文档更新时间：2023.2.18 1:00，后续持续更新，完善模型，提供代码，后续更新地址 https://mbd.pub/o/bread/ZJWWkply

**问题A：受干旱影响的植物群落**

**背景介绍**

不同种类的植物以不同的方式对压力作出反应。例如，草场对干旱相当敏感。干旱发生的频率和严重程度各不相同。

许多观察表明，不同物种的数量对植物群落在连续几代人暴露于干旱周期时的适应性起作用。在一些只有一种植物的群落中，随后的几代人对干旱条件的适应性不如有四个或更多物种的群落中的单个植物。这些观察结果提出了许多问题。例如，一个植物群落从这种局部生物多样性中受益所需的最小物种数量是多少？随着物种数量的增加，这种现象是如何扩展的？这对一个植物群落的长期生存能力意味着什么？

**要求**

考虑到干旱适应性与植物群落中物种数量的关系，你的任务是探索并更好地理解这一现象。具体来说，你应该

**1.1 建立一个数学模型，预测一个植物群落在各种不规则的天气周期中如何随时间变化。包括本该降水充足的干旱时期。该模型应考虑到干旱周期中不同物种之间的相互作用。**

**看到群落一词，我们建立物种竞争模型，并加入环境因素（降水量）**

**首先简单起见，先建立2生物，无环境因素的竞争模型：**

研究在同一个自然环境中生存的两个种群之间的竞争关系。假设两个种群独自在这个自然环境中生存时数量演变都服从**Logistic规律**，又假设当它们相互竞争时都会减慢对方数量的增长，增长速度的减小都与它们数量的乘积成正比。按照这样的假设建立的常微分方程模型为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = r_1 x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{N_1}\right) - a_1 x_1 x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = r_2 x_2\left(1 - \dfrac{x_2}{N_2}\right) - a_2 x_1 x_2 \end{cases} \tag{1}$$

方程的另一种形式为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = r_1 x_1\left(1 - \dfrac{x_1}{N_1} - \alpha\dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = r_2 x_2\left(1 - \dfrac{x_2}{N_2} - \beta\dfrac{x_1}{N_1}\right) \end{cases} \tag{2}$$

其中 r 为增长率，N 为物种最大容量，

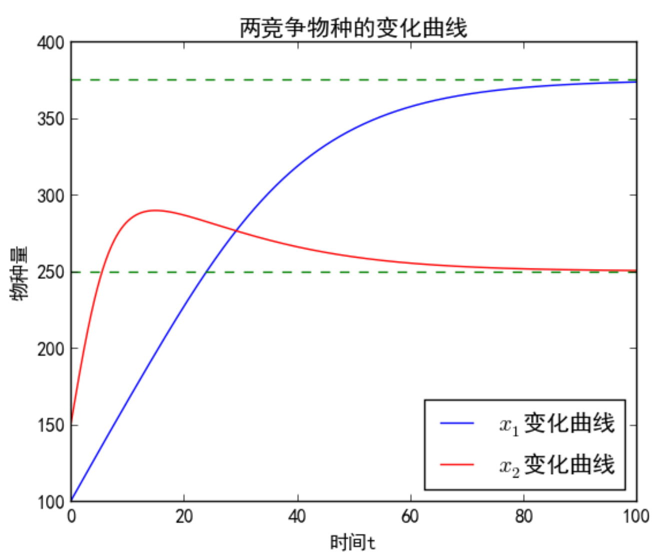
α：物种 2 对物种 1 的竞争系数，即每个 N2 个体所占用的空间相当于 α 个 N1 个体所占用空间。

β：物种 1 对物种 2 的竞争系数，即每个 N1 个体所占用的空间相当于 β 个 N2 个体所占用空间。

在分析的过程中，我们所采用的模型参数是

$$\begin{cases} r_1 = 0.1, \dfrac{1}{N_1} = 0.002, a_1 = 0.0001 \\ r_2 = 0.3, \dfrac{1}{N_2} = 0.003, a_2 = 0.0002 \\ x_1(0) = 100, x_2(0) = 150 \end{cases} \tag{3}$$

这些参数表明， $x_1$ 是一个增长相对缓慢的物种，但是种内竞争较小，而且不容易受到 $x_2$ 物种的影 响，因此，长远来看， $x_1$ 物种将在该自然环境中占优；相比之下， $x_2$ 物种的增长速度较快，但是种 内竞争较大，而且容易受到 $x_1$ 物种的影响，因此在长期的竞争中， $x_2$ 物种将处于稍弱的地位。下面 的数值求解结果支持了这一推测。




数值解表明，$x_2$ 物种开始增长较快，达到最大值后开始缓慢下降，最后稳定在 250；而$x_1$则保持相对较慢的增长速度，直到平衡点 375。

代码如下：

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
from scipy.optimize import leastsq
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei'] #这两句用来正常显示中文标签
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

t = np.arange(0,100,0.1)

def deriv(w,t,a,b,c,d,e,f):
    x,y = w
    return np.array([ a*(1-b*x)*x-c*y*x, d*(1-e*y)*y-f*x*y])

p=[0.1, 0.002, 0.0001, 0.3, 0.003, 0.0002, 100, 150]

a,b,c,d,e,f,x0,y0=p
yinit = np.array([x0,y0]) #  初值
yyy = odeint(deriv,yinit,t,args=(a,b,c,d,e,f))

plt.figure(figsize=(7,5))
plt.plot(t,yyy[:,0],"b-",label="$x_1$变化曲线")
plt.plot(t,yyy[:,1],"r-",label="$x_2$变化曲线")
plt.plot([0,100],[250,250],"g--")
plt.plot([0,100],[375,375],"g--")
plt.xlabel(u'时间t')
plt.ylabel(u'物种量')
plt.title(u'两竞争物种的变化曲线')
plt.legend(loc=4)
plt.show()
```

**现在将模型扩展一下，建立多物种竞争模型，也就是群落的竞争模型，**

将公式2扩展一下

$$\left\{\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i\left(1 - \frac{x_i}{N_i} - \sum \alpha_k^i \frac{x_k}{N_k}\right)\right. \tag{4}$$

其中$\boldsymbol{r_i}$为增长率，$\boldsymbol{N_i}$为物种最大容量，

$\alpha_k^i$:物种 k 对物种 i 的竞争系数，即每个 Nk 个体所占用的空间相当于$\alpha_k^i$个 Ni 个体所占用空间。

**然后我们再加入加入环境因素（降水量）的影响：**

我们知道，降水量（符号h表示降水量）应该主要影响的是生长率$r_i$，所以主要任务是建立以降水量h为自变量，生长率$r_i$为因变量的函数。

以降水量h为自变量，生长率$r_i$为因变量的函数可能是以下形式：

（1）生长率$r_i$与降水量h成正比：即

$$r_i(t) = k * h(t) \tag{5}$$

注意由于题目要求：**在各种不规则的天气周期中如何随时间变化**，包括本该降水充足的干旱时期。所以这里降水量h应该和时间有关，生长率也和时间有关。在求解模型的时候，由于题目没给降水量随时间的曲线，**需要我们自己生成一些降水量随时间的曲线数据，比如说前一半时间降水多，后一半时间降水少，或者前一半时间降水少，后一半时间降水少等等。**

（2）生长率$r_i$与降水量h成**logistic关系，这一关系的原因简单解释一下：降水量多的时候植物可能会淹死，因此生长率不可能无限增大，这一点需要写作时在假设一节详细解释原因！**

逻辑斯谛函数（英语：logistic function）是一种常见的S型函数，其函数图像称为逻辑斯谛曲线（英语：logistic curve）。简单的逻辑斯谛函数可用下式表示：

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x - x_0)}} \tag{6}$$

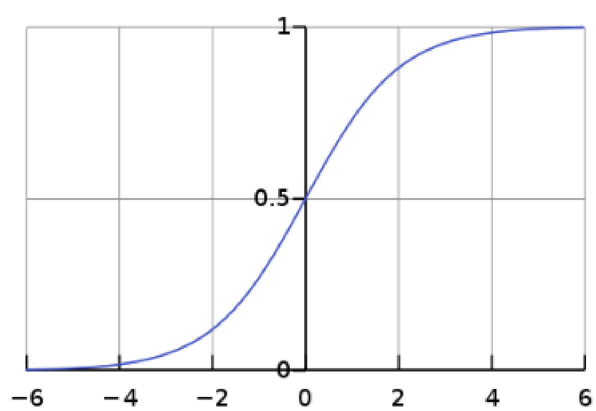
其中 ：

$x$_0 为 S 形曲线中点的 x 值；

L 为曲线的最大值

k 为逻辑斯谛增长率或曲线的陡度

标准逻辑斯谛函数，其中 $L = 1, k = 1, x_0 = 0$




降水量为0时，假设生长率也为0，构造一个逻辑斯谛函数并减去降水量为0时的数值，就得到了降水量为0时生长率也为0的改进逻辑斯谛函数；

$$r_i(t) = \frac{L_i}{1 + e^{-k_i * h(t)}} - \frac{L_i}{2} \tag{7}$$

其中$L_i$为物种i的最大生长率，$k_i$ 为逻辑斯谛增长率或曲线的陡度，h(t)为降水量。

将上式代入式(4)，并把$x_i$都写成t的函数：

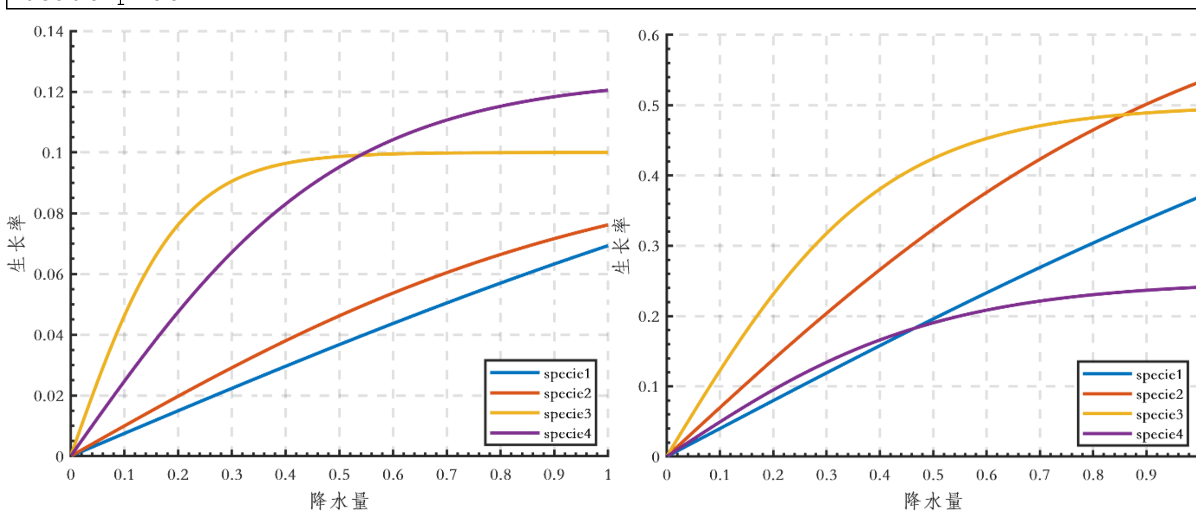
$$\left\{\frac{d\ x_i(t)}{dt}=\left(\frac{L_i}{1+e^{-k_i*h(t)}}-\frac{L_i}{2}\right)x_i(t)\left(1-\frac{x_i(t)}{N_i}-\sum_{k\neq i}\alpha^i_k\frac{x_k(t)}{N_k}\right)\right. \tag{8}$$

**然后我们就可以自行构造天气条件（降水量），假设物种数量（比如3种 or 4种），设置相关参数，求解微分方程模型，画出各物种的数量变化曲线。然后就能进行各种分析（语文建模）**

先来探究多物种情况下，生长率关于降水量的函数图像

多物种情况下，生长率关于降水量的函数图像的代码（不可直接运行，运行代码请打开problem1.m文件）

```
clc; clear; close all;
year=2;%模拟年数
T=360*year;%方便起见，一年设置为 360 天，一个季度 90 天
dt=1;%时间间隔：1 天
tlen=T/dt;
tspan = linspace(1, T, tlen);
n=4;%物种数量
%%

L=[0.3,0.2,0.2,0.25];%物种 i 的最大生长率
k=[1,2,10,4];%物种 i 的逻辑斯谛增长率
h=(1/tlen)*(1:tlen);%归一到 0-1 的降水量 h(t)
r=zeros(n,tlen);
for i=1:n
    r(i,:)=L(i)./(1+exp(-k(i)*h))-L(i)/2;%生长率
end
figure
plot(h,r),xlabel('降水量'),ylabel('生长率'),
legend('specie1','specie2','specie3','specie4','Location','best')
beautiplot
```




以上2幅图是不同的参数设置情况下的生长率随降水量变化的曲线，其中降水量已归一到0-1区间，大家可以自行调整参数绘图

**下面是微分方程代码求解思路：**

总结一下公式(8)，需要设置的变量有：

T：求解时间段0-T，求解离散时间间隔dt，求解点数T/dt

h(t)：降水量h(t)随在时间段0-T内的变化，1*(T/dt)的向量

n：物种数量n（n种物种），标量

$L_i$:物种i的最大生长率，对n种物种，是一个 1*n的向量

$k_i$：物种i的逻辑斯谛增长率或曲线的陡度，和物种i对干旱的适应性有关系，对n种物种，是一个1*n的向量

$\alpha_k^i$：物种 k 对物种 i 的竞争系数，对 n 种物种，是一个 n*n 的矩阵

$\boldsymbol{N_i}$：物种 i 的最大容量，对 n 种物种，是一个 1*n 的向量

用 matlab 函数描述此微分方程：

问题 1 的微分方程模型

```
function dx = problem1_fun(t,x,n,h,L,k,alpha,N)

%问题 1 模型
  dx = zeros(n,1);
  for i=1:n
      r_i=(L(i)/(1+exp(-k(i)*h(t)))-L(i)/2);
      tmp=0;
      for kk=1:n
          if kk~=i
          tmp=tmp+alpha(i,kk)*x(kk)/N(kk);
          end
      end
      tmp_i=1-x(i)/N(i)-tmp;

      dx(i)=r_i*x(i)*tmp_i;
  end

end
```

**求解微分方程：改进欧拉法**

欧拉方法：

Step1

利用差商$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$代替 $y'(x_n)$ 得

$y(x_{n+1})\approx f(x_n,y(x_n))\ (n=0,1,2,\cdots)$

step2:

用 $y_n$ 表示 $y(x_n)$ 的近似值，用 $y_{n+1}$ 表示$y(x_{n+1})$ 的近似值，变为:

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad (n=0,1,\ldots) \\ y(0)=y(a) \end{cases}$$

改进欧拉方法：

step1:

先用显式欧拉公式作预测，算出 $\overline{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

step2:

再将代入隐式梯形公式的右边做校正得到 $\overline{y}_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[f\left(x_n,y_n\right)+f\left(x_{n+1},\overline{y}_{n+1}\right)\right]$

为了方便编程计算，我们还可以将改进的欧拉公式写成：

$$y_p=y_n+hf(x_n,y_n)$$
$$y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p)$$
$$y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c)$$

改进欧拉法代码

```
function [T,X,dX] = ODE_ImprovedEuler( Hfun,t,h,x0 )
% [T,X,dX] = ODE_ImprovedEuler( Hfun,t,h,x0 ) 改进欧拉法求解常微分方程
% Hfun 为描述一阶微分方程导数的函数句柄，格式为 dX = Hfun( t,X )
% t 为时间节点，可为标量，时间范围为 T = 0:h:t
%            长 2 向量 ，时间范围为 T = t(1):h:t(2)
%            向量 ，时间范围为 T = t
% h 为时间步长，在 t 的前两种情况下，必须给出 h 具体值
% 直接给出时间节点 t 时，h 可用[]或任意值占位
% x0 为状态量初始值
% 算法：
%     Xp = X(k-1) + h*dX(k-1)
%     dXp = Hfun( T(k),Xp )
%     X(k) = X(k-1) + (h/2)*[dX(k-1)+dXp]

if nargin < 4
    error('初始值必须给出');
end

% 确定时间节点
n = length(t);
if n == 1
    T = 0:h:t;
elseif n == 2
    T = t(1):h:t(2);
else
    T = t;
end
T = T(:);     % 时间变为列向量

% 计算
N = length(T);
x0 = x0(:); x0 = x0';       % 初值变为行向量
m = length(x0);            % 状态量维数
X = zeros(N,m);            % 初始化状态量
dX = zeros(N,m);           % 状态导数
X(1,:) = x0;
```

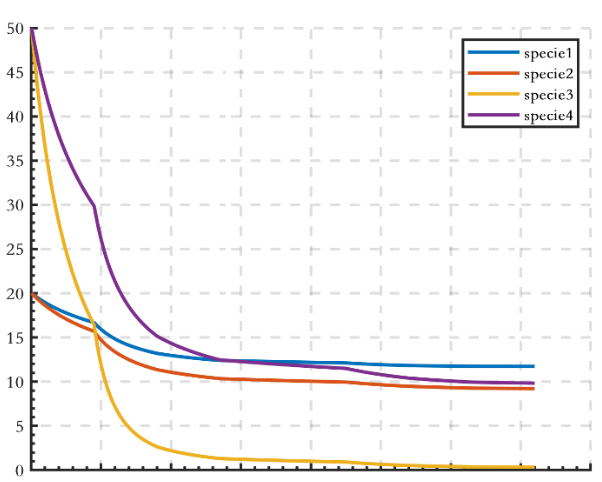
```
for k = 2:N
    dX(k-1,:) = Hfun( T(k-1),X(k-1,:) );
    h = T(k) - T(k-1);
    Xp = X(k-1,:) + h*dX(k-1,:);
    dXp = Hfun( T(k),Xp );
    X(k,:) = X(k-1,:) + (h/2)*(dX(k-1,:)+dXp');
end
dX(N,:) = Hfun( T(N),X(N,:) );

if nargout == 0
    plot(T,X)
end
```

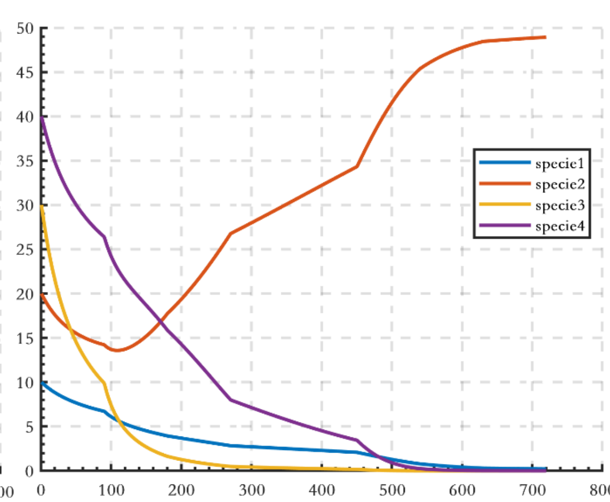
主函数代码：

主函数代码（请勿直接复制运行，请运行 problem1.m 文件）

```
clc; clear; close all;
year=2;%模拟年数
T=360*year;%方便起见，一年设置为 360 天，一个季度 90 天
dt=1;%时间间隔: 1 天
tlen=T/dt;
tspan = linspace(1, T, tlen);
n=4;%物种数量
%%

L=[0.3,0.2,0.2,0.25];%物种 i 的最大生长率
k=[1,2,10,4];%物种 i 的逻辑斯谛增长率
h=(1/tlen)*(1:tlen);%归一到 0-1 的降水量 h(t)
r=zeros(n,tlen);
for i=1:n
    r(i,:)=L(i)./(1+exp(-k(i)*h))-L(i)/2;%生长率
end
figure
plot(h,r),xlabel('降水量'),ylabel('生长率'),
legend('specie1','specie2','specie3','specie4','Location','best')
beautiplot
exportgraphics(gcf,'img/多物种情况下生长率关于降水量的函数图像 1.png','Resolution',300)



h=[0.01*ones(1,90),0.04*ones(1,90),0.03*ones(1,90),0.01*ones(1,90)];%设置一年内 4 个季度
的降水量
h=repmat(h,1,year);%重复 year 年
alpha=[1,2,2,2;
    2,1,2,2;
    2,2,1,2;
    2,2,2,1];%物种 k 对物种 i 的竞争系数

N=[50,50,50,50];%物种 i 的最大容量
x0=[20,20,50,50];%物种 i 的初始容量



% Solving the differential system of equations with ode45
```

```
% [t,x] = ode45(@(t,x) problem1_fun(t,x,n,h,L,k,alpha,N), tspan, x0);

%改进欧拉法求解微分方程
[t,x] = ODE_ImprovedEuler( @(t,x) problem1_fun(t,x,n,h,L,k,alpha,N),tspan,dt,x0 );
figure
plot(t,x);xlabel('时间/天'),ylabel('植物数量')
legend('specie1','specie2','specie3','specie4','Location','best'),beautiplot
exportgraphics(gcf,'img/4 种物种的数量生长曲线 1.png','Resolution',300)

L=[1.6,1.4,1.0,0.5];
k=[1,2,5,4];
h=(1/tlen)*(1:tlen);
r=zeros(n,tlen);
for i=1:n
    r(i,:)=L(i)./(1+exp(-k(i)*h))-L(i)/2;
end
figure
plot(h,r),xlabel('降水量'),ylabel('生长率'),
legend('specie1','specie2','specie3','specie4','Location','best')
beautiplot
exportgraphics(gcf,'img/多物种情况下生长率关于降水量的函数图像 2.png','Resolution',300)

h=[0.01*ones(1,90),0.04*ones(1,90),0.03*ones(1,90),0.01*ones(1,90)];
h=repmat(h,1,year);

alpha=[1,2,3,4;
    4,1,3,2;
    3,2,1,4;
    2,3,4,1];
N=[100,50,120,130];
x0=[10,20,30,40];

[t,x] = ODE_ImprovedEuler( @(t,x) problem1_fun(t,x,n,h,L,k,alpha,N),tspan,dt,x0 );
figure
plot(t,x);xlabel('时间/天'),ylabel('植物数量')
legend('specie1','specie2','specie3','specie4','Location','best'),beautiplot
exportgraphics(gcf,'img/4 种物种的数量生长曲线 2.png','Resolution',300)
```




以上是不同参数设置下的植物数量随时间的变化曲线情况，大家可以设置不同的参数进行运行

**1.2 就植物群落与大环境的长期相互作用，探讨你能从你的模型中得出什么结论。请考虑以下问题。**

- **社区需要多少种不同的植物物种才能受益，随着物种数量的增加会发生什么？**

社区需要多少种不同的植物物种才能受益，这明显是个最优化问题，建立最优物种竞争微分方程模型，

思考优化变量是什么：明显是植物物种的数量

思考目标函数是什么：长时间稳定状态下植物生物量的总和最大

什么是生物量，简单来说就是有机物的含量，有机物越多，对人就越有利；

但是问题1中没有和生物量有关的建模，怎么办？看第3问

**1.3 社区中的物种类型如何影响你的结果？**

这题可以和问题2一起建模和回答（建模时没有必要把这几个问题区分的这么明显，这点美赛和国赛不同，你要是把每个问题都详细建模和解释，那根本没有时间和精力）

物种类型：暂定为草本、灌木、树木这三种，草本、灌木、树木的生物量明显是逐渐增加的，而种群数量（问题1中的$x_i$）是逐渐减小的，我们可以收集数据，确定一棵草本、灌木、树木的生物量，比如一棵草的生物量是1，灌木为10，树木为100，对应物种类型的生物量乘以第一问的种群数量（问题1中的$x_i$）就得到了总的生物量

优化变量：草本、灌木、树木分别有多少种

目标函数：长时间稳定状态下植物生物量的总和最大，

$$\max \text{ 目标函数} objfun = b1 * \sum_{i=1}^{\theta 1} x_i(t) + b2 * \sum_{i=\theta 1+1}^{\theta 1+1+\theta 2} x_i(t) + b3 * \sum_{i=\theta 1+1+\theta 2+1}^{\Theta} x_i(t)$$

$$\text{控制方程：} \left\{ \frac{d\, x_i(t)}{dt} = \left( \frac{L_i}{1+e^{-k*h(t)}} - \frac{L_i}{2} \right) x_i(t) \left( 1 - \frac{x_i(t)}{N_i} - \sum_{k \neq i} \alpha_k \frac{x_k(t)}{N_k} \right) \right. \tag{9}$$

其中b1，b2，b3分别是一棵草本、灌木、树木的生物量，$\theta 1$为对应为草本的植物种类数，$\theta 2$为对应为灌木的植物种类数，$\Theta$为总的植物种类数，所以对应为树木的植物种类数为$\Theta - \theta 1 - \theta 2$

**1.4 在未来的天气周期中，干旱发生的频率更高、变化更大会产生什么影响?如果干旱不那么频繁，那么物种数量对整体种群的影响是否相同?**

翻译成人话：

频率更高：一段时间内设置降水量较少的时间段的数量

变化更大：降水量较少的时间段的持续时间，降水量减少的程度

对第一问设置不同的降水量情况，求解不同降水量情况（降水量较少的时间段的数量和降水量减少的程度不同）的种群数量变化

这里可扩展的地方有很多，待更新

**1.5 污染和栖息地减少等其他因素如何影响你的结论？**

2 个解决方法：

1. 将污染和栖息地减少等其他因素综合进问题 1 的模型，设置相关的参数进行模型
2. 把这一节写到最后，语文建模

**1.6 你的模型表明，为确保一个植物群落的长期生存能力，应该做些什么，对大环境有什么影响？**

根据前面几个问题的结论进行适当的语文建模

你的PDF解决方案的总页数不超过25页，应包括。

- 一页的总结表。
- 目录。
- 您的完整解决方案。
- 参考文献列表。

注意：MCM比赛有25页的限制。你提交的所有内容都计入25页的限制（摘要表、目录、报告、参考文献列表和任何附录）。你必须为你的想法、图像和报告中使用的任何其他材料注明来源。

词汇表

生物多样性。世界上或某一特定栖息地或生态系统中的生命种类。