第十一章 无穷级数

11.1 常数项级数的概念与性质

一、选择题：

1. 对级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$，则 （ C ）

A. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

B. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必发散。

C. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛，也可能发散。

D. $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \to 0$

2. 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于s，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$ （ C ）

A. 收敛于$2s$。

B. 收敛于$2s + u_1$。

C. 收敛于$2s - u_1$。

D. 发散。

二、 已知级数的部分和$s_n = \dfrac{3n}{n+1}$，试写出该级数，并求级数的和。（$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{n(n+1)} = 3$）

三、 由定义判别下列级数的收敛性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$。 （ 收敛 ）

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$。 （ 发散 ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$。 （ 发散 ）

四、 利用性质判别下列级数的收敛性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$。 （ 发散）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$。 （ 收敛 ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$。 （ 发散 ）

11.2 常数项级数的审敛法

一、 判别下列级数的收敛性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$。 （ 发散 ）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\,(a>0)$。 （当$0<a\le 1$时，级数发散；当$a>1$时，级数收敛）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$。 （ 收敛 ）

二、 判别下列级数的收敛性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$。 （ 收敛 ）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n-1})^{2n-1}$。 （ 收敛 ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n}}$。 （ 发散 ）

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+2)}{(a+\frac{1}{n})^n}\ (a>0)$。（当$0<a\le 1$时，级数发散；当$a>1$时，级数收敛）

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{3^{n-1}}$。 （ 绝对收敛 ）

6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$。　（ 条件收敛 ）

三、若$\lim_{n\to\infty}n^2u_n$存在，证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

四、证明：$\lim_{n\to\infty}\frac{b^{3n}}{n!a^n}=0\ (a,b>0)$。

五、讨论下列级数的敛散性，并对收敛级数说明是绝对收敛，还是条件收敛：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$。　（ 绝对收敛）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$。　（ 条件收敛 ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2+(-1)^n}{n^{\frac{5}{4}}}$。　（ 绝对收敛 ）

11.3　幂级数

一、　求下列幂级数的收敛半径和收敛区间：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$。　（ 收敛半径：$R=\sqrt{2}$；收敛区间：$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n+b^n}x^n\ (a,b>0)$。

（ 收敛半径：$R=c=\max\{a,b\}$；收敛区间：$(-c,c)$ ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}(x-1)^n$。　（ 收敛半径：$R=2$；收敛区间：$[-1,3)$ ）

二、　求下列幂级数的和函数：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$。　（ $s(x)=\frac{1}{(1-x)^2}\ (-1<x<1)$ ）

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$。　（ $s(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ (-1<x<1)$ ）

3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$，并求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$的和。（ $s(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3}\ (-1<x<1),\ \frac{15}{32}$ ）

11.4 函数展开成幂级数

一、 将下列函数展开成x的幂级数，并求展开式成立的区间：

1. $(1+x)\ln(1+x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}x^{n+1}\quad(-1<x\le 1)$。

2. $\arcsin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad(-1<x<1)$。

3. $\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}\quad(-1<x<1)$。

二、 将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展开成$x+4$的幂级数。

（ $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}})(x+4)^n\quad(-6<x<-2)$ ）

三、 将级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}$的和函数展开成$x-1$的幂级数。

（ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}=\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}=$

$\sqrt{2}\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n)!}(x-1)^{2n}+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(2n+1)!}(x-1)^{2n+1}\quad(|x|<+\infty)$ ）

四、 将函数$f(x)=\cos x$展开成$x+\frac{\pi}{3}$的幂级数。

（ $\cos x=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{(2n)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}(x+\frac{\pi}{3})^{2n+1}]\quad(-\infty<x<+\infty)$ ）

11.5 幂级数的应用

一、 利用函数的幂级数展开式求下列函数值的近似值：

1. $\ln 3$（误差不超过0.0001）。（ $\ln 3\approx 1.0986$ ）

2. $\cos 2^\circ$ （误差不超过0.0001）。（$\cos 2^\circ \approx 0.9994$）

二、 求$\int_0^{0.5}\frac{1}{1+x^4}dx$的近似值，误差不超过$0.0001$。（$0.4940$）

11.6 傅里叶级数

一、 填空题：

1. 设$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x<\pi\end{cases}$，则$f(x)$的以$2\pi$为周期的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于$\underline{\frac{1}{2}\pi^2}$。

2. 设$f(x)$是以2为周期的周期函数，其表达式为$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 1\end{cases}$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=1$处收敛于$\underline{\frac{3}{2}}$。

二、将下列函数$f(x)$展开成傅里叶级数：

1. $f(x)=\begin{cases}bx, & -\pi\le x<0\\ ax, & 0\le x<\pi\end{cases}$ $(a>b>0)$。

（$f(x)=\frac{a-b}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{[1-(-1)^n](b-a)}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}(a+b)}{n}\sin nx\}$，

$x\ne(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$）

2. $f(x)=\begin{cases}e^x, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$。

（$f(x)=\frac{1+\pi-e^{-\pi}}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1-(-1)^n e^{-\pi}}{1+n^2}\cos nx+[\frac{-n+(-1)^n ne^{-\pi}}{1+n^2}+\frac{1-(-1)^n}{n}]\sin nx\}$

$-\pi<x<\pi$）

3. $f(x)=\frac{x}{\pi}$ $(-\pi\le x\le\pi)$。 （$\frac{x}{\pi}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin nx$ $(-\pi<x<\pi)$）

正弦级数和余弦级数

一、将 $f(x)=2x^2\ (0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数。

（$2x^2=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{-2}{n^3}+(-1)^n(\dfrac{3}{n^3}-\dfrac{\pi^2}{n})]\sin nx\ \ (0\le x<\pi)$，

$2x^2=\dfrac{2}{3}\pi^2+8\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3}\cos nx\ \ (0\le x\le\pi)$）

二、将 $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}\ (-\pi\le x\le\pi)$ 展开成傅里叶级数。

（$\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx\ \ (-\pi\le x\le\pi)$）

三、设函数 $f(x)$ 的周期为 2π，证明：

1. 如果 $f(x-\pi)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_0=0, a_{2k}=0, b_{2k}=0$ $(k=1,2,...)$。

2. 如果 $f(x-\pi)=f(x)$，则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $a_{2k+1}=0, b_{2k+1}=0$ $(k=1,2,...)$。

11.7　一般周期函数的傅里叶级数

一、将周期为 6 的周期函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & -3\le x<0\\ 1, & 0\le x<3\end{cases}$ 展开成傅里叶级数。

（$f(x)=-\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\dfrac{6}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]\cos\dfrac{n\pi x}{3}+(-1)^{n+1}\dfrac{6}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{3}\}$，

$x\ne 3(2n+1)\pi, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$）

二、将函数 $f(x)=x^2\ (0\le x\le 2)$ 展开成正弦级数和余弦级数。

（$x^2=\dfrac{8}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}+\dfrac{2}{n^3\pi^2}[(-1)^n-1]\}\sin\dfrac{n\pi x}{2}\ \ (0\le x<2)$，

$$x^2 = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2} \quad (0 \le x \le 2)$$