有间断点， $g(x)$ 为连续函数，则 $f[g(x)]$ 必有间断点（错误）

八、讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-x)}{x}, & x<0\\ -1, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性。（在 $x=0$ 处间断）

九、1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)$ 存在，证明： $\lim\limits_{x\to\infty}[1+f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)g(x)}$ ； 2. 利用以上公式计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\sin\dfrac{2}{x})^x$ 。 （e^2）

十、设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，且 $f(x_0)>0$，试证明：存在 $\delta>0$，

使得 $f(x)>0\ \ (x_0-\delta<x<x_0+\delta)$。

十一、设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续函数，试证明： $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 也是连续函数。

十二、1. 在点x_0处$f(x)$连续，$g(x)$不连续，则$f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$在点x_0是否连续？

（$f(x)+g(x)$一定不连续，$f(x)g(x)$可能连续）

2. 在点x_0处$f(x)$和$g(x)$不连续，则$f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$在点x_0是否不连续？

（$f(x)+g(x)$和$f(x)g(x)$都可能连续）

1.10 闭区间上连续函数的性质

一、举例说明在开区间上连续的函数在该区间上不一定有最大值和最小值，不一定是有界函数，也不一定满足介值定理。

二、证明方程$2x=\sin x+2$至少有一个小于$\dfrac{3}{2}$的正根.

三、证明方程$x=a\sin x+b$ $(a>0，b>0)$至少有一个不超过$a+b$的正根.

四、三次方程$x^3-6x^2+9x-3=0$有多少个实根？并指出实根所在区间。

（有三个实根，分别在以下三个区间：$(0,1),(1,2),(3,4)$）

五、设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，且$f(a)>g(a)$，$f(b)<g(b)$。试证：在(a,b)内至少存在一点c，使得$f(c)=g(c)$。

六、设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<b$. 试证：存在$\xi\in(x_1，x_n)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)]$$

七、设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$0\le f(x)\le 1$，证明至少有一点$c\in[0,1]$，使得$f(c)=c$（这样的点c称为函数的不动点。）。