习题 3-3

1. 设离散型随机变量 X 与 Y 的概率函数分别是

X	0	1	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

且 X 与 Y 相互独立. 求 $X+Y$ 的概率函数.

解 $X+Y$ 的可能取值为 0，1，2，3，4. 其概率函数为

$X+Y$	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$

2. 设随机变量 X 与 Y 的联合分布为

X \ Y	−3	−1	0	2
1	0.05	0.1	0.05	0.2
2	0.15	0.1	0.25	0.1

求（1）$Z=\sin(\pi X)+\cos(\pi Y)$；（2）$Z=XY$；（3）$Z=\max\{X,Y\}$ 的概率分布.

解 （1）采用表上作业，第一步求出每一对 (x,y) 对应的函数值 z，

X \ Y	−3	−1	0	2
1	0.05 −1	0.1 −1	0.05 1	0.2 1
2	0.15 −1	0.1 −1	0.25 1	0.1 1

第二步将函数值相同的项合并，即可求得随机变量函数 Z 的概率分布为

Z	-1	1
P	0.4	0.6

(2) 同理可求得 $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-6	-3	-2	-1	0	2	4
P	0.15	0.05	0.1	0.1	0.3	0.2	0.1

（3）$Z=\max\{X,Y\}$ 的概率分布为

Z	2	3
P	0.2	0.8

第 3-5 题见后面两页的图片。

P113 习题3-3

3. 因为X与Y都服从$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$上的均匀分布，则

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\qquad f_Y(y)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

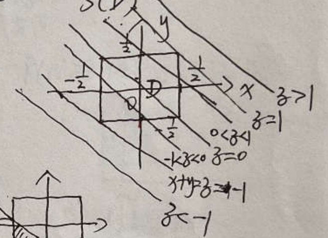
又X与Y相互独立，则 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1, & -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

显然(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)\mid -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\le y\le\frac{1}{2}\}$上的均匀分布

下面用分布函数法求$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$，先求Z的分布函数$F_Z(z)$

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+Y\le z)=\iint\limits_{x+y\le z}f(x,y)dxdy=\frac{S(G\cap D)}{S(D)},$$

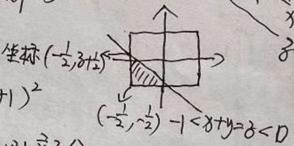
其中G为区域 $G=\{(x,y)\mid x+y\le z\}$



1° 当$z<-1$时，$S(G\cap D)=0$，故$F_Z(z)=0$

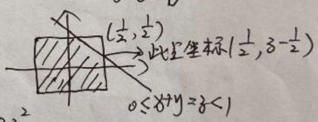
2° 当$-1\le z<0$时，$G\cap D$为如图阴影部分

$$S(G\cap D)=\frac{1}{2}\times(z+1)^2$$



故 $F_Z(z)=\frac{S(G\cap D)}{S(D)}=\frac{\frac{1}{2}(z+1)^2}{1\times1}=\frac{1}{2}(z+1)^2$

3° 当$0\le z<1$时，$G\cap D$为如右下图阴影部分



则 $S(G\cap D)=1-\frac{1}{2}(1-z)^2$

故 $F_Z(z)=\frac{S(G\cap D)}{S(D)}=\frac{1-\frac{1}{2}(1-z)^2}{1\times1}=1-\frac{1}{2}(1-z)^2$

4° 当$z\ge1$时，$S(G\cap D)=S(D)=1$

故 $F_Z(z)=1$

故Z的分布函数 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-1\\ \frac{1}{2}(z+1)^2, & -1\le z<0\\ 1-\frac{1}{2}(1-z)^2, & 0\le z<1\\ 1, & z\ge1\end{cases}$

从而Z的密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}(z+1), & -1\le z<0\\ 1-z, & 0\le z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

(5) 第5页

P113. 习题3-3.

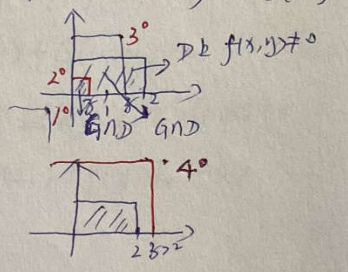
4. (1) $M=\max(X,Y)$ 的分布函数为 $F_M(z)=P(M\le z)=P(X\le z, Y\le z)=\dfrac{S(G\cap D)}{S(D)}$

1° 当 $z<0$ 时 $F_M(z)=0$, $S(D)=2\times1=2$

2° 当 $0\le z<1$ 时, $F_M(z)=\dfrac{z^2}{2}$

3° 当 $1\le z<2$ 时 $F_M(z)=\dfrac{z\times1}{2}=\dfrac{z}{2}$

4° 当 $z\ge2$ $F_M(z)=\dfrac{S(G\cap D)}{S(D)}=\dfrac{S(D)}{S(D)}=1$



故 $F_M(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{z^2}{2}, & 0\le z<1\\ \frac{z}{2}, & 1\le z<2\\ 1 & z\ge2\end{cases}$ 故 $f_M(z)=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le z<2\\ 0, & 其它\end{cases}$

(2) $N=\min(X,Y)$ 的分布函数为 $F_N(z)=P(N\le z)=1-P(N>z)=1-P(X>z,Y>z)$

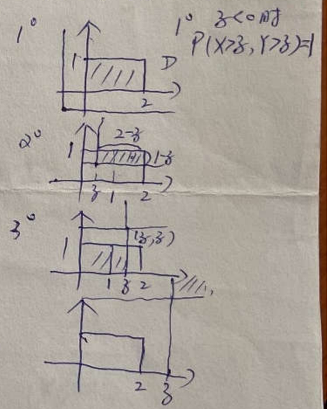
1° 当 $z<0$ 时, $F_N(z)=1-P(X>z,Y>z)=1-1=0$

2° 当 $0\le z<1$, $P(X>z,Y>z)=\dfrac{(2-z)(1-z)}{2}$

$F_N(z)=1-\dfrac{(2-z)(1-z)}{2}=\dfrac{3z-z^2}{2}$

3° 当 $1\le z<2$ 时, $P(X>z,Y>z)=0$, 故 $F_N(z)=1$

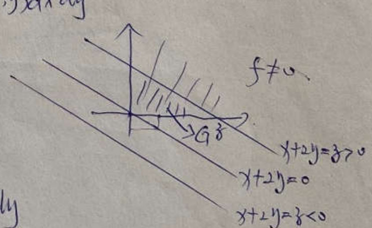
4° 当 $z\ge2$ 时. $P(X>z,Y>z)=0$ 故 $F_N(z)=1$



故 $F_N(z)=\begin{cases}0 & z<0\\ \frac{3z-z^2}{2}, & 0\le z<1\\ 1 & z\ge1\end{cases}$, 故 $f_N(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}-z, & 0\le z<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

5. Z的分布函数 $F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X+2Y\le z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy$

又 $f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)}, & x>0,\ y>0\\ 0, & 其它\end{cases}$



1° 当 $z\le0$ 时 $F_Z(z)=0$.

2° 当 $z>0$ 时, $F_Z(z)=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)dxdy=\iint\limits_G 2e^{-(x+2y)}dxdy$

$=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z 2e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}e^{-2y}dy=\int_0^z e^{-x}(1-e^{-z+x})dx$

$=\int_0^z e^{-x}dx-\int_0^z e^{-z}dx=1-e^{-z}-ze^{-z}$

故 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z}, & z>0\end{cases}$ 故 $f_Z(z)=\begin{cases}ze^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le0\end{cases}$

(6) 第6页