Universidad Nacional Autónoma de Honduras

Facultad de Ciencias
Escuela de Física

Medición de la aceleración gravitacional utilizando un péndulo físico

Elaborada por: H. Maradiaga, D. Bulnes, M. Moreno
Revisada por: Roberto Mejía, Jocsan Hernández y Diego Sosa.

Introducción

El valor de aceleración gravitacional no corresponde al valor 9.8 m/s^2 en todo punto sobre la superficie terrestre, como comúnmente se puede experimentar, ya que el mismo dependerá del sitio y el lugar donde se encuentre, ya sea por latitud, longitud e incluso por altura sobre el nivel del mar. Si se miden valores de la aceleración gravitacional en UNAH Ciudad Universitaria y se compara con el valor obtenido en la UNAH Valle de Sula, los valores serán diferentes, a causa de las altitudes con respecto al nivel del mar. En esta práctica de laboratorio se pretende calcular el valor de la aceleración gravitacional en el tercer piso del edificio E1 de Ciudad Universitaria, utilizando una configuración de péndulo físico, la cual consiste en una barra de longitud a y ancho b, la cual tendrá el punto de giro o pivote en un punto a lo largo de la barra.

Objetivos

1. Obtener el valor de la aceleración de la gravedad en el tercer piso del edificio E1, en la UNAH-CU.
2. Analizar la relación periodo-distancia al centro de masa en un péndulo físico.

Materiales y equipo

1. Barra metálica rectangular con orificios
2. Cinta métrica
3. Soporte de mesa con barra
4. Sensor Giratorio PASPORT
5. Interfaz digital SPARK
6. Cables de conexión y alimentación
7. Soporte con varilla

Marco teórico

1. En base a su libro de texto defina los siguientes conceptos:

- Movimiento periódico.
- Momento de inercia.
- Teorema de ejes paralelos.
- Péndulo físico.
- Periodo de oscilación.
- Frecuencia angular.
- Amplitud de oscilación.

2. Considere el sistema formado por un péndulo físico que consiste en una barra de longitud a y ancho b, y con punto de pivote en un extremo, según se muestra en la figura 1.

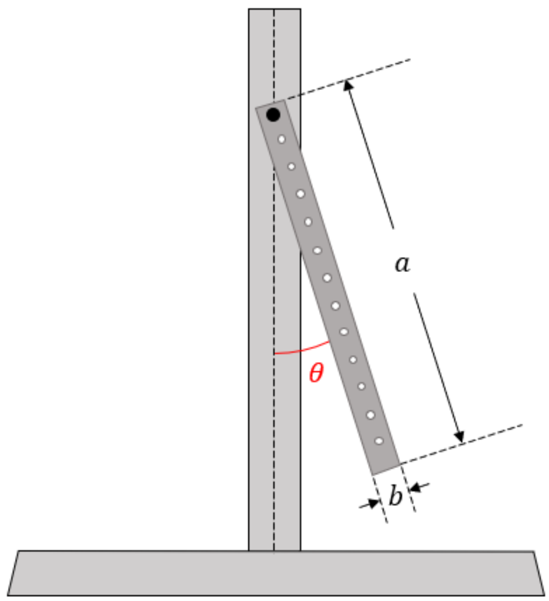

Figura 1. Péndulo físico que consiste en una barra de longitud a y ancho b.

- Haga un bosquejo del sistema.
- Haga el diagrama de fuerzas correspondiente.
- Establezca una expresión para la segunda ley de Newton para dinámica rotacional en su modalidad rotacional y obtenga así la ecuación diferencial que describe el movimiento del péndulo físico mostrando la forma de la frecuencia angular ω
- A partir de la expresión de la frecuencia angular ω

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \tag{1}$$

Donde: g corresponde a la aceleración gravitacional en m/s^2, m es la masa de la barra en kg, d es la distancia medida desde el punto de giro o pivote, hasta el centro de gravedad en metros, el cual también corresponde al centro de masa del péndulo, e I es el momento de inercia del péndulo con respecto al punto pivote, en kg·m^2. Demuestre que la expresión resultante para el periodo T del movimiento armónico simple de la barra de longitud a es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{3g}} \tag{2}$$

Observación: desprecie el valor del ancho b en el momento de inercia de la barra y recuerde utilizar el teorema de los ejes paralelos con la distancia correcta al centro de masa.

Procedimiento experimental

Medición de la aceleración gravitacional g considerando el valor promedio del periodo de oscilación T

Utilizando la ecuación (1), se pretende medir indirectamente el valor de g, utilizando la medida de a y el periodo de oscilación para diferentes estados de oscilación, en otras palabras, se mide el valor del periodo de oscilación que ocurra para cada punto pivote que se logre medir. Para esto se seguirá el siguiente procedimiento:

1. El montaje experimental está compuesto de una barra de longitud a con uno de sus extremos conectado a un sensor giratorio PASCO, una barra de soporte y una base. Utilizando una cinta métrica, proceda a medir la longitud a en metros, desde un extremo de la barra hacia el otro. Trate de ser lo más preciso posible, y anote el valor medido en la Tabla 1.

2. Anote el valor de la incertidumbre en la medición de la longitud Δa, la cual corresponde a la mínima medida que puede hacerse con la cinta métrica, 1.0 mm en este caso.

3. Para realizar la medición del tiempo, se utilizará la interfaz digital SPARK configurada en la hoja de "El Péndulo Físico". La interfaz digital tiene en su configuración un tiempo de lectura de 20 segundos.

4. Proceda a crear en la interfaz digital una tabla para la lectura de ángulo y tiempo. Mueva lentamente el péndulo hasta detectar un ángulo máximo menor a 10°, esto permitirá considerar que $sen(\theta) \simeq \theta$. Utilice este ángulo para las ocho mediciones que realizará, y anote los valores obtenidos en la Tabla 1. Puede hacer uso de una varilla en un soporte para una mejor selección del ángulo inicial de oscilación.

5. Antes de soltar el péndulo para que comience a oscilar, borre los datos de la interfaz registrados para el posicionamiento al ángulo seleccionado menor a 10°. Estos datos solo permiten visualizar y colocar el péndulo en la posición angular inicial del movimiento armónico simple.

6. Una vez haya borrado los datos que permitan saber la posición angular inicial, suelte el péndulo y deje que transcurra la toma de datos de 20 segundos.

7. Utilizando la interfaz digital (SPARK) seleccione la página que permite visualizar el periodo de oscilación del péndulo, luego utilice la opción Σ para ver el valor medio del periodo $\bar{T}$ y su desviación estándar σ_T, considere que deberá anotar el número de mediciones que la interfaz digital SPARK está promediando. Registre estos valores en la Tabla 1.

8. Deberá realizar ocho registros repitiendo los pasos del 4 al 7, y anotando los valores en la Tabla 1.

Medición de la aceleración gravitacional g mediante una regresión lineal

1. Mida la distancia que hay entre los orificios de la barra de metal.
2. Preliminarmente instale el péndulo con el pivote en un extremo, y registre los valores del periodo a un ángulo menor a 10° y su incertidumbre en la Tabla 2.
3. Coloque ahora el pivote en el siguiente orificio del péndulo, retirando el tornillo de la primera posición e instalándolo en la segunda.
4. Repita el procedimiento en el paso 2, registrando el nuevo periodo y su incertidumbre en la Tabla 2.
5. Repetir paso 2 y 3 nuevamente hasta llegar al séptimo orificio de la barra.

Registro de datos experimentales

Las siguientes tablas permiten el registro de los datos experimentales para los dos procedimientos planteados anteriormente. La Tabla 1 presenta las mediciones obtenidas para realizar el cálculo directo de g mediante la ecuación (2), y la Tabla 2 muestra las mediciones realizadas para el cálculo de g mediante el método de regresión lineal de T^2 y $12d + a^2/d$.

N°	θ_{max}	T (s)	δT (m)	$\bar{T}$ (s)	ΔT (s)	a (m)	δa (m)
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

Tabla 1: Mediciones del periodo, la longitud y ancho de la barra del péndulo físico

N°	θ_{max}	d (m)	δd (m)	T (s)	$y = T^2$ (s^2)	$x = 12d + a^2/d$ (m)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						

Tabla 2: Medición del periodo a diferentes distancias del Centro de Masa

En las Tablas 1 y 2, θ_{max} es el ángulo máximo de oscilación, T es el periodo medido por la interfaz, $\bar{T}$ es el valor medio del periodo T, a es la longitud de la barra con su incertidumbre δa, respectivamente; y d es la distancia del pivote al centro de masa.

Tratamiento de datos experimentales

Cálculo de la aceleración gravitacional g considerando la longitud del péndulo a, y periodo de oscilación T

Para obtener g por este método se hará uso de los datos obtenidos en la Tabla 1.

- **Análisis del periodo de oscilación**
  Cada uno de los cálculos que se obtengan a continuación deben ser anotados en la Tabla 1.
  - Calcule el promedio del periodo medido, $\bar{T}$.
  - Calcule el valor de la incertidumbre total para el periodo, considerando incertidumbres sistemática y estadística en la medición de T

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma_T}{\sqrt{N}} \qquad \Delta T = \sqrt{(\delta T)^2 + (\sigma_{\bar{T}})^2} \tag{3}$$

    Recuerde que σ_T es la desviación estándar en la medida de T, y δT es la incertidumbre instrumental en la medida de T.

  - Reporte el mejor valor medido para el periodo $\bar{T}$ con su incertidumbre, con sus respectivas unidades, de la forma:

$$T = \bar{T} \pm \Delta T \tag{4}$$

- **Calculando g por medio de los valores reportados de la longitud del péndulo y del periodo.**
  Considerando la ecuación (2), haga el despeje para g, sustituya el mejor valor del periodo ($\bar{T}$) y de la longitud del péndulo a, y posteriormente propague la incertidumbre ΔT y Δs para obtener la incertidumbre de g, de la siguiente forma:

$$g = \frac{8\pi^2 a}{3T^2} \tag{5}$$

  Para encontrar Δg se hace uso de la fórmula:

$$\Delta g = g\sqrt{\left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \tag{6}$$

  Finalmente se expresa g como:

$$g_1 = g \pm \Delta g \tag{7}$$

  Donde g_1 es el valor de la aceleración gravitacional obtenida mediante la longitud y período de oscilación del péndulo. Recuerde que la incertidumbre absoluta debe tener una cifra significativa, y el valor mejor medido o valor central debe tener la misma cantidad de cifras decimales que su incertidumbre.

Cálculo de la aceleración gravitacional g considerando un ajuste lineal entre T^2 y $12d + a^2/d$.

Considerando la ecuación (1), tome en cuenta que el momento de inercia I es con respecto al punto de giro o pivote del péndulo, si este pivote no coincide con el centro de masa, deberá utilizar el teorema de los ejes paralelos:

$$I = I_{cm} + md^2 \tag{8}$$

Donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al centro de masa, d es la distancia desde el pivote hasta el centro de masa del péndulo, y m es la masa del péndulo. Con esta consideración, y utilizando la ecuación (1), la aceleración gravitacional puede medirse utilizando la siguiente expresión:

$$g = \frac{4\pi^2}{12T^2}\left(\frac{a^2}{d} + 12d\right) \tag{9}$$

Donde a es la longitud de la barra. Se sabe que el momento de inercia de una barra de longitud a con respecto a su centro de masa, es:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}ma^2 \tag{10}$$

Tomaremos ahora como base la ecuación (13) para reexpresarla en forma de una ecuación lineal, así:

$$T^2 = \frac{\pi^2}{3g}\left(12d + a^2/d\right) \tag{11}$$

$$y = mx + b \tag{12}$$

Donde:

$$y = T^2, \qquad m = \frac{\pi^2}{3g}, \qquad x = (12d + a^2/d), \qquad b = 0$$

Se puede ver que es posible obtener el valor de g por medio de la pendiente de la recta m. El análisis con ajuste lineal de datos debe hacerse teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1. Calcule el valor de y haciendo uso de $y = T^2$, y anote los valores obtenidos en la Tabla 2.
2. Calcule el valor de x haciendo uso de $x = 12d + a^2/d$, y anote los valores obtenidos en la Tabla 2.
3. Haga la regresión lineal de "y" vs. "x" y registre el valor de la pendiente "m" y del intercepto b. Anote estos valores en la Tabla 3. Esto le permitirá encontrar el mejor valor medido para la aceleración gravitacional g por medio de m, así como su incertidumbre Δg:

$$g = \frac{\pi^2}{3m} \qquad \Delta g = g\frac{\Delta m}{m} \tag{13}$$

4. En una hoja de cálculo o papel milimetrado grafique los 7 puntos medidos x y y como se calcularon en la Tabla 2 junto con la recta obtenida al realizar la regresión lineal.

5. Reporte su valor calculado de g mediante la pendiente de la recta de ajuste m de la forma

$$g_2 = \bar{g} \pm \Delta g$$

m	Δm	b	Δb	$y = mx + b$

Tabla 3: Parámetros para el ajuste lineal de datos entre T^2 y $12d + a^2/d$

Análisis de Resultados

1. Investigue cómo se calcula el coeficiente de correlación lineal r del ajuste y explique la importancia del mismo.

2. Determine el error por exactitud, precisión y discrepancia entre los valores medidos.

   - Error por exactitud
     Para determinar el valor porcentual del error por exactitud, comparando los valores medidos con el valor de referencia, se hará uso de:

     $$\epsilon_1 = \frac{|g_{\text{referencia}} - g_1|}{g_{\text{referencia}}} \times 100\,\% \qquad \epsilon_2 = \frac{|g_{\text{referencia}} - g_2|}{g_{\text{referencia}}} \times 100\,\% \tag{14}$$

     Donde $g_{\text{referencia}} = 9.77682 \frac{m}{s^2}$ corresponde a la aceleración gravitacional estándar para Tegucigalpa, ya que, la gravedad varía con la altura.

   - Error por precisión
     Para determinar el error por precisión, puede hacerlo a través de las siguientes relaciones:

     $$(\Delta g_1)_{\%} = \frac{\Delta g_1}{g_1} \times 100\,\% \qquad (\Delta g_2)_{\%} = \frac{\Delta g_2}{g_2} \times 100\,\%$$

   - Discrepancia significativa y no significativa
     Para determinar el tipo de discrepancia entre valores medidos, deberá determinar si los valores medidos con sus incertidumbres comparten o no un rango de valores.

3. Compare mediante un gráfico especificando los dos valores medidos g_1 y g_2 y con sus barras de error y junto con el valor de referencia ($g_{\text{referencia}}$), visualizando así la discrepancia entre los valores medidos, incluya en las conclusiones un argumento que justifique el tipo de discrepancia.

Cuestionario

1. Para el sistema de péndulo físico considerado, existe un periodo mínimo para cierto valor de d. Elabore un gráfico del periodo vs la distancia d desde el pivote hasta el centro de masa, para este gráfico considere un rango de valores entre 0 y la longitud de la barra, utilice uno de los valores de g que midió, y la longitud medida para la barra.

2. ¿Cuál de los dos valores de la aceleración gravitacional medidos, es aceptable y por qué? Justifique en base a sus resultados.

3. ¿Cuál de los resultados obtenidos para g, presenta mayor incertidumbre? Exponga a su criterio las posibles causas de esa alta incertidumbre.

4. ¿Cuáles son las razones que resulten en un tipo de discrepancia para ambos valores medidos?

5. ¿Es posible que un péndulo simple pueda considerarse como péndulo físico? Justifique su respuesta.

Conclusiones

Redacte al menos tres conclusiones con base en los resultados obtenidos y los objetivos planteados.

-
-
-

Bibliografía

Física para Ciencias E Ingeniería Vol. I, Serway, Jewett, 7ma. Ed.
Física. Vol. I, Resnick, Halliday, Krane. 4ta. ed.
Física Universitaria, Vol. I, Sears, Zemansky, Young, Friedman. 11. ed.
Física Para Ciencias E Ingeniería, Vol. I. Giancoli. 4ta. ed.
Introducción al análisis de Errores, John R. Taylor 2da ed.

Anexos

Propagación de incertidumbres

Si se miden varias variables $x, \ldots, w$ con incertidumbres $\delta x, \ldots, \delta w$, y estos valores medidos son utilizados para calcular una magnitud q, entonces las incertidumbres de $x, \ldots, w$ generan una incertidumbre en q de la siguiente manera:

- Si q es suma y/o diferencia, es decir, $q = x + \ldots + z - (u + \ldots + w)$, entonces:

$$\delta q = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2} \tag{15}$$

- Si q es el producto y/o cociente, es decir, $q = \dfrac{x \times \ldots \times z}{u \times \ldots \times w}$, entonces:

$$\frac{\delta q}{|q|} = \sqrt{\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\delta u}{u}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\delta w}{w}\right)^2} \tag{16}$$

- Si $q = Bx$, donde B se conoce exactamente, entonces:

$$\delta q = |B| \delta x \tag{17}$$

- Si q es una función variable, es decir, $q(x)$, entonces:

$$\delta q = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x} \delta x \tag{18}$$

- Si q es una potencia, es decir, $q = x^n$, entonces:

$$\frac{\delta q}{|q|} = |n| \frac{\delta x}{|x|} \tag{19}$$

Definiciones estadísticas

Si $x_1, \ldots, x_N$ denota N mediciones separadas de una magnitud x, entonces definimos:

- Media:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \tag{20}$$

- Desviación estándar:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum (x_i - \bar{x})^2} \tag{21}$$

- Desviación estándar de la media:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \tag{22}$$

Momento de inercia

El momento de inercia para una barra, de longitud a y ancho b, con punto pivote o eje de giro ubicado en su centro de masa está dado por:

$$I_{cm} = \frac{M}{12}\left(a^2 + b^2\right) \tag{23}$$

Regresión lineal del tipo $y = mx + b$

Una regresión lineal o método de mínimos cuadrados trata de encontrar la menor probabilidad de que un valor de un conjunto se aleje de una ecuaci´on lineal continua.

Sea la ecuación de la forma $y = mx+b$, una ecuación lineal donde m y b son parámetros a medir indirectamente y suponga que tenemos y_i y x_i, una serie de N datos medidos (preferiblemente de forma directa), de la siguiente manera:

$$m = \frac{\sum_i (x_i)^2 \sum_i y_i - \sum_i x_i \sum_i x_i y_i}{\Delta} \tag{24}$$

$$b = \frac{N \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{\Delta} \tag{25}$$

Por conveniencia se introduce la abreviación:

$$\Delta = N \sum_i (x_i)^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2 \tag{26}$$

Para determinar la incertidumbre en este proceso de medición, es necesario saber qué tanto se desvían los datos de la regresión, para ello se calcula la desviación estándar de los puntos con respecto a la recta encontrada gracias a las ecuaciones anteriores:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_i^N (y_i - m - bx_i)^2} \tag{27}$$

Ahora se puede presentar las ecuaciones que representan la incertidumbre en los parámetros m y b:

$$\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_i (x_i)^2}{\Delta}} \tag{28}$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \tag{29}$$

Finalmente, se requiere la correlación, una cantidad estadística que permite verificar de forma cuantitativa la relación que hay entre los puntos que representan datos experimentales y un modelo lineal asociado a dichos puntos. Esta cantidad puede encontrarse entre -1 (si la pendiente del modelo es negativa) y 1 (si la pendiente del modelo es positiva) y, entre más cerca esté el valor absoluto del índice de correlación a 1, puede decirse que hay mayor correlación entre los datos experimentales y su modelo lineal, es decir, **la recta se ajusta bien a los datos**.

$$r = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}} \tag{30}$$