



Nombre: _____ # Cuenta: _____

Sección: _____ Fecha: _____ Instructor: _____

Problemas Propuestos Primer Parcial

1. A continuación se presentan algunos campos vectoriales, conviértalos a los otros dos sistemas de coordenadas.

- $\mathbf{A} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} - 5z^3\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{B} = (y^2 + xy)\hat{\mathbf{x}} + 2z^2\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{C} = (y^2 + xy)\hat{\mathbf{y}} + (z^2 - 12z)\hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{D} = r \cos^2 \theta \hat{\mathbf{r}} - r \cos \theta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 3r\hat{\boldsymbol{\phi}}$
- $\mathbf{E} = r^2 \cos \theta \sin \theta \hat{\mathbf{r}} - r^2 \cos^2 \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r^2 \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- $\mathbf{F} = \rho z \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho^2 \hat{\mathbf{z}}$
- $\mathbf{G} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} - r \cos 2\theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \tan \theta \ln(r) \hat{\boldsymbol{\phi}}$
- $\mathbf{H} = 5\rho \sin \phi \hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho z \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + 2z\hat{\mathbf{z}}$

2. Dado el vector $\mathbf{A} = 5\hat{\mathbf{x}} - 2\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}$, encuentre la expresión de:

- a) Un vector unitario $\hat{\mathbf{a}}$ tal que $\hat{\mathbf{a}} \parallel \mathbf{A}$ y
- b) Un vector unitario $\hat{\mathbf{c}}$ en el plano xy tal que $\hat{\mathbf{c}} \perp \mathbf{A}$

3. Descomponga el vector $\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} + 4\hat{\mathbf{y}} - 9\hat{\mathbf{z}}$ en dos componentes, \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 , que sean respectivamente perpendicular y paralela a otro vector $\mathbf{B} = -\hat{\mathbf{x}} + 5\hat{\mathbf{y}}$.

4. Muestre que los vectores siguientes forman los lados de un triángulo

$$\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} - 3\hat{\mathbf{y}} - 5\hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{C} = 3\hat{\mathbf{x}} - 4\hat{\mathbf{y}} - 4\hat{\mathbf{z}}$$

5. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, son vectores del origen a los puntos A, B, C , muestre que el siguiente vector es perpendicular al plano ABC .

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

6. Pruebe que:

$$[\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] + [\mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] + [\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] = 0$$

-
7. Sea \mathbf{r} el vector de posición de un punto $P(x, y, z)$. Encuentre $\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$ en:
- Coordenadas cartesianas
 - Coordenadas cilíndricas
 - Coordenadas esféricas
8. Dado el campo escalar $V = 2xy - yz + xz$
- Determine el vector que representa la dirección y la magnitud de la razón de incremento máxima de V en el punto $P(2, 1, 0)$ y
 - Determine la razón de incremento de V desde el punto P hacia el punto $Q(0, 2, 6)$.
9. Encuentre el gradiente de las siguientes funciones:
- $f_1(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$
 - $f_2(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$
 - $f_3(x, y, z) = e^x \sin y \ln z$
10. Encuentre un vector unitario normal al plano $2\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 4\hat{\mathbf{z}} = 12$.
11. Sea $r^2 = 4$ la ecuación de una esfera centrada en el origen, encuentre el vector unitario normal a cada punto de la superficie en:
- Coordenadas cartesianas
 - Coordenadas cilíndricas
 - Coordenadas esféricas
12. Compruebe el teorema de la divergencia para los campos $\mathbf{v}_1(r, \theta, \phi) = r^2 \hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{v}_2(r, \theta, \phi) = r^{-2} \hat{\mathbf{r}}$ usando como volumen la esfera de radio R , centrada en el origen.
13. Dado un campo vectorial $\mathbf{F} = xy\hat{\mathbf{x}} + yz\hat{\mathbf{y}} + zx\hat{\mathbf{z}}$,
- Calcule el flujo de salida total a través de la superficie de un cubo unidad en el primer octante con un vértice en el origen.
 - Encuentre, $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y verifique el teorema de la divergencia.
14. Para una función vectorial $\mathbf{A} = \rho^2 \hat{\boldsymbol{\rho}} + 2z\hat{\mathbf{z}}$, verifique el teorema de la divergencia para la región cilíndrica circular encerrada por $\rho = 5$, $\rho = 2$ y $z = 4$.
15. Repita el problema anterior para la región $\rho = 5$, $\rho = 2$, $\rho = 0$ y $z = 4$.
16. Para la función vectorial $\mathbf{A} = z\hat{\mathbf{z}}$,
- Calcule $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$ sobre la superficie de una región semiesférica que es la mitad superior de una esfera de radio 3 centrada en el origen, con base plana coincidente con el plano xy .
 - Encuentre, $\nabla \cdot \mathbf{A}$
 - Verifique el teorema de la divergencia.
-

17. Un campo vectorial $\mathbf{D} = \cos^2 \phi / r^3 \hat{\mathbf{r}}$ existe en la región comprendida entre dos capas esféricas definidas por $R = 2$ y $R = 3$. Calcule:
- $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$
 - $\int \nabla \cdot \mathbf{A} dv$
18. Para el siguiente campo vectorial $\mathbf{A} = (r^2 - 6)\hat{\mathbf{r}} + r \cos \theta \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + 3 \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$ y la semiesfera definida por $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$, determine:
- La integral de superficie cerrada de \mathbf{A}
 - La integral de volumen $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$
19. Para el siguiente campo vectorial $\mathbf{A} = 12(z+2)\hat{\mathbf{r}} + 2\hat{\boldsymbol{\theta}} - r\hat{\boldsymbol{\phi}}$ y el cilindro definido por $0 \leq \rho \leq 4$, $0 \leq \phi \leq 3\pi/2$ y $0 \leq z \leq 6$, determine:
- La integral de volumen $\int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dv$
 - La integral de $\int_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_1$ sobre la superficie S_1 .
 - La integral de $\int_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_2$ sobre la superficie S_2 .
 - La integral de $\int_{S_3} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_3$ sobre la superficie S_3 .
 - La integral de $\int_{S_4} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_4$ sobre la superficie S_4 .
 - La integral de $\int_{S_5} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}_5$ sobre la superficie S_5 .
 - Suma los resultados de los incisos b), c), d), e) y f)
 - ¿De los incisos anteriores qué resultados son iguales?

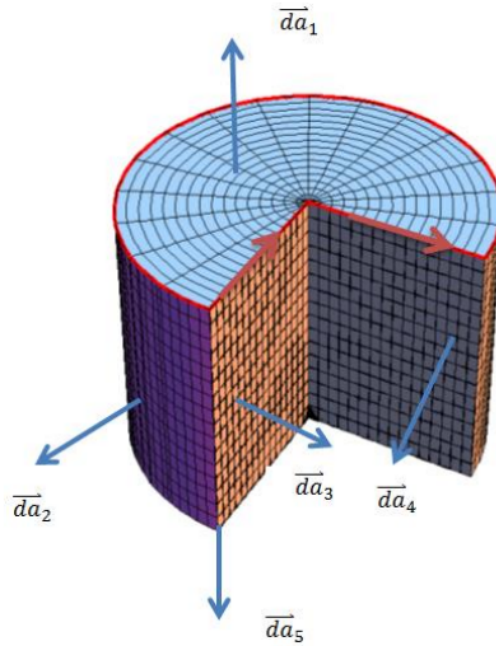


Figura 1

20. Dado $\mathbf{A} = (2xz + 3y^2)\hat{\mathbf{y}} + (4yz^2)\hat{\mathbf{z}}$. Demuestre la validez del teorema de Stokes para la siguiente figura.

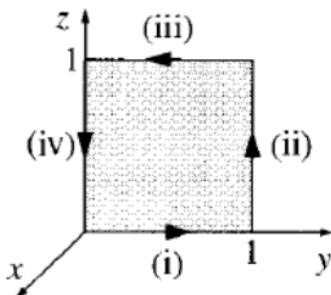


Figura 2

21. Dada la función $\mathbf{F} = (ay)\hat{\mathbf{x}} + (bx)\hat{\mathbf{y}}$ donde a y b son constantes. Demuestre la validez del Teorema de Stokes para una trayectoria circular de radio R , centrada en el origen y sobre el plano xy .
22. a) Calcule la integral de línea de $\mathbf{V} = 6\hat{\mathbf{x}} + yz^2\hat{\mathbf{y}} + (3y + z)\hat{\mathbf{z}}$ a lo largo de la trayectoria de la figura siguiente.
- b) Repita el cálculo por el otro lado de la ecuación del Teorema de Stokes.

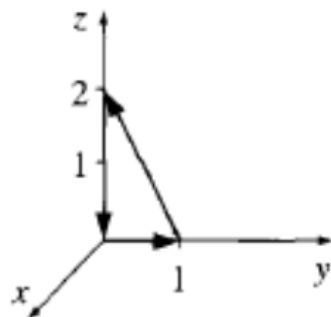


Figura 3

23. Calcule la integral de línea de $\mathbf{A} = (r \cos^2 \theta)\hat{\mathbf{r}} - (r \cos \theta \sin \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + 3r\hat{\boldsymbol{\phi}}$ alrededor de la trayectoria en la figura. Repita el cálculo por el otro lado de la ecuación del Teorema de Stokes.

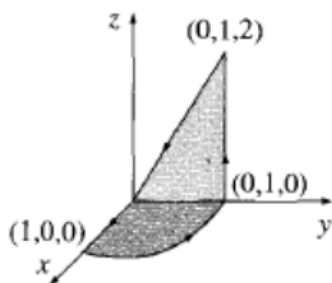


Figura 4

24. Demuestre que se cumple el Teorema de Stokes para la función $V = yz$ usando la siguiente superficie triangular de la figura siguiente.

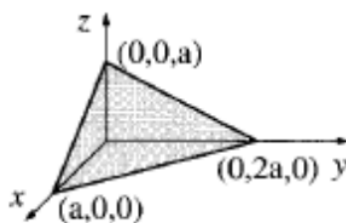


Figura 5

25. Suponga que un campo vectorial $\mathbf{F} = (5\rho \sin \phi)\hat{\rho} + (\rho^2 \cos \phi)\hat{\phi}$ y la figura siguiente.

- Calcule $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$
- Calcule $\nabla \times \mathbf{F}$
- Calcule $\int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a}$

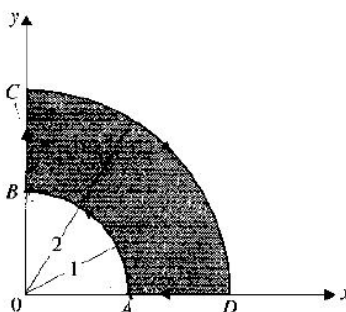


Figura 6

26. Verifique el Teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{B} = \rho \cos \phi \hat{\rho} + \sin \phi \hat{\phi}$ y la trayectoria semicircular en la figura.

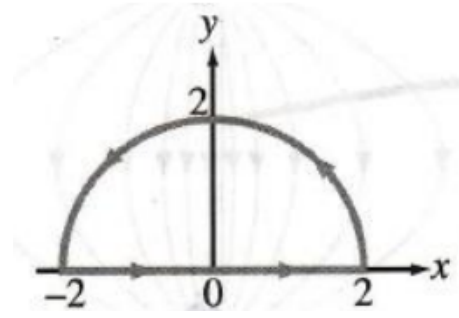


Figura 7

Problemas Propuestos Segundo Parcial

1. Considere tres hojas planas cargadas y muy grandes A, B, y C. las hojas son paralelas con B debajo de A y C debajo de B. En cada hoja hay una carga superficial de densidad uniforme: $-4C/\text{cm}^2$ en A, $7C/\text{cm}^2$ en B y $-3C/\text{cm}^2$ en C. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica en cada hoja en dinas/ cm^2 ?
2. Encuentre el campo eléctrico en un punto a una distancia z arriba del punto en el centro de una espira cuadrada de lados a con densidad de carga lineal λ . Haga lo mismo para una espira circular de radio a . Use sus resultados para determinar el potencial.
3. Una barra delgada de 10cm tiene una carga total de 8e uniformemente distribuida a lo largo de su longitud. Encuentre el campo eléctrico y el potencial en cada uno de los puntos A y B localizados como se muestra en la figura.

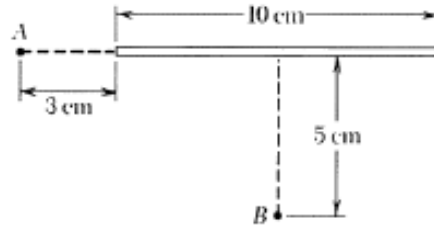


Figura 8

4. Un cable coaxial muy largo contiene una densidad de carga volumétrica uniforme ρ en el cilindro interno de radio a , y una densidad de carga superficial uniforme en el cilindro exterior de radio b . La carga superficial es negativa y su valor es tal que la carga neta del cilindro es cero ($Q_{Sup} + Q_{Vol} = 0$). Encuentre el campo eléctrico en cada una de las tres regiones.

$$\rho < a, \quad a < \rho < b, \quad \rho > b$$

5. Demuestre que el campo eléctrico en el punto $(0, 0, h)$ debido al rectángulo descrito $-a < x < a$, $-b < y < b$, $z = 0$ y que porta una carga uniforme de ρ_s C/m² es:

$$E = \frac{\rho_s}{\pi \epsilon_0} \tan^{-1} \left(\frac{ab}{h(a^2 + b^2 + h^2)^{1/2}} \right) \mathbf{z}$$

6. Una carga puntual q se encuentra en el centro de un anillo uniforme que tiene una densidad de carga lineal λ y radio a , como se muestra en la figura. Determinar el flujo eléctrico total a través de una esfera centrada en el punto de carga y tiene un radio R , donde a) $R < a$, b) $R > a$.

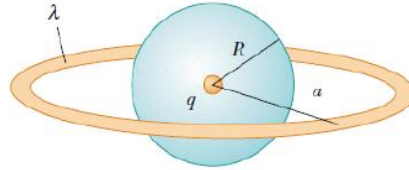


Figura 9

7. Una esfera de radio $2a$ está hecho de un material no conductor que tiene un volumen de densidad de carga uniforme ρ . (Se supone que el material no afecta al campo eléctrico.) Una cavidad esférica de radio a es eliminada de la esfera, como se muestra en la figura. Demostrar que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dada por $E_x = 0$ y $E_y = \rho a / 3\epsilon_0$. (Sugerencia: el campo en el interior de la cavidad es la superposición del campo debido a la esfera original sin cortar, más el campo debido a una esfera del tamaño de la cavidad con un carga uniforme y de densidad negativa $-\rho$.)

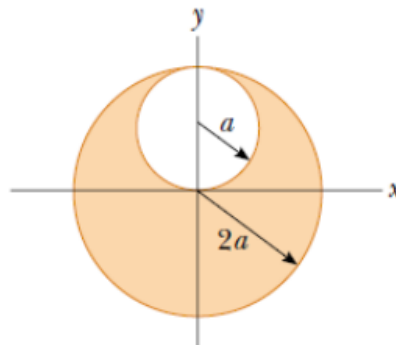


Figura 10

8. Una línea de carga infinitamente larga tiene una carga uniforme por unidad de longitud λ y se encuentra a una distancia d desde el punto O , como se muestra en la figura. Determine el flujo eléctrico total a través de la superficie de una esfera de radio R con centro en O debido a esta línea de carga. Considere los dos casos, en donde $R < d$ y $R > d$.

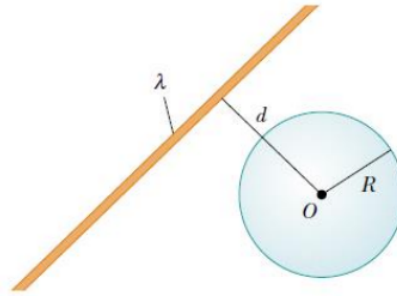


Figura 11

9. Una carga puntual Q se encuentra en el eje de un disco de radio R a una distancia b del plano del disco. Mostrar que si un cuarto del flujo eléctrico de la carga pasa a través del disco, entonces $R = \sqrt{3b}$.

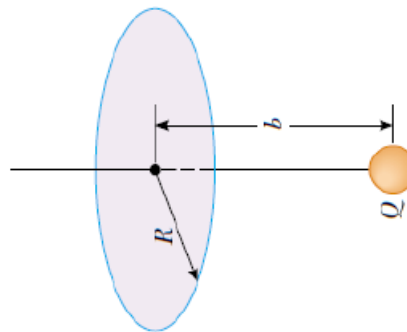


Figura 12

10. Una barra de longitud L . Se encuentra a lo largo del eje x con su extremo izquierdo en el origen. Tiene una densidad de carga no uniforme $\lambda = \alpha x$, donde α es una constante positiva,
- ¿Cuáles son las unidades de α ?
 - Calcular el potencial eléctrico en A .

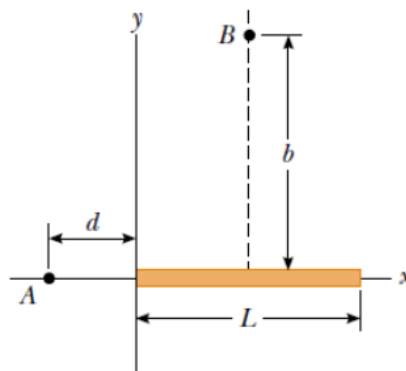


Figura 13

11. Calcular el potencial eléctrico en el punto P sobre el eje de la corona circular se muestra en la figura, la cual tiene una densidad de carga uniforme.

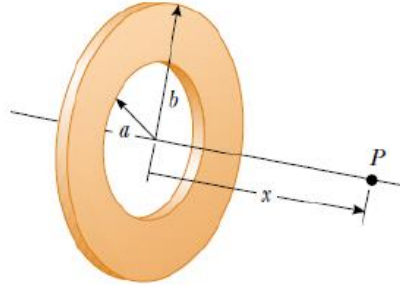


Figura 14

12. Como se muestra en la figura, dos grandes placas conductoras verticales paralelas separadas por la distancia d se pueden alojar de manera que sus potenciales son $+V_0$ y $-V_0$. Una pequeña bola conductora de masa m y radio R (donde $R \ll d$) se cuelga a mitad de camino entre las placas. El hilo que soporta la bola tiene longitud L y es un conductor conectado a tierra, por lo que el potencial de la pelota se fija en $V = 0$. La bola se cuelga hacia abajo en equilibrio estable cuando V_0 es suficientemente pequeño. Demostrar que el equilibrio de la bola es inestable si V_0 excede el valor crítico $k_e d^2 mg / (4RL)$. (Sugerencia: considerar las fuerzas de la pelota cuando se desplaza una distancia $x \ll L$.)

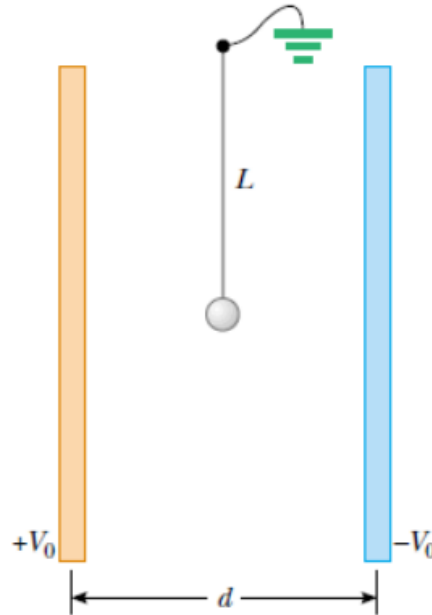


Figura 15

13. El eje x es el eje de simetría de un anillo en reposo cargado uniformemente de radio R y carga Q . Una carga puntual Q de masa M se encuentra inicialmente en el centro del anillo. Cuando se desplaza ligeramente, la carga puntual acelera a lo largo del eje x hasta el infinito.

Demostrar que la velocidad máxima de la carga puntual es

$$v = \left(\frac{2k_e Q^2}{MR} \right)^{1/2}$$

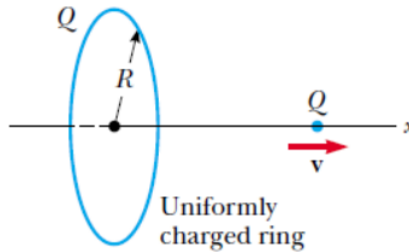


Figura 16

Problemas Propuestos Tercer Parcial

- La polarización en un cubo dieléctrico de lados L , centrado en el origen, está expresado por $\mathbf{P} = P_0(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$.
 - Determine la carga superficial y volumétrica de carga ligada.
 - Demuestre que la carga ligada total es cero.
- El vector de polarización en una esfera dieléctrica de radio b es $\mathbf{P} = P_0\hat{\mathbf{x}}$.
 - Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.
 - Demuestre que la carga ligada total es cero.
- el eje de un largo tubo dieléctrico, con radio interior r_i y radio exterior r_o , coincide con el eje z . Existe un vector de polarización $\mathbf{P} = P_0(3x\hat{\mathbf{x}} + 4y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})$ en el dieléctrico.
 - Determine las densidades superficial y volumétrica de carga ligada.
 - Demuestre que la carga ligada total es cero.
- Una carga puntual positiva Q está dentro de una capa dieléctrica esférica con radio interior R_i y radio exterior R_o . La capa dieléctrica de la capa es ϵ_r . Determine \mathbf{E} , V , \mathbf{D} , \mathbf{P} como funciones de la distancia radial R .
- Resuelva los siguientes problemas:
 - Determine el voltaje de ruptura de un condensador de placas paralelas, suponiendo que las placas conductoras están separadas por 50mm y el medio entre ellas es aire.
 - Determine el voltaje de ruptura si el espacio entre las placas es de plexiglás, que tiene una constante dieléctrica de 3 y rigidez dieléctrica de 20kV/mm.
 - Si se introduce una lámina de plexiglás de 10mm de grosor, ¿Cuál es el voltaje máximo que puede aplicarse a las placas sin llegar a la ruptura.

6. Suponga que el plano $z = 0$ separa dos regiones dieléctricas sin pérdidas con $\epsilon_{r1} = 2$ y $\epsilon_{r2} = 3$. Si sabemos que \mathbf{E}_1 en la región 1 es $2y\hat{\mathbf{x}} - 3x\hat{\mathbf{y}} + (5 + z)\hat{\mathbf{z}}$. ¿Qué sabemos también de \mathbf{E}_2 y \mathbf{D}_2 en la región 2? ¿Podemos determinar \mathbf{E}_2 y \mathbf{D}_2 en cualquier punto de la región 2? Explique.
7. Pueden usarse lentes dieléctricas para colimar campos electromagnéticos. En la figura siguiente, la superficie de la izquierda del lente es la de un cilindro circular y la superficie derecha es un plano. Si \mathbf{E}_1 en el punto $P(r_o, 45^\circ, z)$ de la región 1 es $5\hat{\mathbf{r}} - 3\hat{\boldsymbol{\phi}}$. ¿Cual debe ser la constante dieléctrica de la lente para que \mathbf{E}_3 en la región 3 sea paralela eje x ?

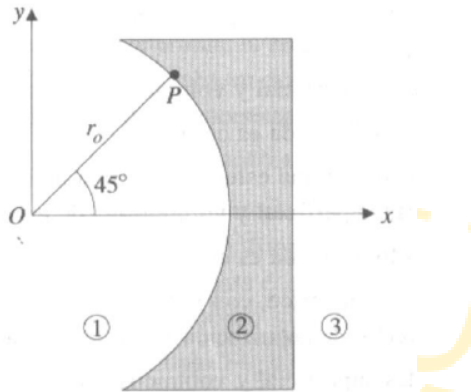


Figura 17