习题三

1. 填空题

（1）将一枚硬币连续掷两次，以 X,Y 分别表示两次所出现的正面次数，则 (X,Y) 的分布律为

________.（$P\{X=i,Y=j\}=\frac{1}{4},(i,j=0,1)$）

解：由题意知，X 和 Y 的取值均为 0, 1，且 X 和 Y 相互独立，故对 $\forall i,j=0,1$，有

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}\cdot P\{Y=j\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

(2) 将一枚均匀的骰子投掷两次，设 B,C 为两次中出现的点数，则一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$ 有实根的概率

$p=$______, $\left(\frac{19}{36}\right)$ 有重根的概率 $q=$______, $\left(\frac{1}{18}\right)$

解：由题意知，B 和 C 的取值均为 1，2，3，4，5，6，且 B 和 C 相互独立，故对 $\forall i,j=1,2,\cdots,6$，有

$P\{B=i,C=j\}=P\{B=i\}\cdot P\{C=j\}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$，此即为随机向量 (B,C) 的概率分布.

（1）$x^2+Bx+C=0$ 有实根 $\Leftrightarrow B^2-4C\ge 0\Leftrightarrow B^2\ge 4C\Leftrightarrow \begin{cases} B=2\text{时，}C=1 \\ \text{或者}B=3\text{时，}C=1,2 \\ \text{或者}B=4\text{时，}C=1,2,3,4 \\ \text{或者}B=5\text{时，}C=1,2,3,4,5,6 \\ \text{或者}B=6\text{时，}C=1,2,3,4,5,6 \end{cases}$

从而 $x^2+Bx+C=0$ 有实根的概率:

$$p=P\{B=2,C=1\}+P\{B=3,C=1\}+P\{B=3,C=2\}+\sum_{j=1}^{4}P\{B=4,C=j\}+\sum_{j=1}^{6}P\{B=5,C=j\}+\sum_{j=1}^{6}P\{B=6,C=j\}$$

$$=19\times\frac{1}{36}=\frac{19}{36}.$$

（2）$x^2+Bx+C=0$ 有重根 $\Leftrightarrow B^2-4C=0\Leftrightarrow B^2=4C\Leftrightarrow B=2,C=1,\text{或者}B=4,\ C=4$，

从而 $x^2+Bx+C=0$ 有重根的概率 $q=P\{B=2,C=1\}+P\{B=4,C=4\}=\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$.

（3）随机变量 $X_i(i=1,2)$ 的概率分布如下：

X_i	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$__________. (0)

解：见下面图片.

P113 习题三

1.(3) 设 (X_1,X_2) 的联合概率分布为

$X_1 \backslash X_2$	-1	0	1	$p_i^{(1)}$
-1	$p_{11}=0$	$p_{12}=0.25$	$p_{13}=0$	0.25
0	$p_{21}=0.25$	p_{22}	$p_{23}=0.25$	0.5
1	$p_{31}=0$	$p_{32}=0.25$	$p_{33}=0$	0.25
$p_j^{(2)}$	0.25	0.5	0.25	

因 $P(X_1X_2=0)=p_{12}+p_{21}+p_{22}+p_{23}+p_{32}=1$

又 $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$，则 $p_{11}+p_{13}+p_{31}+p_{33}=0$

又 $p_{ij}\geq 0$ 故 $p_{11}=p_{13}=p_{31}=p_{33}=0$

第1页

从而由边缘分布知，$p_{12}=0.25$，$p_{32}=0.25$，$p_{21}=0.25$，$p_{23}=0.25$

又 $\overset{0.25}{p_{21}}+p_{22}+\overset{0.25}{p_{23}}=P(X_1=0)=0.5$ 故 $p_{22}=0$，至此联合概率分布求出

则 $P(X_1=X_2)=p_{11}+p_{22}+p_{33}=0+0+0=0$

(4) 设 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} k(6-x-y), 0<x<2, 2<y<4 \\ 0, \quad \text{其它} \end{cases}$$

则常数 $k=$__________；$\left(\dfrac{1}{8}\right)$ $\quad P\{X+Y\leq 4\}=$__________. $\left(\dfrac{2}{3}\right)$

解：因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_2^4 k(6-x-y)dy=1$，解之得：$k=\dfrac{1}{8}$.

$$P\{X+Y\leq 4\}=\iint\limits_{x+y\leq 4} f(x,y)dxdy=\int_0^2 dx\int_2^{4-x}\frac{1}{8}(6-x-y)dy=\frac{2}{3}.$$

(5) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(2,3^2)$，$Y\sim N(-1,3^2)$，则 $\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y\sim$______. $N(\frac{2}{3},\frac{13}{4})$

解：$\frac{1}{2}X+\frac{1}{3}Y\sim N(\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{3}\times(-1),\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 3^2)=N(\frac{2}{3},\frac{13}{4})$

(6) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 a,b 分别为__________. (0.4, 0.1)

解：因为 $\sum_{i,j}p_{ij}=1$，则 $a+b+0.5=1$，故 $a+b=0.5$， (1)

又 $P\{X=0\}=a+0.4$， (2)

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b$ (3)

又事件 $\{X=0\}$ 与事件 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，且由(1)，(2)，(3)得

$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}=(a+0.4)(a+b)=0.5(a+0.4)$， (4)

$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a$， (5)

故由(4)，(5)，有 $a=0.5(a+0.4)$，解之得， $a=0.4$，$b=0.1$.

2. 选择题

(1) 设 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则 (B)

(A) $P\{X+Y\le 0\}=0.5$ (B) $P\{X+Y\le 1\}=0.5$

(C) $P\{X-Y\le 0\}=0.5$ (D) $P\{X-Y\le 1\}=0.5$

分析：因为 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则 $X+Y\sim N(0+1,1+1)=N(1,2)$，

$X-Y\sim N(0-1,1+1)=N(-1,2)$；显然选项 B 正确.

（2）设随机变量 X,Y 相互独立，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别表示 X 和 Y 的密度函数，则在 $Y=y$ 的条件下，X 的条件密度 $f(x|y)$ 为（A ）.

(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$ (C) $f_X(x)\cdot f_Y(y)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

分析:显然选项 A 正确,略.

(3) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率函数分别为

X	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Y	-1	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则（C ）正确.

（A） $X=Y$ （B） $P\{X=Y\}=0$

（C） $P\{X=Y\}=\dfrac{1}{2}$ （D） $P\{X=Y\}=1$

分析: 因为 X,Y 相互独立，则

$$P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$$

$$=P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

（4）设随机变量 X 与 Y 相互独立且具有相同的概率函数. 已知

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

则随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的概率函数为（B ）.

（A）

Z	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

(B)

Z	0	1
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{8}{9}$

(C)

Z	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

(D)

Z	1
P	1

分析：因为 $Z=\max(X,Y)$，由 X 与 Y 的取值知，Z =0, 1；且由 X,Y 相互独立，则

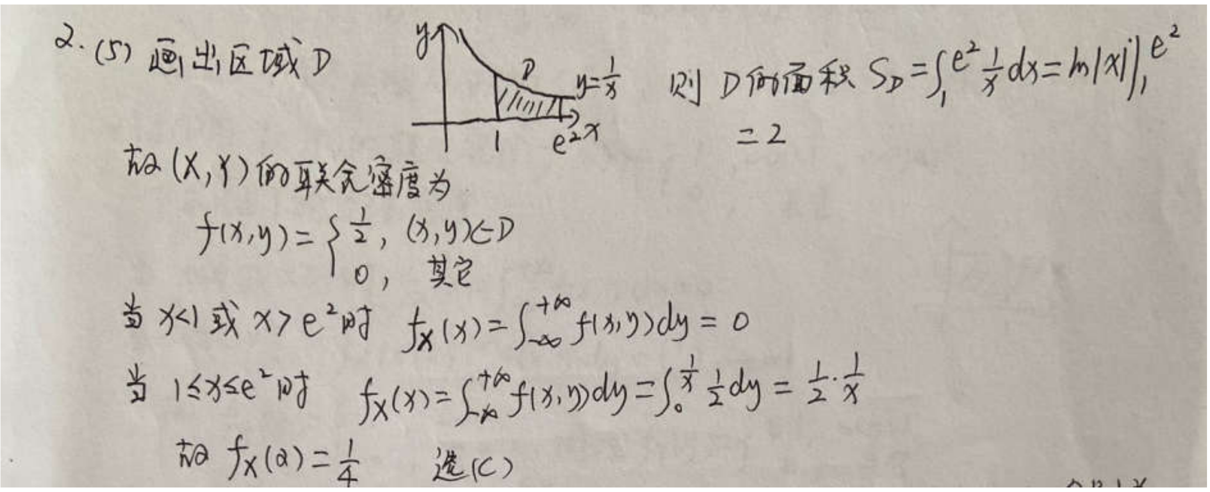
$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$；故选项 B 正确.

(5) 设平面区域 D 由曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 及直线 $y=0$， $x=1$， $x=e^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘密度在 $x=2$ 处的值为（C ）.

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{4}$　　(D) $\dfrac{1}{5}$

分析：见下面图片.


2.(5) 画出区域 D

则 D 的面积 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln|x|\Big|_1^{e^2}$
$=2$

故 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其它\end{cases}$$

当 $x<1$ 或 $x>e^2$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

当 $1\le x\le e^2$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$

故 $f_X(2)=\frac{1}{4}$　选(C)

（6）下列命题不正确的是（A ）

（A）两个服从指数分布的相互独立的随机变量之和仍服从指数分布；

（B）两个服从正态分布的相互独立的随机变量之和仍服从正态分布；

（C）二维正态分布的两个边缘分布均为一维正态分布；

（D）若 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,0<y<1\}$ 上服从均匀分布，则 X 与 Y 相互独立.

分析：见下面图片.

(6) (A) 设X与Y均服从参数为λ的指数分布，则X与Y的密度函数分别为

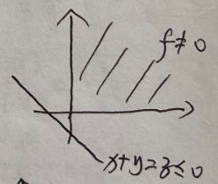
$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$

又X与Y相互独立，则其联合密度为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

$$=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x>0,y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$$

令 $Z=X+Y$，下求Z的分布函数 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)$

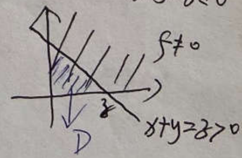
$$=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$



1° 当 $z\le 0$ 时，$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint_{x+y\le z} 0dxdy=0$

2° 当 $z>0$ 时

$$F_Z(z)=\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=\iint_D \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy$$



$$=\int_0^z dx\int_0^{z-x}\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dy$$

$$=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda x}dx\int_0^{z-x}e^{-\lambda y}dy=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda x}\cdot\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda y}\Big|_0^{z-x}\right)dx$$

$$=\lambda^2\int_0^z e^{-\lambda x}\frac{1}{\lambda}\left(1-e^{-\lambda(z-x)}\right)dx=1-e^{-\lambda z}-\lambda z e^{-\lambda z}$$

故当 $z>0$ 时，Z的密度函数 $f_Z(z)=F_Z'(z)=(1-e^{-\lambda z}-\lambda z e^{-\lambda z})'$

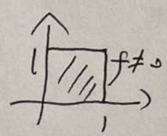
$$=\lambda^2 z e^{-\lambda z}$$

故 $f_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z>0\\ 0, & z<0\end{cases}$ 不是指数分布的密度函数.

故 $Z=X+Y$ 不再服从指数分布，(A)不对，(B),(C)易知正确.

对于(D)：(X,Y)的联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

下求X与Y的边缘密度



当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

当 $0<x<1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^1 1\cdot dy=1$

故 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，同理 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

故 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$, $\forall (x,y)\in R^2$，故X与Y独立，(D)也对

第 3-11 题：见下面图片.

3. (1) 由联合分布可知 $P(X=1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{6}=\frac{7}{18}$

故 $P(Y=0|X=1)=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X=1)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{7}{18}}=\frac{4}{7}$, $P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{18}}=\frac{3}{7}$

$P(Y=2|X=1)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(X=1)}=0$ 则

Y	0	1	2
$P(Y\|X=1)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	0

(2) 同(1)略

(3) $P(X+Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

故 $P(X=0|X+Y=1)=\frac{P(X=0,X+Y=1)}{P(X+Y=1)}=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X+Y=1)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$

$P(X=1|X+Y=1)=\frac{P(X=1,X+Y=1)}{P(X+Y=1)}=\frac{P(X=1,Y=0)}{P(X+Y=1)}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{9}}=\frac{2}{5}$

$P(X=2|X+Y=1)=\frac{P(X=2,X+Y=1)}{P(X+Y=1)}=\frac{0}{\frac{5}{9}}=0$ → 不可能事件

故

X	0	1	2
$P(X\|X+Y=1)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0

→ 可不写出来.

(4) $Z=X+Y=0,1,2,3,4$

$P(Z=0)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{6}$, $P(Z=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=\frac{5}{9}$

$P(Z=2)=P(X=0,Y=2)+P(X=2,Y=0)+P(X=1,Y=1)=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$

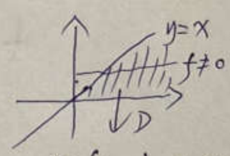
$P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=0+0=0$, $P(Z=4)=P(X=2,Y=2)=0$.

故 $Z=X+Y$ 的概率分布为

Z	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{18}$	0	0

4. 由题意知 $f(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$，又 $f_X(x)=\begin{cases}\lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

则 $f(x,y)=f_X(x)f(y|x)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda x}, & x>0,\ 0\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$



$D_y=\{(x,y)\mid 0\le y<+\infty,\ y\le x<+\infty\}$

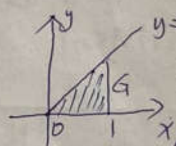
当 $y<0$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0$

当 $y\ge 0$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^{+\infty}\lambda^2 e^{-\lambda x}dx$

$=\lambda^2\cdot\frac{1}{-\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_y^{+\infty}=\lambda e^{-\lambda y}$

故 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & y\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$

5. 画出区域 G，$S_G=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$



故 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\\ 0, & 其它\end{cases}$

$D_x=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

$D_y=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ y\le x\le 1\}$

(1) 要判断 X 与 Y 是否独立，先求 X 与 Y 的边缘密度 $f_X(x)$ 与 $f_Y(y)$

当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=0$

上下限与此一致.

当 $0\le x\le 1$ 时 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 2dy=2x$

故 $f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

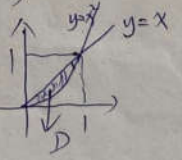
上下限与此一致.

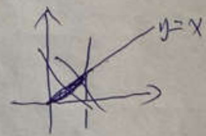
同样，当 $y<0$ 或 $y>1$ 时 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=0$

当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 2dx=2(1-y)$

故 $f_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & 0\le y\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$，因此 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立

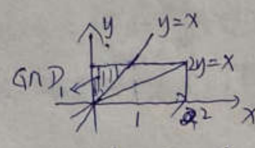
(2) $P(Y>X^2)=\iint\limits_{y>x^2}f(x,y)dxdy$

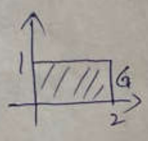




$=\iint\limits_D 2dxdy=\int_0^1 dx\int_{x^2}^x 2dy$

$=\int_0^1 2(x-x^2)dx=2\cdot\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}$





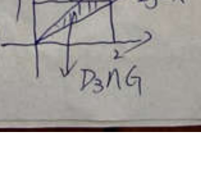
6. ~~$P(U=0,V=0)=P(X\le Y,\ X\le 2Y)$~~

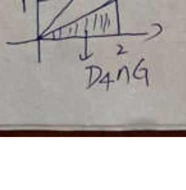
令 $D_1=\{(x,y)\mid x\le y,\ x\le 2y\}$

$D_2=\{(x,y)\mid x\le y,\ x>2y\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x>y,\ x\le 2y\}$，$D_4=\{(x,y)\mid x>y,\ x>2y\}$.

显然 $D_2\cap G=\varphi$(空集)，$D_3\cap G$ 如(左)图

$D_4\cap G$ 如右图





第4页

故 $P(U=0,V=0)=P(X\le Y,\ X\le 2Y)=\frac{S(D_1\cap G)}{S(G)}=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1\times2}=\frac{1}{4}$

$P(U=0,V=1)=P(X\le Y,\ X>2Y)=\frac{S(D_2\cap G)}{S(G)}=\frac{0}{1\times2}=0$

$P(U=1,V=0)=P(X>Y,\ X\le 2Y)=\frac{S(D_3\cap G)}{S(G)}=\frac{\frac{1}{2}\times1\times1}{1\times2}=\frac{1}{4}$

$P(U=1,V=1)=P(X>Y,\ X>2Y)=\frac{S(D_4\cap G)}{S(G)}=\frac{\frac{1}{2}\times2\times1}{1\times2}=\frac{1}{2}$

故(U,V)的联合概率分布为

U \ V	0	1
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

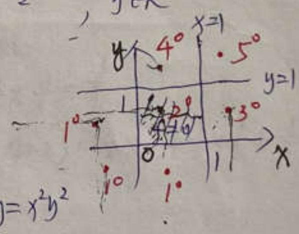
7. 由(X_1,X_2)的密度函数$f(x_1,x_2)$可知$(X_1,X_2)\sim N(4,2,3,1,0)$

又$\rho=0$ 故X_1与X_2相互独立，且$X_1\sim N(4,3)$，$X_2\sim N(2,1)$

又$\begin{cases}X_1=X+Y\\X_2=X-Y\end{cases}$ 得 $\begin{cases}X=\frac{1}{2}(X_1+X_2)\\Y=\frac{1}{2}(X_1-X_2)\end{cases}$ 由P_{112},(3.3.10)式知 $X\sim N(3,1)$，$Y\sim N(1,1)$

故X与Y的密度函数分别为：

$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2}},\ x\in R,\quad f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-1)^2}{2}},\ y\in R$



8. (1) $F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dy$

1° 当$x<0$或$y<0$时 $f(x,y)=0$，则$F(x,y)=0$

2° 当$0\le x\le1$，$0\le y\le1$时，$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^y 4xydy=x^2y^2$

3° 当$x>1$，$0\le y\le1$时，$F(x,y)=\int_0^1 dx\int_0^y 4xydy=y^2$

4° 当$0\le x\le1$，$y>1$时，$F(x,y)=\int_0^x dx\int_0^1 4xydy=x^2$

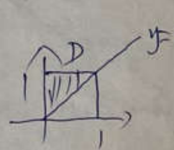
5° 当$x>1$，$y>1$时，$F(x,y)=\int_0^1 dx\int_0^1 4xydy=1$

故 $F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\x^2y^2, & 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\\y^2, & x>1,\ 0\le y\le1\\x^2, & 0\le x\le1,\ y>1\\1, & x>1,\ y>1\end{cases}$

(2) $P(0\le X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}\le Y<1)=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{4}}^1 f(x,y)dy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_{\frac{1}{4}}^1 4xydy=\frac{15}{64}$

或 $P(0\le X<\frac{1}{2},\frac{1}{4}\le Y<1)=F(\frac{1}{2},1)-F(0,1)-F(\frac{1}{2},\frac{1}{4})+F(0,\frac{1}{4})$

$=\frac{1}{4}-0-\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}+0=\frac{15}{64}$



(3) $P(X<Y)=\iint_{x<y}f(x,y)dxdy=\iint_D 4xydxdy=\int_0^1dx\int_x^1 4xydy=\frac{1}{2}$

第5页

9. 因为 $X\sim B(n,p)$，$Y\sim B(m,p)$ 则 $X+Y=0,1,2,\cdots,m+n$

又 X 与 Y 相互独立，则

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}C_n^i p^i(1-p)^{n-i}C_m^{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}p^k(1-p)^{m+n-k}$$

$=C_{m+n}^k p^k(1-p)^{m+n-k}$，这里 $\sum_{i=0}^{k}C_n^iC_m^{k-i}=C_{m+n}^k$，故 $X+Y\sim B(m+n,p)$

10. (1) 由题意知 $\xi=1,2,3$；$\eta=1,2,3$. 又 $X=\max\{\xi,\eta\}$

故 $X=1,2,3$ 且

$P(X=1)=P(\xi=1,\eta=1)\overset{\text{因为}\xi\text{与}\eta\text{独立}}{=}P(\xi=1)P(\eta=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P(X=2)=P(\xi=1,\eta=2)+P(\xi=2,\eta=1)+P(\xi=2,\eta=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$P(X=3)=1-P(X=1)-P(X=2)=1-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

故 X 的概率函数为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$

同样，因为 $Y=\min(\xi,\eta)$ 故 $Y=1,2,3$，且

$P(Y=3)=P(\xi=3,\eta=3)=P(\xi=3)\cdot P(\eta=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

$P(Y=2)=P(\xi=2,\eta=3)+P(\xi=2,\eta=2)+P(\xi=3,\eta=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$P(Y=1)=1-P(Y=2)-P(Y=3)=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

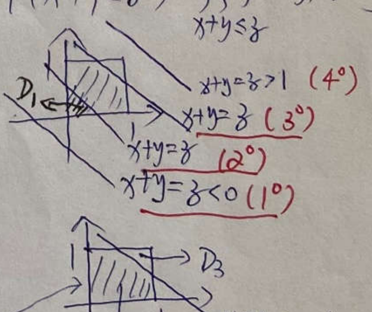
故 Y 的概率函数为

Y	1	2	3
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

(2) $P(\xi=\eta)=P(\xi=1,\eta=1)+P(\xi=2,\eta=2)+P(\xi=3,\eta=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

11. (1) 因为 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合密度 $f(x,y)=\begin{cases}2y, & 0\le x\le1,\ 0\le y\le1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) 利用分布函数法，先求分布函数 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)\,dxdy$



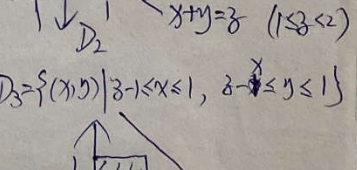
1° 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)\,dxdy=0$

2° 当 $0\le z<1$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_1}2y\,dxdy=\int_0^z dx\int_0^{z-x}2y\,dy$

$$=\int_0^z(z-x)^2dx=\frac{z^3}{3}$$

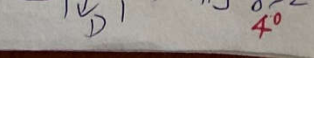
3° 当 $1\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\iint\limits_{D_2}2y\,dxdy=1-\iint\limits_{D_3}2y\,dxdy$

$$=1-\int_{z-1}^{1}dx\int_{z-x}^{1}2y\,dy=\frac{-z^3+3z^2-1}{3}$$



$D_3=\{(x,y)\mid z-1<x\le1,\ z-x\le y\le1\}$

4° 当 $z\ge2$ 时 $F_Z(z)=\iint\limits_{D}2y\,dxdy=1$



故 $Z=X+Y$ 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z^3}{3}, & 0\le z<1\\ \frac{-z^3+3z^2-1}{3}, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

故 Z 的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}z^2, & 0\le z<1\\ -z^2+2z, & 1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$