



Universidad Nacional Autónoma de Honduras  
Facultad de Ciencias  
Escuela de Física



Fís. Carlos Eduardo Gabarrete  
Coordinador de Física General I (FS-100)  
Departamento de Gravitación, Altas Energías y Radiaciones  
UNAH

Ramón Alberto Osorto  
Práctica Profesional Supervisada

## GUÍA DE ESTUDIO

### III-PARCIAL

## Estrategia para la resolución de problemas en Rotación de un objeto rígido en torno a un eje fijo

- Dibujar un diagrama de cuerpo libre para el objeto en consideración, para determinar la torca debida a cada fuerza
- Identificar eje de rotación y calcular las torcas alrededor de el
- Aplicar la Segunda Ley de Newton para Rotación  $\sum \tau = I\alpha$
- Aplicar la Segunda Ley de Newton para traslación  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  en caso de ser necesario
- Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes

## EJEMPLOS

**#1 Lanzamiento del disco** Un lanzador de disco gira el disco en un círculo con radio de 80.0 cm. En cierto instante, el lanzador gira con rapidez angular de 10.0 rad/s y la rapidez angular está aumentando a 50 rad/s<sup>2</sup>. Calcule las componentes de aceleración tangencial y centrípeta del disco en ese instante, así como la magnitud de esa aceleración.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Modelamos el disco como una partícula que sigue una trayectoria circular en la figura #1 a, así que podemos usar las ideas que desarrollamos en esta sección.

**PLANTEAR:** Nos dan el radio  $r=0.800$  m, la rapidez angular de  $\omega = 10.0 \text{ rad/s}$  y la razón de cambio de la rapidez angular a  $\alpha = 50.0 \text{ rad/s}^2$  en la siguiente figura #1 b. Las primeras dos incógnitas son las componentes de aceleración  $a_{tan}$  y  $a_{rad}$ , que obtendremos con las ecuaciones. Una vez que tengamos esas componentes del vector de aceleración, obtendremos la magnitud de  $a$  (la tercera incógnita) aplicando el teorema de Pitágoras.

### EJECUTAR:

$$a_{tan} = r\alpha = (0.800\text{m})(50.0\text{rad/s}^2) = 40\text{m/s}^2$$

$$a_{rad} = r\omega^2 = (10.0\text{rad/s})^2(0.800\text{m}) = 80\text{m/s}^2$$

La magnitud del vector de aceleración es

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_{rad}^2} = 89.4\text{m/s}^2$$

a) Lanzamiento de disco con giro circular. b) Nuestro diagrama muestra las componentes de la aceleración para el disco.

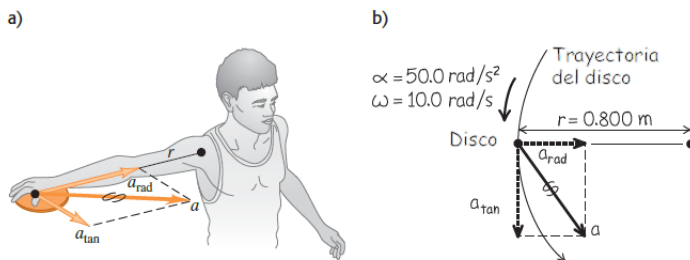


Figura 1

**EVALUAR:** Observe que omitimos la unidad “radián” de nuestros resultados para  $a_{tan}$ ,  $a_{rad}$  y  $a$ . Podemos hacerlo porque el “radián” es una cantidad adimensional.

La magnitud  $a$  es unas nueve veces  $g$ , la aceleración debida a la gravedad. ¿Puede usted demostrar que, si la rapidez angular se duplica a  $20.0 \text{ rad/s}$  pero  $\alpha$  no cambia, la magnitud de la aceleración,  $a$ , aumenta a  $322 \text{ m/s}^2$  (casi  $33g$ )?

**#2 Momentos de inercia para diferentes ejes de rotación** Un ingeniero está diseñando una pieza mecánica formada por tres conectores circulares gruesos unidos por puntales ligeros moldeados (figura #2).

a) ¿Qué momento de inercia tiene este cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro del disco A y es perpendicular al plano del diagrama?

b) ¿Qué momento de inercia tiene alrededor de un eje que pasa por el centro de los discos B y C?

c) Si el cuerpo gira sobre el eje que pasa por A y es perpendicular al plano del diagrama, con rapidez angular  $\omega = 4.0 \text{ rad/s}$ , ¿qué energía cinética tiene?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Consideraremos los conectores circulares como partículas masivas; y los puntales ligeros, como varillas sin masa. Así, podremos usar las ideas de esta sección para calcular el momento de inercia de este conjunto de tres partículas.

**PLANTEAR:** En los incisos a) y b), usaremos la ecuación para obtener el momento de inercia con cada uno de los dos ejes. Dado el momento de inercia para el eje A, en el inciso c) para calcular la energía cinética de rotación.

**EJECUTAR:** a) La partícula en el punto A está sobre el eje; su distancia  $r$  con respecto al eje es cero, así que no contribuye al momento de inercia. Con la ecuación siguiente

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.10 \text{ Kg})(0.50 \text{ m})^2 + (0.20 \text{ Kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.057 \text{ Kg.m}^2$$

b) Las partículas en B y C están sobre el eje, así que para ellas  $r=0$ , y ninguna contribuye al momento de inercia. Sólo A contribuye, y tenemos

$$I = \sum m_i r_i^2 = (0.30 \text{ Kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.048 \text{ Kg.m}^2$$

c) Para la ecuación de la energía cinética rotacional

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (0.057 \text{ Kg.m}^2) (4.0 \text{ rad/s})^2 = 0.46 \text{ J}$$

**EVALUAR** Nuestros resultados indican que el momento de inercia para el eje que pasa por A es mayor que para el eje que pasa por B y C. Por lo tanto, de los dos ejes, es más fácil hacer girar la pieza sobre el eje B y C.

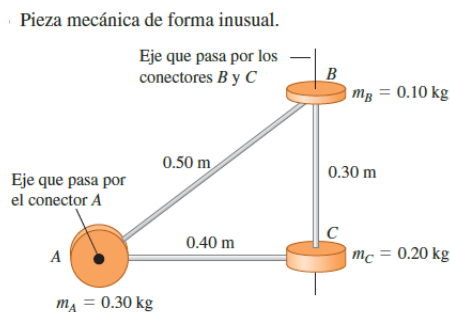


Figura 2

**#3 Cable que se desenrolla** Un cable ligero, flexible y que no se estira está enrollado varias vueltas en el tambor de un malacate, un cilindro sólido con masa de 50 kg y 0.120 m de diámetro, que gira sobre un eje fijo horizontal montado en cojinetes sin fricción (figura #3). Una fuerza constante de magnitud de 9.0 N tira del extremo libre del cable a lo largo de una distancia de 2.0 m. El cable no resbala y hace girar el cilindro cuando desenrolla. Si el cilindro estaba inicialmente en reposo, calcule su rapidez angular final y la rapidez final del cable.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Resolveremos este problema empleando métodos de energía. El punto 1 es donde el cilindro comienza a moverse y el punto 2 es donde el cable se ha desenrollado 2.0 m. Puesto que el cable es ligero, supondremos que no tiene masa y que sólo el cilindro tiene energía cinética. La posición vertical del cilindro no cambia, así que no hay cambios en la energía potencial gravitacional. Hay fricción entre el cable y el cilindro; esto es lo que hace girar al cilindro cuando se tira del cable. Sin embargo, como el cable no resbala, no hay movimiento del cable relativo al cilindro y no se pierde energía mecánica por la fricción. Dado que el cable no tiene masa, la fuerza que el cable ejerce sobre el borde del cilindro es igual a la fuerza aplicada  $F$ .

Un cable se desenrolla de un cilindro (vista lateral).

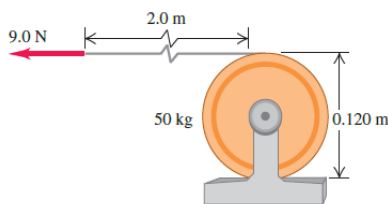


Figura 3

**PLANTEAR:** El cilindro inicialmente está en reposo, así que la energía cinética inicial es  $K_1 = 0$ . Entre los puntos 1 y 2, la fuerza  $F$  efectúa trabajo sobre el cilindro a lo largo de una distancia  $s = 2.0\text{ m}$ . El resultado es que la energía cinética en el punto 2 es  $K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2$ . Una de las incógnitas es  $\omega$ ; la otra es la rapidez del cable en el punto 2, que es igual a la rapidez tangencial  $v$  del cilindro en ese punto. Obtendremos  $v$  a partir de  $\omega$ .

**EJECUTAR:** El trabajo efectuado sobre el cilindro es  $W_{\text{others}} = F_s = (9.0\text{ N})(2.0\text{ m}) = 18\text{ J}$ . Según la ecuación, el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2}(50\text{ kg})(0.060\text{ m})^2 = 0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

(El radio  $R$  es la mitad del diámetro del cilindro.) La relación  $K_1 + U_1 + W_{\text{others}} = K_2 + U_2$  da

$$0 + 0 + W_{\text{others}} = \frac{1}{2}I\omega^2 + 0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_{\text{others}}}{I}} = \sqrt{\frac{2(18\text{ J})}{0.090\text{ kg}\cdot\text{m}^2}} = 20\text{ rad/s}$$

La rapidez tangencial final del cilindro y, por ende, la rapidez final del cable es

$$v = R\omega = (0.060\text{ m})(20\text{ rad/s}) = 1.2\text{ m/s}$$

**EVALUAR** Si no podemos despreciar esa masa, una parte del trabajo efectuado se convertirá en energía cinética del cable. De manera que el cilindro adquiriría menos energía cinética y tendría menor rapidez angular que las calculadas aquí.

- #4 **Uso del teorema de ejes paralelos** Una pieza de un acoplamiento mecánico (figura #4) tiene una masa de 3.6 kg. Medimos su momento de inercia alrededor de un eje que pasa a 0.15 m de su centro de masa y obtenemos  $I_P = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . Calcule el momento de inercia  $I_{cm}$  alrededor de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

**SOLUCIÓN**

Cálculo de  $I_{cm}$  a partir de una medición de  $I_P$ .

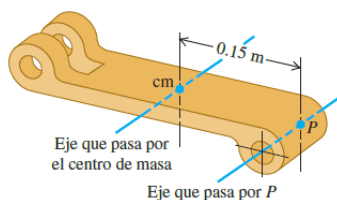


Figura 4

**IDENTIFICAR:** El teorema de ejes paralelos nos permite relacionar los momentos de inercia  $I_{cm}$  e  $I_P$  a través de los dos ejes paralelos.

**PLANTEAR:** Usaremos una ecuación para determinar la incógnita:  $I_{cm}$ .

**EJECUTAR:** Reacomodamos la ecuación y sustituimos los valores:

$$I_{cm} = I_P - Md^2 = 0.132 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 - (3.6)(0.15 \text{ m})^2 = 0.051 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

**EVALUAR** Nuestro resultado indica que  $I_{cm}$  es menor que  $I_P$ , como debe ser: ya vimos que el momento de inercia para un eje que pasa por el centro de masa es menor que para cualquier otro eje paralelo.

- #5 **Varilla delgada uniforme, eje perpendicular a la longitud** La figura #5 muestra una varilla uniforme con masa  $M$  y longitud  $L$ . Podría ser el bastón (sin las tapas de hule) de una bastonera que marcha al frente a una banda de músicos. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje que pasa por  $O$ , a una distancia arbitraria  $h$  de un extremo.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** La varilla es una distribución continua de masa, por lo que debemos emplear la integración para calcular el momento de inercia. Elegimos como elemento de masa una sección corta de la varilla con longitud  $dx$ , a una distancia  $x$  del punto  $O$ .

Cálculo del momento de inercia de una varilla delgada alrededor de un eje que pasa por  $O$ .

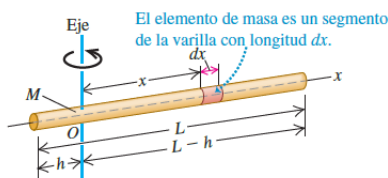


Figura 5

**PLANTEAR:** El cociente de la masa  $dm$  del elemento entre la masa total  $M$  es igual al cociente de su longitud  $dx$  entre la longitud total  $L$ :

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{L} \quad \text{así que} \quad dm = \frac{M}{L} dx$$

Determinaremos  $I$  a partir de la ecuación de la integral, sustituyendo  $r$  por  $x$  (véase la figura #5).

**EJECUTAR:** La figura #5 indica que los límites de integración de  $x$  son  $-h$  y  $(L - h)$ . Por lo tanto, obtenemos

$$I = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-h}^{L-h} x^2 dx$$

$$\left[ \frac{M}{L} \left( \frac{x^3}{3} \right) \right]_{-h}^{L-h} = \frac{1}{3} M (L^2 - 3Lh + 3h^2)$$

**EVALUAR** Con esta expresión general podemos calcular el momento de inercia alrededor de un eje que pasa por cualquier punto de la varilla. Por ejemplo, si el eje está en el extremo izquierdo,  $h = 0$  y

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Si el eje está en el extremo derecho, deberemos obtener el mismo resultado. Haciendo  $h = L$ , obtenemos

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

Si el eje pasa por el centro, lo usual al girar un bastón,  $h = L/2$  y

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$

**#6 Cilindro hueco o sólido que gira sobre el eje de simetría** La figura #6 muestra un cilindro hueco uniforme de longitud  $L$ , radio interior  $R_1$  y radio exterior  $R_2$ . Podría ser un cilindro de una imprenta o una laminadora. Calcule el momento de inercia alrededor del eje de simetría del cilindro.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Otra vez debemos usar la integración para calcular el momento de inercia, pero ahora elegimos como elemento de volumen una capa cilíndrica delgada de radio  $r$ , espesor  $dr$  y longitud  $L$ ; todas sus partes están prácticamente a la misma distancia del eje.

**PLANTEAR:** El volumen del elemento es casi igual al de una lámina plana de espesor  $dr$ , longitud  $L$  y anchura  $2\pi r$  (la circunferencia de la capa). Entonces,

$$dm = \rho dV = \rho(2\pi r L dr)$$

Procedemos a integrar con  $r = R_1$  a  $r = R_2$ .

**EJECUTAR:**

$$I = \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \rho(2\pi r L dr)$$

$$= 2\pi \rho L \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr$$

$$= \frac{2\pi \rho L}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$= \frac{\pi \rho L}{2} (R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)$$

Suele ser más conveniente expresar el momento de inercia en términos de la masa total  $M$  del cuerpo, que es su densidad  $\rho$  multiplicada por el volumen total  $V$ , dado por

$$V = \pi L (R_2^2 - R_1^2)$$

Así que la masa total  $M$  es

$$M = \rho V = \pi L \rho (R_2^2 - R_1^2)$$

Cálculo del momento de inercia de un cilindro hueco alrededor de su eje de simetría.

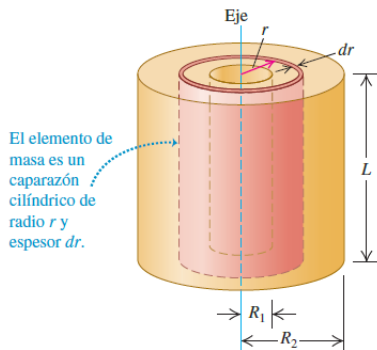


Figura 6

Y el momento de inercia es

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

**EVALUAR** Si el cilindro es sólido (digamos, una aplanadora),  $R_1 = 0$ . Llamemos al radio exterior  $R_2$  simplemente  $R$ . El momento de inercia de un cilindro sólido de radio  $R$  es

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Si la pared del cilindro es muy delgada (como un conducto),  $R_1$  y  $R_2$  son casi iguales; si  $R$  representa este radio común,

$$I = MR^2$$

Podríamos haber predicho este resultado; en un cilindro de pared delgada, toda la masa está a la misma distancia  $r = R$  del eje, por lo que  $I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$

**#7 Esfera uniforme de radio  $R$ , eje por el centro** Calcule el momento de inercia de una esfera sólida uniforme (como una bola de billar o una bola de acero de un cojinete) alrededor de un eje que pasa por el centro de tal esfera.

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Para calcular el momento de inercia, dividimos la esfera en discos delgados de espesor  $dx$  (figura #7), cuyo momento de inercia conocemos. Integraremos en ellos para calcular el momento de inercia total. La única cuestión complicada es que el radio y la masa de un disco dependen de su distancia  $x$  con respecto al centro de la esfera.

**PLANTEAR:** El radio  $r$  del disco que se muestra en la figura #7 es

$$r = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Su volumen es

$$dV = \pi r^2 dx = \pi (R^2 - x^2) dx$$

y su masa es

$$dm = \rho dV = \pi \rho (R^2 - x^2) dx$$

Cálculo del momento de inercia de una esfera alrededor de un eje que pasa por su centro.

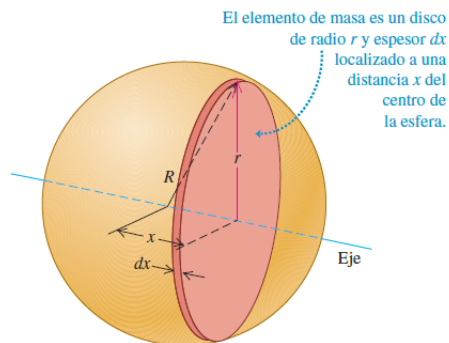


Figura 7

**EJECUTAR:** el momento de inercia de un disco de radio  $r$  y masa  $dm$  es

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 * \pi \rho (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi \rho}{2} (R^2 - x^2)^2 dx$$

Integrando esta expresión de  $x = 0$  a  $x = R$ , obtenemos el momento de inercia del hemisferio derecho. Por simetría, el  $I$  total para la esfera es el doble:

$$I = (2) \frac{\pi \rho}{2} \int_0^R (R^2 - x^2)^2 dx$$

Integrando

$$I = \frac{8\pi\rho}{15} R^5$$

La masa  $M$  de la esfera de volumen  $V = 4\pi R^3/3$  es

$$M = \rho V = \frac{4\pi\rho R^3}{3}$$

Comparando las expresiones para  $I$  y para  $M$ , vemos que

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$

**EVALUAR:** Observe que el momento de inercia de una esfera sólida de masa  $M$  y radio  $R$  es menor que el de un cilindro sólido con los mismos valores de masa y radio,  $I = \frac{1}{2} MR^2$ . La explicación es que una proporción mayor de la masa de la esfera está cerca del eje.

## Estrategia para la resolución de problemas en Dinamica del Movimiento Rotacional

- Dibujar un diagrama del problema en cuestión
- Establecer claramente que se debe encontrar
- Aplicar la Segunda Ley de Newton para Rotación  $\sum \tau = I\alpha$
- Aplicar la Segunda Ley de Newton para traslación  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  en caso de ser necesario
- Aplicar Conservación de la energía combinando movimientos rotacional y traslacional
- Despejar las incógnitas de las ecuaciones resultantes

**#8 Momento angular y torca** Una hélice de turbina del motor a reacción de un avión tiene un momento de inercia de  $2.5kg.m^2$  alrededor de su eje de rotación. Al arrancar la turbina, su velocidad angular en función del tiempo es

$$\omega_z = (40rad/s^3)t^2$$

- Calcule el momento angular de la hélice en función del tiempo y su valor en  $t = 3.0$  s.
- Determine la torca neta que actúa sobre la hélice en función del tiempo, y su valor en  $t = 3.0$  s.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Al igual que un ventilador, la hélice de una turbina gira alrededor de un eje de simetría (el eje  $z$ ). Por lo tanto, el vector de momento angular tiene sólo una componente  $z$  ( $L_z$ ), que podemos determinar a partir de la velocidad angular  $\omega_z$ . Puesto que la dirección del momento angular es constante, la torca neta también tiene sólo una componente  $\tau_z$  a lo largo del eje de rotación; esto es igual a la derivada de  $L_z$  con respecto al tiempo.

**PLANTEAR:** Obtendremos  $L_z$  a partir de  $\omega_z$ , y  $\tau_z$  a partir de la derivada de  $L_z$  con respecto al tiempo.

**EJECUTAR:** a) La componente del momento angular está sobre el eje de rotación ( $z$ ):

$$L_z = I\omega_z = (2.5kg.m^2)(40rad/s^3)t^2 = (100kg.m^2/s^3)t^2$$

(Omitimos “rad” de la respuesta porque el radián es una cantidad adimensional.) En  $t = 3.0s$ ,  $L_z = 900kg.m^2/s$

b) La componente de la torca neta en el eje de rotación es

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = (100kg.m^2/s^3)(2t) = (200kg.m^2/s^3)(t)$$

En el instante  $t = 3.0s$

$$\tau_z = (200kg.m^2/s^3)(3.0s) = 600kg.m^2/s^2 = 600N.m$$

**EVALUAR:** Para comprobar nuestro resultado, vemos que la aceleración angular de la hélice es  $\alpha_z = d\omega_z/dt = (40rad/s^2)(2t) = (80rad/s^2)t$ . Por el equivalente rotacional de la segunda ley de Newton, la torca que actúa sobre la hélice es  $\tau_z = I\alpha_z = (2.5kg.m^2)(80rad/s^2)t = (200kg.m^2/s^3)t$ , lo que coincide con nuestro cálculo anterior.

**#9 Rapidez de un yoyo burdo** Se hace un yoyo burdo enrollando un cordel varias veces alrededor de un cilindro sólido de masa  $M$  y radio  $R$  (figura #8). Se sostiene el extremo del cordel fijo mientras se suelta el cilindro desde el reposo. El cordel se desenrolla sin resbalar ni estirarse conforme el cilindro cae y gira. Use consideraciones de energía para calcular la rapidez  $v_{cm}$  del centro de masa del cilindro sólido después de caer una distancia  $h$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El extremo superior del cordel está fijo, no se tira de él hacia arriba, así que la mano de la figura #8 no efectúa trabajo sobre el sistema del cordel y cilindro. Al igual que en el ejemplo #3, hay fricción entre el cordel y el cilindro pero, como el cordel no resbala sobre la superficie del cilindro, no se pierde energía mecánica y podemos usar la conservación de la energía mecánica.

**PLANTEAR:** Las energías potenciales son  $U_1Mgh$  y  $U_2 = 0$ . El cordel no tiene energía cinética porque no tiene masa. La energía cinética inicial del cilindro es  $K_1 = 0$ , y la energía cinética final  $K_2$  que anunciamos a continuación. El momento de inercia es  $I = \frac{1}{2}MR^2$ , y  $\omega = v_{cm}/R$  porque el cilindro no resbala en el cordel.

**EJECUTAR:** La energía cinética en el punto 2 es



$$K_2 = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v_{cm}}{R}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

La energía cinética es  $1\frac{1}{2}$  veces mayor que si el yoyo estuviera cayendo a una rapidez  $v_{cm}$  sin girar. Dos tercios de la energía cinética total

Cálculo de la rapidez de un yoyo burdo.

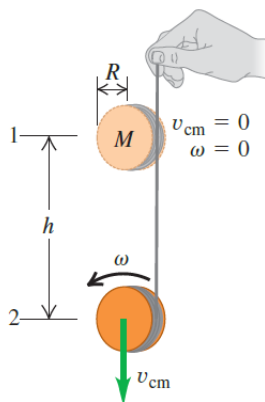


Figura 8

$(\frac{1}{2}Mv_{cm}^2)$  son traslacionales y un tercio  $(\frac{1}{4}Mv_{cm}^2)$  es rotacional. Entonces, la conservación de la energía

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$0 + Mgh = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2 + 0$$

y

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

**EVALUAR:** Esta es menor que la rapidez  $\sqrt{2gh}$  que tendría un objeto que se deja caer, porque conforme el cilindro cae un tercio de la energía potencial liberada aparece como energía cinética rotacional.

**#10 Cualquiera puede bailar ballet** Un ágil profesor de física se para en el centro de una mesita giratoria con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5.0 kg en cada mano (figura #9). Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2.0 s. Calcule la nueva velocidad angular del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de  $3.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$  con los brazos estirados, y baja a  $2.2\text{kg}\cdot\text{m}^2$  si pone las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0.20 m al final; trátelas como partículas.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Si despreciamos la fricción en la mesita giratoria, ninguna torca externa actuará alrededor del eje vertical (z) así que el momento angular con respecto a ese eje será constante.

**PLANTEAR:** Usando una ecuación definida en adelante utilizaremos para calcular la incógnita (la velocidad angular final  $\omega_{2z}$ ).

**EJECUTAR:** El momento de inercia del sistema es  $I = I_{prof} + I_{manc}$ . Cada mancuerna de masa  $m$  aporta  $mr^2$  a  $I_{manc}$ , donde  $r$  es la distancia perpendicular del eje de rotación a la mancuerna. Inicialmente, tenemos

$$I_1 = 3.0\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\text{kg})(1.0\text{m})^2 = 13.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\omega_{1z} = \frac{1\text{rev}}{2.0\text{s}} = 0.50\text{rev/seg}$$

Diversión con la conservación del momento angular.

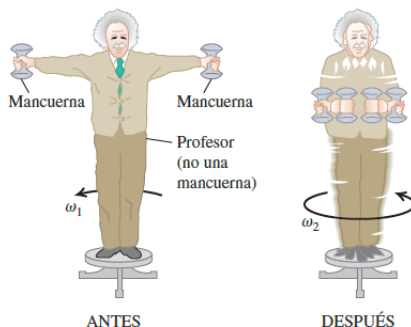


Figura 9

El momento de inercia final es

$$I_2 = 2.2\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 2(5.0\text{kg})(0.20\text{m})^2 = 2.6\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

la velocidad angular final es

$$\omega_{2z} = \frac{I_1}{I_2}\omega_{1z} = \frac{13\text{kg}\cdot\text{m}^2}{2.6\text{kg}\cdot\text{m}^2}(0.50\text{rev/s}) = 2.5\text{rev/s}$$

Es decir, la velocidad angular aumenta en un factor de 5, en tanto que el momento angular se mantiene constante. Observe que no tuvimos que cambiar “revoluciones” a “radianes” en este cálculo. ¿Por qué?

**EVALUAREs** útil examinar la manera en que cambia la energía cinética en este proceso. Para calcular la energía cinética, debemos expresar  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en rad/s. (¿Por qué?) Tenemos  $\omega_{1z}(0.50\text{rev/s})(2\pi\text{rad/rev}) = 3.14\text{rad/s}$  y  $\omega_{2z} = (2.5\text{rev/s})(2\pi\text{rad/rev}) = 15.7\text{rad/s}$ . La energía cinética inicial es

$$K_1 = \frac{1}{2}I_1\omega_{1z}^2 = \frac{1}{2}(13\text{kg}\cdot\text{m}^2)(3.14\text{rad/s})^2 = 64\text{J}$$

y la energía cinética final es

$$K_2 = \frac{1}{2}I_2\omega_{2z}^2 = \frac{1}{2}(2.6\text{kg}\cdot\text{m}^2)(15.7\text{rad/s})^2 = 320\text{J}$$

La energía cinética adicional proviene del trabajo que el profesor realizó para pegar sus brazos y las mancuernas al abd

**#11 Momento angular en una acción policiaca** Una puerta de 1.00 m de ancho y masa de 15 kg tiene bisagras en un costado, de modo que puede girar sin fricción sobre un eje vertical. La puerta no está asegurada. Un policía dispara una bala de 10 g de masa con rapidez de 400 m/s al centro exacto de la puerta, en dirección perpendicular al plano de la puerta (figura #10). Calcule la rapidez angular de la puerta justo después de que la bala se incrusta en la puerta. ¿Se conserva la energía cinética?

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** Consideramos la puerta y la bala como un sistema. No hay torca externa alrededor del eje definido por las bisagras, así que se conserva el momento angular con respecto a este eje.

**PLANTEAR:** La figura #10 muestra nuestro esquema. El momento angular inicial está totalmente en la bala. El momento angular final es la de un cuerpo rígido formado por la puerta y la bala incrustada. Igualaremos estas dos cantidades y despejaremos la rapidez angular  $\omega$  de la puerta y la bala inmediatamente después del choque.

**EJECUTAR:** El momento angular inicial de la bala es:

$$L = mvl = (0.010\text{kg})(400\text{m/s})(0.50\text{m}) = 2.0\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Por el momento angular final es  $I\omega$ , donde  $I = I_{\text{puerta}} + I_{\text{bala}}$ . para una puerta de anchura  $d$ ,

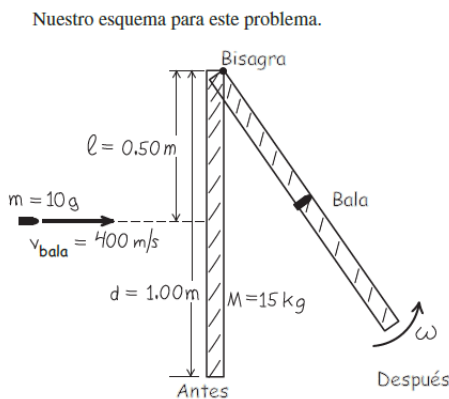


Figura 10

$$I_{puerta} = \frac{Md^2}{3} = \frac{(15\text{kg})(1.0\text{m})^2}{3} = 5.0\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la bala (con respecto al eje que pasa por las bisagras) es

$$I_{bala} = ml^2 = (0.010\text{kg})(0.50\text{m})^2 = 0.0025\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

La conservación del momento angular requiere que  $mv\ell = I\omega$ , es decir,

$$\omega = \frac{mv\ell}{I} = \frac{2.0\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{5.0\text{kg}\cdot\text{m}^2 + 0.0025\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 0.40\text{rad/s}$$

El choque de la bala con la puerta es inelástico porque durante el impacto actúan fuerzas de fricción no conservadoras. Por lo tanto, no esperamos que se conserve la energía cinética. Comprobamos esto calculando las energías cinéticas inicial y final:

$$K_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.010\text{kg})(400\text{m/s})^2 = 800\text{J}$$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(5.0025\text{kg}\cdot\text{m}^2)(0.40\text{rad/s})^2 = 0.40\text{J}$$

¡La energía cinética final es sólo 1/2000 del valor inicial!

**EVALUAR** La rapidez angular final de la puerta es muy baja: a 0.40 rad/s, la puerta tardará 3.9 s en oscilar  $90^\circ$  ( $\pi/2$  radianes). ¿Le queda claro al lector que la rapidez aumentaría al doble, si la bala se disparara contra el borde de la puerta cerca de la perilla?

## Estrategia para la resolución de problemas en Equilibrio Estático y Elasticidad:

- Hacer un solo diagrama de cuerpo libre claro y cuidadoso y elija un sistema coordenado conveniente
- Escribir las ecuaciones de equilibrio para las fuerzas  $\sum F_x = 0$  y  $\sum F_y = 0$
- Para la ecuación de torca  $\sum \tau = 0$  elija cualquier eje perpendicular al plano xy que ayude a hacer el cálculo mas fácilmente.
- Despejar las incógnitas en la ecuaciones anteriores.

**#12 Rescate heroico** Sir Lancelot está tratando de rescatar a Lady Elayne del Castillo von Doom subiendo por una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 180 N. Lancelot, quien pesa 800 N, se detiene después de subir un tercio de la escalera (figura #11). La base de la escalera descansa en una cornisa de piedra horizontal y se recarga al otro lado del foso en equilibrio contra una pared vertical, que no tiene fricción a causa de una gruesa capa de musgo. La escalera forma un ángulo de  $53.1^\circ$  con la horizontal, siendo así la hipotenusa de un triángulo rectángulo 3-4-5.

- Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera.
- Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento en la base de la escalera.
- Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto que actúa sobre la base de la escalera

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El sistema escalera-Lancelot es estacionario (en reposo), así que podemos usar las dos condiciones de equilibrio, las cuales bastan para resolver el inciso a). En el inciso b), también necesitaremos la relación dada entre la fuerza de fricción estática, el coeficiente de fricción estática y la fuerza normal. La fuerza de contacto que se pide en el inciso c) es la suma vectorial de la fuerza normal y la fuerza de fricción que actúa en la base de la escalera, que obtendremos en el inciso a).

**PLANTEAR:** La figura #11 muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema escalera-Lancelot. Elegimos las direcciones  $x$  y  $y$  como se muestra y tomamos las torcas en sentido antihorario como positivas. La escalera que se describe es uniforme, por lo que el centro de gravedad está en su centro geométrico. El peso de 800 N de Lancelot actúa en un punto de la escalera situado a un tercio de la distancia entre la base y la pared.

La pared sin fricción sólo ejerce una fuerza normal  $n_1$  sobre la parte superior de la escalera. Las fuerzas en la base son la fuerza normal hacia arriba  $n_2$  y la fuerza de fricción estática  $f_s$ , que debe apuntar a la derecha para evitar un deslizamiento; las magnitudes  $n_2$  y  $f_s$  son las incógnitas del inciso a). Estas magnitudes están relacionadas por  $f_s \leq \mu_s n_2$ , donde  $\mu_s$  es el coeficiente de fricción estática [la incógnita del inciso b)].

**EJECUTAR:** La primera condición de equilibrio da

$$\sum F_x = f_s + (-n_1) = 0$$

$$\sum F_y = n_2 + (-800N) + (-180N) = 0$$

Tenemos dos ecuaciones para las tres incógnitas:  $n_1$ ,  $n_2$  y  $f_s$ . La primera ecuación nos dice que las dos fuerzas horizontales deben ser iguales y opuestas, y la segunda da

$$n_2 = 980N$$

El suelo empuja hacia arriba con una fuerza de 980 N para equilibrar el peso total (hacia abajo) (800 N + 180 N).

Aún no tenemos suficientes ecuaciones, pero ahora podemos usar la segunda condición de equilibrio. Podemos tomar torcas alrededor de cualquier punto. La mejor opción es el punto B, que nos da menos términos y menos incógnitas en la ecuación de torca. Por ello, las fuerzas  $n_2$  y  $f_s$  no tienen torca alrededor de ese punto. En la figura #11b, vemos que el brazo de palanca del peso de la escalera es 1.5 m, el brazo de palanca del peso de Lancelot es 1.0 m y el brazo de palanca de  $n_1$  es 4.0 m. La ecuación de torca para B es

$$\sum \tau_B = n_1(4.0m) - (180N)(1.5m) - (800N)(1.0m) + n_2(0)f_s(0) = 0$$

Despejando  $n_1$ , obtenemos  $n_1 = 268N$ . Sustituimos esto en la ecuación de  $\sum F_x = 0$  para obtener

$$f_s = 268N$$

La fuerza de fricción estática  $f_s$  no puede exceder  $\mu_s n_2$ , así que el coeficiente mínimo de fricción estática para evitar el deslizamiento es

$$(\mu_s)_{min} = \frac{f_s}{n_2} = \frac{268N}{980N} = 0.27$$

Las componentes de la fuerza de contacto  $\vec{F}_B$  en la base son la fuerza de fricción estática  $f_s$  y la fuerza normal  $n_2$ , así que

$$\vec{F}_B = f_s \hat{i} + n_2 \hat{j} = (268N) + (980N)$$

La magnitud y la dirección de  $\vec{F}_B$  (figura #11c) es entonces

$$F_b = \sqrt{(268N)^2 + (980N)^2} = 1020N$$

$$\theta = \arctan \frac{980N}{268N} = 75^\circ$$

**EVALUAR** Como se aprecia en la figura #11c, la fuerza de contacto  $\vec{F}_b$  no está dirigida a lo largo de la escalera. Esto podría extrañarnos, pero no hay una razón de peso para que las dos direcciones sean iguales. ¿Puede el lector demostrar que si  $\vec{F}_B$  estuviera dirigida a lo largo de la escalera, habría una torca total en sentido antihorario con respecto a la parte superior y el equilibrio sería imposible?

Hagamos algunos comentarios finales. Primero, si Lancelot sube más por la escalera, el brazo de palanca y la torca de su peso con respecto a B aumentarán, y lo mismo ocurrirá con  $n_1$ ,  $f_s$  y  $(\mu_s)_{min}$ . Al llegar arriba, su brazo de palanca sería de casi 3m, dando un coeficiente de fricción estática mínimo de casi 0.7. El valor de  $\mu_s$  no sería tan grande para una escalera medieval de Lancelot, y probablemente resbalará cuando él suba. Para evitar esto, en la actualidad las escaleras se equipan con almohadillas de hule antiderrapante.

Segundo, un ángulo mayor de la escalera reduciría los brazos de palanca con respecto a B de los pesos de la escalera y de Lancelot, y aumentaría el brazo de palanca de  $n_1$ ; todo esto reduciría la fuerza de fricción requerida. La R. D. Werner Ladder Co. recomienda usar sus escaleras con un ángulo de  $75^\circ$ . (¿Por qué no de  $90^\circ$ ?)

Por último, si hubiéramos supuesto fricción en la pared además del piso, el problema no se hubiera resuelto usando sólo las condiciones de equilibrio. (¡Inténtelo!) Se dice que un problema así es estáticamente indeterminado. La cuestión es que el cuerpo ya no puede tratarse como perfectamente rígido. Otro ejemplo sencillo es una mesa de cuatro patas; no podemos usar sólo las condiciones de equilibrio para calcular la fuerza que actúa en cada pata.

a) Sir Lancelot se detiene después de subir un tercio de la escalera, temiendo que resbalará. b) Diagrama de cuerpo libre del sistema escalera-Lancelot. c) La fuerza de contacto en B es la superposición de la fuerza normal y la fuerza de fricción estática.

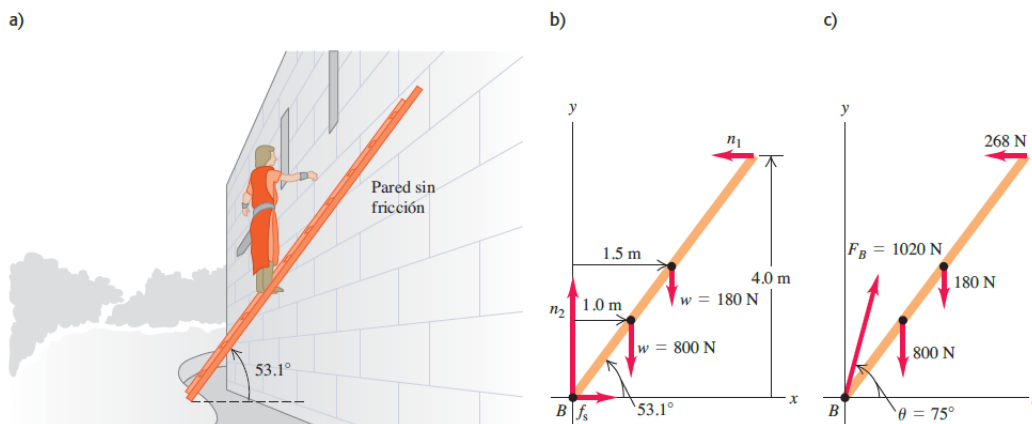


Figura 11

**#13 Equilibrio y ejercicio** La figura #12a muestra un brazo humano horizontal levantando una mancuerna. El antebrazo está en equilibrio bajo la acción del peso  $w$  de la mancuerna, la tensión  $T$  del tendón conectado al músculo bíceps y la fuerza  $E$  ejercida sobre el antebrazo por el brazo en el codo. Por claridad, el punto  $A$  de adhesión del tendón se dibujó más lejos del codo que en la realidad. Se dan el peso  $w$  y el ángulo  $\theta$  entre la fuerza de tensión y la horizontal; queremos calcular la tensión en el tendón y las dos componentes de fuerza en el codo (tres incógnitas escalares en total). Despreciamos el peso del antebrazo

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El sistema está en reposo, así que de nuevo usamos las condiciones de equilibrio.

**PLANTEAR:** Como se muestra en la figura #12b, representamos la fuerza del tendón en términos de sus componentes  $T_x$  y  $T_y$ , usando el ángulo dado  $\theta$  y la magnitud desconocida  $T$ :

$$T_x = T \cos \theta \quad \text{y} \quad T_y = T \sin \theta$$

También representamos la fuerza en el codo en términos de sus componentes  $E_x$  y  $E_y$ ; supondremos que sus direcciones son las indicadas en la figura #12b; no necesitamos ser exactos porque los resultados de  $E_x$  y  $E_y$  nos indicarán las direcciones reales. Las incógnitas son la magnitud  $T$  de la tensión en el tendón y las componentes  $E_x$  y  $E_y$  de la fuerza en el codo.

**EJECUTAR:** La forma más sencilla de obtener la tensión  $T$  es tomando torcas con respecto al codo. La ecuación de torca resultante no contiene  $E_x$ ,  $E_y$  ni  $T_x$  porque las líneas de acción de todas estas fuerzas pasan por este punto. La ecuación de torca se reduce entonces a

$$\sum \tau_B = Lw - DT_y = 0$$

De eso obtenemos

$$T_y = \frac{Lw}{D} \quad \text{y} \quad T = \frac{Lw}{D \sin \theta}$$

Para calcular  $E_x$  y  $E_y$ , usamos la primera condición de equilibrio,

$$\sum F_x = T_x + (-E_x) = 0$$

$$\begin{aligned} E_x = T_x = T \cos \theta &= \frac{Lw}{D \sin \theta} \cos \theta = \frac{Lw}{D} \cot \theta \\ &= \frac{Lw}{D} \frac{D}{h} = \frac{Lw}{h} \end{aligned}$$

y

$$\sum F_y = T_y + E_y + (-w) = 0$$

$$E_y = w - \frac{Lw}{D} = -\frac{(L-D)w}{D}$$

El signo negativo indica que nuestra estimación de la dirección de  $E_y$  (figura #12b) es incorrecta; en realidad es vertical hacia abajo.

**EVALUAR** Podemos comprobar nuestros resultados obteniendo  $E_x$  y  $E_y$  de una manera distinta que usa otras dos ecuaciones de torcas. Tomamos torcas con respecto al punto de sujeción del tendón, A:

$$\sum \tau_A = (L-D)w + DE_y = 0 \quad \text{y} \quad E_y = -\frac{(L-D)w}{D}$$

Por último, tomamos torcas con respecto al punto B de la figura:

$$\sum \tau_B = Lw - hE_x = 0 \quad \text{y} \quad E_x = \frac{Lw}{h}$$

Elegimos los puntos A y B porque la tensión del tendón  $T$  tiene torca cero en torno a esos puntos. (¿Entiende por qué, viendo la figura #12b?) Observe lo mucho que simplificamos los cálculos eligiendo el punto para calcular torcas a modo de eliminar una o más incógnitas. En nuestra determinación alterna de  $E_x$  y  $E_y$ , no usamos explícitamente la primera condición de equilibrio (que la suma vectorial de las fuerzas sea cero). Como verificación, calcule  $\sum F_x$  y  $\sum F_y$  ¡para comprobar que realmente sean cero!

Como ejemplo específico, suponga  $w = 200$  N,  $D = 0.050$  m,  $L = 0.30$  m y  $\theta = 80^\circ$ . Dado que  $\theta = h/D$ , obtenemos

$$h = D \tan \theta = (0.050m)(5.67) = 0.28m$$

Por los resultados generales anteriores vemos que

$$T = \frac{Lw}{D \sin \theta} = \frac{(0.30m)(200N)}{(0.050m)(0.98)} = 1220N$$

$$E_y = -\frac{(L-D)w}{D} = -\frac{(0.30m-0.050m)(200N)}{0.050m} = -1000N$$

$$E_x = \frac{Lw}{h} = \frac{(0.30m)(200N)}{(0.28)} = 210N$$

La magnitud de la fuerza en el codo es

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 1020N$$

En vista de las magnitudes de los resultados, despreciar el peso del antebrazo (digamos de 20 N) sólo causa errores relativamente pequeños.

a) La situación. b) Diagrama de cuerpo libre del antebrazo. Se desprecia el peso del antebrazo y se exagera mucho la distancia  $D$  por claridad.

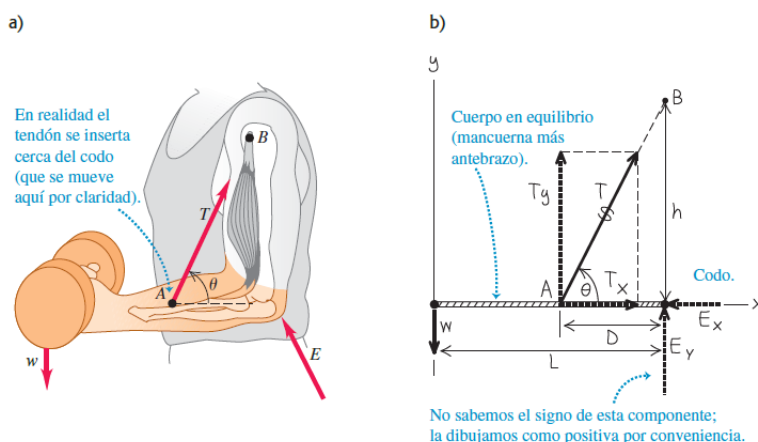


Figura 12

## Estrategia para la resolución de problemas en Mecánica de Fluidos

- Hacer un solo diagrama de cuerpo libre conveniente y claro y elija un sistema coordenado conveniente
- Escribir las ecuaciones para las fuerzas que interactúan en dicho sistema
- Para la ecuación de Bernoulli y Segunda ley de Newton identificar variable y significado de cada una de ellas.
- Despejar las incógnitas en las ecuaciones anteriores.

#14

**Historia de dos fluidos** Un tubo de manómetro se llena parcialmente con agua. Después se vierte aceite (que no se mezcla con el agua y tiene menor densidad que el agua) en el brazo izquierdo del tubo hasta que la interfaz aceite-agua está en el punto medio del tubo. Ambos brazos del tubo están abiertos al aire. Determine la relación entre las alturas  $h_{\text{aceite}}$  y  $h_{\text{agua}}$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La relación entre presión y profundidad en un fluido sólo es válida para los fluidos de densidad uniforme. Por lo tanto, no podemos escribir una sola ecuación para el aceite y el agua juntos. Lo que sí podemos hacer es escribir

una relación presión-profundidad para cada fluido por separado. Advierta que ambas columnas de fluido tienen la misma presión en la base (donde están en contacto y en equilibrio, así que las presiones deben ser iguales) y en la parte superior (donde ambas están en contacto con la atmósfera y en equilibrio con ella).

**PLANTEAR:** La figura #13 ilustra la situación. Sea  $p_0$  la presión atmosférica, y  $p$  la presión en el fondo del tubo. Las densidades de los dos fluidos son  $\rho_{agua}$  y  $\rho_{aceite}$  (que es menor que  $\rho_{agua}$ ).

**EJECUTAR:** Para los dos fluidos, usamos la siguiente ecuación:

$$p = p_0 + \rho_{agua}gh_{agua}$$

$$p = p_0 + \rho_{aceite}gh_{aceite}$$

Nuestro esquema para este problema.

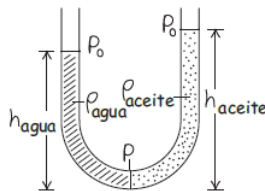


Figura 13

Puesto que la presión  $p$  en la base del tubo es la misma para ambos fluidos, igualamos las dos expresiones y despejamos  $h_{aceite}$  en términos de  $h_{agua}$ . Puede demostrarse que el resultado es

$$h_{aceite} = \frac{\rho_{agua}}{\rho_{aceite}} h_{agua}$$

**EVALUAR** Puesto que el aceite es menos denso que el agua, la razón  $\rho_{agua}/\rho_{aceite}$  es mayor que la unidad y  $h_{aceite}$  es mayor que  $h_{agua}$  (como se observa en la figura #13). Es decir, se necesita una mayor altura de aceite menos denso para producir la misma presión  $p$  en la base del tubo.

**#15 Flotación** Una estatua de oro sólido de 15.0 kg de peso está siendo levantada de un barco hundido (figura #14). ¿Qué tensión hay en el cable cuando la estatua está a) en reposo y totalmente sumergida, y b) en reposo y fuera del agua?

**SOLUCIÓN**

**IDENTIFICAR:** Cuando la estatua está sumergida, experimenta una fuerza de flotación hacia arriba igual en magnitud al peso del fluido desplazado. Para calcular la tensión, observamos que la estatua está en equilibrio (en reposo) y consideramos las tres fuerzas que actúan sobre ella: su peso, la fuerza de flotación y la tensión en el cable.

**PLANTEAR:** La figura #14b ilustra el diagrama de cuerpo libre de la estatua en equilibrio. La incógnita es la tensión  $T$ . Nos dan el peso  $mg$  y podemos calcular la fuerza de flotación  $B$  usando el principio de Arquímedes. Haremos esto para dos casos: a) cuando la estatua está sumergida en el agua y b) cuando está fuera del agua e inmersa en el aire.

**EJECUTAR:** a) Para calcular la fuerza de flotación, primero calculamos el volumen de la estatua usando la densidad del oro

$$V = \frac{m}{\rho_{oro}} = \frac{15.0 \text{ kg}}{19.3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 7.77 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Ahora calculamos el peso de ese volumen de agua de mar:

$$\begin{aligned} w_{am} &= m_{am}g = \rho_{am}Vg \\ &= (1.03 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4} \text{ m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 7.84 \text{ N} \end{aligned}$$

Esto es igual a la fuerza de flotación  $B$ . La estatua está en reposo, así que la fuerza externa neta que actúa sobre ella es igual a cero. De acuerdo con la figura 14b,



¿Cuál es la tensión en el cable que levanta la estatua?

a) Estatua inmersa y en equilibrio b) Diagrama de cuerpo libre de la estatua

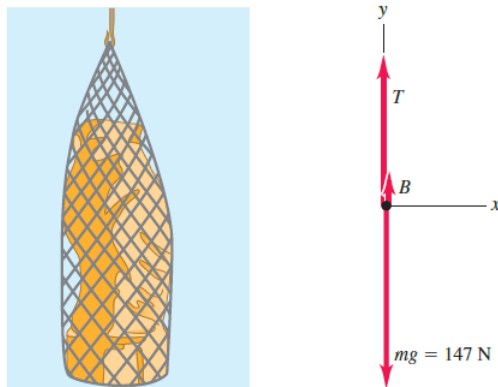


Figura 14

$$\sum F_y B + T + (-mg) = 0$$

$$T = mg - B = (15.0\text{kg})(9.80\text{m/s}^2) - 7.84\text{N}$$

$$= 147\text{N} - 7.84\text{N} = 139\text{N}$$

Si hay una balanza de resorte unida al extremo superior del cable, marcará 7.84 N menos de lo que marcaría si la estatua no estuviera sumergida en agua de mar. Por ello, la estatua sumergida parece pesar 139 N, cerca del 5 % menos que su peso real de 147 N.

b) La densidad del aire es de cerca de  $1.2\text{ kg/m}^3$ , así que la fuerza de flotación del aire sobre la estatua es

$$B = \rho_{\text{aire}} V g = (1.2\text{kg/m}^3)(7.77 \times 10^{-4}\text{m}^3)(9.80\text{m/s}^2)$$

$$= 9.1 \times 10^{-3}\text{N}$$

Esto es sólo 62 millonésimas del peso real de la estatua. Este efecto es menor que la precisión de nuestros datos, así que lo despreciamos. Por lo tanto, la tensión en el cable con la estatua en el aire es igual al peso de la estatua, 147 N.

**EVALUAR** Advierta que la fuerza de flotación es proporcional a la densidad del fluido, no a la densidad de la estatua. Cuanto más denso es el fluido, mayor será la fuerza de flotación y menor será la tensión en el cable. Si el fluido tuviera la misma densidad que la estatua, la fuerza de flotación sería igual al peso de la estatua y la tensión sería cero (el cable se aflojaría). Si el fluido fuera más denso que la estatua, la tensión sería negativa: la fuerza de flotación sería mayor que el peso de la estatua, y se requeriría una fuerza hacia abajo para evitar que la estatua se elevara.

#16

**El medidor Venturi** La figura #15 ilustra un medidor Venturi, que se usa para medir la rapidez de flujo en un tubo. La parte angosta del tubo se llama garganta. Deduzca una expresión para la rapidez de flujo  $v_1$  en términos de las áreas transversales  $A_1$  y  $A_2$  y la diferencia de altura  $h$  del líquido en los dos tubos verticales.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** El flujo es estable y suponemos que el fluido es incompresible y que tiene fricción interna despreciable. Por lo tanto, podemos utilizar la ecuación de Bernoulli.

**PLANTEAR:** Aplicamos la ecuación de Bernoulli a las partes ancha (punto 1) y angosta (punto 2) del tubo. La diferencia de altura entre los dos tubos verticales indica la diferencia de presión entre los puntos 1 y 2.

**EJECUTAR:** Los dos puntos tienen la misma coordenada vertical ( $y_1 = y_2$ ), así que la ecuación siguiente dice

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad,  $p_2 = (A_1/A_2)v_1$ . Sustituyendo y reordenando, obtenemos

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left( \frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)$$

El medidor Venturi.

La diferencia de altura es resultado de la presión reducida en la garganta (punto 2).

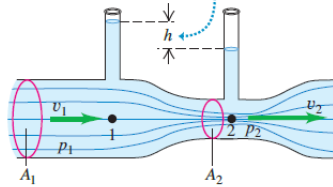


Figura 15

La diferencia de presión  $p_1 - p_2$  también es igual a  $\rho gh$ , donde  $h$  es la diferencia de nivel del líquido en los dos tubos. Combinando esto con el resultado anterior y despejando  $v_1$ , obtenemos

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

**EVALUAR** Puesto que  $A_1$  es mayor que  $A_2$ ,  $v_2$  es mayor que  $v_1$  y la presión  $p_2$  en la garganta es menor que  $p_1$ . Una fuerza neta a la derecha acelera el fluido al entrar en la garganta, y una fuerza neta a la izquierda lo frena al salir.

#### ■ PROBLEMAS DIFICULTAD BAJA (TEÓRICOS)

#1 La figura #16 muestra una fuerza  $P$  que se aplica a un extremo de una palanca de longitud  $L$ . ¿Cuál es la magnitud de la torca de esta fuerza en torno al punto A?

- a)  $PL \sin \theta$
- b)  $PL \cos \theta$
- c)  $PL \tan \theta$
- d)  $PL \cot \theta$
- e) Ninguna.

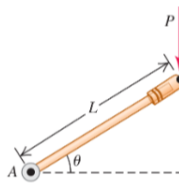


Figura 16

#2 La figura #17 muestra un deslizador de masa  $m_1$  que se mueve sin fricción sobre un riel de aire horizontal, sujeto a un objeto de masa  $m_2$  con un cordón sin masa. La polea tiene radio  $R$  y momento de inercia  $I$  en torno a su eje de rotación. Cuando se suelta, el objeto colgante acelera hacia abajo, el deslizador acelera a la derecha y el cordón gira la polea deslizarse ni estirarse. Ordene, de mayor a menor, las magnitudes de las siguientes fuerzas que actúan durante el movimiento.

- La fuerza de tensión (magnitud  $T_1$ ) en la parte horizontal del cordón.
- La fuerza de tensión (magnitud  $T_2$ ) en la parte vertical del cordón.
- El peso  $m_2g$  del objeto colgante.

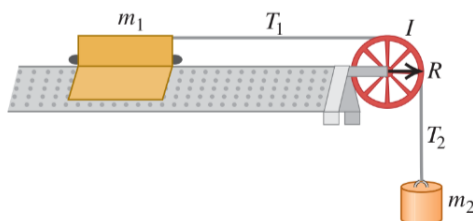


Figura 17

#3 Se aplican torcas iguales a dos cilindros distintos, uno de los cuales tiene un momento de inercia dos veces mayor que el del otro. Los dos cilindros están inicialmente en reposo. Después de una rotación completa, ¿cuál cilindro tiene mayor energía cinética?

- El cilindro con el momento de inercia mayor.
- El cilindro con el momento de inercia menor.
- Ambos cilindros tienen la misma energía cinética.

#4 Una pelota y un cilindro sólidos bajan rodando por una rampa. Ambos parten del reposo al mismo tiempo. ¿Cuál llegará primero al fondo de la rampa?

- Ambos llegarán al mismo tiempo.
- Llegarán casi al mismo tiempo, excepto por diferencias en la fricción.
- La pelota llegará primero.
- El cilindro llegará primero.
- No se puede determinar sin conocer la masa y el radio de cada uno.

#5 Dos fuerzas ( $F_B = 20N$  y  $F_A = 30N$ ) se aplican a una regla de un metro que puede girar alrededor de su extremo izquierdo, figura #18. La fuerza  $F_B$  se aplica perpendicularmente en la parte media. ¿Qué fuerza ejerce la mayor torca:?

- $F_A$
- $F_B$
- La torca es la misma.

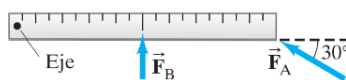


Figura 18

- #6 La presión en el fondo de un vaso lleno de agua ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) es  $P_1$ . El agua se derrama y ahora el vaso se llena con alcohol etílico completamente ( $\rho = 806 \text{ kg/m}^3$ ) y ahora la presión es  $P_2$ . ¿Cuál es la relación correcta entre las presiones?
- $P_1 = P_2$  (es la misma profundidad del vaso!)
  - $P_1 > P_2$
  - $P_1 < P_2$
  - Ninguna es correcta.
- #7 Según la ecuación de tasa de flujo o ecuación de continuidad podemos concluir que:
- Si la velocidad es alta el área transversal es alta, en ese mismo punto.
  - Si la velocidad es alta el área transversal es baja, en ese mismo punto.
  - Si la velocidad es baja el área transversal es baja, en ese mismo punto.
  - Todas las velocidades son iguales sin importar las áreas transversales.
- #8 ¿Cuál es el enunciado más exacto del principio de Bernoulli?
- El aire que se desplaza rápidamente provoca presión más alta.
  - El aire que se desplaza rápidamente provoca presión más baja.
  - El aire que se desplaza lentamente provoca presión más baja.
  - Ninguna es correcta.
- #9 Un cubo de hielo flota en un vaso de agua. Al derretirse el hielo, ¿el nivel de agua en el vaso: subirá, bajará o permanecerá igual?
- Subirá?
  - Bajará?
  - Permanecerá igual?
- #10 Dos cubos de idéntico tamaño, uno de plomo y el otro de aluminio, están suspendidos a diferentes profundidades por medio de dos alambres en un tanque de agua como se muestra en la figura #19.
- ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza de flotación?
  - ¿Para cuál de los dos es mayor la tensión en el alambre?
  - ¿Cuál de ellos experimenta una mayor fuerza sobre su cara inferior?
  - ¿Para cuál de ellos la diferencia en la presión entre las caras superior e inferior es mayor?

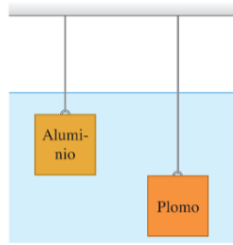


Figura 19

#11 Si el momento de torsión externo neto que actúa sobre el sistema es cero:

- a) La magnitud de la cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante.
- b) La magnitud y la dirección de la cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante.
- c) El sistema está aislado.
- d) La b) y c) son correctas

#12 El momento de inercia y la velocidad angular apuntan en la misma dirección cuando:

- a) Un objeto rígido da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa.
- b) Un objeto rígido da vueltas en torno a un eje arbitrario.
- c) Todas las anteriores.

#13 El momento de torsión neto cero se da cuando:

- a) Existe ausencia de movimiento rotacional
- b) Existe un objeto que rota con rapidez angular constante.
- c) La a) y b) son correctas

#14 El momento de inercia de un cuerpo que se encuentra en rotación depende de:

- a) La masa de dicho cuerpo
- b) Elección del eje de rotación
- c) La forma de dicho cuerpo
- d) Ninguna de las anteriores

#15 El momento de inercia que es calculado en torno a un eje que pasa a través del centro de masa del objeto, se le conoce como:

- a) valor máximo
- b) valor mínimo
- c) valor central
- d) Ninguna de las anteriores

## PROBLEMAS DIFICULTAD MEDIA

- #1 Un plomero aficionado, que no puede aflojar una junta, ensarta un tramo de tubo en el mango de su llave de tuercas y aplica todo su peso de 900 N al extremo del tubo parándose sobre él. La distancia del centro de la junta al punto donde actúa el peso es de 0.800 m, y el mango y el tubo forman un ángulo de  $19.0^\circ$  con la horizontal (ver figura #20). Calcule la magnitud y la dirección de la torca que el plomero aplica en torno al centro de la junta.

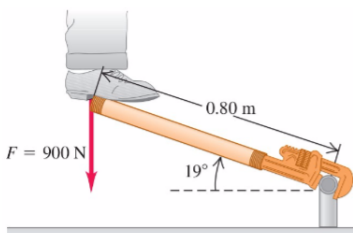


Figura 20

Respuesta:  $\tau = 680.7 \text{ N}\cdot\text{m}$

- #2 Se enrolla un cable varias veces en un cilindro sólido uniforme de 50.0 kg con diámetro de 0.120 m (ver figura #21), que puede girar sobre su eje. Se tira del cable con una fuerza de 9.00 N. Suponiendo que el cable se desenrolla sin estirarse ni resbalar, ¿qué aceleración lineal tiene el cable?

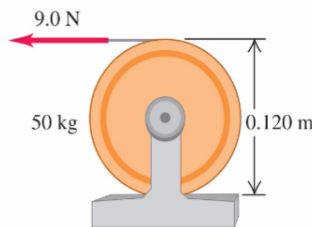


Figura 21

Respuesta:  $a = 0.36 \text{ m/s}^2$

- #3 Un contrapeso de masa  $m$  se une a una cuerda ligera que se enreda alrededor de un carrete hueco. El carrete hueco es un cilindro de 8.00 cm de radio exterior, 4.00 cm de radio interior y 2.00 kg de masa. Cuando el contrapeso tiene una rapidez  $v = 1.00 \text{ m/s}$ , el carrete tiene una rapidez angular  $\omega = v/R$  y el momento angular total en torno a O es  $1.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$ . Determine la masa del contrapeso  $m$  con ésta información.

Respuesta:  $m = 17.5 \text{ kg}$

- #4 Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa  $M = 120 \text{ kg}$  y un radio  $R = 2.50 \text{ m}$ . Una estudiante, cuya masa es  $m$ , camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es  $2.00 \text{ rad/s}$  cuando el estudiante está en el borde y  $4.10 \text{ rad/s}$  cuando está en el punto  $r = 0.25 \text{ m}$  desde el centro, ¿cuál es la masa que debe tener la estudiante?

Respuesta:  $m = 64.32 \text{ kg}$

- #5 Un hidrómetro es un instrumento que se usa para determinar la densidad de los líquidos, en la figura #22 se muestra uno simple. El bulbo de una jeringa se presiona y libera para dejar que la atmósfera eleve una muestra del líquido de interés en un tubo que contiene una barra calibrada de densidad desconocida. La barra, de longitud  $L=10.0\text{ cm}$  y densidad promedio  $\rho_0$ , flota parcialmente sumergida en el fluido de densidad  $\rho = 800\text{ kg/m}^3$ . Una longitud  $h=2.00\text{ cm}$  de la barra sobresale de la superficie del líquido. Determine la densidad de la barra  $\rho$ .

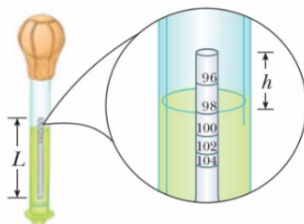


Figura 22

Respuesta:  $\rho_o = 640\text{ kg/m}^3$

- #6 Considere un avión en vuelo con presión afuera de la cabina de  $0.200\text{ atm}$  y dentro del compartimiento de pasajeros, la presión es de  $1.20\text{ atm}$ . En el sello de una de las ventanas del compartimiento de pasajeros ocurre una pequeña fuga. Represente el aire como un fluido ideal para encontrar la rapidez de la corriente del aire que circula a través de la fuga.  
Respuesta:  $V_2 = 396.3\text{ m/s}$

- #7 Un disco de masa  $m$  se amarra a una cuerda que pasa a través de un pequeño hoyo en una superficie horizontal sin fricción (ver figura #23). El disco inicialmente orbita con rapidez  $v_i$  en un círculo de radio  $r_i$ . Luego la cuerda se jala lentamente desde abajo, lo que disminuye el radio del círculo a  $r$ .
- ¿Cuál es la rapidez del disco cuando el radio es  $r$ ?
  - Encuentre la tensión en la cuerda como función de  $r$ .
  - ¿Cuánto trabajo  $W$  se realiza al mover  $m$  de  $r_i$  a  $r$ ?

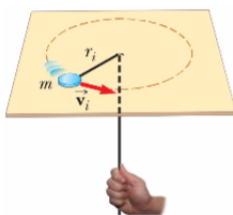


Figura 23

Respuesta: a)  $V = \frac{r_i V_i}{r}$  b)  $T = m \frac{m r_i^2 v_i^2}{r^3}$  c)  $W = \frac{1}{2} m V_i^2 \left( \frac{r_i^2}{r^2} - 1 \right)$

- #8 A un cilindro de una pieza se le da la forma que se muestra en la figura #24, con una sección central que sobresale desde el cilindro más grande. El cilindro de masa  $M = 10.0\text{ kg}$  es libre de dar vuelta en torno al eje central que se muestra en el dibujo. Una soga enrollada en torno al tambor, que tiene radio  $R_1 = 50.0\text{ cm}$ , ejerce una fuerza  $T_1 = 10.0\text{ N}$  hacia la derecha sobre el cilindro. Una soga enrollada en torno a la parte central, que tiene radio  $R_2 = 25.0\text{ cm}$ , ejerce una fuerza  $T_2 = 5.00\text{ N}$  hacia abajo sobre el cilindro. ¿Cuál es la aceleración angular que tiene el cilindro?  
Respuesta:  $\alpha = -3.00\text{ rad/s}^2$

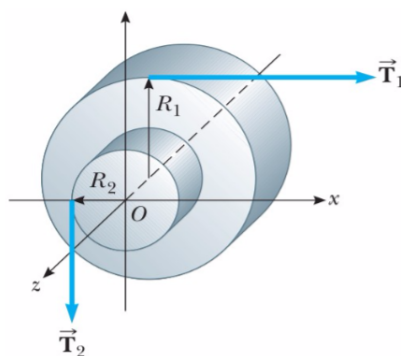


Figura 24

- #9 La caña de pescar en la figura #25 forma un ángulo de  $20.0^\circ$  con la horizontal. ¿Cuál es el momento de torsión que ejerce el pez en torno a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de las manos del pescador?

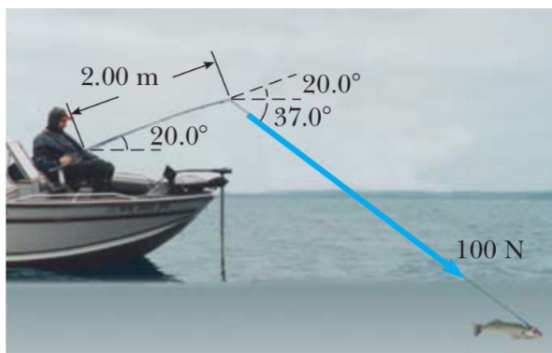


Figura 25

Respuesta:  $\tau = 167.7 \text{ N}\cdot\text{m}$

- #10 Un carrusel de jardín con radio  $R=2.50 \text{ m}$  tiene un momento de inercia  $I=250 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$  y es rotatorio a  $10.0 \text{ rev/min}$  en torno a un eje vertical sin fricción. Frente al eje, un niño de  $35.0 \text{ kg}$  salta hacia el carrusel y logra sentarse en el borde. ¿Cuál es la nueva rapidez angular del carrusel? Respuesta:  
 $\omega_2 = 0.56 \text{ rad/s}$

- #11 Un padre de masa  $m_f = 60.0 \text{ kg}$  y su hija de masa  $m_d = 30.0 \text{ kg}$  se sientan en extremos opuestos de un sube y baja a iguales distancias desde el eje en el centro (ver figura #4). El sube y baja se modela como una barra rígida de masa  $M = 10.0 \text{ kg}$  y longitud  $l = 3.00 \text{ m}$  y se articula sin fricción. En cierto momento, la combinación da vueltas en un plano vertical con una rapidez angular  $\omega = 2.00 \text{ rad/s}$ . Encuentre la magnitud de la cantidad de movimiento angular del sistema.

Respuesta:  $L = 420 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$



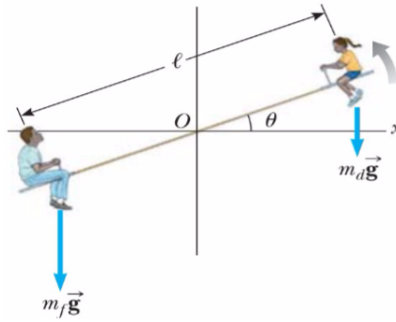


Figura 26

- #12 Se usa una batisfera (considerar como un esfera) para exploración profunda del mar tiene un radio de 1.50 m y una masa de  $1.20 \times 10^4 \text{ kg}$ . Para bucear, este submarino toma una masa consistente de agua de mar. Determine la cantidad de masa que debe tomar el submarino si debe descender con una rapidez constante de 1.20 m/s, cuando la fuerza resistiva es de 1100 N en la dirección hacia arriba. La densidad del agua de mar es  $1030 \text{ kg/m}^3$ .

Respuesta:  $m_{\text{mar}} = 14671 \text{ kg}$

- #13 Un gran tanque de almacenamiento, abierto en la parte superior y lleno con agua, en su costado en un punto a 16 m abajo del nivel de agua se elabora un orificio pequeño. La relación de flujo a causa de la fuga es de  $2.50 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{min}$ . Determine la rapidez a la que el agua sale del orificio.

Respuesta:  $V_2 = 17.7 \text{ m/s}$

- #14 Un cilindro con momento de inercia  $I_1$  da vueltas en torno a un eje vertical sin fricción con rapidez angular  $\omega_i$ . Un segundo cilindro, con momento de inercia  $I_2$  y que inicialmente no gira, cae sobre el primer cilindro (ver figura #27). Debido a la fricción entre las superficies, con el tiempo los dos llegan a la misma rapidez angular  $\omega_f$ .

- a) Calcule  $\omega_f$ .  
b) Calcule la proporción de la energía rotacional final a la inicial, oséa  $K_{\text{final}}/K_{\text{inicial}}$ .

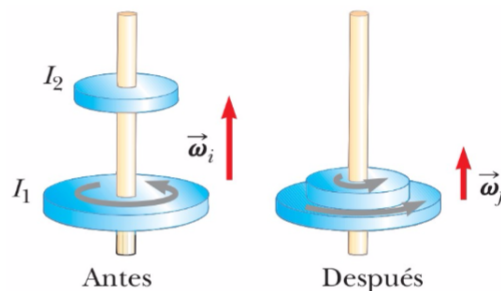


Figura 27

Respuesta: a)  $\omega_f = \frac{I}{I_1 + I_2} \omega_i$  b)  $\frac{K_f}{K_i} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$

- #15 La tina de una lavadora comienza su ciclo de giro, parte del reposo y gana rapidez angular de manera estable durante 8.00 s, momento en que gira a 5.00 rev/s. En este punto, la persona que lava abre la tapa y un interruptor de seguridad apaga la máquina. La tina frena lentamente hasta el reposo en 12.0 s. ¿Cuántas revoluciones realiza la tina mientras está en movimiento?

Respuesta:  $\theta_{\text{total}} = 50.0 \text{ rev}$

- #16 Muchas máquinas emplean levas para varios propósitos como abrir y cerrar válvulas. En la figura #28, la leva es un disco circular giratorio sobre un eje que no pasa a través del centro del disco. En la fabricación de la leva, primero se elabora un cilindro sólido uniforme de radio  $R$ . Luego se taladra un agujero fuera del centro, de radio  $R/2$ , paralelo al eje del cilindro y con centro en un punto a una distancia  $R/2$  desde el centro del cilindro. Después la leva, de masa  $M$ , se desliza sobre la flecha circular y se suelda en su lugar. ¿Cuál es la energía cinética de la leva cuando gira con rapidez angular  $\omega$  en torno al eje del árbol?

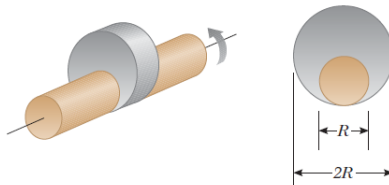


Figura 28

Respuesta: a)  $K = \frac{23}{48}MR^2\omega^2$

- #17 Un avión a escala con 0.750 kg de masa está amarrado con un alambre de modo que vuela en un círculo de 30.0 m de radio. El motor del avión proporciona un empuje neto de 0.800 N perpendicular al alambre de unión.
- Encuentre el momento de torsión que produce el empuje neto en torno al centro del círculo.
  - Encuentre la aceleración angular del avión cuando está en vuelo a nivel.
  - Encuentre la aceleración traslacional del avión tangente a su trayectoria de vuelo.
- Respuesta: a)  $\tau = 24.0 \text{ N}\cdot\text{m}$  b)  $\alpha = 0.0356 \text{ rad/s}^2$  c)  $a_t = 1.07 \text{ m/s}^2$

- #18 La distancia entre los centros de las ruedas de una motocicleta es 155 cm. El centro de masa de la motocicleta, incluido el conductor, está a 88.0 cm sobre el suelo y a la mitad entre las ruedas. Suponga que la masa de cada rueda es pequeña comparada con el cuerpo de la motocicleta. El motor sólo impulsa la rueda trasera. ¿Qué aceleración horizontal de la motocicleta hará que la rueda frontal se eleve del suelo?
- Respuesta:  $a_x = 8.63 \text{ m/s}^2$

- #19 Suponga que un meteorito de  $3.00 \times 10^{13} \text{ kg}$ , que se mueve a 30.0 km/s en relación con el centro de la Tierra, golpea la Tierra. ¿Cuál es el orden de magnitud de la máxima disminución posible en la rapidez angular de la Tierra debido a esta colisión? Explique su respuesta.
- Respuesta:  $|\Delta\omega_{\text{max}}| \sim 10^{-13} \text{ rad/s}$

- #20 Un proyectil de masa  $m$  se mueve hacia la derecha con una rapidez  $v_i$  (figura). El proyectil golpea y se pega al extremo de una barra estable de masa  $M$  y longitud  $d$  articulada en torno a un eje sin fricción a través de su centro (figura #29).
- Encuentre la rapidez angular del sistema justo después de la colisión.
  - Determine la pérdida fraccional en energía mecánica debido a la colisión.

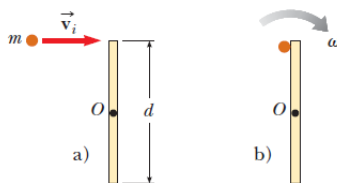


Figura 29

Respuesta: a)  $\omega = \frac{6mv_i}{Md+3md}$  b) pérdida fraccional de energía es  $\frac{M}{M+3m}$

- #21 Fátima construye con madera sólida una pista para su automóvil a escala, como se muestra en la figura #30. La pista tiene 5.00 m de ancho, 1.00 m de alto y 3.00 m de largo. La pista se corta de modo que forma una parábola con la ecuación  $y = (x - 3)^2/9$ . Ubique la coordenada horizontal del centro de gravedad de esta pista.

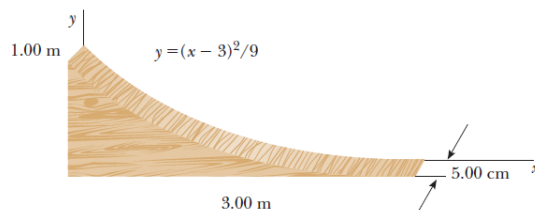


Figura 30

Respuesta:  $x_{CG} = 0.750m$

- #22 Un oso hambriento que pesa 700 N camina hacia afuera de una viga en un intento por recuperar una canasta de comida que cuelga en el extremo de la viga (figura #31). La viga es uniforme, pesa 200 N y mide 6.00 m de largo; la canasta pesa 80.0 N.
- Dibuje un diagrama de cuerpo libre para la viga.
  - Cuando el oso está en  $x = 1.00$  m, encuentre la tensión en el alambre y las componentes de la fuerza que ejerce la pared sobre el extremo izquierdo de la viga.

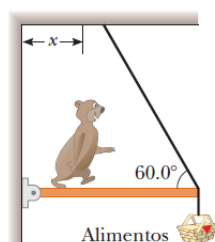


Figura 31

Respuesta: b)  $T = 343N$   $F_x = 171N$  ,  $F_y = 683N$

- #23 Un puente de 50.0 m de largo y  $8.00 \times 10^4$  kg de masa está sostenido sobre un pilar uniforme en cada extremo, como muestra la figura #32. Un camión de  $3.00 \times 10^4$  kg de masa se ubica a 15.0 m de un extremo. ¿Cuáles son las fuerzas sobre el puente en los puntos de soporte?

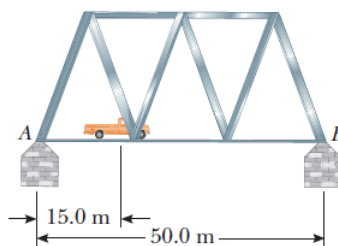


Figura 32

Respuesta:  $n_A = 5.98 \times 10^5 N$  y  $b_B = 4.80 \times 10^5 N$

- #24 Un tiburón de 10 000 N está sostenido mediante un cable unido a una barra de 4.00 m que se articula en la base. Calcule la tensión en la soga entre la barra y la pared, si supone que la misma sostiene el sistema en la posición que se muestra en la figura #33. Encuentre las fuerzas horizontal y vertical que se ejercen sobre la base de la barra. Ignore el peso de la barra.

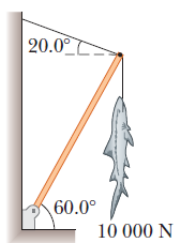


Figura 33

Respuesta:  $T = 5.08 \times 10^3$  ,  $F_H = 4.77 \times 10^3$  y  $F_V = 8.26 \times 10^3 N$

- #25 Una grúa de 3 000 kg de masa soporta una carga de 10 000 kg, como se muestra en la figura #34. La grúa se articula sin fricción en A y descansa contra un soporte uniforme en B. Encuentre las fuerzas de reacción en A y B.

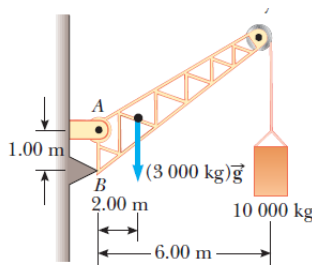


Figura 34

Respuesta:  $F_{By} = 0$   $F_{Ax} = F_{Bx} = 6.47 \times 10^5 N$   $F_{Ay} = 1.27 \times 10^5 N$

- #26 Un globo lleno con helio se amarra a una cuerda uniforme de 2.00 m de largo y 0.050 0 kg. El globo es esférico, con un radio de 0.400 m. Cuando se libera, eleva una longitud h de cuerda y luego permanece en equilibrio como se muestra en la figura #35. Determine el valor de h. La cubierta del globo tiene una masa de 0.250 kg

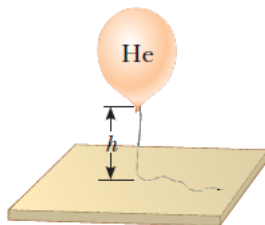


Figura 35

Respuesta:  $h = 1.91 m$

- #27 Un resorte ligero de constante  $k = 90.0 \text{ N/m}$  se une verticalmente a una mesa (figura #36). Un globo de  $2.00 \text{ g}$  se llena con helio (densidad  $= 0.180 \text{ kg/m}^3$ ) a un volumen de  $5.00 \text{ m}^3$  y después se conecta al resorte, lo que hace que el resorte se estire como se muestra en la figura b. Determine la distancia de extensión  $L$  cuando el globo está en equilibrio.

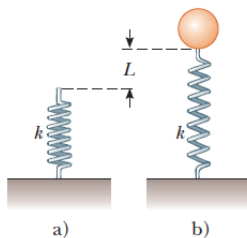


Figura 36

Respuesta:  $L=0.604\text{m}$

## PROBLEMAS DIFICULTAD ALTA

- #1 Mientras funciona un motor de gasolina, un volante que da vuelta con el cigüeñal almacena energía después de cada explosión de combustible para proporcionar la energía requerida para comprimir la siguiente carga de combustible y aire. En el motor de cierto tractor de pasto, suponga que un volante debe tener no más de  $18.0 \text{ cm}$  de diámetro. Su grosor, medido a lo largo de su eje de rotación, debe no ser mayor a  $8.00 \text{ cm}$ . El volante debe liberar  $60.0 \text{ J}$  de energía cuando su rapidez angular cae de  $800 \text{ rev/min}$  a  $600 \text{ rev/min}$ . Diseñe un volante de acero de refuerzo para satisfacer estos requisitos con la masa más pequeña que pueda lograr razonablemente. Especifique la forma y masa del volante.
- #2 Un cordón se enrolla alrededor de una polea de masa  $m$  y radio  $r$ . El extremo libre del cordón está conectado a un bloque de masa  $M$ . El bloque parte del reposo y luego se desliza por un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es  $\mu$ .
- a) Use métodos energéticos para mostrar que la rapidez del bloque como función de la posición  $d$  por el plano es

$$v = \sqrt{\frac{4gdM(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{m + 2M}}$$

- b) Encuentre la magnitud de la aceleración del bloque en términos de  $\mu, m, M, g$  y  $\theta$ .

- #3 Un carrete uniforme hueco tiene radio interior  $R/2$ , radio exterior  $R$  y masa  $M$ . Está montado de modo que da vueltas sobre un eje horizontal fijo. Un contrapeso de masa  $m$  se conecta al extremo de una cuerda enrollada alrededor del carrete. El contrapeso cae desde el reposo en  $t=0$  a una posición  $y$  en el tiempo  $t$ . Demuestre que el momento de torsión debido a las fuerzas de fricción entre carrete y eje es

$$\tau_f = R \left[ m \left( g - \frac{2y}{t^2} \right) - M \frac{5y}{4t^2} \right]$$

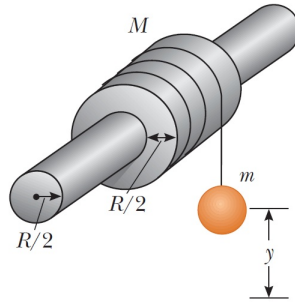


Figura 37

#4 Un disco sólido uniforme se pone en rotación con una rapidez angular  $\omega_i$  en torno a un eje a través de su centro. Mientras todavía gira con esta rapidez, el disco entra en contacto con una superficie horizontal y se libera como se muestra en la (figura #38).

- ¿Cuál es la rapidez angular del disco una vez que tiene lugar el rodamiento puro?
- Encuentre la pérdida fraccionaria en energía cinética desde el momento en que se libera el disco hasta que ocurre rodamiento puro.

**Sugerencia:** Considere momentos de torsión en torno al centro de masa.

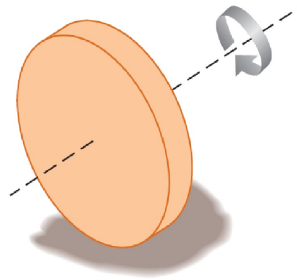


Figura 38

Respuesta:  $\omega = \omega_i/3$     b)  $\frac{\Delta E}{E} = -2/3$

#5 Suponga que a un disco sólido de radio  $R$  se le da una rapidez angular  $\omega_i$  en torno a un eje a través de su centro y luego se baja a una superficie horizontal y se libera como se muestra en la (figura #38). Además, suponga que el coeficiente de fricción entre el disco y la superficie es  $\mu$ .

- Demuestre que el intervalo de tiempo antes de que ocurra movimiento de rodamiento puro es  $R\omega_i/3\mu g$ .
- Demuestre que la distancia que recorre el disco antes de que se presente rodamiento puro es  $R^2\omega_i^2/18\mu g$ .

Respuesta: a)  $\Delta t = \frac{R\omega_i}{3\mu g}$     b)  $X = \frac{R^2\omega_i^2}{18\mu g}$

#6 Un cubo sólido, de lado  $2a$  y masa  $M$ , se desliza sobre una superficie sin fricción con velocidad uniforme  $\vec{v}$ , como se muestra en la figura #39a). Golpea un pequeño obstáculo al final de la mesa, lo que hace que el cubo se incline como se muestra en la figura #39b). Encuentre el valor mínimo de  $\vec{v}$  tal que el cubo caiga de la mesa. El momento de inercia del cubo en torno a un eje a lo largo de uno de sus bordes es  $8Ma^2/3$ .

Nota: El cubo se somete a una colisión inelástica en el borde.

Respuesta:  $v = 4[\frac{ga}{3}(\sqrt{2} - 1)]^{1/2}$

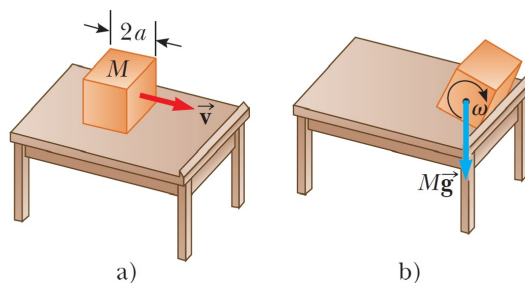


Figura 39

- #7 Un poste uniforme se apoya entre el suelo y el techo de una habitación. La altura de la habitación es 7.80 pies, y el coeficiente de fricción estática entre el poste y el techo es 0.576. El coeficiente de fricción estática entre el poste y el suelo es mayor que eso. ¿Cuál es la longitud del poste más largo que se puede apoyar entre el suelo y el techo? Respuesta:  $l = 9.00 ft$
- #8 Una barra uniforme de peso  $F_g$  y longitud  $L$  está sostenida en sus extremos mediante un canal, como se muestra en la figura #40 .
- Demuestre que el centro de gravedad de la barra debe ser vertical sobre el punto O cuando la barra está en equilibrio.
  - Determine el valor de equilibrio del ángulo  $\theta$ .

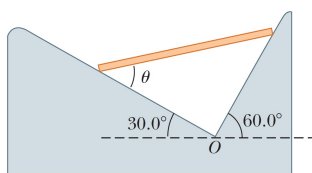


Figura 40

Respuesta: b)  $\theta = 60.0^\circ$

- #9 Un cable de acero de  $3.00 \text{ cm}^2$  de área de sección transversal tiene una masa de 2.40 kg por cada metro de longitud. Si 500 m del cable cuelgan de un risco vertical, ¿cuánto se estira el cable bajo su propio peso? Considere  $Y_{acero} = 2.00 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

Respuesta:  $\Delta y = 4.90 \text{ cm}$

- #10 Demuestre que la variación de presión atmosférica con la altitud está dada por  $P = P_0 e^{-\alpha y}$ , donde  $\alpha = \rho_0 g / P_0$ ,  $P_0$  es la presión atmosférica en algún nivel de referencia  $y=0$  y  $\rho_0$  es la densidad atmosférica a este nivel. Suponga que la disminución en presión atmosférica sobre un cambio infinitesimal en altura (de modo que la densidad es aproximadamente uniforme) está dada por  $dP = -\rho g dy$  y que la densidad del aire es proporcional a la presión.

- #11 Un cubo de hielo, cuyos bordes miden 20.0 mm, flota en un vaso con agua fría, y una de las caras del cubo de hielo es paralela a la superficie del agua.
- a) ¿A qué distancia bajo la superficie del agua está la cara inferior del cubo de hielo?
- b) Alcohol etílico frío se vierte suavemente sobre la superficie del agua para formar una capa de 5.00 mm de grosor sobre el agua. El alcohol no se mezcla con el agua. Cuando el cubo de hielo de nuevo logra el equilibrio hidrostático, ¿cuál es la distancia desde la parte superior del agua a la cara inferior del bloque?
- c) Se vierte alcohol etílico frío adicional en la superficie del agua hasta que la superficie superior del alcohol coincide con la superficie superior del cubo de hielo (en equilibrio hidrostático). ¿Qué espesor de capa se requiere de alcohol etílico?
- Respuesta: a)  $h \approx 18.3mm$  b)  $h_w \approx 14.3mm$  c)  $h_a' \approx 8.56mm$

## REFERENCIAS:

- Raymond A. Serway y John W. Jewett Jr, Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen I, Novena Edición.
- Douglas C. Giancoli, Física para Ciencias e Ingeniería, Volumen I, Cuarta Edición.
- Resnick, Halliday & Krane, Física, Volumen I, Quinta Edición.
- Young, Hugh D. y Roger A. Freedman, Física Universitaria, Volumen I, Decimosegunda Edición.