Velocidad Terminal de una Gota de Agua

I. Objetivos

1. Describir cualitativa y cuantitativamente la cinemática del movimiento de una gota de agua en caída vertical a través de aceite vegetal.
2. Trazar gráficas de la posición en función del tiempo de objetos que se mueven en MRU.
3. Hacer uso de una herramienta computacional para adquisición de datos (Tracker).
4. Aprender a realizar una regresión lineal.

II. Problema

Considere la Figura 1, donde un tubo de vidrio está lleno de aceite vegetal y una gota de agua se desplaza verticalmente dentro de él e interactúa con el aceite vegetal. Demuestre que el tipo de movimiento realizado por la gota de agua, cayendo en el aceite vegetal, es MRU (a pesar que, parece estar moviéndose en caida libre) y encuentre la velocidad a la cual se desplaza. Al mismo tiempo, medite en: ¿por qué la gota de agua se mueve en MRU?, ¿cambiarían las características del movimiento de la gota si se desplazara a través de otro medio (por ejemplo el aire)?

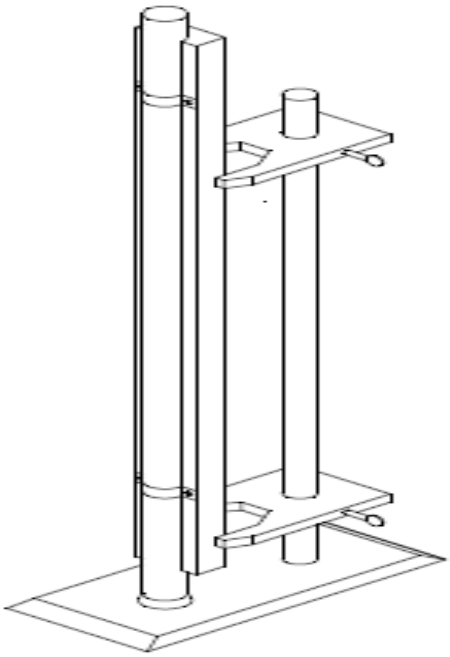


Figura 1: Montaje experimental.

III. Revisión del Marco Teórico

En un curso introductorio de física se suele estudiar sistemas idealizados. Tal es el caso, por ejemplo, de los objetos que caen en el aire. Cuando se analiza el movimiento para grandes desplazamientos, los objetos que caen, no aumentan su aceleración de manera indefinida; sino que aceleran hasta que alcanzan una velocidad estable (velocidad constante) llamada **velocidad terminal**. Es así como un paracaidista, alcanza el suelo moviéndose a una velocidad constante. Este hecho sucede porque, para grandes desplazamientos de objetos que caen en el aire, el efecto del medio se hace apreciable. De esta manera, al considerar pequeñas distancias, el modelo simplicado (donde se ignora el efecto del medio) aún es válido; pero al considerar grandes distancias se tienen que considerar en el sistema el efecto del medio. Por supuesto, al analizar un sistema no sólo se considera la distancia del movimiento para saber si el efecto del medio es apreciable o no, también se deben considerar: las características del objeto que se mueve y las características del medio mismo.

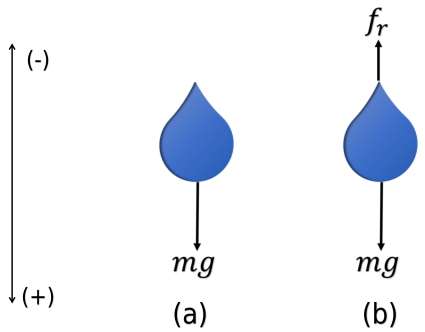


Figura 2: Diagramas de cuerpo libre para: (a) Gota de agua que cae ignorando el efecto del medio en el que se mueve. (b) Gota de agua que cae tomando en cuenta el efecto del medio en el que se mueve.

La Figura 2, muestra el diagrama de cuerpo libre para una gota que cae; considerando hacia abajo, de la dirección vertical, como sentido positivo. La Figura 2.(a) muestra que cuando se ignora el efecto del medio, la gota cae únicamente influenciado por la fuerza de gravedad (peso de la gota); mientras que la Figura 2.(b) muestra que cuando se toma en cuenta el efecto del medio, la gota cae siendo influenciada por la fuerza de gravedad y la resistencia que el medio ofrece al moviemiento de la gota.

El segundo postulado de la mecánica newtoniana (segunda ley de Newton), permite estudiar el movimiento de manera analítica. En el caso que se ignora el efecto del medio, la segunda ley de Newton establece que:

$$\vec{F} = m\vec{g} \tag{1}$$

La ecuación (1) dice que el movimiento de la gota es MRUA, donde la aceleración constante corresponde a la aceleración de la gravedad y es el caso de caida libre. En el caso que no se ignore el efecto del medio, la segunda ley de Newton establece que:

$$\vec{F} = m\vec{g} - \vec{f_r} \tag{2}$$

Donde el término f_r corresponde al valor de la magnitud de la resistencia que el medio ofrece al cuerpo que se mueve a través de él, a esta fuerza se le suele llamar como **Fuerza de Arrastre**.

Las características de la fuerza de arrastre, también llamada fuerza viscosa, son:

- Se opone al movimiento de los objetos que se mueven a través de él, por ello la dirección de la fuerza es opuesta a la velocidad de lo que se está moviendo.
- La magnitud de la fuerza de arrastre depende de la velocidad de lo que se está moviendo.
- La magnitud de la fuerza de arrastre depende de la forma del cuerpo en movimiento.

El segundo inciso implica que la fuerza de arrastre, en general, puede escribirse como: $f_r(v)$; donde v es la magnitud de la velocidad de lo que se está moviendo en el medio (en nuestro caso la gota de agua). Lo anterior ha sido comprobado de manera experimental y fenomenológicamente. Experimentalmente, se deduce que la dependencia de la fuerza de arrastre con respecto a la velocidad puede ser lineal o cuadrática:

- **Dependencia Lineal**
  La dependencia lineal de la fuerza de arrastre está relacionada con la viscosidad del medio y el tamaño del cuerpo. Matemáticamente se describe como:

$$f_{r-lin} = bv \tag{3}$$

- **Dependencia Cuadrática**
  La dependencia cuadrática está relacionada con la aceleración del medio debido al movimiento del cuerpo. Es proporcional a la densidad del medio y al área de contacto del cuerpo con el medio. Matemáticamente se describe como:

$$f_{r-cuad} = cv^2 \tag{4}$$

Ya que la fuerza de arrastre es un tópico que excede a los conocimientos del curso, se limitará a decir que: para la gota que cae en el aceite vegetal, la magnitud de la fuerza de arrastre puede modelarse teniendo una dependencia lineal con respecto a la velocidad (ver ecuación (3)). De esta manera, las ecuaciones del movimiento de la gota que cae puede ser deducido, si se toma la ecuación (2) y se combina con la expresión descrita en la ecuación (3):

$$mg - f_r(v) = \vec{F} \tag{5}$$

$$mg - bv = m|\vec{a}| \tag{6}$$

La expresión (5), surge por el diagrama de cuerpo libre (Figura 2.(b)), la expresión (6) surge al asumir dependencia lineal de la fuerza de arrastre. Cuando la gota alcanza el punto en que la aceleración neta es nula, debido a que la fuerza de arrastre se iguala con el peso [1], es decir que la velocidad es constante, la ecuación (6) se convierte en:

$$mg - bv = 0 \tag{7}$$

[1] Para más información ver la subsección "Descripción de las cantidades físicas en el moviemiento de la gota que cae en un medio", en el anexo

Lo anterior significa que se puede encontrar una expresión para la velocidad a la cual termina cayendo la gota, es decir, una expresión para la velocidad terminal:

$$v = \frac{mg}{b} \tag{8}$$

El término b, dependen de las características del medio y de la forma de la gota. En ese sentido y a grandes razgos, **la descripción hecha del movimiento de la gota se mantendría para diferentes medios, solamente variaría la distancia en la cuál la velocidad terminal es alcanzada.** Si se compara el movimiento de la gota cayendo en aceite vegetal y aire, se deduce que la gota alcanza más rápido la velocidad terminal en el aceite vegetal que en el aire.

Dado que la velocidad terminal es alcanzada rápidamente en el aceite vegetal, para encontrar la velocidad terminal de manera experimental, se puede analizar el movimiento de la gota que cae en el aceite una vez se ha esperado el tiempo suficiente y se conoce se encuentra en MRU. En dicho caso, una serie de medidas de la posición en función del tiempo puede ser registrado y dado que el movimiento es MRU, se conoce que la posición variará de la siguiente manera:

$$y(t) = y_0 + v_{terminal}t \tag{9}$$

De esta manera, al tener los registros de posición (y) y tiempo (t), la velocidad terminal ($v_{terminal}$) se encuentra realizando un ajuste de los datos registrados a la función que se conoce dichos datos cumplen (ecuación (9)). La pendiente m en la regresión lineal sería el dato de la velocidad terminal.

IV. Montaje Experimental

Materiales y Equipo

- Tubo de Moreu (probeta, ver figura 1)
- Celular con cámara digital
- Trípode con soporte universal de celulares
- Agua con color
- Gotero
- Computadora con Tracker instalado
- Regla y soporte para mantenerla en posición vertical
- Cartón con fondo blanco

Preparación

1. Coloque la probeta en un lugar adecuado y detrás de la misma coloque el cartón con fondo blanco. Coloque la regla con el soporte (que la mantiene en posición vertical) junto a la probeta.
2. Con cuidado, vierta el aceite vegetal dentro del tubo de vidrio hasta que el nivel del aceite alcance alrededor de 1-2 cm por debajo del borde superior de la probeta.
3. Delante de la probeta coloque el trípode e instale el celular en el soporte universal para móviles. Prepare el celular para comenzar a realizar la grabación de un video.
4. Verifique que el marco de grabación de la cámara del celular cubra la probeta y se alcance a notar la regla, apreciando de ella la escala de medida.

V. Tabla de Datos

No.	X_i	Y_i	X_iY_i	X_i^2	Y_i^2	$f(X_i)$	$(f(X_i)-Y_i)^2$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
Sumas							
	$\sum X_i$	$\sum Y_i$	$\sum X_iY_i$	$\sum X_i^2$	$\sum Y_i^2$		$\sum(f(X_i)-Y_i)^2$

Tabla 1: Registro de datos experimentales y cuadro que contienen los datos necesarios para hacer una regresión lineal.

VI. Procedimiento Experimental

Una vez habiendo preparado el montaje experimental, siga los siguientes pasos:

1. Introduzca la punta del gotero con agua en la columna de aceite en el tubo de Moreu (probeta), y deje caer una gota de tamaño mediano. Es importante que el gotero esté en contacto con la superficie del aceite cuando se suelta la gota. Esto asegura que tenemos control sobre la trayectoria que seguirá la gota, que no debe entrar en contacto con las paredes de la probeta, en caso de suceder repita el procedimiento.

2. Comience a grabar el recorrido de la gota con la cámara del celular, donde la gota debe verse con claridad.

3. Con el programa "Tracker" analice el video y obtenga datos de tiempo y posición. Para realizar el análisis lea atentamente la subsección "Análisis de Video y Recolección de Datos con Tracker", en el anexo.

4. De los datos obtenidos, tiempo y posición, registre 12 datos continuos en la Tabla 1, rellenándo las columnas X_i y Y_i (los datos deben estar en el sistema internacional de unidades). Asegúrese de tomar los datos en una sección del análisis del video, donde la gota presenta MRU. La columna X_i representa los datos de tiempo, mientras que la columna Y_i representa los datos de la posición de la gota.

VII. Tratamiento de datos experimentales

- Con objeto de ralizar la regresión lineal, ajuste, a los datos registrados, complete la Tabla 1. Para ello realice las operaciones correspondientes:
  - Para cada fila, rellene la celda de la columna X_iY_i, multiplicando el par de datos que se encuentran en las columnas: X_i, Y_i.
  - Para cada fila, rellene la celda de la columna X_i^2, elevando al cuadrado el dato escrito en la cela X_i.
  - Para cada fila, rellene la celda de la columna Y_i^2, elevando al cuadrado el dato escrito en la cela Y_i.
  - En la sección de "Sumas":
    - En la casilla superior a $\sum X_i$, coloque la suma de los datos de la columna X_i.
    - En la casilla superior a $\sum Y_i$, coloque la suma de los datos de la columna Y_i.
    - En la casilla superior a $\sum X_iY_i$, coloque la suma de los datos de la columna X_iY_i.
    - En la casilla superior a $\sum X_i^2$, coloque la suma de los datos de la columna X_i^2.
    - En la casilla superior a $\sum Y_i^2$, coloque la suma de los datos de la columna Y_i^2.
- Sabiendo que los datos tienen un comportamiento lineal, encuentra la función $f(x) = b + mx$ que se ajusta a los datos experimentales, usando la Tabla 1. Para ello:
  - Encuentre el valor de la pendiente m y el intercepto b, mediante:

$$m = \frac{N\sum X_iY_i - \sum X_i \sum Y_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \tag{10}$$

$$b = \frac{\sum X_i^2 \sum Y_i - \sum X_i \sum X_iY_i}{N\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2} \tag{11}$$

- Por el conocimiento de m y b, escriba la función de ajuste encontrada:

$$f(x) = b + mx \tag{12}$$

Recuerde que por comparación, la ecuación (12) es la misma que la ecuación (9), donde m se corresponde con $v_{terminal}$ y b se corresponde con y_0.

- Encuentre el valor de la cantidad S_y:
  - De la Tabla 1, para cada fila rellene la columna $f(X_i)$, evaluando la función $f(x) = b + mx$, con el correspondiente valor de X_i.
  - De la Tabla 1, para cada fila rellene la columna $(f(X_i) - Y_i)^2$, con el valor correspondiente de $f(X_i)$ y Y_i.
  - En la casilla superior a $\sum(f(X_i) - Y_i)^2$, coloque la suma de los datos de la columna $(f(X_i) - Y_i)^2$.
  - Calcue la cantidad S_Y, mediante:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(f(X_i) - Y_i)^2}{N - 2}} \tag{13}$$

- Encuentre el valor de la incertidumbre de la pendiente Δm y del intercepto Δb, mediante:

$$\Delta m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \tag{14}$$

$$\Delta b = S_y \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \tag{15}$$

- Exprese correctamente el valor de la pendiente m y del intercepto b

VIII. Análisis de Resultados

1. ¿Cuál es la ecuación que describe la posición en función del tiempo de la gota de agua en caída vertical a través del aceite? Proporcione los valores numéricos de las constante.

2. Si de los datos de la Tabla 1, se calula la velocidad promedio entre cada intérvalo de tiempo y distancia registrada, ¿la velocidad calculada sería igual a pendiente encontrada con (10)? Explique.

3. ¿Qué significado físico tiene el intercepto b calculado con (11)?

4. ¿Qué aspectos cualitativos son semejantes para el movimiento de una gota de agua que cae en aceite vegetal y una que cae en el aire? ¿En cuáles difiere?

IX. Conclusiones

- ¿Se verificó que la gota de agua en el aceite vegetal finaliza moviéndose de manera uniforme (MRU)? Explique por qué puedo verificarlo o por qué no.

- ¿Cuál es la velocidad terminal ($v_{terminal}$) de la gota de agua que se mueve en el acite vegetal? Exprese el valor correctamente.

Referencias

A. Serway, Raymond y Jr. John W. Jewett (1993). *Física para Ciencias e Ingeniería*. 3.ª ed. Mc Graw-Hill. Cap. 3. Movimiento en una dimensión.

F.W. Zemansky, Young M.W Sears y Freedman R.A. (1999). *Física Universitaria*. 9na. Pearson Education. Cap. 5.4 Fuerzas de fricción:Resistencia de fluidos y rapidez terminal.

Suazo, Maximino (s.f.). *Introducción a las mediciones e incertidumbres*. Cap. 1.7 Valor central e incertidumbres en medidas aleatorias; 3. Ajuste de datos experimentales.

Anexo

Anexo A: Análisis de Video y Recolección de Datos con Tracker

Toda esta sección es descrita con la versión online disponible de “Tracker”. Si usa una versión de escritorio, recuerde que ciertas variaciones pueden presentarse.

- Abra la aplicación de “Tracker”. Recuerde tenerlo previamente instalado en su computador, También pueda usar la versión online (link). Una pantalla similar a esta se le mostrará

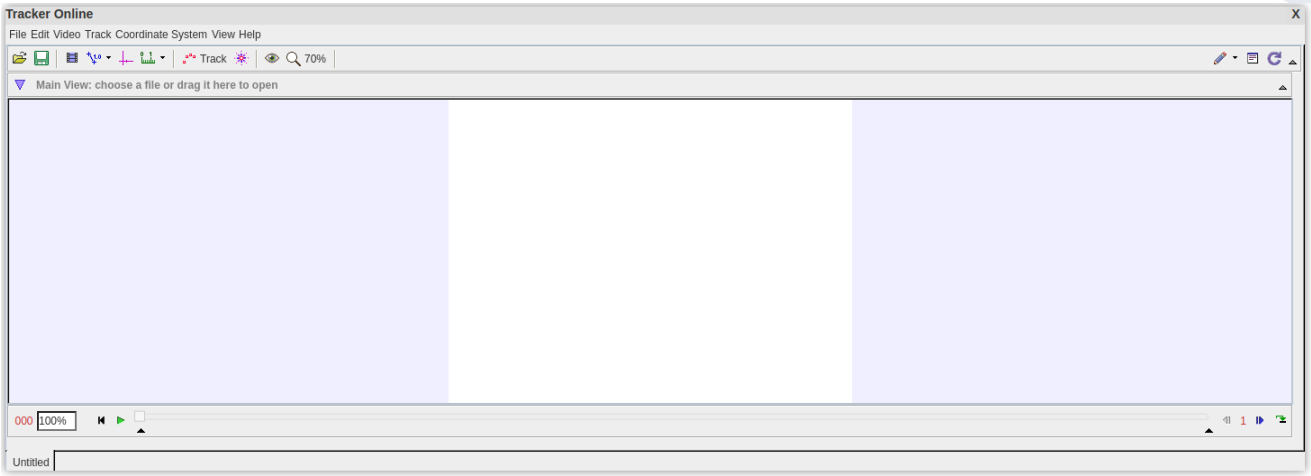


Figura 3: Vista inicial del programa Tracker

- Importe el video al programa. Recuerde haber pasado el video que desea analizar al computador que está usando. Para hacer la importación haga click en la opción “File” del menú superior, luego diríjase a la opción “Import” y un submenú se le abrirá, finalmente presione en “video”.

Figura 4: Importando un video a Tracker

Una opción similar a lo mostrado en la Figura 4 se le mostrará. Presione en “Choose File”, navegue entre los directorios hasta encontrar el video que desea analizar y seleccione el video

el video. El nombre del video se le mostrará en lugar de “No file chosen”. Presione finalemente en load. Una vista similar a la siguiente le será mostrada:

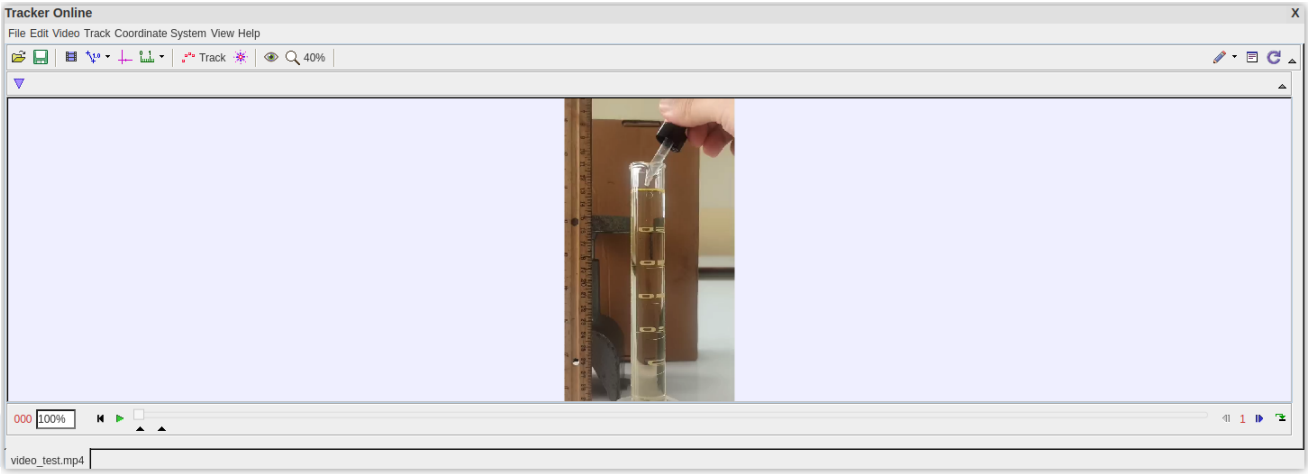


Figura 5: Vista inicial con el video por analizar importado

- Del menú principal presione el ícono mostrado con la flecha de la Figura 6. Diríjase a la opción “New”, un submenú se le abrirá, haga click en “Calibration Stick” (barra de calibración)

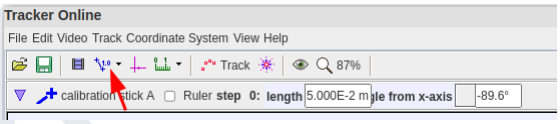


Figura 6: Añadiendo una barra de calibración

Una barra similar a la mostrada en la Figura 7 le aparecerá.

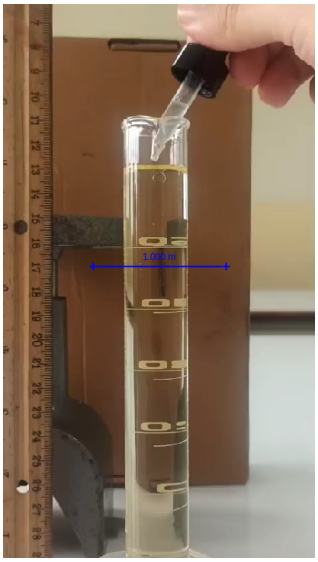


Figura 7: Añadiendo una barra de calibración

Mueva los extremos de la barra presionando con el botón izquierdo del mouse hasta encontrar puntos reconocibles de la regla. En el ejemplo de la Figura 8, el punto superior está en la marca 15cm de la regla y el inferior en la marca 20cm, ello indica que la barra calibradora tiene un valor de 5cm.

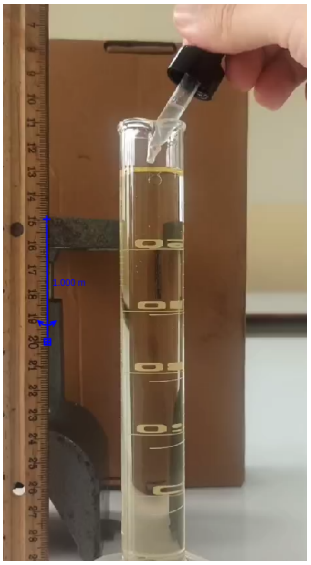


Figura 8: Añadiendo una barra de calibración

Finalmente haga doble click sobre el valor indicado en la barra calibradora y modifique por el valor que corresponde (en el ejemplo mostrado 0.05m), como se muestra en la Figura 9

Figura 9: Barra de calibración añadida

- Del menú principal, presione el ícono mostrado con la flecha en la Figura 10, para agregar un sistema de referencia. Dos ejes le serán mostrados, como se aprecia en la Figura 11

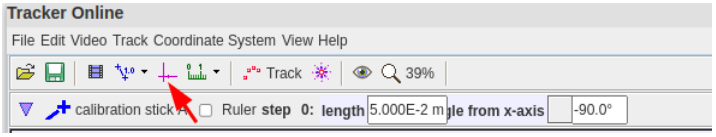


Figura 10: Añadiendo ejes

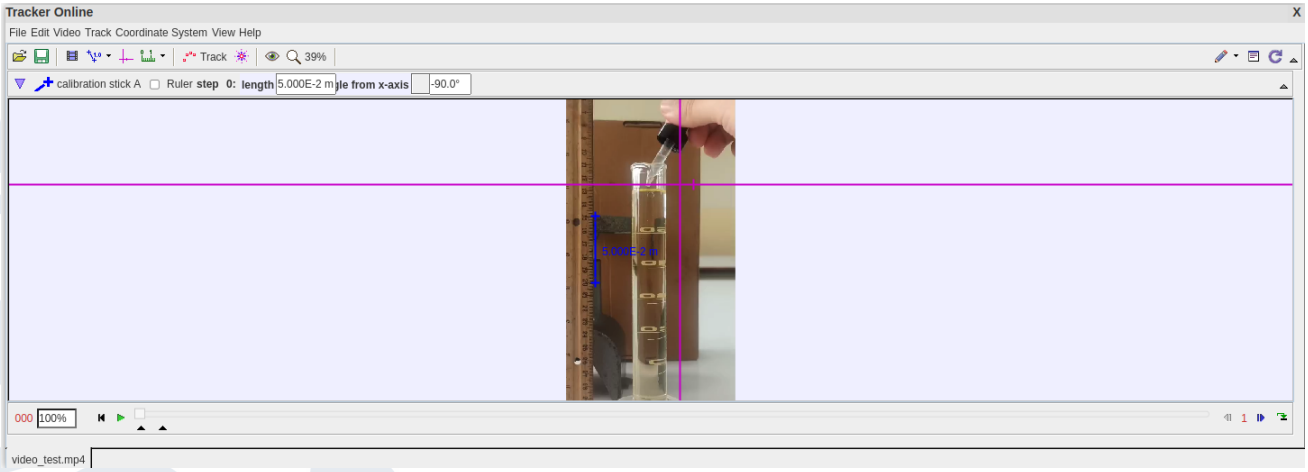


Figura 11: Añadiendo ejes

Presionando con el botón izquierdo del mouse, donde se indica en la Figura 12, gire el eje 180° en sentido antihorario. El giro permitirá definir hacia abajo el sentido positivo del eje vertical. La Figura 13, muestra cómo queda finalmente el eje, que puede moverlo hacia un lugar que no le dificulte la vista del video.

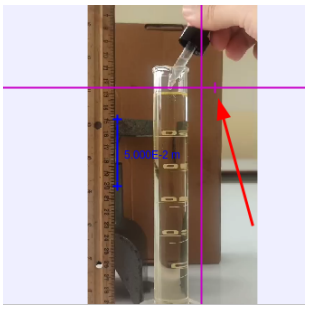


Figura 12: Añadiendo ejes

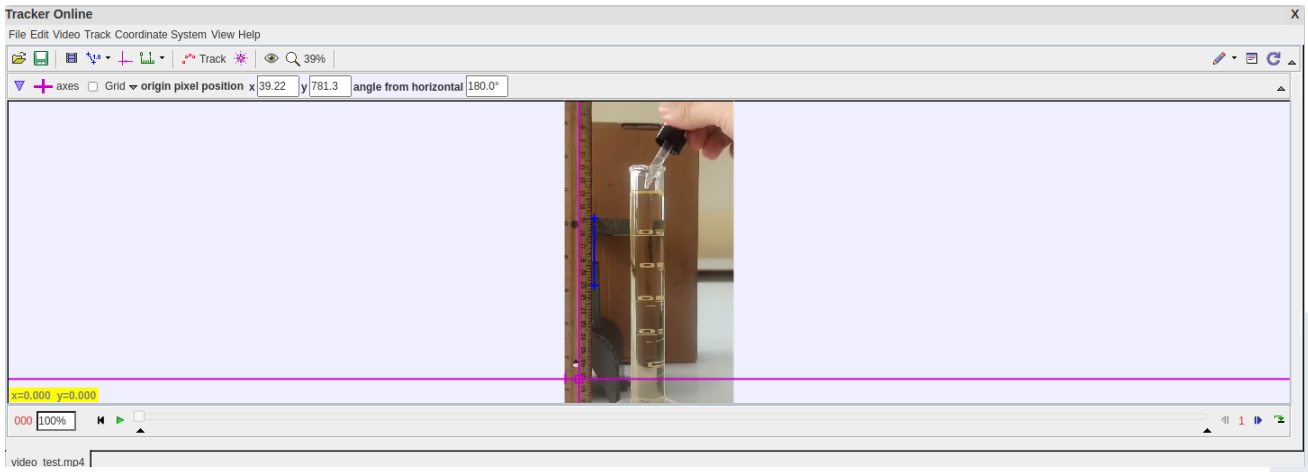


Figura 13: Eje añadido

- Para hacer el análisis, es necesario definir las partes del video que necesita ser analizado. Para ello determine los minutos, inicial y final, del video que necesita analizar. Una vez determinado, tal como se muestra en la imagen 14, presione el click derecho del mouse sobre el minuto final de la barra de tiempo del video y del submenú desplegado presione en "set end frame to slider", para determinar el punto (minuto) final del video.

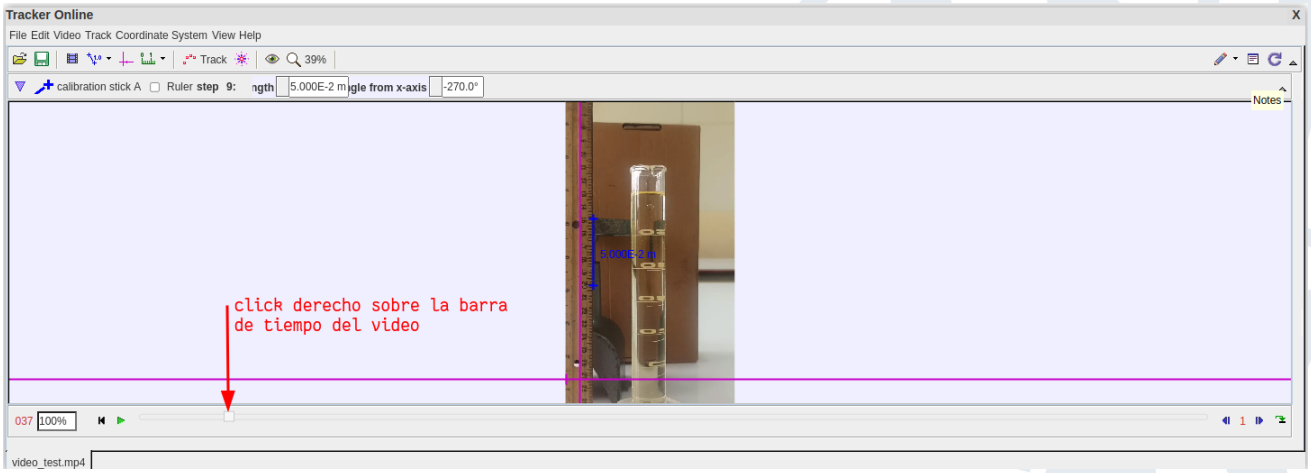


Figura 14: Determinando los minutos del video por analizar

Como se muestra en la Figura 15, dos puntos serán mostrados, puede mover dichos puntos hasta ajustar los minutos del video que quire formen parte del análisis. En caso de perder los puntos de referencia, repita el proceso de configurar el punto final de análisis del video.

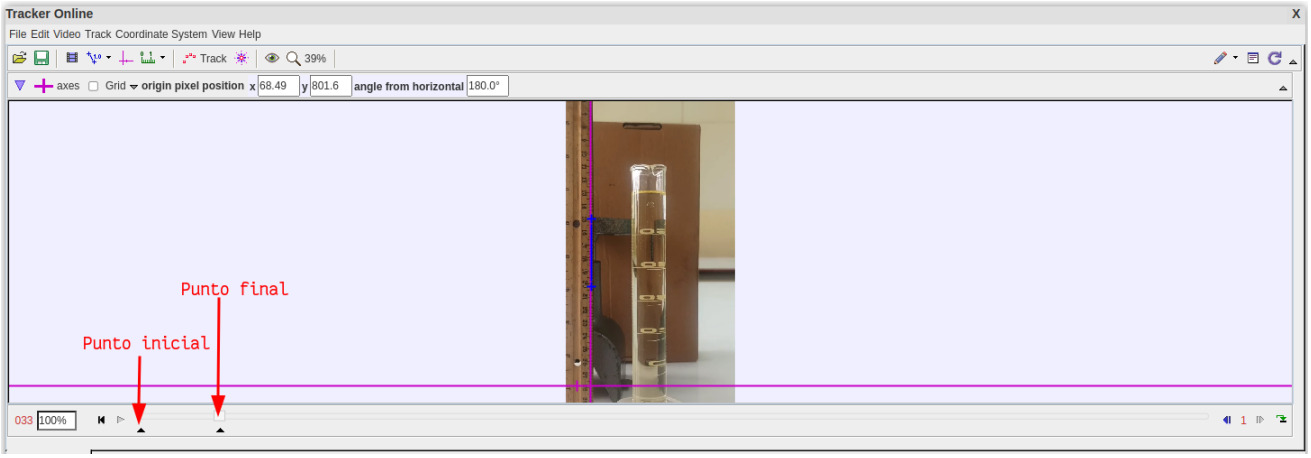


Figura 15: Determinando los minutos del video por analizar

- Finalmente, se debe establecer lo que se necesita debe ser rastreado por Tracker para analizar el movimiento, en nuestro caso la gota de agua cayendo en el aceite. Para ello presione del menú principal, en el ícono indicado con la flecha en la Figura 16. Del menú mostrado presione en "New" y finalmente en "Point Mass", como se aprecia en la Figura 17.

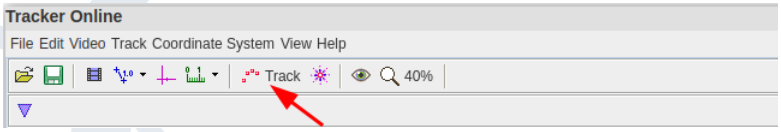


Figura 16: Seleccionando el objeto por analizar

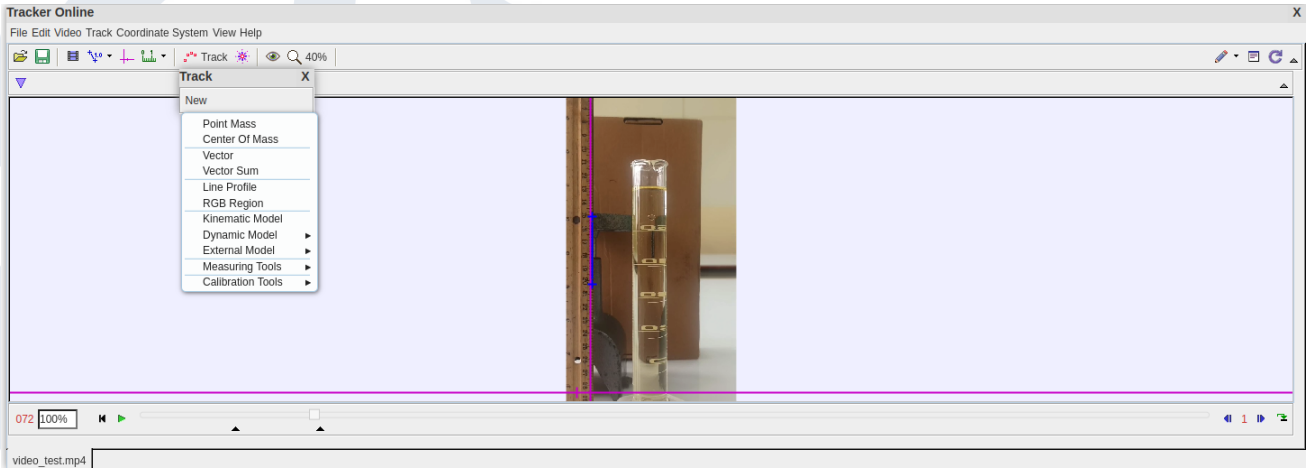


Figura 17: Seleccionando el objeto por analizar

Luego, asegurándose que está en el minuto inicial del video, mientras mantiene presionadas las teclas: "Ctrl+Shift" y manteniendo presionado el botón izquierdo del mouse, encierre el objeto que desea ser analizado el movimiento (en el ejemplo la gota de agua). Una imagen similar a la mostrada en la Figura 18, le quedará en pantalla.

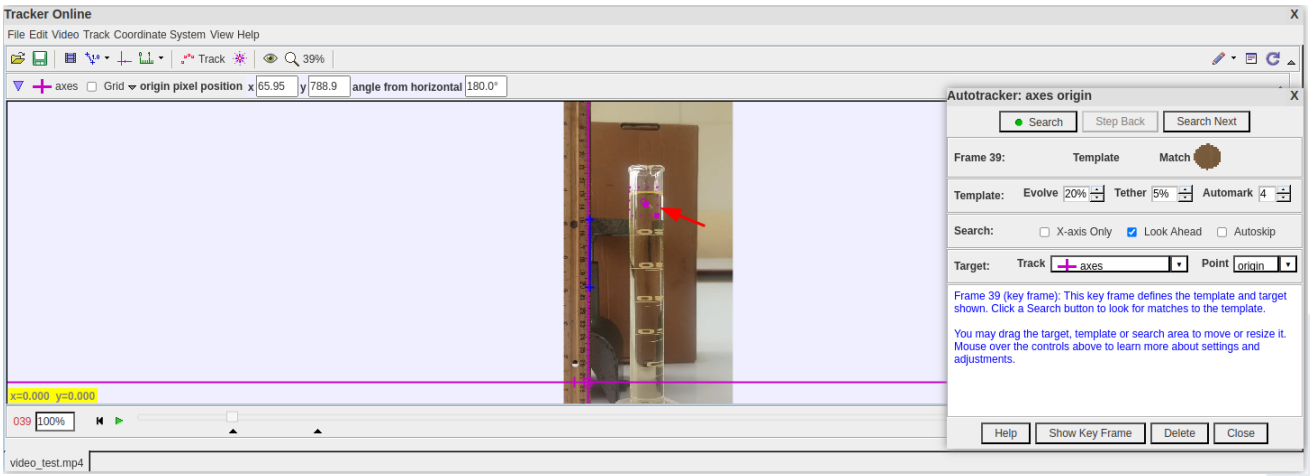


Figura 18: Seleccionando el objeto por analizar

El recuadro señalado con la flecha en la Figura 18, puede ser ajustado, de modo que encierre con claridad el área donde se encuentra el objeto que necesita ser rastreado por Tracker. Al hacerlo notará que existirá un círculo además del recuadro, ajuste dicho circulo alrededor del objeto que desea rastrear. La imagen de lo que encierra el círculo le será mostrada en el programa, como se aprecia en la Figura 19.

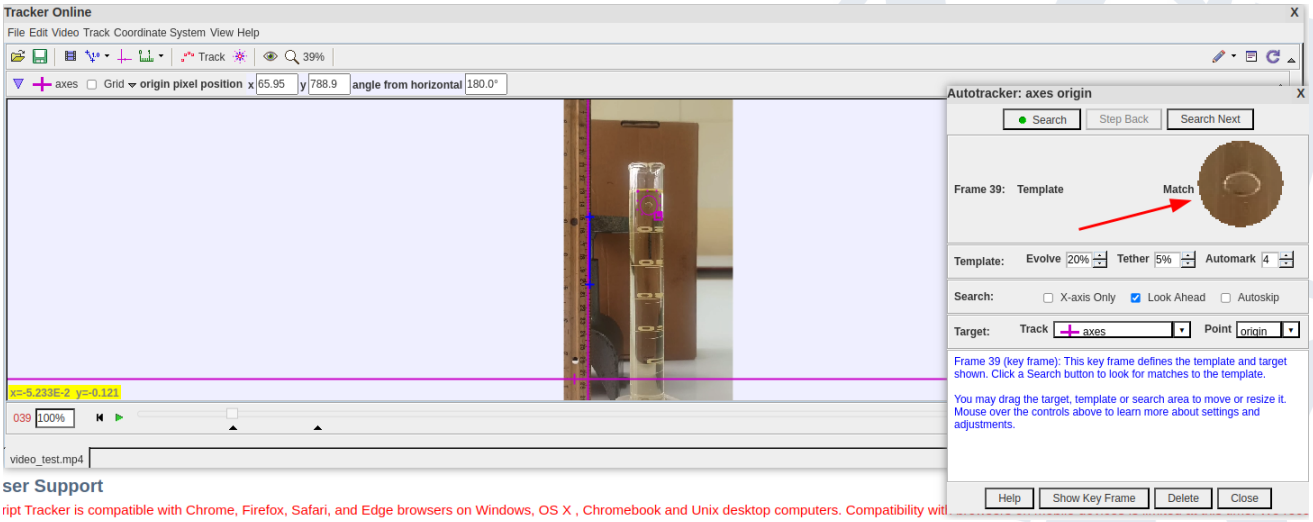


Figura 19: Seleccionando el objeto por analizar

- Si el objeto ha sido determinado correctamente, Tracker lo rastreará automáticamente en cada uno de los frames que componen al video. Y automáticamente proveerá los datos de la posición (x y y) y el tiempo t, del objeto que rastrea. Para inicial el análisis presione el botón "Search", como se muestra en la Figura 20.

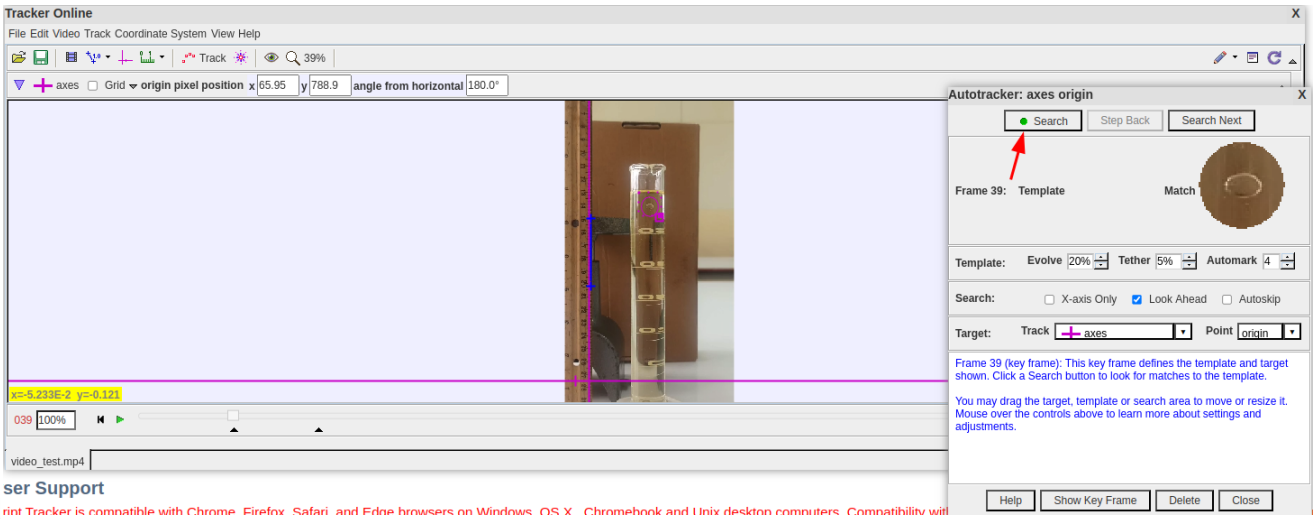


Figura 20: Analizando el video

Los datos recopilados, los podrá observar en un recuadro dentro del programa, tal y como se aprecia en la Figura 21. Puede seleccionar dichos datos y copiarlos en algún otro lugar de interés.

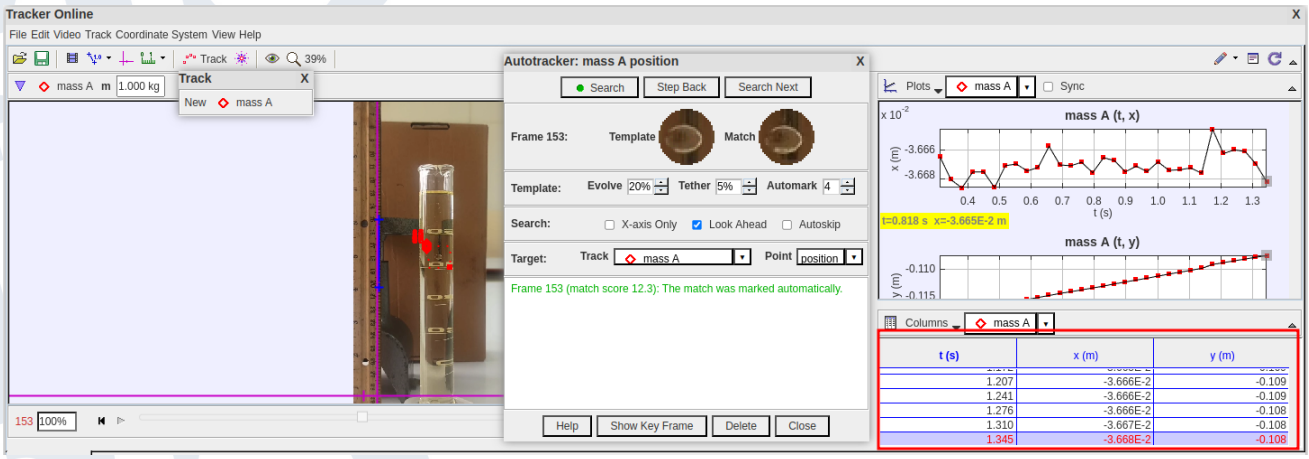
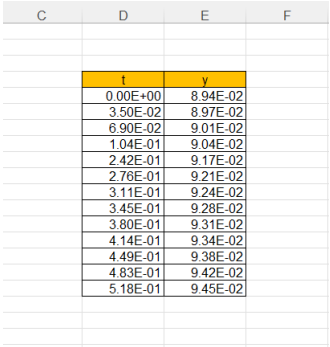


Figura 21: Obteniendo los datos del movimiento

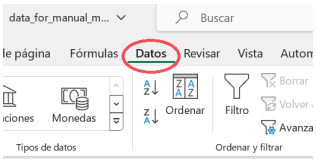
Anexo B: Ajuste lineal en Excel

Un ajuste lineal o regresión lineal puede realizarse en el programa Excel a través de los siguientes pasos:

1. Para comenzar con el ajuste lineal es necesario escribir los pares de datos en las celdas de Excel. Como sugerencia, los datos deben disponerse en columnas como lo muestra la figura. En este caso se muestran valores de posición vertical y valores de tiempo correspondientes a las posiciones verticales.

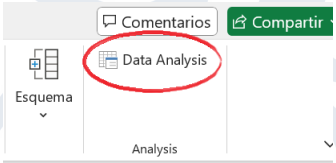


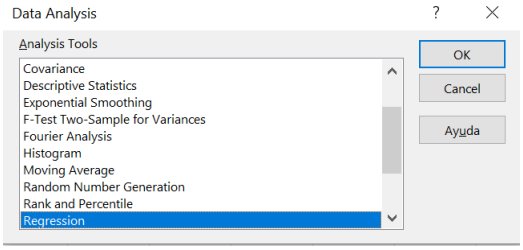
t	y
0.00E+00	8.94E-02
3.50E-02	8.97E-02
6.90E-02	9.01E-02
1.04E-01	9.04E-02
2.42E-01	9.17E-02
2.76E-01	9.21E-02
3.11E-01	9.24E-02
3.45E-01	9.28E-02
3.80E-01	9.31E-02
4.14E-01	9.34E-02
4.49E-01	9.38E-02
4.83E-01	9.42E-02
5.18E-01	9.45E-02



2. Hacer click en la pestaña llamada `Datos`.

3. Una vez en la pestaña `Datos` se debe buscar la opción `Análisis de Datos` o `Data Analysis`, como indica la figura.



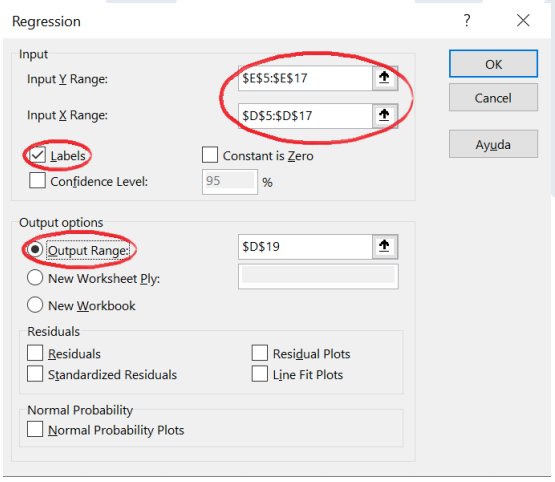


4. Aparecerá el cuadro `Data Analysis` y debe seleccionarse la opción `Regresion`, posteriormente dar click en `OK`

5. Aparecerá el siguiente cuadro. En las casilla `Input Y Range` y `Input X Range` se debe indicar las celdas que contienen la ordenada vertical y la ordenada horizontal.

   Adicionalmente, se debe marcar la opción `Labels` o `Rótulos`; esto hará que se muestren una tabla de resultados con el nombre de cada valor calculado.

   Finalmente, en la casilla `Output Range` o `Rango de Salida` se indicará la celda donde se desea que aparezcan los resultados. Hacer click en `OK`



SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.99990919
R Square	0.99981838
Adjusted R Sc	0.99980022
Standard Erro	2.2462E-05
Observations	12

ANOVA

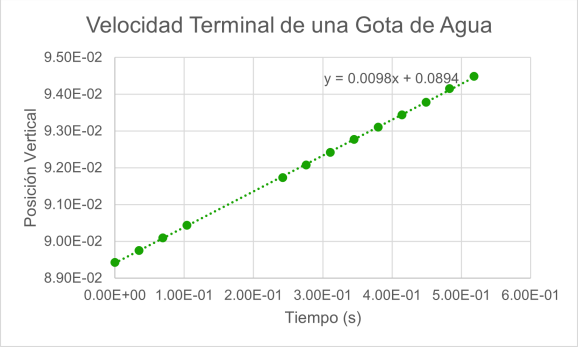
	df	*SS*	*MS*	*F*	*Significance F*
Regression	1	2.7774E-05	2.7774E-05	55050.5846	4.8633E-20
Residual	10	5.0452E-09	5.0452E-10		
Total	11	2.7779E-05			

	Coefficients	*Standard Error*	*t Stat*	*P-value*	*Lower 95%*	*Upper 95%*	*Lower 95.0%*	*Upper 95.0%*
Intercept	0.08940108	1.4161E-05	6313.12417	2.4471E-34	0.08936953	0.08943263	0.08936953	0.08943263
Pendiente	0.00977556	4.1664E-05	234.62861	4.8633E-20	0.00968273	0.00986839	0.00968273	0.00986839

6. Aparecerá una tabla con los resultados del ajuste lineal. El círculo rojo encierra los resultados para la pendiente y el intercepto con su respectivo error.

7. Adicionalmente, si se desea elaborar un gráfico mostrando los datos y así observar su tendencia, se deben seleccionar las dos columnas que contienen los datos e insertar un gráfico de dispersión. Esta última opción se encuentra en la pestaña `Insertar`.

   Si se desea que aparezca el polinomio de ajuste en el gráfico se deben seleccionar los puntos que representan los datos y hacer click derecho. Luego, seleccionar la opción `Agregar línea de tendencia`. Finalmente, en el panel de la derecha, marcar la opción `Presentar ecuación en el gráfico`.



Anexo C: Análisis del Movimiento de una gota que cae en un medio

La Figura 22, muestra cómo se comportan las cantidades de interés mientra la gota está cayendo, analice la imagen cuidadosamente.

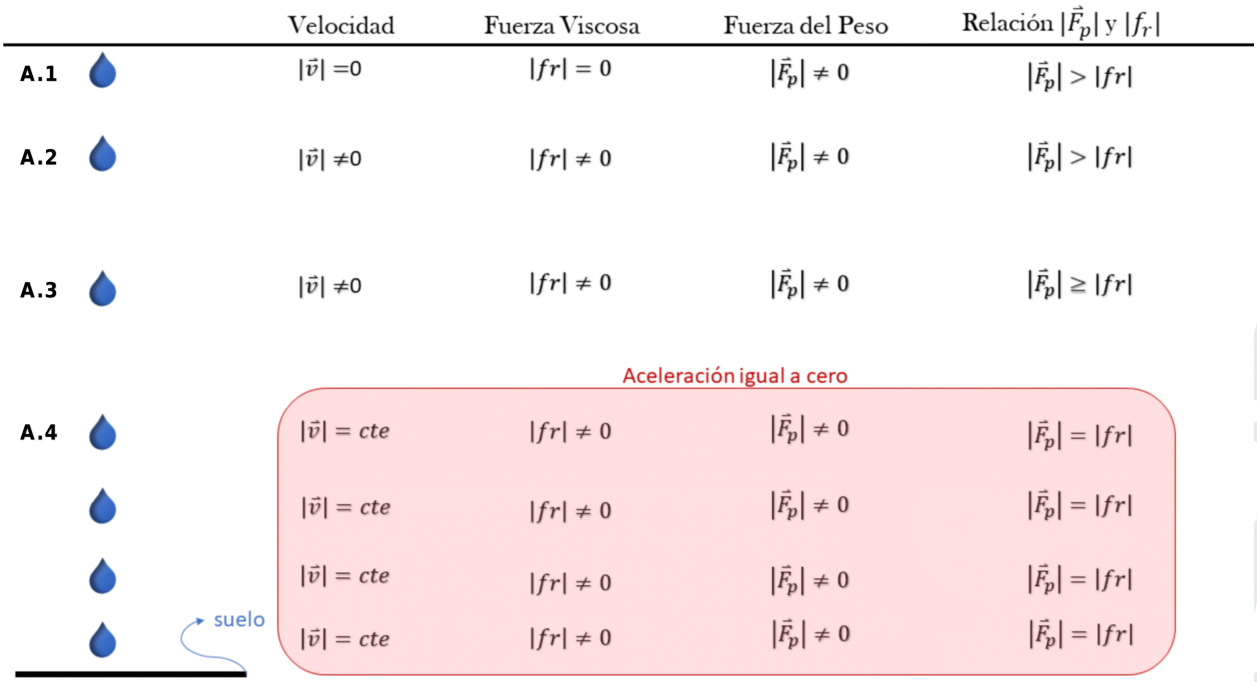


Figura 22: Descripción de las cantidades físicas en el moviemiento de la gota que cae en un medio.

De la Figura 22, se observa que:

A.1 Inicialmente la velocidad de la gota es cero y por ello la magnitud de la fuerza de arrastre es cero, pero dado que el peso es diferente de cero, la gota comienza el movimiento acelerando y por ende aumentando la velocidad a medida la gota se mueve y transcurre el tiempo.

A.2 Después que la gota se encuentra en movimiento, debido a que la velocidad es distinta de cero, la fuerza de arrastre también es diferente de cero. Pero la magnitud de la fuerza de arrastre aún es inferior a la magnitud del peso, por tanto, la gota aún tiene una aceleración neta distinta de cero, aunque es menor en magnitud que la inicial.

A.3 En cierto punto del movimiento, llega un punto en que la velocidad alcanza un valor que hace que la fuerza de arrastre sea casi igual a la fuerza del peso. Por tanto, la aceleración es pequeña y cercana a cero, ello significa que la velocidad ya no crece de manera significativa y por ende la fuerza de arrastre tampoco.

A.4 Finalmente, llega un punto del movimiento en el cual la magnitud de la velocidad hace que la fuerza de arrastre iguale a la fuerza del peso. Lo anterior significa que la aceleración de la gota se vuelve nula y por ende la velocidad alcanza un valor estable o constante. Es evidente que la fuerza de arrastre no sigue creciendo, dado que la aceleración es cero y la velocidad no crece. A partir de este punto el movimiento se describirse con las ecuaciones en MRU.