UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE HONDURAS
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

Medición de la densidad lineal de masa de una cuerda considerando ondas estacionarias

Adaptada por: L. Reyes, C. Gómez, O. Alcántara, M. Moreno, A. Salgado y Y. Mendoza
Revisada por: E. Rivera y R. Mejía

Introducción

En esta práctica de laboratorio se pretende medir la densidad lineal de masa de una cuerda, considerando ondas estacionarias a diferentes frecuencias de vibración. Para este propósito se utilizará una cuerda de longitud finita sometida a tensión y conectada, en un extremo, a un generador de frecuencias variable.

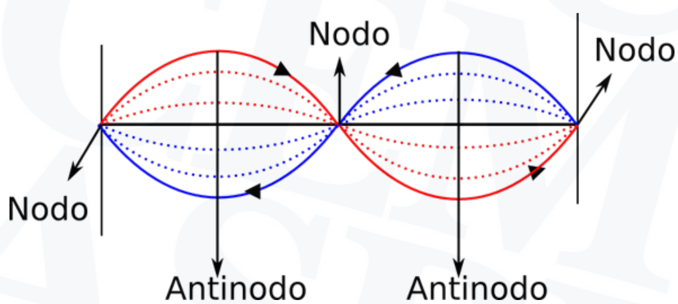

Figura 1: Representación de una onda estacionaria en una cuerda.

Objetivos

- Producir modos normales de vibración en una cuerda bajo tensión.
- Observar el comportamiento de los modos normales de vibración en la cuerda, así como la presencia de nodos y antinodos.
- Determinar la densidad lineal de masa de una cuerda por medio de ondas estacionarias.

Materiales y Equipo

1. Balanza granataria
2. Porta masas y set de masas
3. Cinta métrica
4. Soporte de mesa, nuez y varillas
5. Generador de ondas sinusoidal
6. Vibrador de cuerdas
7. Set de cuerdas
8. Controlador para generador de ondas
9. Cables de conexión
10. Polea de Metal

Marco Teórico

Una onda mecánica es una perturbación que viaja por un material o una sustancia que actúa como medio de propagación de la onda. Las ondas de sonido son **longitudinales** ya que el medio se desplaza en dirección del movimiento de la onda. Por otro lado, las ondas en una cuerda son **transversales** porque el medio es desplazado en una dirección perpendicular al del movimiento de la onda. En ambos casos, aunque la perturbación que lleva energía avanza, los átomos individuales permanecen en la vecindad de sus puntos de equilibrio; la perturbación avanza, no el medio material.

Las ondas periódicas pueden describirse mediante la rapidez de onda, amplitud, periodo, frecuencia y longitud de onda; sin embargo para una descripción detallada de las posiciones y movimientos de partículas individuales del medio en instantes específicos se utiliza la **función de onda**. La ecuación diferencial de onda es,

$$\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y\,(x,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

y cualquier función que sea solución es conocida como una función de onda.

Una familia de soluciones conocidas son las soluciones sinusoidales por tanto, la siguiente es una función de onda que describe el movimiento ondulatorio en una cuerda.

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$

Notemos que es una función que depende tanto de la posición como el tiempo. La variable **k** denota el numero de onda y se define como:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2}$$

La frecuencia angular ω se define como:

$$\omega = 2\pi f \tag{3}$$

y la amplitud **A** es el máximo desplazamiento del punto de equilibrio.

Cuando una onda viaja a lo largo de una cuerda con uno de sus extremos fijos y encuentra una frontera, experimenta una reflexión. Cuando la onda reflejada se superpone con una nueva onda incidente, se produce un patrón de interferencia. Esta interferencia puede ser **constructiva** o **destructiva**. El **principio de superposición** es fundamental en este proceso, ya que nos permite combinar los desplazamientos de los pulsos individuales para obtener el desplazamiento resultante en cada punto de la cuerda. Esto significa que podemos sumar los efectos de la onda incidente y la onda reflejada para formar una onda estacionaria.

Una onda estacionaria es una onda cuyo patrón permanece fijo en la cuerda, con puntos donde la amplitud es cero llamados **nodos** y puntos de máxima amplitud llamados **antinodos** que se encuentran a mitad de camino entre los nodos.
La siguiente ecuación representa la función de onda de una onda estacionaria.

$$\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{t}) = 2\,A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

La posición de los nodos satisface la condición, $\sin(kx) = 0$. Recordando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, esta se cumple cuando

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, ... = \frac{n\lambda}{2} \quad \textit{donde} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

La posición de los antinodos satisface la condición, $\sin(kx) = 1$ y recordando que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, esta se cumple cuando

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, ... = \frac{(2n+1)\lambda}{4} \quad \textit{donde} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

Para una cuerda sujeta en ambos extremos, la onda estacionaria que la perturba debe tener un nodo en ambos extremos, para que esto suceda las longitudes de onda deben cumplir con la condición:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \tag{4}$$

A esta posible serie de longitudes de onda estacionaria corresponde una serie de frecuencias naturales descritas por la ecuación:

$$f_n = \frac{nv}{2L} \tag{5}$$

Cuando las partículas de la cuerda se mueven en un patrón sinusoidal a la misma frecuencia decimos que se tiene un **modo normal**. Cada una de las longitudes de onda para una onda estacionaria corresponden a un patrón y la frecuencia de un posible modo normal. Sabemos que la velocidad de una onda transversal es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{6}$$

si se reemplaza esta expresión en la formula (5) se obtiene:

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{7}$$

Demostración

1. Considere las siguientes funciones de onda para dos ondas sinusoidales transversales que tengan la misma amplitud, frecuencia y longitud de onda pero que viajan en direcciones opuestas en el mismo medio:

$$\mathbf{y_1(x,t)} = A\,\cos\left(kx - \omega t\right) \tag{8}$$

$$\mathbf{y_2(x,t)} = -A\,\cos\left(kx + \omega t\right) \tag{9}$$

Donde $\mathbf{y_1(x,t)}$ representa una onda que viaja en la dirección $\hat{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{y_2(x,t)}$ representa una onda que viaja en la dirección $-\hat{\mathbf{x}}$. **Aplicar el principio de superposición** para las dos funciones $(\mathbf{y_1(x,t)} + \mathbf{y_2(x,t)})$:

$$\mathbf{y(x,t)} = \mathbf{y_1(x,t)} + \mathbf{y_2(x,t)} = \left[A\,\cos\left(kx - \omega t\right)\right] + \left[-A\,\cos\left(kx + \omega t\right)\right]$$

y haciendo uso de las relaciones trigonométricas necesarias, **demuestre** que el resultado de la suma de estas es:

$$\mathbf{y(x,t)} = 2\,A\sin(kx)\sin(\omega t) \tag{10}$$

donde A es la amplitud de cualquiera de las ondas originales, k es el número de onda, ω es la frecuencia angular y la ecuación (10) representa la *función de onda* de una onda estacionaria.

Procedimiento Experimental

Para observar las ondas estacionarias se cuenta con un montaje experimental similar al mostrado en la figura 2.

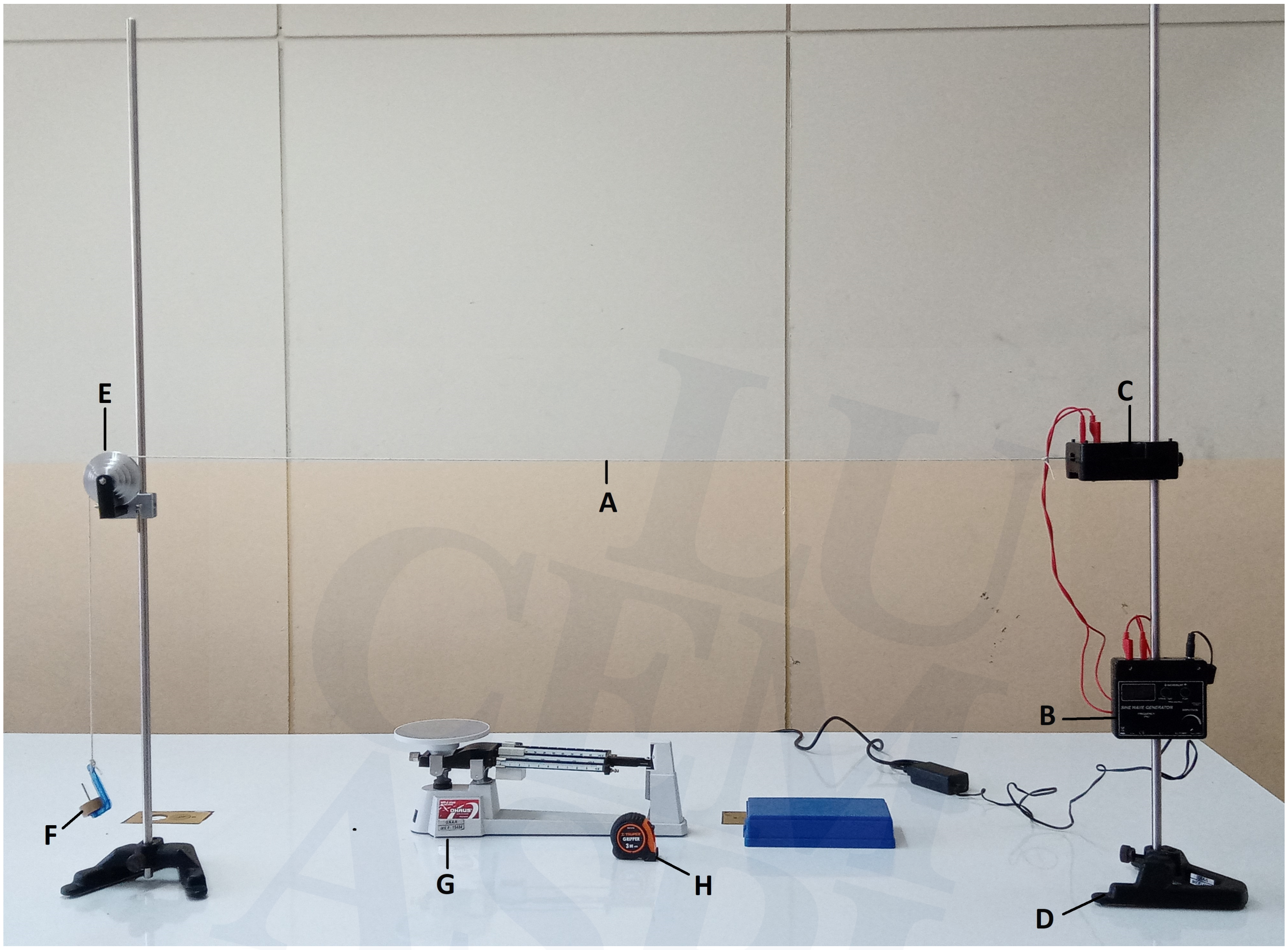

Figura 2: Imagen del montaje experimental a utilizar en el laboratorio.

A. Cuerda **B.** Generador de ondas sinusoidal. **C.** Vibrador. **D.** Base **E.** Polea de Metal **F.** Masa **G.** Balanza Granataria **H.** Cinta métrica

Medición de la densidad lineal de masa μ_1 de una cuerda considerando un ajuste lineal de datos.

1. Con mucho cuidado y con ayuda de la balanza granataria mida el valor de la masa utilizada para generar la tensión en la cuerda.
2. Con la cinta métrica mida el valor de L desde el extremo de la polea hasta el extremo del vibrador y anótelo en la Tabla 1.
3. Encienda el generador de funciones y empiece a buscar el primer modo normal, para ello utilice las perillas de frecuencia y amplitud.
4. Anote en la Tabla 1 el valor correspondiente a la frecuencia en la cual se observó el primer bucle.
5. Repita el procedimiento hasta completar la Tabla 1.
6. No olvide anotar en la Tabla 1 las incertidumbres correspondientes a cada cantidad según le indique su instructor(a) de laboratorio.

Medición de la densidad lineal de masa μ_2 mediante cálculo directo.

1. El instructor(a) de laboratorio le proporcionará un pedazo diferente del mismo tipo de cuerda usada en experimento, para la cual deberá medir con cuidado, su masa utilizando la balanza granataria. Anote estos valores en la Tabla 2.
2. Con la cinta métrica deberá medir la longitud del pedazo de cuerda, anote su valor en la Tabla 2.
3. No olvide anotar en la Tabla 2 las incertidumbres correspondientes a cada cantidad según le indique su instructor(a) de laboratorio.

Registro de datos Experimentales

N°	n	f (Hz)	L (m)	δL (m)	m (kg)	δ m (kg)

Tabla 1: Mediciones de n, f, L y m para ajuste lineal.

N°	l (m)	δl (m)	M (kg)	δM (kg)

Tabla 2: Mediciones de longitud l y masa M de la cuerda

Tratamientos de datos experimentales

Obtener el valor de μ_1 utilizando un ajuste lineal con los valores de n y f medidos.

Se hará uso de la ecuación (7) del marco teórico, haciendo $T = mg$ y luego realizando una linealización para n se obtiene lo siguiente.

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{mg}{\mu_1}} \tag{11}$$

donde:

$$y = f, \quad B = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{mg}{\mu_1}}, \quad x = n$$

Para el siguiente procedimiento utilice las fórmulas de regresión lineal sin intercepto para obtener la pendiente B y su incertidumbre δB:

$$B = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}, \quad \delta B = \frac{\sigma_y}{\sum x_i^2}$$

donde:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - Bx_i)^2}{N-1}}$$

Y el índice de correlación lineal es:

$$r = \frac{\sum((x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}))}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Para el cálculo de la densidad lineal de masa de la cuerda, utilice la siguiente relación:

$$\langle \mu_1 \rangle = \frac{mg}{4L^2B^2}$$

con $g_{\text{teórico}} = 9.77682 \text{ m/s}^2$

Y para su incertidumbre utilice la siguiente relación:

$$\delta\mu_1 = \langle \mu_1 \rangle \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{2\delta B}{B}\right)^2}$$

Llene la siguiente tabla, con los datos obtenidos de la regresión lineal:

N°	n	f(Hz)	B	δB	r	$\langle \mu_1 \rangle$	$\delta\mu_1$
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							

Tabla 3: Valores de ajuste lineal entre la frecuencia de los armónicos f y el orden de vibración n.

Reporte el valor de la densidad lineal de masa de la forma:

$$\mu_1 = \langle \mu_1 \rangle \pm \delta\mu_1$$

Calculo directo de μ

Con los valores medidos de M y l encuentre μ_2 por medio de:

$$\langle \mu_2 \rangle = \frac{M}{l}$$

Mediante la regla general de la propagación de errores es posible determinar la expresión que permita obtener el error de la densidad lineal de masa μ_2.

$$\delta\mu_2 = \langle \mu_2 \rangle \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta l}{l}\right)^2}$$

Reporte el valor encontrado de μ_2 de la forma,

$$\mu_2 = \langle \mu_2 \rangle \pm \delta\mu_2$$

Análisis gráfico de resultados

Haciendo uso de una hoja de calculo realice el gráfico de f vs n (haga uso de los datos experimentales de la Tabla (3), comente el comportamiento de los puntos, en el mismo gráfico, coloque la función de ajuste obtenida mediante el proceso de regresión lineal. Recuerde que un gráfico tiene que contener título de gráfico, etiqueta de ejes y simbología, también no olvide definir rangos apropiados.

Análisis de Resultados

- Calcule la incertidumbre relativa porcentual obtenida para las mediciones de regresión lineal y medición directa, utilizando las siguientes relaciones:

  $$\%I_{p1} = \frac{\delta\mu_1}{\langle \mu_1 \rangle} \times 100\,\%$$

  $$\%I_{p_2} = \frac{\delta\mu_2}{\langle \mu_2 \rangle} \times 100\,\%$$

  Comente sobre los resultados, ¿Qué medición fue más precisa? Expliqué a que se debe esto.

- ¿Tienen los datos un comportamiento lineal? Justifique según el índice de correlación lineal.

- Elabore un gráfico de discrepancia, en el que muestre los dos valores de μ_1 y μ_2 obtenidos. ¿Las discrepancias son o no significativas? Justifique.

Cuestionario

A continuación se le muestran algunas preguntas sobre la realización de la práctica y de los conceptos de la misma

1. Luego de presenciar el fenómeno físico en el laboratorio, explique por qué se dice que las ondas que viajan por la cuerda son transversales.

2. ¿Cuál es la explicación física para la ausencia de vibración en los nodos en una onda estacionaria?

3. ¿Cómo se define la densidad lineal de masa de la cuerda, para una distribución uniforme y homogénea?

4. Si se pudiese mantener una frecuencia constante en la experiencia de laboratorio. ¿Qué pasaría con el número de bucles al aumentar el valor de la masa colgante ? ¿Y al disminuir ? ¿Cómo se llama este tipo de relación?

Conclusiones

Redacte al menos tres conclusiones de acuerdo a sus resultados obtenidos a fin de cumplir con los objetivos que han sido planteados.

Referencias

Resnick, H., y Krane. (2001). *Física* (4. ed., Vol. I). Compañia Editorial Continental.

Serway, y Jewett. (2009). *Física para ciencias e ingeniería* (7. ed., Vol. I). CENGAGE Learning

Lohr, S.L(2009) *Sampling: Designed Analysis*, Nelson education.

Young, Hugh D., y Roger A. Freedman. (2009). *Física Universitaria* (12. ed., Vol. I). Pearson Educación.

Hecht E. (2017). *Óptica* (5. ed.) Pearson Educación.