习题 1-2

3. 10 把钥匙中有 3 把能打开门，今任取两把，求能打开门的概率.

解：能打开门包含两种情况：取得的两把钥匙中两把都能打开门或者一把打开门，一把打不开门。设 A 表示“能打开门”，有利于 A 的基本事件数为 $C_3^2+C_3^1C_7^1$（C_3^2 是指从 3 把能打开的钥匙中任取 2 把，有 C_3^2 中取法；$C_3^1C_7^1$ 是指从 3 把能打开的钥匙中任取 1 把，从 7 把不能打开的钥匙中任取 1 把，有 $C_3^1C_7^1$ 中取法，然后利用加法原理求和)，基本事件总数为 C_{10}^2，则

注：做题时不需要步骤这么详细。括号中均为解释，下同。

$$P(A)=\frac{C_7^1C_3^1+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}\approx 0.533\cdot$$

4. 一个五位数字的号码锁，每位上都可能有 0，1，…，9 十个数码，若不知道该锁的号码，问开一次锁就能将该锁打开的概率有多大?

解 设 A 表示“能打开门”，则基本事件总数为 10^5（因是五位数字，第一位数字是从 0-9 中任取一个，由 10 中取法，第二位数字也是从 0-9 中任取一个，由 10 中取法，依此类推，基本事件总数为 5 个 10 相乘，即 10^5），则

$$P(A)=\frac{1}{10^5}\cdot$$

5. 设在 10 张卡片上分别写有字母 A，C，I，I，S，S，S，T，T，T. 将 10 张卡片随意排成一列，求恰好排成英文单词“STATISTICS”(统计学)的概率.

解 设 A 表示“恰好排成英文单词‘STATISTICS’”，则基本事件总数为 10 张卡片的全排列 10!，有利于 A 的基本事件数为 $C_3^1C_3^1C_1^1C_2^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1C_1^1$（单词“STATISTICS”从左往右排，第一个是字母是 S，则从 3 张 S 中任取 1 张有 C_3^1 种，第二个是字母是 T，则从 3 张 T 中任取 1 张有 C_3^1 种，第三个是字母是 A，则从 1 张 A 中任取 1 张有 C_1^1 种，第四个是字母是 T，则从剩下的 2 张 T 中任取 1 张有 C_2^1 种，依此类推）

$$P(A)=\frac{C_3^1C_3^1C_1^1C_2^1C_2^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1C_1^1}{10!}=\frac{1}{50400}$$；或者

$$P(A)=\frac{P_3^3P_3^3P_2^2}{P_{10}^{10}}=\frac{3!\times 3!\times 2!}{10!}=\frac{1}{50400}$$

注:这里 $C_3^1C_2^1C_1^1=3\times 2\times 1=3!$

6. N 件产品中有 N_i 件正品，从中任取 n 件($1\le n\le N_i\le N$)，求其中有 $k(k\le N)$件正品的概率.

解 设 A 表示“n 件产品中有 k 件正品”，则

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^k C_{N-N_1}^{n-k}}{C_N^n}\cdot$$

7. 一个袋内有 5 个红球、3 个自球、2 个黑球，计算任取 3 个球恰为一红、一自、一黑的概率.

解 设 A 表示“取出的 3 个球恰为一红、一自、一黑”，则

$$P(A)=\frac{C_5^1C_3^1C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{1}{4}=0.25\cdot$$

8. 货架上有外观相同的商品 15 件，其中 12 件来自产地甲，3 件来自产地乙. 现从 15 件商品中随机地抽取 2 件，求这两件商品来自同一产地的概率.

解 设 A 表示“两件商品来自同一产地”，A 表示“两件商品都来自甲地（取法有 C_{12}^2 种）”或者“两件商品都来自乙地（取法有 C_3^2 种）”. 则

$$P(A)=\frac{C_{12}^2+C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{23}{35}\approx 0.657\cdot$$

9. 现有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任一间去住（$n\le N$），求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 个房间里各住一个人；

(2) 恰有 n 个房间，其中各住一人；

(3) 某一指定房间恰有 m（$m\le n$）个人住.

解 基本事件总数为 N^n（总共 N 个房间，第 1 个人可以住 N 个房间中的任意 1 间，有 N 种住法，第 2 个人可以住 N 个房间中的任意 1 间，有 N 种住法，……第 n 个人可以住 N 个房间中的任意 1 间，有 N 种住法，由乘法原理有 N^n 种情况）

(1) 设 A_1 表示“指定的 n 个房间里各住一个人”，则有利于 A_1 的基本事件数为 $n!$，则

$$P(A_1)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 设 A_2 表示“恰有 n 个房间，其中各住一人”，则有利于 A_2 的基本事件数为 $C_N^n n!=P_N^n$（先从 N 个房间中选取 n 个房间有 C_N^n 种取法，n 个人住到选取的 n 个房间中有 n!种住法，因此有利于 A_2 的基本事件数为 $C_N^n n!=P_N^n$。或者直接用排列，即从 N 个房间中选取 n 个房间 n 个人住进去有 P_N^n 种方法），则

$$P(A_2)=\frac{C_N^n n!}{N^n}=\frac{P_N^n}{N^n}.$$

(3) 设 A_3 表示“某一指定房间恰有 m（$m\le n$）个人住”，则有利于 A_3 的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$（先从 n 个人中选取 m 个人住到指定的房间，有 C_n^m 种取法，剩下的 n-m 个人

住到剩下的 N-1 个房间，有 $(N-1)^{n-m}$ 种住法，因此有利于 A_3 的基本事件数为 $C_n^m(N-1)^{n-m}$ ），则

$$P(A_3)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

10. 电话号码由 0，1，2，…，9 中的七个数字组成，若首位数字不能为 0，求电话号码是由完全不相同数字组成的概率.

解 设 A 表示"电话号码是由完全不相同数字组成"，则基本事件总数为 $C_9^1\times10^6$（因电话号码首位数字不能为 0，则首位数字只能从 1-9 这 9 个数字中任取一个，有 C_9^1 种取法，第 2 位可以从 0-9 这 10 个数字中任取一个，有 10 种取法，第 3 位可以从 0-9 这 10 个数字中任取一个，有 10 种取法，……，第 7 位可以从 0-9 这 10 个数字中任取一个，有 10 种取法，利用乘法原理，基本事件总数为 $C_9^1\times10^6$ ）；有利于 A 的基本事件数为 $C_9^1\times P_9^6$（因电话号码首位数字不能为 0，则首位数字只能从 1-9 这 9 个数字中任取一个，有 C_9^1 种取法，剩下的 6 个不同的数字从取得首位后剩余的 9 位数字中取 6 位进行不同顺序排列，有 P_9^6 种取法，利用乘法原理，有利于 A 的基本事件数为 $C_9^1\times P_9^6$ ），则

$$P(A)=\frac{C_9^1\times P_9^6}{C_9^1\times10^6}=\frac{60480}{10^6}=0.06048\cdot$$

或者 $P(A)=\dfrac{C_9^1\times C_9^6 6!}{C_9^1\times10^6}=\dfrac{60480}{10^6}=0.06048\cdot$

11. 把 10 本书任意地放在书架上，求其中把指定的 3 本书放在一起的概率.

解 设 A 表示"把指定的 3 本书放在一起"，则基本事件总数为 $10!$，有利于 A 的基本事件数为 $3!\times8!$（3 本书已指定，但这 3 本书可以随意排列，有 3!种排法，把指定的 3 本书绑定到一起作为一个整体，和剩下的 7 本书随意排，相当于 8 本书进行排列，有 8！种排法，利用乘法原理，有利于 A 的基本事件数为 $3!\times8!$）. 故

$$P(A)=\frac{3!\times8!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

12. 10 个人随机地排成一列，问在甲、乙两人之间恰好有 3 个人的概率是多大？

解 设 A 表示"甲、乙两人之间恰好有 3 个人"，则基本事件总数为 $10!$，有利于 A 的基本事件数为 $P_8^3\cdot2!\cdot6!$（先排甲、乙两人之间的 3 个人，去掉甲乙两人，从剩下的 8 人中取 3 人排列，有 P_8^3 种排法（或先取人 C_8^3，再排 3!，即 $C_8^3 3!=P_8^3$ ），再甲、乙两人随意排，有 2！种排法，最后把甲乙和他们之间的 3 人共 5 人绑定到一起作为一个整体，和剩下的 5 个人随意排，相当于 6 个人进行排列，有 6！种排法，利用乘法原理，有利于 A 的基本事件数为 $P_8^3\cdot2!\cdot6!$ ）. 故

$P(A)=\dfrac{P_8^3\cdot 2!\cdot 6!}{10!}=\dfrac{2}{15}\approx 0.133$.

或者 $P(A)=\dfrac{C_8^3 3!\cdot 2!\cdot 6!}{10!}=\dfrac{2}{15}\approx 0.133$

13. 设一公交车站每隔 5 分钟就有公交车到站，乘客随机地来到此车站等车，求某乘客候车时间不超过 2 分钟的概率.

解 设 A 表示“乘客候车时间不超过 2 分钟”，由几何概型 $P(A)=\dfrac{2}{5}=0.4$.

14. 甲、乙两艘轮船向一个不可能同时停泊两艘轮船的码头停泊，它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的. 如果甲、乙两船的停泊时间都是一小时，求它们中的任何一艘都不需等候码头空出的概率.

解 设 x, y 为甲、乙到达码头的时刻，则 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 24,\quad 0\le y\le 24\}$，设 A 表示“不需等候码头空出”，则 $\Omega=\{(x,y)\,|\,|x-y|>1\}$，则

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\times 23\times 23\times 2}{24\times 24}=0.918.$$

15. 有两部电话，在一小时内第一部电话占线的概率为 0.6，第二部电话占线的概率为 0.7，两部电话都不占线的概率为 0.2，求在一小时内至少有一部电话不占线的概率.

解 设 A 表示“第一部电话不占线”，设 B 表示“第二部电话不占线”，由已知 $P(A)=1-0.6=0.4$，$P(B)=1-0.7=0.3$，$P(AB)=0.2$，由概率的加法公式为，从而所求概率

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.4+0.3-0.2=0.5.$$

16. 50 件产品中有 4 件废品、46 件正品，现从中任取 3 件，求有废品的概率.

解 设 A 表示“取出的 3 件产品中有废品”，则 $\overline{A}$ 表示“取出的 3 件产品中没有废品”

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{46}^3}{C_{50}^3}\approx 0.2255.$$

17. 若事件 A 与 B 互斥，且 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，计算 $P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})$.

解 由于 A 与 B 互斥，所以 $P(AB)=0$，从而

$$P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=P(\overline{\overline{A+B}})=P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.5-0=0.8.$$

或者

由于 A 与 B 互斥，所以

$$P(\overline{\overline{A}\,\overline{B}})=P(\overline{\overline{A+B}})=P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.5=0.8.$$

18. 设 A，B 表示两事件，且 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$，试求 $P(B-A)$ 与 $P(A-B)$.

解 由恒等式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.5+0.7-0.8=0.4$，从而
$P(B-A)=P(B)-P(AB)=0.7-0.4=0.3$，
$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.4=0.1$.

19. 已知$P(A)=0.6$，$P(AB)=0.1$，$P(\overline{A}\overline{B})=0.15$，计算(1) $P(A\overline{B})$；(2) $P(\overline{A}B)$；(3) $P(A+B)$.

解 (1) $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5$；

(3) 由$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=0.15$，得$P(A+B)==0.85$；

(2) 由恒等式$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，得$P(B)=0.35$，从而

$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=0.25$.

20. 设$P(A)=\ln a$，$P(B)=0.2$，$A\supset B$，求a的取值范围.

解 由$0\le P(A)=\ln a\le 1$，解得$0<a\le e$；又$A\supset B$，有$P(A)\ge P(B)$，即$\ln a\ge 0.2$，解得$a\ge e^{0.2}$；综上所述，$e^{0.2}\le a\le e$.

21. 已知$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{4}$，$P(C)=\dfrac{1}{2}$，$P(AB)=\dfrac{1}{8}$，$P(CA)=P(BC)=0$，试求 A，B，C 中至少有一个发生的概率.

解 由$ABC\subset BC$，有$0\le P(ABC)\le P(BC)=0$，即$P(ABC)=0$；根据一般加法公式

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)=\frac{7}{8}.$$

22. 某班有 10 名同学是同一年出生(一年按 365 天计算)，试求下列事件的概率:

(1) 至少有两人是同一天出生;

(2) 至少有一人是 10 月 1 日出生.

解 设 A 表示“至少两人同一天生”，B 表示“至少一人 10 月 1 日生”，则

(1) $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{C_{365}^{10}10!}{365^{10}}=1-\dfrac{P_{365}^{10}}{365^{10}}$；

(2) $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{364^{10}}{365^{10}}$.