**Universidad Nacional Autónoma de Honduras**

**Facultad de Ciencias**
**Escuela de Física**

# Medición del Momento de Inercia Utilizando un Péndulo Físico

**Elaborada por:** H. Maradiaga, D. Bulnes.
**Revisado por:** R. Mejía, J. Hernández, D. Sosa, M.F. Cálix.

## Introducción

Así como la masa representa una medida del nivel de inercia y energía cinética que presenta un cuerpo en movimiento traslacional, el momento de inercia permite describir la dinámica que un objeto presenta al sufrir un movimiento rotacional. El momento de inercia de un cuerpo depende de la masa y geometría del objeto. Se sabe que existe una relación directa entre el periodo de oscilación de un péndulo físico y su momento de inercia, esta relación se establece por medio de la ecuación del movimiento armónico simple del péndulo físico. Se utilizarán estos conceptos para analizar el movimiento armónico simple de dos tipos de péndulo físico: un disco sólido y un anillo. Finalmente, será posible medir el momento de inercia de estos objetos.

## Objetivos

1. Medir el valor del momento de inercia de un disco y un anillo, considerando movimiento armónico simple.
2. Verificar si existe una dependencia entre el ángulo máximo de oscilación y el periodo del movimiento armónico simple para el péndulo físico.

# Marco teórico

El movimiento armónico simple (MAS) es un movimiento periódico en el cuál hay una fuerza de restitución directamente proporcional al desplazamiento de un objeto respecto a su punto de equilibrio.

1. Utilice su libro de texto y defina los siguientes conceptos:
   - Movimiento Periódico
   - Momento de Inercia
   - Teorema de Ejes Paralelos
   - Péndulo Físico
   - Periodo de Oscilación
   - Frecuencia angular
   - Amplitud de Oscilación
2. Considere un péndulo físico formado por un disco sólido de radio $a$.
   - Haga un diagrama o bosquejo del sistema.
   - Realice el diagrama de fuerzas correspondiente.
   - Plantee la segunda ley de Newton para dinámica rotacional y obtenga así la ecuación diferencial que describe el movimiento armónico simple del péndulo físico, e identifique la frecuencia angular $\omega$.
   - A partir de la expresión de la frecuencia angular $\omega$ encontrada anteriormente

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

     donde $d$ es la distancia desde el punto de giro y hasta el centro de masa del péndulo, $m$ la masa del péndulo, y $g$ la aceleración gravitacional. Determine una expresión para el momento de inercia del centro de masa $I_{cm}$ del disco de radio $a$. **Observación:** Recuerde utilizar el teorema de ejes paralelos.

## Materiales y equipo

*a*) Anillo de metal

*b*) Disco sólido de metal

*c*) Soporte de mesa con barra

*d*) Balanza Granataria

*e*) Sensor de movimiento rotatorio PASPORT

*f*) Interfaz digital SPARK

*g*) Cinta métrica

# Procedimiento experimental

## Mediciones para obtener $I_{cm}$ utilizando valor de $a$, $T$ e incertidumbres de $T$ para el disco sólido

Para analizar el comportamiento del péndulo físico compuesto por un disco sólido, se dispone de un montaje experimental ilustrado en la figura 1. Este consta de una barra de soporte montada sobre una base y un sensor de movimiento rotatorio PASPORT sujeto a la barra donde se coloca el cuerpo rígido.

1. Antes de colocar el disco sólido en el sensor, utilice la cinta métrica para medir el radio $a$ y registre el valor en la Tabla 1. Si resulta más conveniente, puede medir el diámetro del disco y luego dividirlo entre 2 para obtener el radio. Sea muy preciso en la medición.

2. Registre el valor de la incertidumbre en la medición del radio, $\delta a$. En este caso, la incertidumbre instrumental asociada al radio $a$ es la mínima medida que se puede obtener con la cinta métrica, que es 1 mm.

3. Con ayuda de una balanza granataria, mida la masa $m$ del disco sólido y regístrelo en la Tabla 1 junto con su respectiva incertidumbre $\delta m$.

4. El disco sólido se coloca en el sensor y se asegura mediante un tornillo ajustable. Con la ayuda de su instructor(a) monte primero el disco sólido para realizar las mediciones correspondientes a la Tabla 1.

5. Para realizar la medición del tiempo, se utilizará la interfaz SPARK, configurada en la hoja de péndulo físico. La interfaz está configurada para registrar mediciones durante 20 segundos.

6. Seleccione en la interfaz la tabla para mediciones de tiempo y ángulo en grados. Mueva suavemente el péndulo, formando un arco paralelo al plano, hasta alcanzar un ángulo máximo menor a 10°. Observe la pantalla de la interfaz para determinar el ángulo deseado. Utilizar un ángulo máximo que cumpla la condición $\theta < 10°$ permite aplicar la aproximación de ángulos pequeños $\sin\theta \approx \theta$. Registre el ángulo máximo fijado en la Tabla 1.

7. Antes de soltar el péndulo físico, borre los datos de la interfaz registrados para el posicionamiento del ángulo máximo. Estos datos no son de interés hasta el momento.

8. Una vez se genera la nueva tabla, suelte el péndulo y deje que transcurra la toma de datos de 20 segundos.

9. Posteriormente ingrese una nueva página en el SPARK con la función especial *Periodo*, la cual calculará el periodo de 10 oscilaciones a partir de los datos registrados. Seleccione el símbolo de estadística ($\Sigma$) en la interfaz para desplegar el valor de la media del periodo y la desviación estándar del periodo. Registre estos valores en la Tabla 1.

10. Repita 5 veces más los pasos 5 al 9.

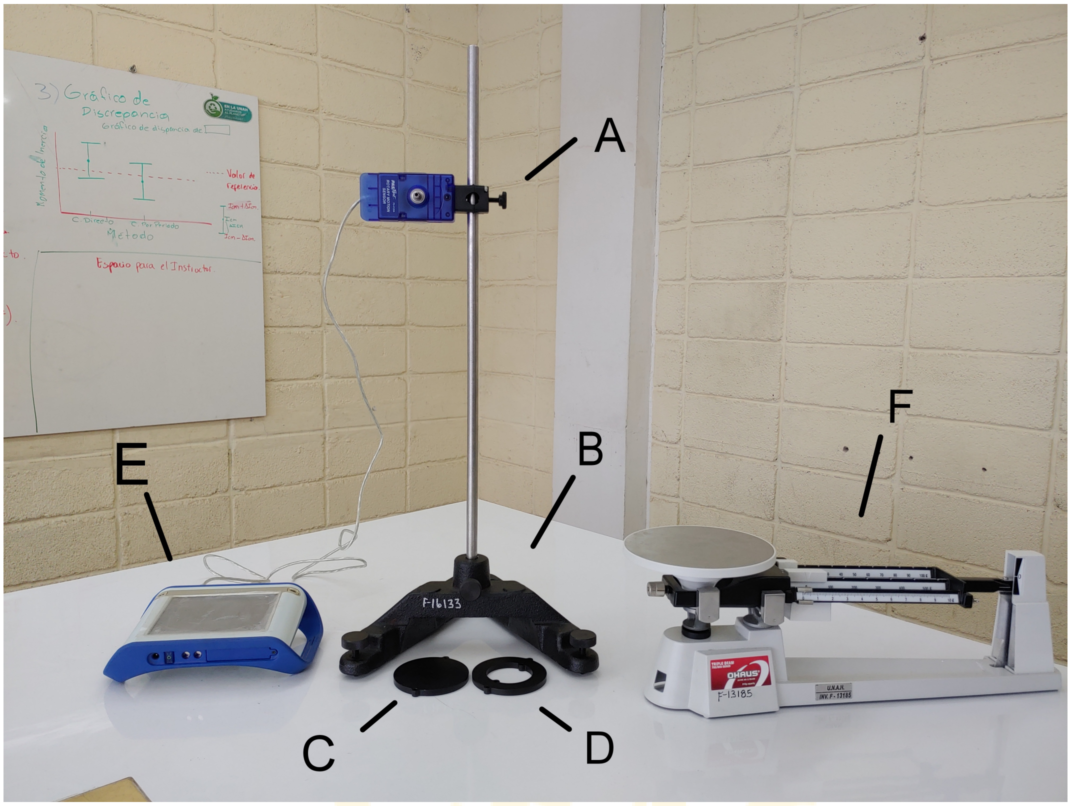


Figura 1: Esquema de Montaje Experimental para el Péndulo Físico.
**A:** Sensor giratorio, **B**: Base, **C**: Disco sólido, **D**: Anillo, **E**: Interfaz Spark, **F**: Balanza granataria.

## Mediciones para obtener $I_{cm}$ utilizando valor de $a$, $T$ e incertidumbres de $T$ para el anillo

Para analizar el comportamiento del péndulo físico compuesto por un anillo de radio externo $a$ y radio interno $b$, se dispone de un montaje experimental ilustrado en la figura 1. Este consta de una barra de soporte montada sobre una base y un sensor de movimiento rotatorio PASPORT sujeto a la barra donde se coloca el cuerpo rígido.

1. Antes de colocar el anillo en el sensor, utilice la cinta métrica para medir el radio externo $a$ y el radio interno $b$ y registre los valores en la Tabla 2. Si resulta más conveniente, puede medir el diámetro externo e interno del disco y luego dividir cada valor entre 2 para obtener el radio externo e interno, respectivamente. Sea muy preciso en la medición.

2. Registre el valor de la incertidumbre en la medición del radio externo $a$ y radio externo $b$. La incertidumbre asociada a estas mediciones es la misma discutida en el procedimiento anterior.

3. Con ayuda de una balanza granataria mida la masa $m$ del anillo y regístrelo en la Tabla 2, junto con su respectiva incertidumbre $\delta m$.

4. Con ayuda de su instructor(a), reemplace el disco sólido antes colocado en el sensor por el anillo. Con este se realizaran las mediciones para la Tabla 2.

5. Para realizar la medición del tiempo, se utilizará la interfaz SPARK, configurada en la hoja de péndulo físico. La interfaz esta configurada para registrar mediciones durante 15 segundos.
6. Seleccione en la interfaz la tabla para mediciones de tiempo y ángulo en grados. Mueva suavemente el péndulo, formando un arco paralelo al plano, hasta alcanzar un ángulo máximo menor de $10°$. Observe la pantalla de la interfaz para determinar el ángulo deseado. Utilizar un ángulo máximo que cumpla la condición $\theta < 10°$ permite aplicar la aproximación de ángulos pequeños $\sin\theta \approx \theta$. Registre el ángulo máximo fijado en la Tabla 2.
7. Antes de soltar el péndulo, borre los datos de la interfaz registrados para el posicionamiento del ángulo máximo. Estos datos no son de interés hasta el momento.
8. Una vez se genera la nueva tabla, suelte el péndulo y deje que transcurra la toma de datos de 15 segundos.
9. Posteriormente ingrese una nueva página en el SPARK con la función especial *Periodo*, la cual calculará el periodo de 10 oscilaciones a partir de los datos registrados. Seleccione el símbolo de estadística ($\Sigma$) en la interfaz para desplegar el valor de la media del periodo y la desviación estándar del periodo. Registre estos valores en la Tabla 2.
10. Repita 5 veces más los pasos 5 al 7.

### Mediciones para obtener $I_{cm}$ por medio de mediciones directas de masa $m$ y radios $a$, y $b$

- Con ayuda de una balanza granataria, realice la medición de la masa $m$ del disco sólido y del anillo. Registre estos valores en la Tabla 1, para el disco sólido y en la Tabla 2 para el anillo.
- Con ayuda de una cinta métrica mida el radio $a$ del disco sólido, registre la medición en la Tabla 1.
- Utilizando la cinta métrica, mida el radio interior $b$ y el radio exterior $a$ del anillo, registre ambos datos en la Tabla 2.

# Registro de datos experimentales

## Registro de datos para el procedimiento experimental 1

| N° | $\theta_{max}$ (°) | $\bar{T}_i$ (s) | $N$ | $\sigma_{\bar{T}_i}$ (s) | $\delta\bar{T}_i$ (s) | $\bar{T}$ (s) | $\Delta T$ (s) | $a$ (m) | $\delta a$ (m) | $m$ (g) | $\delta m$ (g) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | |

Tabla 1: Registro de Datos para el movimiento armónico simple del disco sólido.

### Registro de datos experimentales para el procedimiento experimental 2

| N° | $\theta_{max}$ (°) | $\bar{T}_i$ (s) | N | $\sigma_{\bar{T}_i}$ (s) | $\delta\bar{T}_i$ (s) | $\bar{T}$ (s) | $\Delta T$ (s) | $a$ (m) | $\delta a$ (m) | $b$ (m) | $\delta b$ (m) | $m$ (g) | $\delta m$ (g) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | |

Tabla 2: Registro de Datos para el movimiento armónico simple del anillo.

# Tratamiento de datos experimentales

## Cálculo de $I_{cm}$ utilizando valor promedio de $T$

Para obtener $I_{cm}$ por este método se hará uso de los datos obtenidos en las Tablas 1.

- **Análisis de Periodo**
  Cada uno de los cálculos que se obtengan a continuación deben ser anotados en la Tabla 1

  - Calcule la incertidumbre $\delta\bar{T}_i$ por medio de la desviación estándar de la media de los datos y tomando la incertidumbre instrumental como la división de la desviación estándar generada por la interfaz digital SPARK entre el número promedio de mediciones $N$.

$$\delta\bar{T}_i = \frac{\sigma_{\bar{T}_i}}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

  - Para cada una de las mediciones realizadas reporte el valor de $T_i$, con sus respectivas unidades, de la forma:

$$T_i = \bar{T}_i \pm \delta\bar{T}_i \tag{2}$$

    Tome en cuenta que la incertidumbre debe redondearse a una cifra significativa y que el valor de $\bar{T}_i$ y su incertidumbre $\delta\bar{T}_i$ deben tener la misma cantidad de cifras decimales.

  - Escoja el valor que más se repite de todas las $\delta\bar{T}_i$, ese será el valor para $\Delta T$. Este valor se conoce como la **moda estadística**, la cual nos indica que, en un set de varias mediciones, el valor representativo de los datos es aquel que más se repite.

  - Finalmente reporte el valor del periodo como:

$$T = \bar{T} \pm \Delta T \tag{3}$$

    Con sus respectivas unidades y donde $\bar{T}$ es el promedio de las $\bar{T}_i$

- **Calculando $I_{cm}$ por medio de los valores reportados de $a$ y $\bar{T}$ para el disco sólido**
  Utilizando el teorema de ejes paralelos, se procederá a el cálculo del momento de inercia con respecto al centro de masa $I_{cm}$ para el disco sólido con los valores reportados de $a$, $\bar{T}$ y $m$ haciendo uso de la ecuación:

$$\langle I_{cmd} \rangle = md\left(\frac{\bar{T}^2 g}{4\pi^2} - d\right) \tag{4}$$

Con $d = a$, el radio del disco sólido.

Para encontrar $\Delta I_{cmd}$ se hace uso de la fórmula:

$$\Delta I_{cmd} = \langle I_{cmd} \rangle \sqrt{\left(1 - \frac{ma^2}{\langle I_{cmd} \rangle}\right)^2 \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{ma^2}{\langle I_{cmd} \rangle}\right)^2 \left(2\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2} \tag{5}$$

Finalmente se expresa $I_{cmd}$ como:

$$I_{cmd} = \langle I_{cmd} \rangle \pm \Delta I_{cmd} \tag{6}$$

Donde $I_{cmd}$ es el momento de inercia del disco sólido, con respecto al centro de masa. El error solo debe tener una cifra significativa y el valor central debe contener el mismo número de cifras decimales del error total.

- **Calculando $I_{cm}$ por medio de los valores reportados de $a$ y $\bar{T}$ para el anillo**

Se procederá a realizar el cálculo de la momento de inercia del anillo con los valores reportados de $a$, $\bar{T}$ y $m$ haciendo uso de la ecuación:

$$\langle I_{cma} \rangle = md\left(\frac{\bar{T}^2 g}{4\pi^2} - d\right) \tag{7}$$

Con $d = a$, el radio del anillo.

Para encontrar $\Delta I_{cma}$ se hace uso de la fórmula:

$$\Delta I_{cma} = \langle I_{cma} \rangle \sqrt{\left(1 - \frac{ma^2}{\langle I_{cma} \rangle}\right)^2 \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{ma^2}{\langle I_{cma} \rangle}\right)^2 \left(2\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2} \tag{8}$$

Finalmente se expresa $I_{cma}$ como:

$$I_{cma} = \langle I_{cma} \rangle \pm \Delta I_{cma} \tag{9}$$

El error solo debe tener una cifra significativa y el valor central debe contener el mismo número de cifras decimales del error total.

## Cálculo de $I_{cm}$ por método directo

- **Cálculo del momento de Inercia $I_{cm-disco-solido}$ para el disco sólido**
  Para obtener $I_{cm-disco-solido}$ por el método de cálculo directo hará uso de los datos obtenidos en la Tabla 1. Se procederá a hacer el cálculo del momento de inercia utilizando los valores de masa $m$ y el radio $a$ para el disco sólido haciendo uso de la ecuación:

$$I_{cm-disco-solido} = \frac{1}{2}mR^2 \tag{10}$$

  Donde $R = a$, es el radio del disco.

  Para encontrar la incertidumbre por método directo de $\Delta I_{cm-disco-solido}$ se hará uso de la siguiente ecuación:

$$\Delta I_{cm-disco-solido} = \langle I_{cm-disco-solido}\rangle \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta R}{R}\right)^2} \tag{11}$$

  Finalmente se expresa el resultado en forma estándar $I_{cm-disco-solido}$ como:

$$I_{cm-disco-solido} = \langle I_{cm-disco-solido}\rangle \pm \Delta I_{cm-disco-solido} \tag{12}$$

- **Cálculo de momento de Inercia $I_{cm-anillo}$ para el anillo**

  Para obtener $I_{cm-anillo}$ por el método de cálculo directo hará uso de los datos obtenidos en la Tabla 2. Se procederá a hacer el cálculo del momento de inercia utilizando los valores de masa $m$, el radio interno $a$ y el radio externo $b$ para el anillo haciendo uso de la ecuación:

$$I_{cm-anillo} = \frac{1}{2}m(R_i^2 + R_0^2) \tag{13}$$

  Siendo $R_i = b$, el radio interno del anillo y $R_0 = a$, el radio exterior del anillo.

  Determine la incertidumbre por método directo de $\Delta I_{cm-anillo}$ por medio de la siguiente expresión:

$$\Delta I_{cm-anillo} = \langle I_{cm-anillo}\rangle \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{R_i\ \delta R_i}{R_0^2 + R_i^2}\right)^2 + \left(2\frac{R_0\ \delta R_0}{R_0^2 + R_i^2}\right)^2} \tag{14}$$

  Finalmente se expresa el resultado en forma estándar $I_{cm-anillo}$ como:

$$I_{cm-anillo} = \langle I_{cm-anillo}\rangle \pm \Delta I_{cm-anillo} \tag{15}$$

# Análisis de resultados

1. Calcule el error porcentual de sus resultados tomando el valor dado por el fabricante como $I_{cm} = 7.5 \times 10^{-5}$ kg $\cdot$ m$^2$ para el disco sólido.

   - Error porcentual:
     Para determinar el error porcentual de cada medición realizada se hace uso de la siguiente ecuación:
$$\%E = \frac{|E_{teo} - E_{exp}|}{E_{teo}} \times 100\,\% \tag{16}$$

2. Calcule la incertidumbre relativa porcentual de sus resultados y mencione si son exactos y/o precisos de acuerdo al criterio del 5 %. Recuerde que debe realizarse para los cuatro valores obtenidos, dos por el método de periodo y dos por cálculo directo.

   - Incertidumbre Relativa Porcentual:
     Para determinar el porcentaje de error de cada medición realizada, se utiliza:

$$Ip_1 = \frac{\Delta I_{cmd}}{\langle I_{cmd} \rangle} \times 100\,\% \qquad Ip_2 = \frac{\Delta I_{cma}}{\langle I_{cma} \rangle} \times 100\,\% \tag{17}$$

3. Realice un gráfico de discrepancia con los dos valores calculados $I$ e $I_{cm-disco-solido}$ para el disco sólido, visualizando las barras de error y comentando su discrepancia con respecto al valor brindado por el fabricante.

4. Realice un gráfico de discrepancia con los dos valores calculados de $I$ e $I_{cm-anillo}$ para el anillo, visualizando las barras de error y comentando la discrepancia entre ambas mediciones. ¿La discrepancia es significativa o no significativa? Comente.

# Cuestionario

1. ¿Cúal de los dos objetos (disco o anillo) se detiene (por efectos de amortiguamiento) en menos tiempo?

2. ¿Son aceptables sus valores medidos para el momento de inercia con respecto al centro de masa $I_{cm}$? Compare con los dos valores de referencia (considere que un valor es aceptable si presenta buena precisión y exactitud), mediante las barras de error, las cuales deben alcanzar los valores de referencia. Para esta práctica considere que un error menor al 6 % es aceptable.

3. ¿Qué sucedería si se aumenta el ángulo de oscilaciones para el disco y el anillo? ¿Se comportaría como movimiento armónico simple?

4. Se sabe que para deducir la incertidumbre de una medición es posible utilizar la ecuación general de propagación de errores. Si tenemos una medición $f$ que depende de variables $x$, $y$, $z$ es posible describir la incertidumbre total a través de la ecuación:

$$\Delta f = \langle f \rangle \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)^2} \tag{18}$$

Donde $\delta x$, $\delta y$ y $\delta z$ representan las incertidumbres instrumentales de los equipos utilizados para las mediciones. Con esta información corrobore que la incertidumbre para el cálculo del momento de inercia en el centro de masa $I_{cm}$ por medio del periodo de oscilación del movimiento armónico simple es:

$$\Delta I_{cm} = \langle I_{cm} \rangle \sqrt{\left(1 - \frac{ma^2}{I_{cm}}\right)^2 \left(\frac{\delta a}{a}\right)^2 + \left(1 + \frac{ma^2}{I_{cm}}\right)^2 \left(2\frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2} \tag{19}$$

**Sugerencia:** Una vez realizadas las derivadas parciales exprese los resultados en términos de $I_{cm}$ usando la ecuación (2).

5. ¿Qué sucedería con el momento de inercia si se aumenta la masa del Disco? ¿Aumentaría o disminuiría? ¿Qué pasaría con el periodo de oscilación?

## Conclusiones

Redacte al menos tres (3) conclusiones con base en los resultados obtenidos y los objetivos planteados.

- 
- 
- 

# Anexos

**Fórmulas utilizadas en el cálculo de errores**

- Media:

$$\bar{q} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{N} \tag{20}$$

- Desviación estándar:

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (q_i - \bar{q})^2} \tag{21}$$

- Desviación estándar de la media:

$$\sigma_{\bar{q}} = \frac{\sigma_q}{\sqrt{N}} \tag{22}$$

- Ecuación general de propagación de errores:

$$\Delta f = \langle f \rangle \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)^2} \tag{23}$$

# Bibliografía

Física Universitaria, Vol. I, Sears, Zemansky, Young, Friedman. 13. ed.
Física para Ciencias E Ingeniería Vol. I, Serway, Jewett, 10ma. Ed.
Introducción al análisis de Errores, John R. Taylor 2da ed.