Интегральное исчисление функций многих переменных

Учебное пособие

Печатается по рекомендации Редакционного совета
факультета «Прикладная математика и физика»
Московского авиационного института
(Национального исследовательского университета)

Буки Веди
Москва
2016

УДК 517.2
ББК 22.161
ХХХ

ХХХ **Иванова Е.П**.
Интегральное исчисление функций многих переменных: Учебное пособие. — М.: Буки Веди, 2016. — 82 с.
ISBN 978-5-4465-ХХХ-Х

Содержанием учебного пособия является курс лекций по математическому анализу, читаемых автором в третьем семестре на факультете прикладной математики и физики Московского авиационного института Оно охватывает фундаментальные темы: кратный, криволинейный и поверхностные интегралы, элементы теории кривых и поверхностей, элементы векторного анализа. В пособии излагается теория интегрирования дифференциальных форм по поверхности. Учебное пособие является продолжением пособий «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Дифференциальное исчисление функций многих переменных».

Предназначено для студентов специальностей Прикладная математика, Прикладная математика и информатика.

УДК 517.2
ББК 22.161

Оглавление

Введение

В данном пособии рассмотрены вопросы, связанные с интегрированием функций многих переменных. В первых четырех главах используются методы классического анализа.

В первой главе изучаются кратные интегралы.

Во второй главе рассмотрены элементы дифференциальной геометрии: теория кривых и поверхностей в пространстве.

В третьей главе криволинейные и поверхностные интегралы первого и второго рода.

В четвертой главе элементы векторного анализа, классические формулы интегрального исчисления: Стокса, Остроградского-Гаусса.

В пятой-седьмой главах изложена теория криволинейных и поверхностных интегралов с использованием языка дифференциальных форм. Из общей формулы Стокса получены классические формулы векторного интегрального исчисления.

Пособие соответствует курсу лекций, читаемых автором в 3-м семестре для студентов, обучающихся по специальностям Прикладная математика и Прикладная математика и информатика.

Основные обозначения

$\mathbb{R}^n$ – n – мерное вещественное пространство

I – промежуток

$\bar{E}$ – замыкание множества E

$\lambda(P)$ – параметр (мелкость) разбиения

$C(E)$ – пространство функций, непрерывных на множестве E

$C^1(E)$ – пространство функций, непрерывно дифференцируемых на множестве E

$\Re(E)$ – пространство функций, интегрируемых по Риману на множестве E

$d(x,y)$ – расстояние между точками x, y

k – кривизна кривой

$æ$ – кручение кривой

(a,b) – скалярное произведение векторов a,b

$[a,b]$, $a \times b$ – векторное произведение векторов a,b

TS – касательное пространство к поверхности S

$\int\limits_E f(x_1,\dots,x_n)dx_1,\dots,dx_n$ – кратный интеграл от функции f по множеству E

$\iint\limits_E f(x,y)dxdy$ – двойной интеграл от функции f по множеству E

$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz$ – тройной интеграл от функции f по множеству E

$\int\limits_E dx \int\limits_Y f(x,y)dy$ – повторный интеграл

$\int\limits_\Gamma fds$ – криволинейный интеграл первого рода от функции f вдоль (по) кривой Γ

$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz$ – криволинейный интеграл второго рода по ориентированной кривой Γ^+

$\iint\limits_S fds$ – поверхностный интеграл первого рода от функции f по поверхности S

Поверхностный интеграл второго рода от вектор-функции $F=(P,Q,R)$ по ориентированной поверхности S^+:

$\iint\limits_{S^+} \overline{F}d\overline{s}$

$\iint\limits_{S^+} Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy$

∇ – оператор Гамильтона

$gradf$ – градиент f

$divF$ – дивергенция векторного поля F

$rotF$ – ротор векторного поля F

ω^p – дифференциальная форма размерности p

$\omega_F^1=F_1dx+F_2dy+F_3dz$ – форма работы

$\omega_V^2=V_1dy\wedge dz+F_2dz\wedge dx+F_3dx\wedge dy$ – форма потока

$\omega_1\wedge\omega_2$ – внешнее произведение форм ω_1,ω_2

$d\omega$ – внешний дифференциал формы ω

$\int\limits_{S^+}\omega$ – интеграл от формы ω по поверхности S^+

■ – знак начала доказательства

□ – знак конца доказательства

Лекция 1

Глава 1. Кратные интегралы

1.1. Интеграл Римана на n-мерном промежутке

Определение 1.1. Множество $I_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i,\, i=1,...,n\right\}$ называется *промежутком* в $\mathbb{R}^n$ (здесь $x=\left(x_1,..,x_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$, $a=\left(a_1,..,a_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$, $b=\left(b_1,..,b_n\right)^T\in\mathbb{R}^n$).

Определение 1.2. Промежутку $I_{a,b}$ ставится в соответствие число $|I_{a,b}|=\mu\left(I_{a,b}\right):=\prod\limits_{i=1}^{n}\left(b_i-a_i\right)$, которое называется *мерой или объемом промежутка.*

Лемма 1.1. Мера $\mu(I)$ промежутка удовлетворяет следующим свойствам:

1) однородность:
$\forall k\in\mathbb{R}^+:\ \mu\left(I_{ka,kb}\right)=k^n\mu\left(I_{a,b}\right)$, где $I_{ka,kb}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid ka_i\le x_i\le kb_i,\quad i=1,...,n\right\}$,
2) аддитивность:
пусть $I=\bigcup\limits_{\alpha}I_\alpha,\, I_\alpha\bigcap I_\beta=\varnothing\left(\alpha\ne\beta\right)$, тогда
$\mu\left(I\right)=\sum\limits_{\alpha}\mu\left(I_\alpha\right)$;
3) монотонность: $I_\alpha\subset I_\beta\Rightarrow\mu\left(I_\alpha\right)\le\mu\left(I_\beta\right)$;
4) неотрицательность: $\mu\left(I\right)\ge 0$.

Разбиение промежутка и база в множестве разбиений

Пусть задан промежуток $I_{a,b}=\left\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_i\le x_i\le b_i,\, i=1,...,n\right\}$, $I_{a,b}=I_{a_1,b_1}\times...\times I_{a_n,b_n}$, где $I_{a_i,b_i}=[a_i,b_i]\in\mathbb{R}-$координатные отрезки.

Разбиение координатных отрезков $I_{a_ib_i}=\left[a_i,b_i\right]\ \forall i,$ индуцирует разбиение промежутка $I_{a,b}$ на более мелкие промежутки, получающиеся прямым произведением промежутков указанных координатных отрезков.

Определение 1.3. Описанное представление промежутка $I=I_{a,b}$ в виде $I_{a,b}=\bigcup\limits_{k}I_k,\, I_k\in\mathbb{R}^n$ будем называть *разбиением промежутка* $I_{a,b}$ и обозначать P.

При этом т.к. $I_k\bigcap I_j=\phi\Rightarrow\mu\left(I_{a,b}\right)=\sum\limits_{k}\mu\left(I_k\right)$.

Определение 1.4. *Параметром или мелкостью* $\lambda(P)$ разбиения I назовем число $\lambda\left(P\right):=\max\limits_{k}d\left(I_k\right)$ (максимальный из диаметров d промежутков I_k).

Определение 1.5. Пусть для каждого промежутка I_k разбиения P выбрана отмеченная точка: $\xi_k\in I_k\subset\mathbb{R}^n,\, \xi_k=\left(\xi_{k_1},...,\xi_{k_n}\right)$. Тогда $\left(P,\xi\right)$ назовем *разбиением с отмеченными точками*.

Определение 1.6. В множестве $\left(P,\xi\right)$ вводится *база* $\lambda(P)\to 0,$ элементы базы $B_d(d>0):=\{(P,\xi)\mid\lambda(P)<d\}$.

То, что $\{B_d\}$ – база, следует из существования разбиения с параметром $\lambda(P)$ сколь угодно мелким.

Интегральная сумма и кратный интеграл Римана

Пусть на промежутке $I_{a,b}$ задано разбиение (P,ξ) с отмеченными точками и функция $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Определение 1.7. Сумма $\sigma\big(f,(P,\xi)\big) := \sum_i f(\xi_i)\mu(I_i) = \sum_i f(\xi_i)|I_i|$ носит название *интегральной суммы (Римана),* соответствующей разбиению (P,ξ) и функции f.

Определение 1.8. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f,(P,\xi)\big)$, то он называется n *- мерным кратным интегралом Римана:*

$$\int_I f(x)dx := \lim_{\lambda(P)\to 0} \sigma\big(f,(P,\xi)\big). \tag{1.1}$$

Функция f называется интегрируемой по Риману на $n-$ мерном промежутке $I_{a,b}$.

$J = \int_I f(x)dx = \iint \ldots \int f(x_1,..,x_n)dx_1...dx_n$.

Если $n=2$, то интеграл называется *двойным*, если $n=3$, то *тройным*.

Класс функций, интегрируемых по Риману на промежутке I, обозначается $\Re(I)$.

Теорема 1.1 Необходимое условие интегрируемости по Риману

$f\in\Re(I) \Rightarrow f$ ограничена на I.

■ Пусть $f\in\Re(I)$. Предположим противное, пусть функция f неограниченна на I $\Rightarrow$ хотя бы на одном из промежутков разбиения I_k она будет неограниченной. Пусть $(P,\xi'),(P,\xi'')-$ разбиения, такие что ξ'_k, ξ_k'' отличаются лишь отмеченными точками ξ'_k, ξ_k'' на промежутке I_k. Тогда $\left|\sigma\big(f,(P,\xi')\big)-\sigma\big(f,(P,\xi'')\big)\right| =$

Тогда $\left|\sigma\big(f,(P,\xi')\big)-\sigma\big(f,(P,\xi'')\big)\right| = |f(\xi'_k)-f(\xi''_k)|\,\mu(I_k)$. Меняя одну из точек (пусть это ξ'_k), в силу неограниченности f на I_k, мы можем получить: $|f(\xi'_k)-f(\xi''_k)|>\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$. Отсюда $\left|\sigma\big(f,(P,\xi')\big)-\sigma\big(f,(P,\xi'')\big)\right| > \varepsilon' := \varepsilon\mu(I_k)$. Таким образом, нарушается критерий Коши сходимости интегральных сумм $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{\lambda(P)\to 0}\sigma \Rightarrow f\notin\Re(I)-$ противоречие. □

Множества меры нуль

Определение 1.9. Будем говорить, что множество $E\in\mathbb{R}^n$ имеет $n-$ мерную *меру нуль в смысле Лебега*, если для любого $\varepsilon>0$ существует не более чем счётная система промежутков $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}, E\subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(I_k)\le\varepsilon.$

Из определения 1.9 следует

Лемма 1.2.

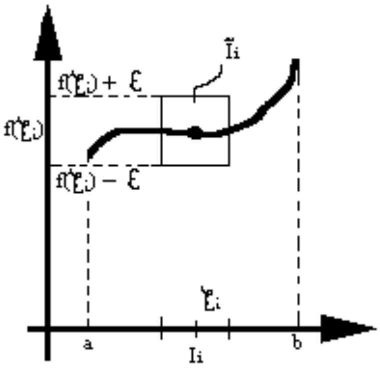
1. Точка является множеством меры нуль;
2. объединение конечного либо счётного числа множеств меры ноль есть множество меры нуль;
3. подмножество множества меры нуль – множество меры нуль;
4. невырожденный $n-$ мерный промежуток $I_{a,b}$ ($a\ne b$) не является множеством меры нуль;
5. множество рациональных точек в $\mathbb{R}^n$ счетно и имеет нулевую меру.

Определение 1.10. Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в E, если оно выполняется всюду в E, кроме, быть может, множества меры нуль.

Пусть функция $f: I \to \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}^{n-1}, f \in C(I)$ – непрерывна на I.

Обозначим $\Gamma := \{(x, y) \in R^n \mid x \in I, y = f(x)\}$ – график функции $f, \Gamma \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 1.1. График Γ непрерывной функции имеет $n-$мерную меру нуль: $\mu_n(\Gamma) = 0$.



■ В силу теоремы Кантора $f \in C(I) \Rightarrow f$ равномерно непрерывна на I $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$ Здесь $d(x_1, x_2)$ – расстояние между точками x_1, x_2 в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Построим разбиение (P, ξ) промежутка $I = \bigcup_i I_i$ с отмеченными точками. При этом выберем мелкость разбиения $\lambda(P) < \delta$. Тогда для любой точки $x_i \in I_i$: $|x_i - \xi_i| < \delta$ $\Rightarrow |f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$f(\xi_i) - \varepsilon \le f(x_i) \le f(\xi_i) + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Построим $n-$мерный промежуток: $\tilde{I}_i := I_i \times [f(\xi_i) - \varepsilon, f(\xi_i) + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^n$. В силу формулы (1.2) этот промежуток содержит всю часть графика Γ_i функции f, лежащую над промежутком I_i, следовательно, в силу п. 3 леммы 1.1: $\mu(\Gamma_i) \le \mu(\tilde{I}_i)$. Отсюда

$$\mu_n(\Gamma) = \sum_i \mu_n(\Gamma_i) \le \sum_i \mu_n(\tilde{I}_i) = \sum_i 2\varepsilon\mu_{n-1}(I_i) = 2\varepsilon\mu_{n-1}(I) =: \tilde{\varepsilon}. \quad \square$$

Пусть теперь $M \in \mathbb{R}^{n-1}$ – произвольное ограниченное множество. Поскольку $\forall M \, \exists I : M \subset I$, в силу леммы 1.2 получим

Следствие 1.1.

Если: $f \in C(M), M \subset R^{n-1}$, то график f на M имеет $n-$ мерную меру нуль.

Замечание 1.1.

1. Если в определении 1.9 меры нуль заменить замкнутые промежутки открытыми, то определение останется эквивалентным.
2. Если K - компакт, то в определении 1.9 можно заменить счётную систему конечной.

Теорема 1.2 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

$$f \in \Re(I) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \textit{ограничена на } I \\ \textit{непрерывна на } I \textit{ почти всюду}. \end{array} \right.$$

Лекция 2

Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману. Верхние и нижние суммы Дарбу

Пусть $f : I \to R, I \subset R^n$, $P = \{I_i\}_i$ – разбиение промежутка $I : I = \bigcup\limits_i I_I$.

Обозначим

$$M_i := \sup_{x \in I_i} f(x), \quad m_i := \inf_{x \in I_i} f(x). \tag{1.3}$$

Определение 1.11. Суммы $S(P, f), s(P, f)$ назовем соответственно *верхней интегральной суммой Дарбу:* $S(f, P) := \sum\limits_i M_i |I_i|$,

нижней интегральной суммой Дарбу $s(f, P) = \sum\limits_i m_i |I_i|$

функции f на промежутке I для разбиения P.

Лемма 1.3. Для интегральных сумм σ, s, S функции $f : I \to \mathbb{R}$ имеют место соотношения

1. $s(f, P) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) \le \sigma(f, P, \xi) \le \sup\limits_{\xi} \sigma(f, P, \xi) = S(f, P)$;

2. если разбиение P' получается измельчением разбиения P,
то: $s(f, P) \le s(f, P') \le S(f, P') \le S(f, P)$;

3. $\forall P_1, P_2 \ \underline{S}(f, P_1) \le \overline{S}(f, P_2)$.

■ Пункты 1,2 следуют непосредственно из определения 1.11.
Для доказательства п.3 введем вспомогательное определение $P := P_1 \bigcup P_2$, далее т.к. P – измельчение разбиений P_1, P_2, то в силу п.2. $s(f, P_1) \le s(f, P') \le S(f, P') \le S(f, P_2)$. □

Определение 1.12. Назовем
нижним интегралом Дарбу $\underline{J} := \sup\limits_P s(f, P)$,

верхним интегралом Дарбу $\overline{J} := \inf\limits_P S(f, P)$.

Из определения и леммы 1.3

$$s(f, P) \le \underline{J}(f) \le \overline{J}(f) \le S(f, P). \tag{1.4}$$

Теорема 1.3 (Дарбу).

$$f \text{ ограничена на } I \Rightarrow \begin{cases} \exists \ \underline{J} = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \underline{S}(f, P), \\ \exists \ \overline{J} = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} \overline{S}(f, P). \end{cases}$$

Теорема 1.4 (критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману).

$f \in \Re(I) \Leftrightarrow \overline{J} = \underline{J}$ и f ограничена на I.

■ $(\Rightarrow)$ $f \in \Re \Rightarrow f$ ограничена и в силу пункта 1 леммы 1.3 и неравенства (1.4) следует $\overline{J} = \underline{J}$.

$(\Leftarrow)$ Используем пункт 1 леммы 1.3. Поскольку $\overline{J} = \underline{J}$, при $\lambda(P) \to 0$ крайние члены стремятся к одному и тому же пределу, следовательно, к тому же пределу при $\lambda(P) \to 0$ стремится и $\sigma(f, P, \xi)$. □

1.2. Интеграл по множеству

Допустимые множества

Определение 1.13. Множество $E \subset R^n$ называется *допустимым,* если оно ограничено и его граница ∂E имеет $n-$мерную лебегову меру нуль ($\mu_n(\partial E) = 0$).

Пример 1.1. Куб, шар – допустимые множества.

Лемма 1.4. $\forall E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$:

1. ∂E_1 замкнуто в R^n,
2. $\partial(E_1 \bigcup E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$,
3. $\partial(E_1 \bigcap E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$,
4. $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \bigcup \partial E_2$.

Замечание 1. 2. Для бесконечного числа множеств это, вообще говоря, не верно.

Следствие 1.2.

1. Объединение, пересечение и разность конечного числа допустимых множеств - допустимое множество.
2. $\begin{matrix} \mu(\partial E) = 0 \\ \partial E - компакт \end{matrix}$ $\Rightarrow$ из его покрытия системой открытых множеств можно выделить конечное покрытие, такое что: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1, .., I_k : \partial E \subset \bigcup_i I_i, \sum_i |I_i| < \varepsilon$.

Определение 1.12. Говорят, что множество M имеет жорданову меру нуль ($\mu(M) = 0$), если: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists I_1, .., I_k : M \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i, \sum_{i=1}^{k} |I_i| < \varepsilon$.

Замечание 1.3. Для границы множества жорданова мера нуль эквивалентна лебеговой.

Определение 1.13. *Характеристической функцией* множества E называется функция:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E, \\ 0, x \notin E. \end{cases}$$

Замечание 1.4. Если $E-$ допустимо $\Rightarrow$ χ_E почти всюду непрерывна (т.к. χ_E имеет разрывы только на границе ∂E и $\mu(\partial E) = 0$).

Пусть $f : E \to \mathbb{R}, E \in \mathbb{R}^n$. Определим функцию $f_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f_E(x) := \chi_E(x) \cdot f(x)$. Т.е. функция f_E – это функция f, продолженная нулем вне области E.

Определение 1.14 (интеграл по множеству). Назовем *интегралом от функции* f *по* ***множеству*** E

$$\int_E f dx := \int_{I \supset E} f_E dx,$$

где I – произвольный промежуток, такой, что $E \subset I$.

Если этот интеграл существует, то функция называется *интегрируемой по Риману* на E, в противном случае, неинтегрируемой.

Докажем корректность данного определения (независимость интеграла от промежутка I).

Утверждение 1.2. Если I_1, I_2 – два произвольных промежутка, содержащих множество E: $E \subset I_1, E \subset I_2 \Rightarrow \int\limits_{I_1} f_E(x)dx$ и $\int\limits_{I_2} f_E(x)dx$ существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то равны.

■ 1. Обозначим $I := I_1 \bigcap I_2$. Поскольку $E \subset I$, функция f_E отлична от нуля только внутри промежутка I. Точки разрыва функции f_E состоят из точек разрыва f на E и ∂E. Следовательно, в силу критерия Лебега интегралы $\int\limits_I f_E(x)dx, \int\limits_{I_1} f_E(x)dx$ и $\int\limits_{I_2} f_E(x)dx$ существуют и не существуют одновременно.

2. Если интегралы существуют, то выбираем только те разбиения промежутков, которые получаются продолжением разбиения промежутка I. Т.к. вне I функция f_E равна нулю, интегральные суммы для всех промежутков I_1, I_2, I совпадают. Переходя к пределу, получаем равенство интегралов $\int\limits_I, \int\limits_{I_1}$ и $\int\limits_{I_2}$. □

Определение 1.15. *Мерой Жордана* $\mu(E)$ допустимого множества E называется интеграл по этому множеству от единичной функции: $\mu(E) := \int\limits_E 1 \cdot dx.$

Поскольку $\int\limits_E 1dx := \int\limits_{I \supset E} \chi_E dx,$ а множество точек разрыва функции χ_E совпадает с $\partial E,$ то в силу критерия Лебега мера (Жордана) определена для допустимых множеств и только для них.

Геометрический смысл меры Жордана

Пусть $E-$ допустимое множество, $\mu(\partial E) = 0$. В силу Критерия Дарбу существования интеграла

$$\mu(E) = \int\limits_E 1 \cdot dx = \int\limits_{I \supset E} \chi_E(x)dx = \underline{\int\limits_{I \supset E}} \chi_E(x)dx = \overline{\int\limits_{I \supset E}} \chi_E(x)dx.$$

Здесь $\underline{\int\limits_{I \supset E}} \chi_E(x)dx -$ нижний интеграл Дарбу: $\underline{\int\limits_{I \supset E}} \chi_E(x)dx = \lim\limits_{\lambda(P) \to 0} s(\chi_E, P).$ Аналогично $\overline{\int\limits_{I \supset E}} \chi_E(x)dx -$ верхний интеграл Дарбу.

В силу определения функции χ_E нижняя интегральная сумма Дарбу $s(\chi_E, P)$ есть сумма объёмов промежутков, целиком принадлежащих множеству E.

Верхняя интегральная сумма Дарбу $S(\chi_E, P)$ есть сумма объёмов промежутков, имеющих с множеством E общие точки.

Определение 1.16.

1. Если существует предел нижних сумм Дарбу, то он называется *внутренней мерой Жордана.*
2. Если существует предел верхних сумм Дарбу, то он называется *внешней мерой Жордана.*
3. Если внешняя и внутренняя меры Жордана совпадают, то множество называется *измеримым по Жордану.*

Утверждение 1.3. Множество $E-$ измеримо по Жордану $\Leftrightarrow \mu(\partial E)=0.$

Теорема 1.5. Критерий Лебега интегрируемости функции по множеству.

$$f\in\Re(E)\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l} f \text{ ограничена,}\\ f \text{ непрерывна на } E \text{ почти всюду.}\end{array}\right.$$

Общие свойства интеграла

1. Линейность

а) $E-$ допустимое множество $\Rightarrow\Re(E)$ является линейным пространством относительно стандартных операций сложения функций и умножения функции на число (в силу критерия Лебега и того, что объединение множеств меры нуль есть множество меры нуль);

б) интеграл $\int\limits_E:\Re(E)\to\mathbb{R}$ – линейный функционал на $\Re(E)$ (учитывая линейность интегральных сумм и свойства операции предельного перехода).

Замечание 1.5. Пусть $f\in\Re(E), f=0$ *почти всюду на* $E\Rightarrow\int\limits_E f(x)dx=0$.

(Поскольку предел интегральных сумм не зависит от выбора точек разбиения).

2. Аддитивность

а) Если E_1,E_2- допустимые множества и $f\in\Re(E_1\cup E_2)$, тогда $\exists\int\limits_{E_1}fdx,\int\limits_{E_2}fdx\ \ \exists\int\limits_{E_1\cap E_2}fdx$ и

$$\int\limits_{E_1\cup E_2}fdx=\int\limits_{E_1}fdx+\int\limits_{E_2}fdx-\int\limits_{E_1\cap E_2}fdx.$$

б) если, кроме того, $\mu(E_1\cap E_2)=0$, то $\int\limits_{E_1\cup E_2}fdx=\int\limits_{E_1}fdx+\int\limits_{E_2}fdx$.

■ Пункт а) следует из критерия Лебега существования интеграла по допустимому множеству и леммы 1.4;

б) из определения характеристической функции $\chi_{E_1\cup E_2}=\chi_{E_1}+\chi_{E_2}-\chi_{E_1\cap E_2}$, где

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, x\in E\\ 0, x\notin E.\end{cases}$$

Пусть $I-$промежуток, такой, что $E_1\cup E_2\subset I.$ Тогда

$$\int\limits_{E_1\cup E_2}fdx=\int\limits_I f\cdot\chi_{E_1\cup E_2}dx=\int\limits_I f\cdot\chi_{E_1}dx+\int\limits_I f\cdot\chi_{E_2}dx-\underbrace{\int\limits_I f\cdot\chi_{E_1\cap E_2}dx}_{0}=\int\limits_{E_1}fdx+\int\limits_{E_2}fdx. \ \square$$

3. Общая оценка интеграла

$$E \text{ - допустимое, } f\in\Re(E)\Rightarrow|f|\in\Re(E),\left|\int\limits_E fdx\right|\le\int\limits_E|f|dx.$$

Утверждение 1.4. $E-$ допустимое множество, $f\ge0$ на E почти всюду $\Rightarrow\int\limits_E fdx\ge0$.

Следствие 1.3. Если $f(x)\ge g(x)$ почти для всех $x\in E\Rightarrow\int\limits_E f(x)dx\ge\int\limits_E g(x)dx$.

Следствие 1.4. Если $f \in \Re(E), m \le f(x) \le M$ почти для всех $x \in E \Rightarrow$ $m \cdot \mu(E) \le \int\limits_E f dx \le M \cdot \mu(E)$.

Следствие 1.5. $m = \inf\limits_{x\in E} f, M = \sup\limits_{x\in E} f \Rightarrow \exists \vartheta \in [m, M]: \int\limits_E f dx = \vartheta\mu(E).$

Следствие 1.6. Пусть $E-$ связное допустимое множество, $f \in C(E) \Rightarrow \exists \xi \in E : \int\limits_E f dx = f(\xi)\mu(E)$.

Следствие 1.7. Если в следствии 1.5 добавить функцию $g \in \Re(E)$ $g \ge 0$ $m = \inf\limits_{x\in E} f, M = \sup\limits_{x\in E} f \Rightarrow m\int\limits_E g \cdot dx \le \int\limits_E g \cdot f \cdot dx \le M \int\limits_E g \cdot dx$.

Лемма 1.4. Пусть $f \ge 0$ почти всюду на допустимом множестве E и $\int\limits_E f \cdot dx = 0 \Rightarrow f = 0$ на E почти всюду.

■ Рассмотрим сначала функцию f на промежутке I. В силу критерия Лебега интегрируемая функция f непрерывна почти всюду на I. Покажем, что $\forall a \in I : f(a) = 0,$ где $a-$ точка непрерывности функции f. Предположим противное, что $f(a) > 0$
$\Rightarrow \exists U(a) \subset I : f(x) > c > 0, \forall x \in U(a)$
$\int\limits_I f dx = \int\limits_{U(a)} f dx + \int\limits_{I\setminus U(a)} f dx \ge \int\limits_{U(a)} f dx \ge c\mu(U(a)) =: k > 0 -$ противоречие. Далее переходим к интегралу по множеству E через характеристическую функцию. □

Лекция 3

Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини

Теорема 1.6 (Фубини). Если: $I = X \times Y, X \in \mathbb{R}^n -$ n-мерный промежуток, $Y \in \mathbb{R}^m -$ m-мерный промежуток, $I \subset R^{n+m}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $f \in \Re(I)$.

Тогда существуют интегралы

$$\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy, \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx. \tag{1.5}$$

При этом $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)dy = \int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)dx$.

Интегралы (1.5) называются *повторными интегралами.*

■ Идея доказательства: для $x \in X$ вычисляем $F(x) := \int\limits_Y f(x,y)dy,$ затем $\int\limits_X F(x)dx.$

Если для некоторых $x \in A \subset X$ интеграл $\int\limits_Y f(x,y)dy$ не существует, то положим $F(x)$ равным любому значению из промежутка $\left[\int\limits_{\underline{Y}} f(x,y)dy, \overline{\int\limits_Y} f(x,y)dy\right]$. Здесь

$\int\limits_{\underline{Y}} f(x,y)dy, \overline{\int\limits_Y} f(x,y)dy -$ нижний и верхний интегралы Дарбу. Покажем, что множество A имеет нулевую меру. То есть $F(x)$ определена почти всюду на X.

Поскольку $\int\limits_{X\times Y} f(x,y)dxdy$ существует, отмеченные точки $\xi_{ij}\in X_i\times Y_j$ разбиения P можно выбрать произвольно, выберем их как прямое произведение точек $x_i\in X_i, y_j\in Y_j$ разбиений X_i, Y_j промежутков X,Y.

В этом случае $\sum\limits_{i,j} f(x_i,y_j)|X_i||Y_j| = \sum\limits_i |X_i|\sum\limits_j f(x_i,y_j)|Y_j| = \sum\limits_j |Y_j|\sum\limits_i f(x_i,y_j)|X_i|.$

Для нижней сумма Дарбу $s(f,P)$ и верхней суммы $S(f,P)$ для этого разбиения P справедливы оценки:

$$s(f,P)=\sum_{i,j}\inf_{x\in X_i, y\in Y_j} f(x,y)|X_i\times Y_j| \le \sum_i |X_i|\inf_{x\in X_i}(\sum_j \inf_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|) \le \sum_i |X_i|\inf_{x\in X_i}(\underline{\int_{Y}} f(x,y)dy) \le$$

$$\sum_i |X_i|\inf_{x\in X_i}(F(x)) \le \sum_i |X_i|\sup_{x\in X_i}(F(x)) \le \sum_i |X_i|\sup_{x\in X_i}(\overline{\int_Y} f(x,y)dy) \le$$

$$\le \sum_i |X_i|\sup_{x\in X_i}(\sum_j \sup_{y\in Y_j} f(x,y)|Y_j|) \le \sum_{i,j}\sup_{x\in X_i, y\in Y_j} f(x,y)|X_i\times Y_j| = S(f,P).$$

Поскольку $f\in\Re(X\times Y)\Rightarrow \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} s = \lim\limits_{\lambda(P)\to 0} S = \int\limits_{X\times Y} f(x.y)dxdy = J.$ Следовательно, при $\lambda(P)\to 0$ все остальные члены цепочки неравенств сходятся к J, в том числе $\sum\limits_i |X_i|\inf\limits_{x\in X_i}(F(x)), \sum\limits_i |X_i|\sup\limits_{x\in X_i}(F(x))-$ нижняя и верхняя сумма Дарбу функции $F(x)$. В силу критерия Дарбу функция $F(x)$ интегрируема на X и $\int\limits_X F(x)dx = \int\limits_X dx\int\limits_Y f(x,y)dy = J.$ Аналогично доказывается, что $\int\limits_Y dy\int\limits_X f(x,y)dx = J.$

Для почти всех $x\in X_i$ $\underline{\int} f(x,y)dy = \overline{\int} f(x,y)dy \Rightarrow$ для почти всех $x\in X_i$

$\exists F(x) = \int\limits_Y f(x,y)dy$.

Если этой функции F не существует, то можно выбрать любое значение из промежутка между верхней и нижней суммой. □

Следствие 1.8.

$f\in\Re(X\times Y)\Rightarrow$ для почти всех $x\in X\ \exists F(x) := \int\limits_Y f(x,y)dy.$

■ В силу доказательства Теоремы Фубини $\int\limits_X dx(\overline{\int_Y} f(x,y) - \underline{\int_Y} f(x,y)dy) = 0.$ Следовательно, в силу Леммы 1.4. для п. в. $x\in X$ $\underline{\int_Y} f(x,y)dy = \overline{\int_Y} f(x,y)dy \Rightarrow$ для п. в. $x\in X$

$\exists F(x) := \int\limits_Y f(x,y)dy.$□

Следствие 1.9. Если $f\in\Re(I)$, где $I\in\mathbb{R}^n$,

$$I=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)\Rightarrow \int_I f(x)dx = \int_{a_n}^{b_n} dx_n\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} dx_{n-1}\ldots\int_{a_1}^{b_1} f(x_1,..,x_n)dx_1.$$

Следствие 1.10. Если:

$$E=\{(x,y)\,|\,x\in D, \varphi_1(x)<y<\varphi_2(x)\}\subset\mathbb{R}^n,\ x\in D\subset\mathbb{R}^{n-1},\ y\in\mathbb{R}, f\in\Re(E).$$

То:

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

■ Обозначим

$$E_x = \begin{cases} E, x \in D \\ \phi, x \notin D \end{cases}$$

Пусть $I_x \supset D, I_y \supset \left(\varphi_1(x), \varphi_2(x)\right)$. Так как $\chi_E(x,y) = \chi_D(x) \cdot \chi_{E_x}(y)$,

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy = \iint\limits_{I_x \times I_y} f(x,y)\chi_E dxdy \overset{Т.Фубини}{=} \int\limits_{I_x \supset D} dx \int\limits_{I_y} f(x,y)\chi_E dy = \int\limits_{I_x} dx \chi_D(x) \int\limits_{I_y} f(x,y)\chi_{E_x}(y)dy =$$

$$= \int\limits_{I_x} \chi_D(x)dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_D dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy. \ \square$$

Следствие 1.11. Если в условиях Следствия 1.10 множество D измеримо по Жордану, а функции $\varphi_1, \varphi_2 -$ непрерывны.

То: множество E измеримо: $\mu(E) = \int\limits_D (\varphi_2(x) - \varphi_1(x))dx$.

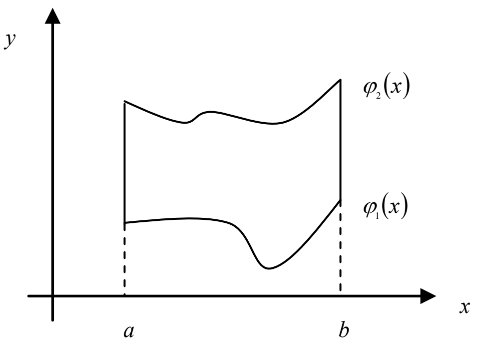
Замена переменных в кратном интеграле. Формула Грина

Определение 1.17. $\Gamma = \{x(t), y(t), \alpha \le t \le \beta\}$, $x(t), y(t) -$ гладкие функции, $\Gamma -$ параметризованная кривая. Если $\Gamma -$ замкнутая кривая (контур), то:
$\Gamma^+ -$ прохождение контура против часовой стрелки (положительная ориентация);
$\Gamma^- -$ прохождение контура по часовой стрелке (отрицательная ориентация).

Определение 1.18. *Криволинейный интеграл второго рода* от функции f по кривой Γ^+:

$$\int\limits_\Gamma f(x,y)dx := \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t))x'(t)dt .$$

Определение 1.19. Область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется *элементарной,* если существуют функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a,b]$: $G = \{a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$.



Лемма 1.5. Формула Грина. Если: $G -$ элементарная область, $\partial G -$ кусочно- гладкая, $\partial G \equiv \Gamma^+$,
$P(x,y), Q(x,y) \in C(\overline{G}), \dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} \in C(\overline{G})$.

То: $\int\limits_{\Gamma^+} Pdx = -\int\limits_G \dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy$, $\int\limits_{\Gamma^+} Qdy = \int\limits_G \dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy$ и

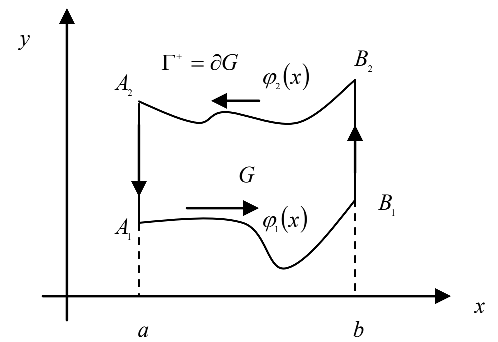
$$\int\limits_{\Gamma^+} Pdx + Qdy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \tag{1.6}$$

Формула (1.6) называется *формулой Грина*.

■

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b \left(P\left(x, \phi_2(x)\right) - P\left(x, \phi_1(x)\right) \right) dx = \int\limits_{A_2B_2} P(x,y)\,dx - \int\limits_{A_1B_1} P(x,y)\,dx =$$

$$= - \int\limits_{B_2A_2} P(x,y)\,dx - \int\limits_{A_1B_1} P(x,y)\,dx - \int\limits_{B_1B_2} P(x,y)\,dx - \int\limits_{A_2A_1} P(x,y)\,dx = -\int\limits_{\Gamma^+} P(x,y)\,dx.$$



(Мы воспользовались тем, что $\int\limits_{A_1B_1} P(x,y)\,dx = 0, \int\limits_{B_1B_2} P(x,y)\,dx = 0$). □

Замечание 1.5. В силу аддитивности интеграла по множеству формула Грина справедлива и для областей, которые можно разбить на конечное число элементарных.

Утверждение 1.5 Замена переменных в двойном интеграле.

Если: $(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2, G^* \subset \mathbb{R}^2, F : G^* \leftrightarrow G -$ диффеоморфизм (гладкое, взаимно однозначное отображение: $F \in C^1(G), F^{-1} \in C^1(G^*)$) с Якобианом

$$J_F = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \;\; J_F \neq 0,$$

Пусть $f(x,y) \in C(\overline{G}),\ G -$ элементарная область:

$G = \{(x,y) \mid a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\},\ \varphi_1(x), \varphi_2(x) \in C[a,b],$

$\Gamma^* -$ положительно ориентированная граница G^*,

$\Gamma = F(\Gamma^*),$

$\Gamma^* = \{u(t), v(t); \alpha \le t \le \beta\},$

$\Gamma = \{x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)); \alpha \le t \le \beta\}$

То:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G^*} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) |J_F|\,dudv. \tag{1.7}$$

Здесь $|J_F| -$ модуль Якобиана J_F.

■ По нашим предположениям оба интеграла существуют как интегралы от непрерывных функций по измеримым множествам. Обозначим

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, \textit{если } \Gamma \textit{ положительно ориентирована} \\ -1, \textit{если } \Gamma \textit{ отрицательно ориентирована.} \end{cases}$$

Пусть $P(x,y) := \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y} f(x,t)\,dt$. Тогда, используя формулу Грина, получим

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy = -\varepsilon\int\limits_\Gamma P(x,y)\,dx = -\varepsilon\int\limits_\alpha^\beta P\big(x(t),y(t)\big)x'(t)\,dt =$$

$$= -\varepsilon\int\limits_\alpha^\beta P\big(x(t),y(t)\big)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)dt = -\varepsilon\int\limits_{\Gamma^*} P\big(x(t),y(t)\big)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot du + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot dv\right) =$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left(\ \frac{\partial}{\partial u}\Big(P\frac{\partial x}{\partial v}\Big) - \frac{\partial}{\partial v}\Big(P\frac{\partial x}{\partial u}\Big)\ \right)dudv =$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} - \frac{\partial P}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} - P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial v\partial u}\right)dudv =$$

$$= -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\Big(\big(P_x x_u + P_y y_u\big)x_v - \big(P_x x_v - P_y y_v\big)x_u\Big)dudv = -\varepsilon\iint\limits_{G^*}\big(P_y y_u x_v - P_y y_v x_u\big)dudv =$$

$$= \varepsilon\iint\limits_{G^*} P_y J_F\,dudv = \varepsilon\iint\limits_{G^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)J_F\,dudv =$$

$$\left|\begin{array}{l} при\ \ f\equiv 1 \\ \mu(G)>0 \Rightarrow \varepsilon\cdot J>0 \end{array}\right|$$

$$= \iint\limits_{G^*} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)|J_F|\,dudv. \square$$

Следствие 1.12. Геометрический смысл знака Якобиана отображения. Если якобиан положительный (отрицательный), то отображение сохраняет (меняет) ориентацию контура.

Геометрический смысл модуля якобиана отображения

Утверждение 1.6. Если: $F: G^* \to G, (f\equiv 1)$, $M\in G^*$, $M_0^*\in G^*, J_F\in C$;

То: $\lim\limits_{d(G^*)\to 0}\dfrac{\mu(G)}{\mu(G^*)} = \lim\limits_{d(G^*)\to 0}|J_F(M)| = |J_F(M_0^*)|$.

■ По теореме о среднем

$$\mu(G) = \iint\limits_G dxdy = \iint\limits_{G^*}|J_F|\,dudv = |J_F(M)|\iint\limits_{G^*}dudv = |J_F(M)|\,\mu(G^*).$$

Если диаметр d области G^* стремится к нулю (область G^* стягивается в точку M_0^*) то $M \underset{d(G^*)\to 0}{\to} M_0^*$. В силу непрерывности J_F: $|J_F(M)| \underset{M_0^*\to M}{\to} |J_F(M_0^*)|$. Отсюда

$$\lim\limits_{d(G^*)\to 0}\frac{\mu(G)}{\mu(G^*)} = \lim\limits_{d(G^*)\to 0}|J_F(M)| = |J_F(M_0^*)|.$$

Геометрический смысл модуля Якобиана отображения: он равен коэффициенту изменения площади в данной точке. □

Лекция 4

Утверждение 1.7. Замена переменных в кратном интеграле ($n-$мерный случай).

Если: $F: G^* \leftrightarrow G-$диффеоморфизм с Якобианом $J_F\neq 0$,
$F\in C^1(G^*), x=F(t), t\in G^*, x\in G,\ G,G^*\subset\mathbb{R}^n$; функция $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, f\in\Re(G)$.

То: $(f\circ F)|J_F|\in\Re\left(G^*\right)$, и

$$\int\limits_G f(x)\,dx=\int\limits_{G^*}(f\circ F)(t)|J_F|\,dt. \qquad (1.8)$$

Пример 1.2. *Полярные координаты*. В этом случае отображение $F:G^*\to G$, $(x,y)\in G\subset\mathbb{R}^2, (r,\varphi)\in G^*\subset\mathbb{R}^2$ задано соотношениями:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi, \end{cases}$$

$r>0,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$

Якобиан J_F отображения F: $J_F=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=r.$ Тогда при переходе к полярным координатам r,φ

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi. \qquad (1.9)$$

Пусть $G=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<a^2\}$ – круг радиуса a. Найдем меру (площадь) круга G. Обозначим $\tilde G=G\setminus\{(x,y)\,|\,0\le x<a,\ y=0\}$, $\mu(\tilde G)=\mu(G)$. При переходе к полярным координатам прообразом $\tilde G$ будет G^* – прямоугольник: $G^*=\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2\,|\,0<r<a, 0<\varphi<2\pi\}$. Положим $f=1$ и в силу формулы (1.9) получим

$$\mu(\tilde G)=\iint\limits_{\tilde G} dxdy=\iint\limits_{G^*} rdrd\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\frac{a^2}{2}=\pi a^2.$$

Пример 1.3 *Цилиндрические координаты.*

Пусть $(x,y,z)\in G\subset\mathbb{R}^3, (r,\varphi,z)\in G^*\subset\mathbb{R}^3$. Отображение $F:G^*\to G$ задается соотношениями:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi,\\ y=r\sin\varphi,\\ z=z, \end{cases}$$

$r>0, 0\le\varphi\le 2\pi.$

Якобиан отображения $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}=r.$ Тогда в силу (1.8) получим формулу перехода к цилиндрическим координатам

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,rdrd\varphi dz.$$

Пример 1.4. *Сферические координаты*.

Отображение $F:G^*\to G$ задается соотношениями:

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\cos\theta\\ z=r\sin\theta \end{cases}$$

$r>0, 0\le\varphi\le 2\pi, -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}.$

Модуль Якобиана отображения: $|J| = r^2\cos\theta$. Тогда в силу(1.8)

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G^*} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)\,r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta. \quad (1.10)$$

Вычислим меру (объем) шара радиуса a. В декартовых координатах шар $G \subset \mathbb{R}^3$ задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$. Исключим из шара множество E нулевой меры: $E = \{(x,y,z) \in G \mid (y = 0, 0 \le x < a)\}$, $\mu_3(E) = 0$. Тогда для $\tilde{G} := G \setminus E$ $\mu_3(\tilde{G}) = \mu_3(G) - \mu_3(E) = \mu_3(G)$. После перехода к сферическим координатам прообразом $\tilde{G}$ будет область G^* – прямоугольный параллелепипед:
$G^* = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi, -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\}$. В силу формулы (1.10)

$$V = \mu(G) = \iiint\limits_G dxdydz = \iiint\limits_{G^*} r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a r^2\cos\theta\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \frac{a^3}{3} = = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3}{3}2\pi 2 = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

1.3. Приложения кратных интегралов

Рассмотрим некоторые геометрические приложения кратных интегралов на примере плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$. Везде далее G измеримо, $f \in C(G)$.

1. *Площадь.*

   $f \equiv 1 \Rightarrow \iint\limits_G dxdy = \mu(G) = S$ – *площадь* G.

2. *Масса.*

   $f = \rho(x,y)$ – плотность $\Rightarrow \iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy = M$ – *масса* G.

3. *Статический момент.*

   $\iint\limits_G x\rho(x,y)\,dxdy = S^y$ – статический момент пластины G относительно оси y.

4. *Центр масс.*

Определение 1.20. Точка (x_0, y_0) называется *центром масс*, если материальная точка, помещённая в (x_0, y_0), с массой, равной массе тела, имеет одинаковый с телом статический момент.

$$x_0 = \frac{S^y}{M} = \frac{\iint\limits_G x\rho(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy}, \quad y_0 = \frac{S^x}{M} = \frac{\iint\limits_G y\rho(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_G \rho(x,y)\,dxdy}.$$

5. *Момент инерции.*

   $I^y = \iint\limits_G x^2\rho(x,y)\,dxdy$ – *момент инерции* пластины G относительно оси y

   $I^0 = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dxdy$ – *момент инерции* относительно начала координат.

Лекция 5

1.4. Несобственные кратные интегралы

Определение 1.21. Будем называть последовательность множеств $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательностью, *монотонно исчерпывающей* множество G, если: G, G_k – открытые в $\mathbb{R}^n$,

1) $\overline{G}_k \subset G_{k+1}$,

2) $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

Определение 1.22. Будем называть I *несобственным кратным интегралом* по множеству $G \subset \mathbb{R}^n$ от функции f: $I = \int_G f(x)\,dx := \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)\,dx,$ где $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность, монотонно исчерпывающая G, $G_k \subset \mathbb{R}^n$ – измеримы и этот предел существует и конечен.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл *сходится.*

Замечание 1.6. Когда мы говорим о несобственном кратном интеграле по множеству G, мы подразумеваем, что $\forall D \subset G$ существует собственный интеграл $\int_D f(x)dx$.

Замечание 1.7. Данное выше определение отличается от определения несобственного интеграла в одномерном случае. А именно, если несобственный кратный интеграл сходится, то он сходится абсолютно, т.е. справедлива

Теорема 1.7. $\exists \int_G f(x)dx \Leftrightarrow \exists \int_G |f(x)|dx$.

Свойства несобственного кратного интеграла.

1. Линейность

Если существуют $\int_G fdx, \int_G gdx,$ тогда существует интеграл

$\int_G (c_1 f + c_2 g)dx = c_1 \int_G fdx + c_2 \int_G gdx$.

2. Если: $0 \le f(x) \le g(x)$.

То: $\int_G f(x)dx \le \int_G g(x)dx$.

3. *Аддитивность* по множеству.

4. *Замена переменных.*

Свойства 3,4 аналогичны свойствам кратных интегралов Римана.

Несобственные кратные интегралы от неотрицательных функций

Докажем корректность определения 1.22, т.е. независимость интеграла от выбора исчерпывающей последовательности

Теорема 1.8. Если: $G \subset \mathbb{R}^n$, $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность, монотонно исчерпывающая G ($G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$), $f(x) \ge 0$.

То: $\exists \lim_{k\to\infty} \int_{G_k} f(x)dx$.

Этот предел существует (конечный, либо бесконечный) и не зависит от выбора последовательности $\{G_k\}$.

■ Возьмём две последовательности, исчерпывающие G:
$\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{D_p\}_{p=1}^{\infty}$

$I_1 := \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(x)\,dx,\ I_2 := \lim\limits_{p\to\infty} \int\limits_{D_p} f(x)\,dx.$

1) Покажем, что $\forall G_k\ \exists D_N : \bar{G}_k \subset D_N$.

Из $\bar{G}_k \subset G = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} D_p$ – покрытия компакта $\bar{G}_k$ системой открытых множеств

выделим конечное подпокрытие: $\bar{G}_k \subset G = \bigcup\limits_{p=1}^{N} D_p = D_N$. Тогда $\int\limits_{G_k} f(x)\,dx \le \int\limits_{D_N} f(x)\,dx \le I_2$.

Переходим к пределу при $k\to\infty$: $I_1 = \int\limits_G f(x)dx \le I_2 \Rightarrow I_1 \le I_2$.

2) Аналогично получаем, что $I_2 \le I_1$.

3) Из 1) и 2) $\Rightarrow I_1 = I_2$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{G_k} f(x)dx = \lim\limits_{p\to\infty} \int\limits_{D_p} f(x)dx$. □

Признак сравнения

Утверждение 1.8. Если: $0 \le f(x) \le g(x)$.

То: $\int\limits_G g(x)dx$ сходится $\Rightarrow \int\limits_G f(x)dx$ сходится.

$\int\limits_G f(x)dx$ расходится $\Rightarrow \int\limits_G g(x)dx$ расходится.

Эталоны сравнения

Утверждение 1.9. Если: $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда

1. $\int\limits_{|x|<1} \frac{dx}{|x|^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < n$,

2. $\int\limits_{1<|x|<\infty} \frac{dx}{|x|^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > n$.

То есть первый интеграл сходится, если параметр α меньше размерности n пространства, второй сходится, если α больше размерности пространства.

■ Введем *обобщенные сферические координаты* $\rho, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью отображения

$F : G^* \to \mathbb{R}^n,\ x = F(\rho, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}), x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset \mathbb{R}^n,$

$(\rho, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) \in G^* \subset \mathbb{R}^n$

$$F : \begin{cases} x_1 = \rho \cdot cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} ... \cos\varphi_2 \cos\varphi_1, \\ x_2 = \rho \cdot cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_{n-2} ... \cos\varphi_2 \sin\varphi_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = \rho \cdot cos\varphi_{n-1} \sin\varphi_{n-2}, \\ x_n = \rho \sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$$

где область определения $G^* : 0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi_1 \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi_i \le \frac{\pi}{2}, i = 2, ..., n-1.$

При этом $\rho = |x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Отображение F имеет якобиан J_F:

$$J_F = \frac{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial(\rho, \varphi_1, ..., \varphi_{n-1})} = \rho^{n-1} cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \cdots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Обозначим $\Phi(\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}) := cos\varphi_2 \cos^2\varphi_3 \cdots \cos^{n-2}\varphi_{n-1}$. На области определения $G^*: \Phi(\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}) \geq 0$. В силу свойства монотонности кратных интегралов:

$$c := \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_3 ... \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1} > 0.$$

Исследуем сходимость интеграла $\int\limits_{1<|x|<\infty} \frac{dx}{|x|^\alpha}$.

В качестве монотонно исчерпывающей множество $G \subset \mathbb{R}^n$, $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < |x| < +\infty\}$ последовательности $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ выберем $G_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 + \frac{1}{k} < |x| < k\}$.

Переходя к обобщенным сферическим координатам, получим

$$\int\limits_{|x|>1} \frac{dx}{|x|^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{1+\frac{1}{k}<|x|<k} \frac{dx_1 dx_2 ... dx_n}{|x|^\alpha} = \lim_{k\to\infty} \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} \rho^{n-1-\alpha} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_3 ... \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Phi(\varphi_2, \varphi_3, ..., \varphi_{n-1}) d\varphi_{n-1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} c\rho^{n-1-\alpha} d\rho = \lim_{k\to\infty} c \int_{1+\frac{1}{k}}^{k} \frac{1}{\rho^{\alpha+1-n}} d\rho.$$

Последний интеграл, как известно, сходится при $\alpha + 1 - n > 1 \Rightarrow \alpha > n$.
Сходимость первого интеграла исследуется аналогично. □

Интеграл Пуассона

Утверждение 1.10. **И**нтеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

■ Обозначим $J := \int\limits_{R^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$. Вычислим вспомогательный интеграл J двумя способами:

1) Для пространства $\mathbb{R}^2$ в качестве исчерпывающей последовательности $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ возьмем последовательность кругов G_k радиуса k.

$G_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < k^2\}$.

$$J = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x^2+y^2|<k^2} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^k re^{-r^2} dr = -\frac{2\pi}{2} \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-r^2} d\left(-r^2\right) = -\pi \lim_{k\to\infty} e^{-r^2} \Big|_0^k = \pi.$$

2) В качестве исчерпывающей последовательности $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ возьмем последовательность квадратов D_k со стороной $2k$.

$$J = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\substack{|x|<k \\ |y|<k}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} e^{-x^2}dx \int\limits_{-k}^{k} e^{-y^2}dy = \lim_{k\to\infty} I_k I_k = (I)^2 .$$

3) $\left.\begin{array}{l} J = \pi \\ J = (I)^2 \end{array}\right| \Rightarrow I = \sqrt{\pi}.$ □

Лекция 6

Глава 2. Элементы дифференциальной геометрии

2.1 Кривые в $\mathbb{R}^3$

Векторная функция скалярного аргумента

Предел, непрерывность, дифференцируемость

Определение 2.1. Отображение $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, r=r(t)\ (t\in\mathbb{R})-$ *векторная функция скалярного аргумента* (t); $r(t)=(x(t),y(t),z(t)); x,y,z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Замечание 2.1 Отображение $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ является частным случаем отображения $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ и на него переносятся все понятия предела, непрерывности, дифференцируемости и их свойства для отображений $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ (см.[3]).

Отметим только специальные свойства.

Определение 2.2. Отображение $r:I\to\mathbb{R}^3, I\subset\mathbb{R}, r\in C(I)-$назовем *путем,* образ $\Gamma:=r(I)-$*носитель пути.*

Определение 2.3. Путь, для которого отображение $r:I\to\mathbb{R}^3, I\subset\mathbb{R}-$ биекция, называется *простым путем* или *параметризованной кривой*, а $\Gamma=r(I)-$ *кривой.*

Определение 2.4. Путь $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3, r=r(t)=(x(t),y(t),z(t)); x,y,z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ называется путем *данного класса гладкости*, если функции $x(t),y(t),z(t)$ принадлежат этому классу.

Будем рассматривать случай, когда $I=[a,b]\in\mathbb{R}$.

Свойства предела

1. $\lim\limits_{t\to t_0}(r_1,r_2)=\left(\lim\limits_{t\to t_0}r_1,\lim\limits_{t\to t_0}r_2\right)$,
2. $\lim\limits_{t\to t_0}[r_1,r_2]=\left[\lim\limits_{t\to t_0}r_1,\lim\limits_{t\to t_0}r_2\right]$,
3. $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)r(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)\cdot\lim\limits_{t\to t_0}r(t)$.

Свойства производной

1. $(r_1,r_2)'=(r_1',r_2)+(r_1,r_2')$

$[r_1,r_2]'=[r_1',r_2]+[r_1,r_2']$

2. Если: $r(t)=\varphi(t)e(t)$, $\varphi(t)-$ скалярная функция, $e(t)-$ векторная,

то: $r'=\varphi'\cdot e+\varphi\cdot e'$

Лемма 2.1. Если: $r(t)-$ дифференцируема, $r:R\to R^3, |r|=const=a$

То: $(r,r')=0$.

■ $|r|^2=a^2=(r,r)=const$. Следовательно $0=(r,r)'=(r',r)+(r,r')=2(r,r')\Rightarrow(r,r')=0.$ □

Следствие 2.1. Если точка движется по сфере, то скорость направлена по касательной к сфере.

Касательная к кривой

Пусть задана кривая $\Gamma=\{r(t),\ t\in[a,b]\}$, $r-$дифференцируема и в точке $t_0\in[a,b]$ $\ r'(t_0)\neq 0.$

Тогда в силу дифференцируемости функции r:
$\Delta r=r(t)-r(t_0)=r'\left(t_0\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ \Delta t\to 0.$

Через точки $M_0=r(t_0),\ M=r(t)$ проведем прямую $M_0M,$ которую назовем секущей. Векторы Δr и $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ параллельны секущей $M_0M.$ В силу дифференцируемости функции r $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta r}{\Delta t}=r'\left(t_0\right)\neq 0.$ Геометрически это означает, что направляющие векторы $\dfrac{\Delta r}{\Delta t}$ секущих, проходящих через точку $M_0,$ при $\Delta t\to 0$ стремятся к предельному вектору $r'(t_0).$

Определение 2.5. Предельное положение вектора секущей при $\Delta t\to 0$ *задаёт касательный вектор* $r'(t_0).$

Прямую, проходящую в направлении вектора $r'(t_0)$ через заданную точку M_0, называют *касательной прямой* к данной кривой в точке M_0.

Уравнение касательной в векторной форме:

$$\rho(t)=r\left(t_0\right)+r'\left(t_0\right)(t-t_0),t\in R, \tag{2.1}$$

где $\rho(t)-$ текущий радиус-вектор касательной.

Уравнение касательной прямой в координатной форме:

$$\begin{cases} x-x_0=x'\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)\\ y-y_0=y'\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)\\ z-z_0=z'\left(t_0\right)\left(t-t_0\right)\end{cases} \tag{2.2}$$

или

$$\frac{x-x_0}{x'\left(t_0\right)}=\frac{y-y_0}{y'\left(t_0\right)}=\frac{z-z_0}{z'\left(t_0\right)}.$$

Здесь $\rho=(x,y,z),\ r(t_0)=(x_0,y_0,z_0),\ r'(t_0)=(x_0',y_0',z_0').$

Определение 2.6. Точка t_0 кривой называется *особой*, если $r'(t_0)=0.$ В противном случае точка t_0 называется *неособой*.

Геометрический смысл производной $r'(t)$ вектор-функции $r(t)$: в неособой точке t_0 вектор $r'(t_0)$ направлен по касательной к кривой в конце радиус-вектора $r(t_0).$

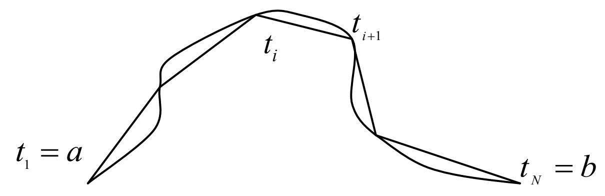
Замечание 2.4. Если конец радиус-вектора описывает траекторию движения материальной точки, а параметр t является временем движения, то производная $\dfrac{dr}{dt}$ равна вектору *мгновенной скорости* $v(t_0):=\left.\dfrac{dr}{dt}\right|_{t=t_0}=r'\left(t\right)=\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right),z'\left(t\right)\right)-$ движения в данный момент времени. Это *механический смысл* производной вектор-функции.

Длина кривой. Спрямляемая кривая. Натуральная параметризация

Определение 2.7. Пусть задана кривая $\Gamma=\{r(t),\ t\in[a,b]\}$, и

$\tau=\{t_i\}_{i=1}^{N}$ – *разбиение отрезка* $[a,b]$

$a=t_1<t_2<\ldots<t_N=b$



$\sigma(\tau):=\sum\limits_{i=1}^{N-1}\left|r(t_{i+1})-r(t_i)\right|$ – длина ломаной с вершинами в точках, являющихся концами радиус векторов $r(t_i)$, или ломаной, *вписанной* в кривую Γ.

Определение 2.8. Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется ее *длиной.*

Обозначим S_Γ длину кривой Γ: $S_\Gamma:=\sup\limits_{\tau}\sigma(\tau)$.

Для длины кривой Γ справедлива оценка: $0\le S_\Gamma\le+\infty$.

Определение 2.9. Если длина S_Γ кривой Γ конечна, то кривая называется *спрямляемой.*

Теорема 2.1. Если кривая $\Gamma=\{r(t),\ t\in[a,b]\}$, непрерывно-дифференцируема, то она спрямляема и ее длина S_Γ удовлетворяет неравенству

$$|r(b)-r(a)|\le S_\Gamma\le M(b-a), \tag{2.3}$$

где

$$M=\max_{t\in[a,b]}|r'(t)|.$$

$$■\, |r(b)-r(a)|=|\sum_{i=1}^{N-1}r(t_{i+1})-r(t_i)|\le\sum_{i=1}^{N-1}|r(t_{i+1})-r(t_i)|=\sigma(\tau)=\sum_{i=1}^{N-1}|r'(\xi_i)|(t_{i+1}-t_i)\le$$

$$\le M\sum_{i=1}^{N-1}t_{i+1}-t_i=M(b-a),$$

где $\xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$.

Перейдя в неравенстве

$$\left|r(b)-r(a)\right|\le\sigma(\tau)\le M(b-a)$$

к верхней грани $\sigma(\tau)$ по всевозможным разбиениям τ, получим формулу (2.3). □

Теорема 2.2. Если кривая $\Gamma=\{r(t),\ t\in[a,b]\}$, непрерывно-дифференцируема: $r\in C^1[a,b]$, то переменная длины дуги $s=s(t)$, отсчитываемая от начала кривой Γ, является возрастающей непрерывно-дифференцируемой функцией параметра t, и

$$\frac{ds}{dt}=\left|\frac{dr}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{2.4}$$

■ Пусть $s(t)$ – длина дуги кривой Г от точки $M(a)$ до точки $M(t)$; $t_0, t_0+\Delta t \in [a,b]$, $\Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$.

Тогда в силу теоремы 2.1

$$|r(t_0+\Delta t) - r(t_0)| \le |\Delta s| \le M\,|\Delta t|, \tag{2.5}$$

где $M = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+\Delta t]} |r'(t)| = |r'(\xi)|$, $\xi \in [t_0, t_0+\Delta t]$. Поделим (2.5) на $|\Delta t| \ne 0$

$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}\right| \le \left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right| \le \left|r'(\xi)\right|.$$

Так как длина дуги s возрастает с ростом t, то $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} > 0$, и $\left|\dfrac{\Delta s}{\Delta t}\right| = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, следовательно

$$\left|\frac{r(t_0+\Delta t) - r(t_0)}{\Delta t}\right| \le \frac{\Delta s}{\Delta t} \le \left|r'(\xi)\right|. \tag{2.6}$$

В силу непрерывности функции $r'(t)$ левая и правая части неравенства (2.6) имеет при $\Delta t \to 0$ пределом $|r'(t_0)|$. Следовательно, существует

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0) = |r'(t_0)|.$$

Поскольку $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), |r'(t)| = |v(t)| = ((x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2)^{\frac{1}{2}}$.
Отсюда следует (2.4). □

Следствие 2.1. Пусть $r \in C^1[a,b] \Rightarrow$ длина S_Γ кривой определяется формулой

$$S_\Gamma = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt. \tag{2.7}$$

Определение 2.11. Кривая $\Gamma = \{r(t),\ t \in [a,b]\}$, называется гладкой, если $r \in C^1[a,b]$, и кривая не имеет особых точек ($r' \ne 0$ на $[a,b]$). Кривая называется кусочно-гладкой, если она состоит из объединения конечного числа гладких кривых.

Определение 2.12. *Натуральная параметризация* – параметризация, при которой в качестве параметра используется s – длина кривой от начала до данной точки.

Замечание 2.1.

Здесь и далее: $r' := \dfrac{dr}{dt}, \dot{r} := \dfrac{dr}{ds}$.

Теорема 2.3. Если кривая $\Gamma = \{r(t),\ t \in [a,b]\}$ гладкая, то существует ее натуральная параметризация $r(s)$, s – переменная длины дуги и

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = 1. \tag{2.8}$$

■ Так как $r'(t) \ne 0$, в силу формулы (2.4) $s'(t) \ne 0$, функция s строго возрастает: $s(t) \uparrow\uparrow, s \in C^1$. Следовательно, существует обратная функция $t = t(s) \uparrow\uparrow, t \in C^1$. Следовательно, по правилу дифференцирования сложной функции $r(t(s)) = r(s)$

$$\left|\frac{dr}{ds}\right| = \left|\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{\dfrac{dr}{dt}}{\dfrac{ds}{dt}}\right| = 1. \quad □$$

Замечание 2.6. Геометрический смысл формулы (2.8). Отношение длины гладкой дуги к длине стягивающей ее хорды стремится к единице, при стремлении длины дуги к нулю.

Лекция 7

Основной трёхгранник кривой

Определение 2.13. Пусть кривая $\Gamma = \{r(s), r \in C^2, \dot{r} \neq 0\}$ – гладкая.

1. $\tau := \dot{r}$ – *касательный вектор*;

2. $\nu := \dfrac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|}$ – вектор *главной нормали*;

3. $\beta := [\tau, \nu]$ – вектор *бинормали*.

Свойства:

1. $|\tau| = 1$ (т.к. $|\dot{r}| = 1$).
2. $\tau \perp \nu$ (т.к. $\tau \perp \dot{\tau} = \ddot{r}$ и $\nu \parallel \ddot{r}$)
3. векторы τ, ν, β – образуют правую тройку

Замечание 2.7. ν, β, τ и β, τ, ν - тоже правые тройки.

Определение 2.14. Система координат τ, ν, β называется *сопровождающей* системой координат.

Определение 2.15.

1. Плоскость векторов ν, β называется *нормальной*.
2. Плоскость векторов τ, ν – *соприкасающаяся*.
3. Плоскость векторов β, τ – *спрямляющая*.

Трёхгранник из этих плоскостей называется *основным трёхгранником* кривой.

Формулы Френе

Для основного трехгранника справедливы *формулы Френе*

$$\begin{cases} \dot{\tau} = k\nu \\ \dot{\beta} = -æ\nu \\ \dot{\nu} = -k\tau + æ\beta \end{cases} \tag{2.9}$$

■ 1. $\dot{\tau} = \ddot{r} = |\ddot{r}|\nu = k\nu \Rightarrow \dot{\tau} = k\nu$, $k := |\ddot{r}| \geq 0$.

Числовой коэффициент k назовем *кривизной.*

2. $\beta = [\tau, \nu]$

$\dot{\beta} = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [k\nu, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}] \Rightarrow \dot{\beta} \perp \tau$

$\begin{matrix} \dot{\beta} \perp \tau, \dot{\beta} \perp \beta \\ \nu \perp \tau, \nu \perp \beta \end{matrix} \Rightarrow \dot{\beta} \parallel \nu$

Можно положить $\dot{\beta} = -æ\nu$. Числовой коэффициент $æ$ назовем *кручением.*

3. $\nu = [\beta, \tau]$

$\dot{\nu} = [\dot{\beta}, \tau] + [\beta, \dot{\tau}] = [-æ\nu, \tau] + [\beta, k\nu] = æ\beta - k\tau$. □

Геометрический смысл величин k и æ

Определение 2.16. Абсолютная величина скорости вращения единичного касательного вектора относительно натурального параметра называется *кривизной* k кривой в этой точке,

$R = \frac{1}{k} -$ *радиус кривизны* кривой.

Определение 2.17. Скорость вращения вектора бинормали относительно натурального параметра называется *кручением* кривой в этой точке, æ $-$кручение кривой. Знак "$-$" берётся, если вращение идёт в сторону вектора нормали, иначе "$+$".

Вычисление кривизны и кручения

Утверждение 2.2. $r = r(S), r \in C^3 \Rightarrow$

$$k = |\ddot{r}|$$

$$æ = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|\ddot{r}|^2}, \ddot{r} \neq 0$$

■ 1) $r \in C^3 \Rightarrow \exists \ddot{r}, k = |\ddot{r}|$;

2) $\dddot{r} = \ddot{\tau} = (k\nu)^{\bullet} = \dot{k}\nu + k\dot{\nu} = \dot{k}\nu + k(-k\tau + æ\beta)$

$[\dot{r}, \ddot{r}] = [\tau, \dot{\tau}] = [\tau, k\nu] = k[\tau, \nu] = k\beta$

$(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r}) = (\dddot{r}, \dot{r}, \ddot{r}) = (\dddot{r}, [\dot{r}, \ddot{r}]) = (\dot{k}\nu - k^2\tau + kæ\beta, k\beta) = k^2 æ$

$æ = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{k^2} = \frac{(\dot{r}, \ddot{r}, \dddot{r})}{|\ddot{r}|^2}$. □

Вычисление кривизны и кручения в случае произвольной параметризации

Утверждение 2.3. Если: $r(t), r \in C^3, r' \neq 0, r'' \neq 0$.

То: $k = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^3}$, $æ = \frac{(r', r'', r''')}{|[r', r'']|^2}$.

Вид кривой вблизи произвольной точки

Пусть $r(s) \in C^3$, тогда по формуле Тейлора для функций многих переменных

$$r = r_0 + \dot{r}\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{r}\Delta s^2 + \frac{1}{6}\dddot{r}\Delta s^3 + o(\Delta s^3)$$

$$\Delta r = \tau\Delta s + \frac{1}{2}k\nu\Delta s^2 + \frac{1}{6}(k\nu)^{\bullet}\Delta s^3 + o(\Delta s^3) =$$

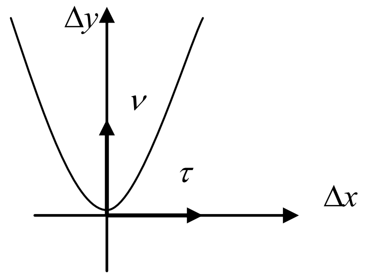
$$= \tau\Delta s + \frac{1}{2}k\nu\Delta s^2 + \frac{1}{6}(\dot{k}\nu + k(-k\tau + æ\beta))\Delta s^3 + o(\Delta s^3)$$

Вектор τ задает направление оси $0x$: $\Delta x = \Delta s + o(\Delta s)$.

Вектор ν задает направление оси $0y$: $\Delta y = \frac{1}{2}k\Delta s^2 + o(\Delta s^2)$.

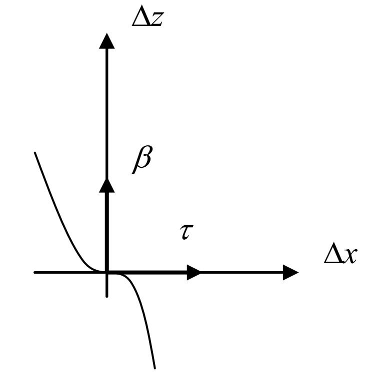
Вектор β задает направление оси $0z$: $\Delta z = -\frac{1}{6}kæ\Delta s^3 + o(\Delta s^3)$.

$$\Delta y = \frac{1}{2} k \Delta x^2$$



$$\Delta z = -\frac{1}{6} k æ \Delta x^3$$

$æ > 0$



Лекция 8

2.2 Поверхности в $\mathbb{R}^3$

Определение 2.17. Обозначим $\mathbb{R}^2_{u,v}$ – координатную плоскость переменных u, v. Задано отображение $M : \overline{G} \to \mathbb{R}^3,\ G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}, G -$ область, $M = M(u,v),\ M \in C(\overline{G})$. Отображение M называется *поверхностью*, образ множества $\overline{G}$ называется *носителем поверхности*: $S = \{M(u,v) \mid (u,v) \in \overline{G}\}$.

Вектор-функцию $r = r(u,v),\ r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, где $r -$ радиус-вектор с началом в 0 и концом в $M(u,v)$ называют векторным представлением поверхности $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{G}\}$. $S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \mid (u,v) \in \overline{G}\}$ – координатное представление поверхности.

Переменные u, v называются *параметрами поверхности* S (криволинейными координатами), $r(u, v_0), r(u_0, v)$ – соответствующими им координатными линиями.

Замечание 2.8. Точки поверхности для которых $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2),\ M(u_1, v_1) = M(u_2, v_2),$ называются *кратными* точками, поверхности с кратными точками называются поверхностями с самопересечениями.

Гладкость поверхности определяется гладкостью отображения M.

Пример 2.1. Тор:

$$\begin{cases} x = (a\cos\varphi + b)\cos\theta, \\ y = (a\cos\varphi + b)\sin\theta, \\ z = a\sin\varphi \end{cases}$$

$a < b,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < 2\pi.$

Ориентация поверхности

Определение 2.18. Точка $M_0 = r(u_0, v_0)$ поверхности S называется *неособой*, если $[r_u \times r_v] \neq 0,$ в противном случае - *особой.*

Определение 2.19. Поверхность $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ называется *гладкой*, если она непрерывно-дифференцируема и не имеет особых точек.

Определение 2.20. Всякая непрерывная единичная нормаль на гладкой поверхности S
задает *ориентацию поверхности*. В каждой точке поверхности имеются лишь две единичные нормали: ν и $-\nu$, поэтому у поверхности S имеется лишь две ориентации. Будем говорить, что параметризация поверхности $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2\}$ *согласована с ее ориентацией*, заданной единичной нормалью

$$\nu = \frac{[r_u, r_v]}{|[r_u, r_v]|}, \tag{2.10}$$

где $[r_u, r_v] -$ векторное произведение.

Если поверхность задана параметризацией
$S = \{r(x,y) = (x, y, f(x,y)) \mid (x,y) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2\}$, то единичная нормаль ν, в силу формулы (2.10)

$$\nu = \left(-\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}}, -\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}}, \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}} \right). \tag{2.11}$$

Определение 2.21. Гладкая поверхность S называется *ориентируемой* (двусторонней), если на ней можно выбрать единичную непрерывную нормаль и *неориентируемой* (односторонней), если этого сделать нельзя.

Пример 2.2. Всякая гладкая параметрически заданная поверхность ориентируема. Сфера-ориентируемая поверхность.

Пример неориентируемой поверхности - лист Мебиуса.

Определение 2.22. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких поверхностей, называется *кусочно-гладкой.*

Край поверхности. Согласованная ориентация поверхности и ее края

Определение 2.23 Ориентация простого замкнутого контура, лежащего на плоскости с правой системой координат, называется *положительной*, если она соответствует движению против часовой стрелки, т.е. область при обходе остается слева. Если система координат левая, то положительная ориентация: движение по часовой стрелке.

Пусть контур гладкий, положительно ориентированный, $\tau -$ касательный вектор к кривой, $n -$ вектор внешней нормали к области, ограниченной данным контуром. Тогда векторы (n, τ) ориентированы так же как и координатные орты (i, j).

Определение 2.24. Пусть $S = \{\bar{r}(u,v) \mid (u,v) \in \bar{D} \subset \mathbb{R}^2\} \in \mathbb{R}^3 -$ гладкая поверхность, ее *границей (краем)* ∂S называется образ границы ∂D множества D, которое отображается в S при ее параметризации $\bar{r}$. При этом $\partial D -$ кусочно-гладкая замкнутая кривая без кратных точек.

Определение 2.25. Будем говорить, что параметризация $\bar{r}(u,v)$ поверхности S отвечает параметризации ее края ∂S (или *согласована с ориентацией края*) если при этой параметризации ориентация кривой ∂S порождается положительной ориентацией ее прообраза: ∂D.

Эта ориентация края согласована с ориентацией поверхности нормалью (2.10).

Замечание 2.9. Пусть поверхность S является графиком функции $z = f(x,y),\ f: D \to R,\ f \in C^1(\overline{D}),\ \ S := \{(x,y,z) \mid (x,y) \in \overline{D},\ z = f(x,y)\ \}$, и граница ∂D области D является кусочно-гладким контуром. Образ ∂D при отображении $f: \partial S -$ край поверхности S. (Проекция ∂S на плоскость $x0y - \partial D$). Обозначим $\partial D^+ := \{x(t), y(t), a \le t \le b\ \} -$ положительно ориентированный контур (направление движения против часовой стрелки соответствует росту параметра t). Ориентация ∂D^+ в силу отображения f порождает положительную ориентацию края поверхности: $\partial S^+ := \{(x(t), y(t), f(x(t), y(t)), a \le t \le b\ \}$. Пусть $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) -$ единичная нормаль к S, определенная формулой (2.11), согласованная с ориентацией края. Поскольку $\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}} > 0$, нормаль составляет острый угол с ортом $\bar{k}$, отсюда следует «правило буравчика».

Правило буравчика или штопора: в случае правой системы координат ориентация края ∂S^+ соответствует направлению вращения штопора, а направление ориентирующей поверхность нормали $\nu -$ направлению движения самого штопора.

Замечание 2.10. Кусочно-гладкая поверхность S называется *ориентированной*, если ее можно представить как результат такой склейки конечного числа гладких ориентированных поверхностей $S_i, i = 1,...,k,$ при которой общие части краев ∂S_i принадлежат не более чем двум этим поверхностям и проходятся в противоположных направлениях при ориентациях ∂S_i, согласованных по правилу буравчика с ориентацией S_i. Объединение частей краев, принадлежащих только одному краю, называется краем поверхности S.

Касательная к поверхности в $\mathbb{R}^3$

Задана поверхность $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{D} \subset R^2\},\ r \in C^1(\overline{D})$, $r(u_0, v), r(u, v_0)$ - координатные линии.

Определение 2.26. Касательный вектор к координатной линии $r(u, v_0)$:

$$\frac{d}{du} r(u, v_0) = r_u(u, v_0).$$

Определение 2.27. Плоскость, проходящую через неособую точку $M_0 = r(u_0, v_0)$ поверхности S через векторы $r_u(u_0, v_0),\ r_v(u_0, v_0)$, называют *касательной плоскостью* к поверхности S.

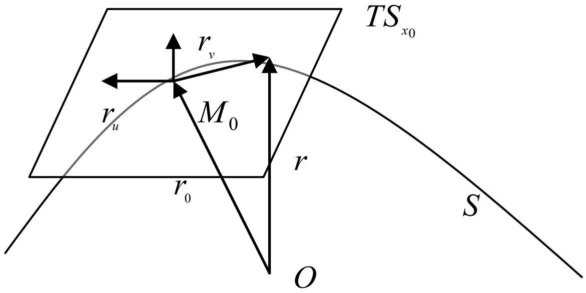
Определение 2.28. Под кривыми на поверхности S будем понимать кривые, задаваемые представлением вида $r = r(u(t), v(t)),\ t \in [a,b],\ u, v \in C[a,b],\ (u(t), v(t)) \in \overline{G}, t \in [a,b]$.

Пусть $r = r(u(t), v(t)),\ t \in [a,b] -$ гладкая кривая на гладкой поверхности S, тогда $\dfrac{dr}{dt} = r_u \dfrac{du}{dt} + r_v \dfrac{dv}{dt} \Rightarrow$ касательная к любой кривой на поверхности лежит в плоскости векторов r_u, r_v (принадлежит касательной плоскости).

Обозначим $r_u^0 = r_u(u_0, v_0),\ r_v^0 = r_v(u_0, v_0), r_0 = r(u_0, v_0) -$ радиус вектор точки M_0, $r -$ радиус вектор произвольной точки касательной плоскости.

Определение 2.29. Вектор, ортогональный касательной плоскости в точке M_0, называется *нормальным вектором* или нормалью к поверхности, прямая коллинеарная нормальному вектору - *нормальная прямая*.

$\nu = \dfrac{[r_u, r_v]}{\left\|[r_u, r_v]\right\|}$ – единичный нормальный вектор в точке M_0.



$(r - r_0, r_u, r_v) = 0$ – уравнение касательной плоскости в векторной форме,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u^0 & y_u^0 & z_u^0 \\ x_v^0 & y_v^0 & z_v^0 \end{vmatrix} = 0 -$$ уравнение касательной плоскости в координатной форме

Пример 2.2. Если поверхность имеет представление вида $z = f(x, y)$,

$u = x; v = y; (x, y) \in G \subset R^2$,

$r = (x, y, f(x, y)),\ r_u = (1, 0, f'_x),\ r_v = (0, 1, f'_y)$.

Уравнение касательной плоскости примет вид:

$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$.

Уравнение нормальной прямой:

$$\frac{x - x_0}{f'_{x0}} = \frac{y - y_0}{f'_{y0}} = -(z - z_0).$$

Пример 2.3. Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$, где F – гладкая в окрестности точки M_0, $F_z(M_0) \neq 0$, тогда в силу теоремы о неявной функции существует $z = f(x, y)$ и уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F_y{}'(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} -$$ уравнение нормали.

Лекция 9

Первая квадратичная форма поверхности

Пусть поверхность $S = \{r(u, v) \mid (u, v) \in \overline{D} \subset R^2\}$ – гладкая, $dr = r_u du + r_v dv$ – касательный вектор к поверхности, r_u, r_v – касательные векторы к координатным линиям.

Определение 2.30. Квадратичная форма

$|dr|^2 = (dr, dr) = (r_u du + r_v dv)^2 = r_u^2 du^2 + r_v^2 dv^2 + 2 r_u r_v du dv = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2 + 2 g_{12} du dv$ – *первая квадратичная форма поверхности*.

Здесь

$g_{11} = (r_u, r_u) = r_u^2$,

$g_{12} = (r_u, r_v) = r_u r_v = (r_v, r_u) = g_{21}$,

$g_{22} = (r_v, r_v) = r_v^2$.

Утверждение 2.4. Первая квадратичная форма неотрицательно определена:

1) $(dr)^2 \geq 0$.

2) Если точка неособая: $[r_u, r_v] \neq 0$, то форма положительно определена: $(dr)^2 > 0$.

■ 1) следует из определения;

2) в неособой точке $r_u \neq 0, g_{11} = r_u^2 > 0$.

Используем тождество Лагранжа: $|[a,b]|^2 = |a|^2 |b|^2 - (a,b)^2$.

(Так как $|[a,b]|^2 = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \varphi, (a,b)^2 = |a|^2 |b|^2 \cos^2 \varphi.$)

Тогда

$$|[r_u, r_v]|^2 = |r_u|^2 |r_v|^2 - (r_u, r_v)^2 = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = |G| > 0.$$

Здесь g_{ij} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности. В силу критерия Сильвестра квадратичная форма является положительно определенной. □

Следствие 2.2. $|[r_u, r_v]| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}{}^2}$.

Длина кривой на поверхности

Определение 2.31. $S = \{ r(u,v) \mid (u,v) \in D \}$ – поверхность, $r, u(t), v(t) \in C^1$

$\Gamma = \{ r(u(t), v(t)) \mid t \in (\alpha, \beta) \}$ – гладкая кривая, лежащая на S,

$$ds^2 = dr^2 = g_{11} du^2 + 2 g_{12} du dv + g_{22} dv^2$$

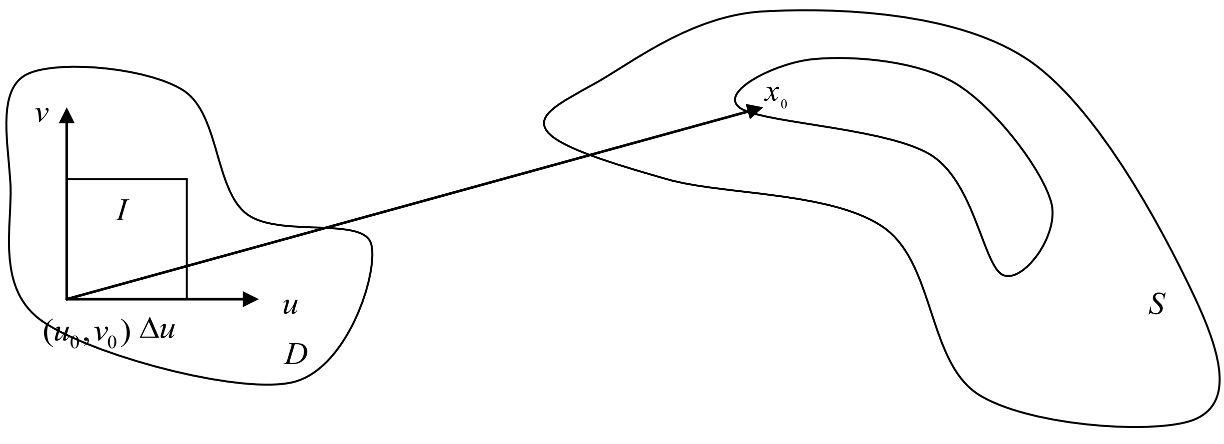
$$\frac{ds}{dt} > 0, \left| \frac{dr}{ds} \right| = 1.$$

Длина l – кривой Γ:

$$l = \int_\alpha^\beta \frac{ds}{dt} = \int_\alpha^\beta \sqrt{g_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2 g_{12} \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv}{dt} + g_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2}.$$

Площадь поверхности в $\mathbb{R}^3$

Пусть поверхность $S = \{ r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{D} \subset R^2 \}$ – гладкая, $r \in C^1(\overline{D})$, D – измеримая по Жордану область. Точка $(u_0, v_0) \in D$. Построим прямоугольник $I = [u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v] \subset D$, его площадь $\mu(I) = \Delta u \Delta v$.



Образ $I : r(I) -$ некий криволинейный четырехугольник в S. Найдем его площадь $\mu(r(I))$. Так как $r -$ гладкая функция $r(u_0 + \Delta u, v_0) - r(u_0, v_0) = r_u \Delta u + o(\Delta u)$,
$r(u_0, v_0 + \Delta v) - r(u_0, v_0) = r_v \Delta u + o(\Delta v),\ \Delta u, \Delta v \to 0,$ векторы $r_u = \dfrac{\partial r}{\partial u},\ r_v = \dfrac{\partial r}{\partial v}$ принадлежат касательной плоскости. На векторах $r_u \Delta u,\ r_v \Delta v$ с началом в точке $x_0 = r(u_0, v_0) \in S$ построим параллелограмм P, принадлежащий касательной плоскости. Его площадь $\mu(P) = |[r_u \times r_v]| \Delta u \Delta v \approx \mu(r(I))$. Построим поверхность, образованную такими параллелограммами. Для этого построим разбиение области $D = \bigcup_i I_i$ на прямоугольники I_i, в каждой точке $(u_i, v_i) \in I_i$ построим соответствующий параллелограмм, лежащий в касательной плоскости. Определим площадь $\mu(S)$ поверхности S как предел суммы площадей этих параллелограммов (мелкость разбиения $\tau \to 0$).

Определение 2.32. *Площадь поверхности* S **:**

$$\mu(S) := \iint_D |[r_u \times r_v]|\, dudv. \tag{2.12}$$

Так как $|[r_u, r_v]| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$,

$$\mu(S) = \int_D \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, dudv. \tag{2.13}$$

Элемент площади поверхности $dS := \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}\, dudv.$

Пример 2.4. Если поверхность S задана соотношением:
$z = f(x, y), u = x, v = y, r = (x, y, f(x, y)), (x, y) \in D$.
То: $\mu(S) = \int_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy.$

Замечание 2.10. Если из поверхности удалить множество меры нуль, то площадь не изменится.

Определение 2.33. Если: $S -$ кусочно-гладкая поверхность, то после удаления из S конечного или счётного числа кривых и точек S распадается на конечное число гладких поверхностей.

$$S = \bigcup_i S_i \Rightarrow \mu(S) := \sum_i \mu(S_i) = \mu(\widetilde{S}).$$

Пример 2.5. Найдем площадь сферы радиуса a:

$$\begin{cases} x = a \cos\theta \cos\varphi, \\ y = a \cos\theta \sin\varphi, \\ z = a \sin\theta, \end{cases}$$

$$\varphi \in (0, 2\pi),\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), D = (0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

$r = (x, y, z),\ u = \varphi, v = \theta,$

$\dot{r}_u = \dot{r}_\phi = (-a \cos\theta \sin\varphi, a \cos\theta \cos\varphi, 0),$

$\dot{r}_v = \dot{r}_\theta = (-a \sin\theta \cos\varphi, -a \sin\theta \sin\varphi, a \cos\theta),$

$g_{11} = (\dot{r}_\varphi, \dot{r}_\varphi) = (a \cos\theta)^2,\ g_{12} = (\dot{r}_\varphi, \dot{r}_\psi) = 0,\ g_{22} = (\dot{r}_\psi, \dot{r}_\psi) = a^2.$

$$\mu(S)=\int_D \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,dudv=\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta d\theta=4\pi a^2.$$

Пример 2.6. Найдем площадь тора:

$$\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\psi, \end{cases}$$

$$\varphi\in(0,2\pi),\psi\in(0,2\pi),$$

$$r=(x,y,z),u=\varphi,v=\psi,$$

$$\dot r_u=\dot r_\phi=\left(-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,(b+a\cos\psi)\cos\varphi,0\right),$$

$$\dot r_v=\dot r_\psi=(-a\sin\psi\cos\varphi,-a\sin\psi\sin\varphi,a\cos\psi),$$

$$g_{11}=(\dot r_\varphi,\dot r_\varphi)=(b+a\cos\psi)^2,\ g_{12}=(\dot r_\varphi,\dot r_\psi)=0,\ g_{22}=(\dot r_\psi,\dot r_\psi)=a^2.$$

$$\mu(S)=\int_D \sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,dudv=\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{2\pi} a(b+a\cos\psi)d\psi=4\pi^2 ab.$$

Лекция 10

Глава 3. Криволинейные и поверхностные интегралы

3.1. Криволинейные интегралы

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\Gamma = \{r(s) \mid 0 \le s \le S\}$ – спрямляемая кривая в R^3,
$r:[0,S] \to R^3$, $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$, s – натуральный параметр, $r(0) = A,\ r(S) = B$ – начало и конец кривой, т.е. кривая ориентирована. На кривой задана непрерывная функция $F:\Gamma \to R,\ F(x,y,z) \in C(\Gamma).$

Определение 3.1. Криволинейным интегралом $\int\limits_{AB} Fds$ первого рода от функции F по кривой $\Gamma = AB$ называется интеграл $\int\limits_{AB} FdS := \int\limits_0^S F((x(s), y(s), z(s))ds.$

Замечание 3.1. Последний интеграл существует, т.к. функция F непрерывна.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

Утверждение 3.1.

1. Интеграл не зависит от ориентации кривой Γ: $\int\limits_{AB} FdS = \int\limits_{BA} FdS.$

■ Обозначим $u = S - s$ переменную длины дуги, отсчитываемую от B.
Тогда $du = -ds$,

$$\int\limits_{BA} FdS = \int\limits_0^S F(x(S-u), y(S-u), z(S-u))du = -\int\limits_S^0 F((x(s), y(s), z(s))ds = \int\limits_0^S F((x(s), y(s), z(s))ds = \int\limits_{AB} Fds. \ \square$$

2. Вычисление интеграла. Пусть Γ гладкая параметризованная кривая:
$\Gamma = \{r(t) \mid a \le t \le b\}$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ r \in C^1(a,b)$ и без особых точек: $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 > 0,\ t \in [a,b].$ Тогда

$$\int\limits_{BA} FdS = \int\limits_a^b F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt.$$

■ Кривая Γ спрямляема и переменная длины дуги $s = s(t)$ может быть принята за параметр. Сделаем в интеграле замену переменной $s = s(t)$:

$$\int\limits_{BA} FdS = \int\limits_0^S F((\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s), \widetilde{z}(s))ds = \int\limits_a^b F(x(t), y(t), z(t))s'dt = \int\limits_a^b F(x(t), y(t), z(t))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt,$$

т.к. $\dfrac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.\ \square$

Пример 2.1. Найдем длину l окружности радиуса a.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a.$$

Криволинейный интеграл второго рода

Пусть $\Gamma = \{r(s) \mid 0 \le s \le S\}$ – гладкая параметризованная кривая в $\mathbb{R}^3$, $r:[0,S] \to \mathbb{R}^3$, $r(s) = (x(s), y(s), z(s))$, s – натуральный параметр, $r(0) = A$, $r(S) = B$ – начало и конец кривой, т.е. кривая ориентирована. На кривой Γ задана непрерывная вектор-функция $a : \Gamma \to \mathbb{R}^3$, $a = (P, Q, R) \in C(\Gamma)$.

Единичный касательный вектор τ к кривой Γ:
$\tau = \dfrac{d\overline{r}}{ds} = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Здесь $d\overline{r} = (dx, dy, dz)$.

Определение 3.2. *Криволинейным интегралом* $\int\limits_{AB} \overline{a}\,d\overline{r}$ *второго рода* от вектор функции a по ориентированной кривой $\Gamma = AB$ называется интеграл $\int\limits_{AB} \overline{a}\,d\overline{r} := \int\limits_{AB} \overline{a}\,\overline{\tau}\,ds.$

В координатной форме: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz := \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$

т.к. $\overline{a}\,\overline{\tau} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma.$

Таким образом, криволинейный интеграл второго рода определяется через криволинейный интеграл первого рода.

Замечание 3.2. Интеграл второго рода по гладкой кривой от непрерывной функции существует, т.к. в этом случае существует интеграл первого рода.

Свойства криволинейного интеграла второго рода

1. При изменении ориентации кривой интеграл второго рода меняет знак.

■ Обозначим $u = S - s$ переменную длины дуги, отсчитываемую от точки B кривой Γ, $\overline{\tau}^*$ – единичный касательный к кривой Γ вектор, соответствующий этому направлению.

Тогда $\overline{\tau}^* = \dfrac{d\overline{r}}{du} = \dfrac{d\overline{r}}{ds}\dfrac{ds}{du} = -\overline{\tau}$, т.к. $du = -ds$.

$$\int\limits_{BA} \overline{a}\,d\overline{r} = \int\limits_{BA} \overline{a}\,\overline{\tau}^* du = \int\limits_{AB} \overline{a}\,\overline{\tau}^* ds = -\int\limits_{AB} \overline{a}\,\overline{\tau} ds = -\int\limits_{AB} \overline{a}\,d\overline{r}. \;\square$$

2. Вычисление интеграла второго рода в случае произвольной параметризации.

Пусть Γ – гладкая параметризованная кривая:
$\Gamma = \{r(t) \mid a \le t \le b\}$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $r \in C^1(a,b)$.

Тогда $\int\limits_{AB} \overline{a}\,d\overline{r} = \int_a^b \overline{a}\,\overline{r}'dt.$

В координатной форме: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_a^b (Px' + Qy' + Rz')dt.$

■ Так как $r' = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{ds}\dfrac{ds}{dt} = \overline{\tau}s' \Rightarrow$

$$\int\limits_{AB} \overline{a}\,d\overline{r} = \int\limits_{AB} \overline{a}\,\overline{\tau}ds = \int_a^b \overline{a}\,\overline{\tau}s'dt = \int_a^b \overline{a}\,\overline{r}'dt. \square$$

Замечание 3.3. Так как интеграл, стоящий в левой части не зависит от параметра, то вычисление интеграла второго (и первого) рода не зависит от выбора параметризации.

Следствие 3.1. Пусть Γ - гладкая кривая: $\Gamma = \{(x,y) \mid y = f(x), a \le x \le b\}$, $f \in C^1(a,b)$, $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$. Тогда

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x))dx.$$

Определение 3.3. Криволинейный интеграл второго (первого) рода по кусочно-гладкой кривой (состоящей из конечного числа гладких кривых) определяется как сумма интегралов по гладким частям.

Лекция 11

3.2. Поверхностные интегралы

Поверхностный интеграл первого рода

Пусть поверхность $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{D} \subset R^2\}$ – гладкая, D – измеримая по Жордану область, g_{11}, g_{12}, g_{22} – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. На поверхности S задана функция $F: S \to \mathbb{R}, F \in C(S)$.

Определение 3.4. Поверхностным интегралом *первого рода* $\iint\limits_S F(x,y,z)dS$ по поверхности S называется интеграл

$$\iint\limits_S F(x,y,z)dS := \iint\limits_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv.$$

Замечание 3.4. В силу непрерывности подынтегральной функции F и измеримости области D этот интеграл существует.

Пример 3.1. Если $F = 1$, поверхностный интеграл равен площади поверхности S:

$$\mu(S) = \iint\limits_S dS = \iint\limits_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv.$$

Пример 3.2. Если поверхность S задана уравнением

$$z = f(x,y), (x,y) \in \overline{D} \Rightarrow \iint\limits_S F(x,y,z)dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}dxdy.$$

Замечание 3.5. Поверхностный интеграл первого рода по кусочно-гладкой поверхности определяется как сумма интегралов по ее гладким частям.

Поверхностный интеграл второго рода

Пусть поверхность $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{D} \subset R^2\}$ – гладкая, S^+ – положительно ориентированная поверхность с помощью непрерывной единичной нормали $\nu = \dfrac{[r_u \times r_v]}{|[r_u \times r_v]|}$.

На поверхности S задана непрерывная вектор-функция $\overline{a}: S \to \mathbb{R}^3, a \in C(S), \overline{a} = (P,Q,R)$.

Определение 3.5. *Поверхностным интегралом второго рода* $\iint\limits_{S^+} \overline{a}d\overline{S}$ по ориентированной поверхности S^+ называется интеграл $\iint\limits_{S^+} \overline{a}d\overline{S} := \iint\limits_S \overline{a}\,\overline{\nu}dS.$

В координатной форме: $\iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy := \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS.$

Обозначим через S^- поверхность, ориентированную с помощью нормали $-\overline{\nu}$.

$\iint\limits_{S^-} \overline{a}d\overline{S} = \iint\limits_{S} \overline{a}(-\overline{\nu})dS = -\iint\limits_{S} \overline{a}\,\overline{\nu}dS = \iint\limits_{S^+} \overline{a}d\overline{S}.$ Таким образом, изменение ориентации поверхности влечет изменение знака интеграла второго рода.

Когда $S-$ кусочно-гладкая $S = \bigcup\limits_i S_i$. Поверхность S, после удаления из неё кривых и точек состоит из гладких поверхностей S_i со взаимно согласованной ориентацией $\int\limits_S \overline{a}d\overline{S} := \sum\limits_i \int\limits_{S_i} \overline{a}d\overline{S}$.

Пример 3.3. Если из куба удалить рёбра и вершины, то останутся шесть гладких поверхностей.

Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному

Пусть поверхность $S = \{r(u,v) \mid (u,v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2\} -$ гладкая, $S^+ -$ положительно ориентированная поверхность с помощью непрерывной единичной нормали $\nu = \dfrac{[r_u \times r_v]}{|[r_u \times r_v]|}$.

Так как $dS := \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}dudv = \|[r_u \times r_v]\|dudv,$

$$\iint\limits_{S^+} \overline{a}d\overline{S} = \iint\limits_{S} \overline{a}\overline{\nu}dS = \iint\limits_{D} \overline{a}\frac{[r_u \times r_v]}{|[r_u \times r_v]|}|[r_u \times r_v]|\,dudv = \iint\limits_{D} (\overline{a}, r_u, r_v)dudv.$$

В координатной форме:

$$\iint\limits_{S^+} \overline{a}d\overline{S} = \iint\limits_{D} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} dudv, \tag{3.1}$$

где $\overline{a} = (P, Q, R),\ r(u,v) = (x, y, z)(u,v).$

Если поверхность S задана уравнением $z = f(x,y),\ (x,y) \in \overline{D},$
$u = x, v = y, r_u = (1,0,f_x), r_v = (0,1,f_y)$, $[r_u \times r_v] = -f_x i - f_y j + k,$ т.е. нормаль ν образует острый угол с осью $0z$, и положительная сторона поверхности S^+ это ее верхняя сторона: $\hat{S}$.

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{S} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \\ &= \iint\limits_{D} (-P(x,y,f(x,y))f_x' - Q(x,y,f(x,y))f_y' + R(x,y,f(x,y)))dxdy. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Если интеграл берется по нижней части поверхности $\breve{S}$, то знак перед интегралом меняется на противоположный.

Пример 3.4 Найти поток Π векторного поля $\overline{F} = x^2 i + y^2 j + z^2 k$ через внешнюю сторону верхней полусферы $\widehat{S} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0.$

Первый способ.

Поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла второго рода:

$$\varPi=\iint\limits_{\hat{S}} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy. \qquad (3.3)$$

Уравнение полусферы в декартовых координатах:

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2\}$.

$$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\ z'_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

В силу формулы (3.2)

$$\varPi=\iint\limits_{\hat{S}} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy=\iint\limits_{D}(-x^2f'_x-y^2f'_y+f^2(x,y))dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D}(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}+a^2-x^2+y^2)dxdy.$$

Перед интегралом знак плюс, поскольку нормаль образует острый угол с осью $0z$.

В последнем интеграле перейдем к полярным координатам (r,ϕ).

$$\varPi=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)d\varphi\int\limits_0^a r\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}+a^2-r^2)dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^3\varphi+\sin^3\varphi)d\varphi\int\limits_0^a r\frac{r^3}{\sqrt{a^2-r^2}}dr+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a(a^2-r^2)rdr=0+\frac{\pi a^4}{2},$$

поскольку $\int\limits_0^{2\pi}\cos^3\varphi d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi=0.$

Второй способ.

Уравнение верхней полусферы в криволинейных координатах:

$$\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi,\\ y=a\cos\theta\sin\varphi,\\ z=a\sin\theta,\end{cases}$$

$\varphi\in(0,2\pi),\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2}), D=(0,2\pi)\times(0,\frac{\pi}{2}).$

$r=(x,y,z), u=\varphi, v=\theta,$

$\dot{r}_u=\dot{r}_\phi=(-a\cos\theta\sin\varphi, a\cos\theta\cos\varphi,0),$

$\dot{r}_v=\dot{r}_\theta=(-a\sin\theta\cos\varphi,-a\sin\theta\sin\varphi,a\cos\theta).$

Эта параметризация согласована с указанной ориентацией сферы, следовательно, перед интегралом также ставим плюс. В силу формулы (3.1)

$$\varPi=\iint\limits_D\begin{vmatrix} a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi & a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi & a^2\sin^2\theta\\ -a\cos\theta\sin\varphi & a\cos\theta\cos\varphi & 0\\ -a\sin\theta\cos\varphi & -a\sin\theta\sin\varphi & a\cos\theta\end{vmatrix}d\theta d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}a^4(\sin\theta\cos\theta+\cos^4\theta(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi))d\theta=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Третий способ (Метод проекций на координатные плоскости).

Интеграл (3.3) разобьем на 3 интеграла, для каждого интеграла построим проекцию поверхности на соответствующую координатную плоскость.

Поверхность $\widehat{S}$ на плоскость $y0z$ проектируется неоднозначно. Ближняя часть поверхности $\widehat{S}$ $x_1 = \sqrt{a^2 - z^2 - y^2}$, $(y,z) \in S_{yz} = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z^2 + y^2 \le a^2, z \ge 0\}$ ориентирована нормалью, имеющей острый угол с осью $0x$, следовательно перед первым интегралом ставим знак плюс; дальняя часть поверхности $x_2 = -\sqrt{a^2 - z^2 - y^2}$, $(y,z) \in S_{yz}$ ориентирована нормалью, имеющей тупой угол с осью $0x$, перед вторым интегралом ставим знак минус:

$$\iint\limits_{\hat{S}} x^2 dydz = \iint\limits_{S_{yz}} (a^2 - y^2 - z^2) dydz - \iint\limits_{S_{yz}} (a^2 - y^2 - z^2) dydz = 0.$$

Аналогично при проектировании на плоскость $x0z$ получим

$$\iint\limits_{\hat{S}} y^2 dydz = \iint\limits_{S_{xz}} (a^2 - x^2 - z^2) dydz - \iint\limits_{S_{xz}} (a^2 - x^2 - z^2) dydz = 0.$$

На плоскость $x0y$ поверхность проектируется однозначно

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

$$\iint\limits_{\hat{S}} z^2 dydz = \iint\limits_{D} (a^2 - x^2 - y^2) dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a (a^2 - r^2) rdr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Лекция 12

Глава 4. Элементы векторного анализа

4.1. Дифференциальные операции векторного анализа

Скалярные и векторные поля

Определение 4.1.

1) $\mathbb{R}^n \supset D \ni \forall x \to f(x) \in \mathbb{R} -$ *скалярное поле* f задано в области D;

2) $\mathbb{R}^n \supset D \ni \forall x \to A(x) \in \mathbb{R}^3 -$ *векторное поле* A задано в области D.

Определение 4.2. *Оператор Гамильтона* – символический вектор $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Определение 4.3. Пусть $f(x) -$ дифференцируемое скалярное поле. *Градиент*:

$gradf := \nabla \cdot f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$.

Определение 4.4. Задано дифференцируемое векторное поле $F : G \to \mathbb{R}^3,\ F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x))$.

$$Ротор:\ rotF := [\nabla, F] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right).$$

Определение 4.5. *Дивергенция:*

$F : G \to \mathbb{R}^3, F(x) = \left(F_1(x), F_2(x), F_3(x)\right)$

$divF := (\nabla, F) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}$.

Циркуляция и поток векторного поля

Определение 4.6. Пусть $\Gamma -$ кусочно-гладкий ориентированный контур $\Gamma \subset D \subset R^3$. Задано векторное (силовое) поле $F : D \to \mathbb{R}^3$. *Работа* A векторного поля F вдоль контура определяется с помощью криволинейного интеграла 2-го рода:

$A := \int_\Gamma \overline{F} d\overline{r} = \int_\Gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

Если контур Γ замкнутый, то работа называется *циркуляцией:* $Ц = \oint_\Gamma \overline{F} dr$.

Определение 4.7. Если: $D \subset \mathbb{R}^3$, $V(x) -$ векторное поле (скоростей) $V : D \to R^3$, $S^+ -$ ориентированная поверхность, $S \subset D$. Тогда *потоком* $П$ векторного поля V через поверхность S^+ называется $П = \iint_{S^+} \overline{V} d\overline{S} -$ поверхностный интеграл второго рода.

4.2. Интегральные формулы векторного анализа

Формула Остроградского-Гаусса

Определение 4.8. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2_{xy}$ – измеримая область, ∂D – ее спрямляемая (кусочно-гладкая) граница. Заданы функции $\varphi, \psi \in C(\overline{D}), \varphi(x) < \psi(x), \forall x \in \overline{D}$. Область $G := \{ \ x, y, z \mid (x, y) \in D, \varphi(x, y) | < z < \psi(x, y) \ \}$, $G \in \mathbb{R}^3_{xyz}$ называется *элементарной* относительно оси $0z$.

Граница ∂G области G $\quad \partial G = S_1 \cup S_2 \cup S_0$, где $S_1 = \{z = \varphi(x, y) \mid (x, y) \in D\}$, $S_2 = \{z = \psi(x, y) \mid (x, y) \in D\}$, S_0 – часть цилиндрической поверхности, основанием которой является ∂D, образующие параллельны оси $0z$.

Пусть задана функция $F : S \to \mathbb{R}, S = \partial G$. Тогда определен поверхностный интеграл второго рода по поверхности S, ориентированной с помощью внешней единичной нормали $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$:

$$\iint\limits_{S^+} F(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{S} F(x, y, z)\cos\gamma dS = \iint\limits_{\breve{S}_1} F(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{S_0^+} F(x, y, z)dxdy + \iint\limits_{\hat{S}_2} F(x, y, z)dxdy.$$

Здесь $\breve{S}_1$ – нижняя сторона поверхности S_1, $\hat{S}_2$ – верхняя сторона поверхности S_2; S_0^+, S^+ – внешние стороны соответствующих поверхностей. Поскольку внешняя нормаль к S_0 ортогональна $0z$, $\cos\gamma = 0$ и $\iint\limits_{S_0^+} F(x, y, z)dxdy = 0.$

Область, элементарная относительно всех осей, называется *элементарной* (примеры: выпуклые многогранники, эллипсоиды и т.д.). Пусть далее область G – элементарная.

Теорема 4.1 (Остроградского-Гаусса).

Пусть заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, $\dfrac{\partial P}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial y}, \dfrac{\partial R}{\partial z} \in C(\overline{G})$, $\bar{a} = (P, Q, R)$. Тогда справедлива *формула Остроградского-Гаусса:*

$$\iiint\limits_{G} div\bar{a}dxdydz = \iint\limits_{S^+} \bar{a}d\overline{S} = \iint\limits_{S} \bar{a}\bar{\nu}\, dS. \tag{4.1}$$

Интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую область (в направлении внешней нормали).

В координатной форме:

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS, \tag{4.2}$$

где $\bar{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – единичная внешняя нормаль.

■

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{D} [R(x, y, \psi(x, y) - R(x, y, \varphi(x, y)]dxdy = \iint\limits_{\hat{S}_2} Rdxdy +$$

$$\iint\limits_{\breve{S}_1} Rdxdy = = \iint\limits_{\hat{S}_2} Rdxdy + \iint\limits_{\breve{S}_1} Rdxdy + \iint\limits_{S_0} Rdxdy = \iint\limits_{S^+} Rdxdy$$

($\iint\limits_{S_0} Rdxdy = 0,$ поскольку внешняя нормаль к S_0 ортогональна оси $0z$ и $\cos\gamma = 0$). Аналогично преобразуются слагаемые с P, Q. □

Замечание 4.1. Формулу Остроградского-Гаусса можно распространить на случай областей, которые разбиваются на конечное число элементарных и для любых областей $G \subset \mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей.

Пример 4.1. Найти поток Π векторного поля $\bar{a} = x^2 i + y^2 j + zk$ через внешнюю сторону боковой поверхности тела G, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = R^2,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ z = l.$

Поток векторного поля $\bar{a}$ через полную поверхность тела S^+ в силу формулы Остроградского – Гаусса

$$\Pi_\Sigma = \iint_{S^+} \bar{a} d\bar{S} = \iiint_G div\bar{a} dxdydz = \iiint_G (2x + 2y + 1) dxdydz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^l (2r\cos\varphi + 2r\sin\varphi + 1) dz = l(\frac{4R^3}{3} + \frac{\pi}{2} R).$$

Поток Π_n через нижнее $S_n : z = 0$ и поток Π_b через верхнее основание $S_b : z = l$

$$\Pi_n = \iint_{S_n} x^2 dydz + y^2 dxdz + zdxdy = 0,$$

$$\Pi_b = \iint_{S_b} x^2 dydz + y^2 dxdz + zdxdy = \iint_{S_b} 0 + 0 + ldxdy = l \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R rdr = \frac{l\pi R^2}{4}.$$

Поток Π через боковую поверхность

$$\Pi = \Pi_\Sigma - \Pi_n - \Pi_b = l(\frac{4R^3}{3} + \frac{\pi}{2} R) - 0 - \frac{l\pi R^2}{4} = l(\frac{4R^3}{3} + \frac{\pi}{2} R - \frac{\pi R^2}{4}).$$

Лекция 13

Формула Стокса

Теорема 4.2 (Стокса). Пусть задано $\bar{a} = (P, Q, R) -$ векторное поле в $G \subset \mathbb{R}^3$, функции $P(x, y, z),\ Q(x, y, z),\ R(x, y, z) \in C^1(\bar{G}),\ S \subset G, S -$ график гладкой функции $z = f(x, y),\ f : D \to R,\ f \in C^1(\bar{D}),\ \ \partial S^+ -$ положительно ориентированный край поверхности, $\nu = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) -$ единичная нормаль на S, направленная согласованно с ориентацией ∂S^+.

Тогда справедлива *формула Стокса:*

$$\oint_{\partial S^+} \bar{a} d\bar{r} = \iint_S (rot\bar{a}, \bar{\nu}) dS = \iint_{S^+} rot\bar{a} d\bar{S}. \tag{4.3}$$

В координатной форме:

$$\oint_{\partial S^+} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS. \tag{4.4}$$

Или

$$\oint\limits_{\partial S^+} Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S^+}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dxdz+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy. \qquad (4.5)$$

Поток ротора векторного поля через поверхность равен циркуляции этого поля по краю поверхности, ориентированному согласованно с нормалью к поверхности (по правилу буравчика).

■ Обозначим $\partial D-$ границу области $D.$ В силу определения криволинейного интеграла второго рода:

$$\oint\limits_{\partial S^+} Pdx=\int_a^b P(x(t),y(t),f(x(t),y(t)))x'(t)dt=\int\limits_{\partial D^+} P(x,y,f(x,y))dx.$$

Используя формулу Грина, получим

$$\int\limits_{\partial D^+} P(x,y,f(x,y))dx=-\int\limits_D \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy=-\int\limits_D\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}f'_y\right)_{z=f(x,y)}dxdy=$$

$$-\int\limits_{S^+}\left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}f'_y\right)_{z=f(x,y)}\cos\gamma dS=\iint\limits_S(P_z\cos\beta-P_y\cos\gamma)dS.$$

Здесь нормаль $\nu=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ определена формулой: $\cos\alpha=-\dfrac{f'_x}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}$,

$\cos\beta=-\dfrac{f'_y}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1+(f'_x)^2+(f'_y)^2}}$, и $\cos\beta=-f'_y\cos\gamma.$ Используя формулу (4.2), получим

$$\oint\limits_{\partial S^+} Pdx=\iint\limits_{S^+}\frac{\partial P}{\partial z}dxdz-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy\,.$$

Часть формулы (4.4), относящаяся к функции P, доказана. Аналогично преобразуются слагаемые с $R,Q.$ □

Замечание 4.2. Формула Стокса справедлива и для кусочно–гладкой ориентированной поверхности S, получающейся склейкой гладких ориентированных поверхностей. Для доказательства надо записать формулу Стокса для каждого куска и просуммировать.

Пример 4.2. Найти циркуляцию $Ц$ векторного поля $\overline{a}=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k$ вдоль контура $C^+:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+y=z=1.\end{cases}$

Обход контура осуществляется против часовой стрелки. В силу формулы Стокса

$Ц=\oint\limits_{C^+}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=\iint\limits_S(rot\overline{a},dS),$ где $S-$ поверхность, ограниченная контуром $C^+,$ при этом поверхность S ориентирована нормалью $n,$ имеющей острый угол с осью $0z.$

$$rot\overline{a}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \dfrac{\partial\cdot}{\partial x} & \dfrac{\partial\cdot}{\partial y} & \dfrac{\partial\cdot}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}=-2i-2j-2k.$$

$$Ц=-2\iint\limits_s dydz+dzdx+dxdy=-2\iint\limits_{s_{xy}}(1+1+1)dxdy=-6\iint\limits_{s_{xy}}dxdy=-6\pi,$$

где $S_{xy}-$проекция области S на плоскость $x0y$ ($S_{xy}-$ круг единичного радиуса).

Геометрическая интерпретация ротора и дивергенции

Дивергенция:

Если: $V-$ область задания непрерывно-дифференцируемого векторного поля $\bar{a}(x,y,z)$, $V'\subset V; x_0\in V, x'\in V'$, $d(V') := \sup\limits_{x_1,x_2\in V'}(d(x_1,x_2))-$ диаметр V'.

То:

а) $\int\limits_{\partial V}\bar{a}d\bar{S}=\int\limits_{V}div\bar{a}dV=diva(x')\mu(V')$;

б) $diva(x')\underset{\substack{x'\to x_0\\ d(V')\to 0}}{\to} diva(x_0)\Rightarrow$

$$diva(x_0)=\lim_{d(V')\to 0}\frac{\int\limits_{\partial V'}\bar{a}d\bar{S}}{\mu(V')}. \tag{4.6}$$

Физический смысл: дивергенция поля $a-$ средняя плотность распределения источников в области V'. Точки, в которых $diva>0-$источники, $diva<0-$стоки.
Это определение дивергенции не зависит от выбора системы координат.

Ротор:

Если: $a-$ гладкое векторное поле в области G, $S_i(x)-$ круг с центром в точке x, $d(S_i)-$ диаметр круга, e_i- единичная нормаль к плоскости круга.

То: $(rotA(x_0),e_i)=\lim\limits_{d(S_i)\to 0}\dfrac{\int\limits_{\partial S_i}\bar{a}d\bar{r}}{\mu(S_i)}$.

Доказательство с использованием формулы Стокса и теоремы о среднем.
Это определение инвариантно относительно выбора системы координат.

Физический смысл: ротор определяет мгновенную ось вращения, угловую скорость и направление вращения.

Лекция 14

Потенциальные поля

Определение 4.11.

1. $A:D\to R^3$ - векторное поле в $D\subset R^3$. Функция $U:D\to R$ называется *потенциалом поля* A в D, если $A=gradU$.
2. Поле, имеющее потенциал, называется *потенциальным*.

Утверждение. Необходимое условие потенциальности.

$A=gradU,\, A\in C^1\Rightarrow\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i},\quad A=(A_1,A_2,A_3)$ или $rotA=0.$ Ротор потенциального поля равен нулю.

■ $A_i=\dfrac{\partial U}{\partial x_i}\Rightarrow\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_j\partial x_i}\Rightarrow\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}$. □

Замечание 4.3. Необходимое условие не является достаточным.

Теорема 4.3. Критерий потенциальности векторного поля.

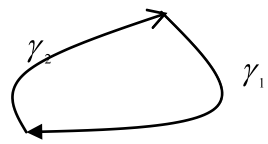
Непрерывное векторное поле A потенциально в области $D \Leftrightarrow \ \forall \gamma \subset D \ \oint\limits_{\gamma} Adr = 0$

(циркуляция поля A вдоль любого замкнутого контура $\gamma \subset D$ равна нулю).

■ $(\Rightarrow)$ Пусть $A = gradU.$

$\int\limits_{\gamma} Adr = \int\limits_{\gamma} gradUdr = U(\gamma(b)) - U(\gamma(a)) = 0, т.к. \ a = b.$

$(\Leftarrow)$ Пусть $\gamma \in D -$ произвольный гладкий контур: $\int\limits_{\gamma} Adr = 0.$ Контур $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2.$



$\int\limits_{\gamma} Adr = 0 \Rightarrow \int\limits_{\gamma_1} Adr = -\int\limits_{\gamma_2} Adr = \int\limits_{\gamma^{-}_2} Adr.$ Таким образом, интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от начальной и конечной точки.

Введем функцию $U(x) := \int\limits_{x_0}^{x} Adr$. Пусть $x = x_0 + te_i$. Тогда

$U(x_0 + te_i) = \int\limits_{x_0}^{x_0+te_i} Adr = \int\limits_{x_0}^{x_0+te_i} A_i\left(x_0^1, ..., x_0^{i-1}, y, x_0^{i+1}, ..., x_0^n\right)dy = A_i\left(x_0^1, ..., x_0^i + \theta t, ..., x_0^n\right)\cdot t, \ \ 0 \le \theta \le 1$

$A_i = \dfrac{\partial U}{\partial x_i} \Rightarrow A = gradU.$ □

Область $D \subset \mathbb{R}^3$ называется *односвязной*, если $\forall$ замкнутого контура $\gamma \subset D$ существует кусочно-гладкая ориентированная поверхность S: $\partial S = \gamma$.

Утверждение 4.1. Если: $D -$ односвязная область, $A -$ непрерывное векторное поле в D.

То: необходимое условие потенциальности является достаточным.

То есть для односвязной области необходимое и достаточное условие потенциальности: $rotA = 0$.

■ Пусть $rotA = 0$. Поскольку область D односвязна $\forall \gamma \ \exists S \subset D : \partial S = \gamma$. В силу теоремы 4.3

$\int\limits_{\gamma} Adr = \int\limits_{S} rotA = 0 \Rightarrow A = gradU.$ □

Следствие 4.1. Условие независимости интеграла второго рода от пути интегрирования

Непрерывное векторное поле A потенциально в области G, $A = gradU \Leftrightarrow$ для любых точек $C, D \in G$: $\int\limits_{CD} Adr = U(D) - U(C).$

Интеграл второго рода для потенциального векторного поля не зависит от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точки пути и равен разности потенциалов в этих точках.

Соленоидальные поля

Определение 4.12. Поле $B: G \to \mathbb{R}^3,\ B = B(x), B \in C^1(\overline{G})$ в области G называется соленоидальным, если $divB(x) = 0, \quad \forall x \in G.$

Теорема 4.4 Необходимое и достаточное условие соленоидальности поля. Поле $B \in C^1(G)$ в области $D \subset \mathbb{R}^3$ соленоидально

$\Leftrightarrow \forall G \subset D, \overline{G} \subset D,\ \partial G -$ кусочно-гладкая, $\int\limits_{\partial G} B d\sigma = 0.$

■ $(\Rightarrow)$ Пусть $divB = 0.$ В силу формулы Остроградского-Гаусса

$\int\limits_{\partial G} B d\sigma = \int\limits_{G} divB = 0$.

$(\Leftarrow)$ Пусть $\int\limits_{\partial G} B d\sigma = 0$. В силу формулы (4.6)

$$divB\left(x_0\right) = \lim_{d(G) \to 0} \frac{\int\limits_{\partial G} B d\sigma}{\mu\left(G\right)} = 0. \ \square$$

Лекция 15

Глава 5. Поверхность в Евклидовом пространстве

5.1. Способы задания поверхности

Определение 5.1. Множество $S \subset R^n$ называется *гладкой поверхностью размерности k* в $\mathbb{R}^n$, если $\forall x_0 \in S\ \exists U(x_0)\ \exists f : U(x_0) \to I^n = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \mid |t_i| < 1 \right\}$ (f – диффеоморфизм) при котором окрестность $U_S = U(x_0) \cap S$ отображается в куб I^k:
$f(U_S) = I^k = \left\{ t \in I^n \mid t_{k+1} = 0, ..., t_n = 0 \right\}$. Степень гладкости поверхности S будем измерять степенью гладкости диффеоморфизма f.

Замечание 5.1. Множество $S \subset R^n$ – называется гладкой поверхностью, если $\forall x_0 \in S\ \exists U(x_0)$ и координаты $t_1, ..., t_n$ в ней, что $U_S = U(x_0) \cap S$ в этих координатах задается соотношением $t_{k+1} = 0, ..., t_n = 0$.

Пример 5.1.

1. $\mathbb{R}^n$ – n - мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞. $f : \mathbb{R}^n \to I^n$, $t_i = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x_i$.
2. $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \right\}$ – гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1}$;
3. $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_{k+1} = 0, ..., x_n = 0 \right\} - k$ -мерная гиперплоскость;
4. $I^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| < 1 \right\}$ – куб в R^n;
5. $I^k = \left\{ x \in I^n \mid x_{k+1} = 0, ..., x_n = 0 \right\}$.

Пример 5.2. График, определяемый в $\mathbb{R}^n$ гладкой функцией, является $n-1$-ой поверхностью, $\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = f(x_1, ..., x_{n-1}), x = (x_1, ..., , x_n) \}$, $f \in C^1$,
$t_i = x_i, i = \overline{1, ..., n-1}, \quad t_n = x_n - f(x_1, ..., x_{n-1}) \equiv 0.$

Определение 5.2. Множество $S \subset R^n$ называется *гладкой поверхностью размерности k* в $\mathbb{R}^n$, если $\forall x_0 \in S\ \ \exists U_S = U(x_0) \cap S,\ \exists \varphi : I^k \to U_s, \operatorname{rang} \varphi = k$ (φ – диффеоморфизм).

Определение 5.3. Отображение φ, осуществляющее указанный диффеоморфизм, называется *локальной картой поверхности,*

I^k – *область действия параметров,*

U_s – *область действия карты.*

Локальная карта φ вводит *криволинейные координаты* t_i, сама k-мерная поверхность локально – диффеоморфизм k-мерного куба.

Если всю поверхность можно задать единой картой, то поверхность называется *элементарной.*

Набор локальных карт, покрывающих всю поверхность, называется *атласом поверхности* $A(S) = \left\{ \varphi_i \mid \varphi_i : I_i^{\,k} \to U(x_i) \right\}$.

Утверждение 5.1. Определения поверхности 5.1 и 5.2 эквивалентны.
Доказательство см. в [3].

Пример 5.2.

$S : \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = a^2 -$ $S -$ сфера (поверхность размерности 2 в $\mathbb{R}^3$)

$$\begin{cases} x_1 = a\cos\theta\cos\varphi \\ x_2 = a\cos\theta\sin\varphi \\ x_3 = a\sin\theta \end{cases}$$

$r = (x_1, x_2, x_3) = r(\theta, \varphi)$,

$\theta, \varphi -$ криволинейные координаты: $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi.$

Пример 5.3. Тор в $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1 = (a\cos\phi + b)\cos\theta \\ x_2 = (a\cos\phi + b)\sin\theta \\ x_3 = a\sin\phi \end{cases}$$

$a < b.$

Задание поверхностей размерности 2 в $\mathbb{R}^3$ имеет вид:
$r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, r(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$ (См. раздел 2.1).

Касательное пространство

Пусть S – поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$, S задана отображением $\varphi : I^k \to \mathbb{R}^n, x = \varphi(t), t \in \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}^n, \varphi \in C^1$, $\varphi -$ диффеоморфизм; $\operatorname{rang}\varphi = \operatorname{rang} J_\varphi = k$; $x_0 = \varphi(t_0); x_0 \in S.$

Определение 5.4. Пусть $x_0 \in S -$ поверхность размерности k в $\mathbb{R}^n$, тогда уравнение

$$x - x_0 = x'(t_0)(t - t_0),\ t \in \mathbb{R}^k \tag{4.7}$$

– векторное уравнение касательного пространства к поверхности S в точке x_0, заданное параметрически. Здесь $x'(t_0) -$ матрица Якоби в точке $x_0 = \varphi(t_0)$.

Уравнение касательного пространства в координатной форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n - x_{n0} \end{pmatrix} = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial t_j}(t_0) \right\| \begin{pmatrix} t_1 - t_{10} \\ \vdots \\ \vdots \\ t_k - t_{k0} \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}^k. \tag{4.8}$$

$TS_x -$ обозначение касательного пространства к поверхности S в точке x.

Пусть система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1 \ldots\ldots x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-k}(x_1 \ldots\ldots x_n) = 0 \end{cases}$$

имеет решение $S \ne \varnothing$, следовательно, задаёт поверхность размерности k. Обозначим $F = (F_1 \ldots\ldots F_{n-k})$, тогда $F(x) = 0$ – запись системы в векторной форме. Применяя теорему о неявной функции, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} F'_{x_i}(x_0)(x_i - x_{i0}) = 0 \tag{4.9}$$

– уравнение касательного пространства к поверхности S в точке x_0 в координатной форме. Это уравнение эквивалентно векторному уравнению

$$F_x(x_0)\xi = 0, \tag{4.10}$$

$\xi \in TS_{x_0}$ – касательное пространство векторов ξ, удовлетворяющих (4.10).

Лекция 16

5.2. Ориентация поверхности в $\mathbb{R}^n$

1. Ориентация пространства $\mathbb{R}^n$

Определение 5.5. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ заданы два базиса (базис будем называть также *репером*) $e = \{e_1, \dots, e_n\}$, $\tilde{e} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$.

Матрица перехода $A = \|a_i^j\|$ от одного базиса к другому $a_i^j : \tilde{e}_j = a_i^j e_i$.

Реперы называются *принадлежащими к одному классу ориентации*, если $\det A > 0$, к разным, если $\det A < 0$.

Определение 5.6. *Ориентированное пространство* $\mathbb{R}^n$ – само пространство $\mathbb{R}^n$ и фиксированный класс ориентации его реперов. Задать ориентацию $\mathbb{R}^n$ – зафиксировать один из классов ориентирующих реперов $\mathbb{R}^n$.

2. Ориентация области $G \subset \mathbb{R}^n$

Определение 5.7. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n, G \subset \mathbb{R}^n -$ области.

$\forall t_0 \in D \;\; TD_{t_0}$ – касательное пространство,

$e_1, \dots, e_n$ – орты, направленные вдоль координатных линий.

Отображение $\phi : D \to G$,

$x = \phi(t), t = (t_1, \dots, t_n) \in D, x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \varphi \in C^1(D)$,

$\xi_i = \phi'(t) e_i, \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in TG_{x_0}$.

Реперы e, ξ принадлежат к одному классу ориентации, если переход от одного к другому осуществляется отображением φ' (матрицей Якоби) с якобианом $|\varphi'| > 0$.

Определение 5.8. Ориентированная область $G -$ это область и фиксированный класс ориентации её реперов (систем криволинейных координат).

Задать ориентацию области – задать непрерывное поле реперов (или задать криволинейную систему координат).

Ориентация поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности k

Определение 5.9.

$S : x = \phi(t), t \in D \subset \mathbb{R}^k, t = (t_1, \dots, t_k), x = (x_1, \dots, x_n)$,

$\xi_i = \phi'(t) e_i, \xi_i \in TS_{x_0}$.

Задать ориентацию поверхности – задать ориентирующий репер поверхности (или задать её параметризацию, т.е. криволинейную систему координат).

Определение 5.10. Криволинейные системы координат S принадлежат одному классу ориентации, если переход от одной к другой осуществляется отображением с положительным якобианом.

Локальные карты называются согласованными, если:
область их действия не пересекается, либо взаимные переходы в общей области действия этих карт осуществляются диффеоморфизмами с положительными якобианами.

Атлас поверхности называется ориентирующим, если он состоит из попарно согласованных карт.

Поверхность, обладающая ориентирующим атласом, называется ориентированной поверхностью.

Пример 5.4. Сфера – ориентируемая поверхность.

Лист Мёбиуса, бутылка Клейна – неориентируемые поверхности.

Утверждение 5.2. Если: S - ориентируемая связная поверхность.
То: у S существуют ровно две ориентации (их называют противоположными).

Если поверхность задаётся одной локальной картой, то достаточно задать или саму карту или репер.

Если поверхность состоит из нескольких связных компонент, но сама не является связной, то нужно задать ориентацию каждой части.

Кусочно-гладкую k - мерную поверхность будем называть ориентируемой, если с точностью до конечного или счетного числа кусочно-гладких поверхностей размерности меньше k она является объединением гладких ориентируемых поверхностей, допускающих их одновременную согласованную ориентацию.

3. Ориентация поверхности S^{n-1}, лежащей в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^n$

Пусть пространство $\mathbb{R}^n$ ориентировано с помощью репера $(e_1, e_2, ..., e_n)$. Выбрав локальную параметризацию поверхности S в касательном пространстве TS_x, строят репер $\xi_1, ..., \xi_{n-1}$ – из векторов, касательных к линиям выбранной системы координат, то есть строят репер, индуцированный этой системой координат. Пусть n – вектор нормали к $S: n \perp TS_x$. Если реперы $(n, \xi_1, ..., \xi_{n-1}), (e_1, e_2, ..., e_n)$ одного класса ориентации, то локальная карта задает нужную ориентацию (согласованную с n). Если нет, то противоположную (нужно поменять местами криволинейные координаты).

Утверждение 5.3. Указать ориентацию поверхности можно осуществить, задав на ней нормальный вектор.

Определение 5.11. Поверхности, допускающие ориентацию, называются двусторонними, не допускающие - односторонними или неориентируемыми.

Пример 5.5 Пусть $n = 2$, пространство $\mathbb{R}^2$ ориентировано репером e_1, e_2 – правая двойка. Поверхность размерности 1 в $\mathbb{R}^2$ это гладкая кривая γ, ее ориентация задается с помощью касательного вектора τ, задающего направление обхода кривой, n – вектор нормали к кривой. Реперы (τ, n) и (e_1, e_2) принадлежат к одному классу ориентации, если движение по кривой осуществляется против часовой стрелки (область остается слева). Это положительная ориентация контура.

5.3. Край поверхности и его ориентация

Определение 5.12.
1. *Полупространством* называется $H^k := \left\{ t \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \le 0 \right\}$.

2. *Краем полупространства* называется $\partial H^k = H^{k-1} = \left\{ t \in \mathbb{R}^k \mid t_1 \le 0 \right\}$.

3. $\widehat{H}^k = H^k \setminus \partial H^k -$ полупространство без края.

Определение 5.13. $S \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхностью размерности k с краем, если: $\forall x_0 \in S\ \exists U(x_0) \subset S : U(x_0)$ гомеоморфна либо $\mathbb{R}^k$, либо H^k.

Если заменить в определении $\mathbb{R}^k$ на $I^k = \left\{ t \mid |t_i| < 1 \right\}$ (куб), а H^k на $\widetilde{I}^k$ (куб с одной присоединённой гранью), то определение останется эквивалентным.

Определение 5.14. Точка x_0 называется точкой края, если она имеет окрестность гомеоморфную $\widetilde{I}^k$.

Совокупность точек края поверхности с краем S называется краем ∂S поверхности.

Пример 5.6. $\overline{B}_n -$ замкнутый шар, его край: $\partial \overline{B}_n -$ сфера.

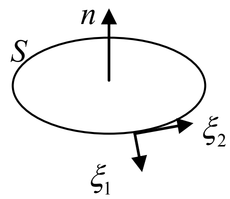
Согласование ориентации поверхности и её края

Определение 5.15. Если $A(S) = \left\{ \left(H^k, \varphi_i, U_i \right) \right\} \cup \left\{ \left(\mathbb{R}^k, \varphi_j, U_j \right) \right\} -$ ориентирующий атлас стандартных локальных карт поверхности S с краем ∂S, то $A(\partial S) = \left\{ \left(\mathbb{R}^{k-1}, \varphi_i \big|_{\partial H^k = R^{k-1}}, \partial U_i \right) \right\} -$ориентирующий атлас края. Задаваемая им ориентация края ∂S называется ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности.

Способ проверки согласования ориентации поверхности и ее края

Пусть на поверхности S задан ориентирующий репер $(\xi_1, ..., \xi_k)$, $\xi_i \in TS_x -$касательное пространство. Непрерывным преобразованием подводим его к краю ∂S. Первый вектор ξ_1 направляем по нормали к ∂S. Остальные векторы $\xi_2, ..., \xi_k$ задают ориентацию края $T\partial S$ поверхности, согласованную с ориентацией S.

Пример 5.6.



Согласованность определяется по правилу буравчика.

Лекция 17

5.4. Площадь поверхности в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$

1. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан $\left\{ e_i \right\}_{i=1}^{N} -$ ортонормированный базис.

На векторах $\xi_1, ..., \xi_n \in \mathbb{R}^n$ построен параллелепипед П. В базисе $\left\{ e_i \right\}_{i=1}^{N}$ вектор $\xi_i = (\xi_i^1, ..., \xi_i^n)$.

Обозначим $J := \left\| \xi_i^j \right\|$ матрицу, по строкам которой стоят координаты векторов $\xi_1, ..., \xi_n$.

$V\left(\xi_1,..,\xi_n\right)=\det\left\|\xi_i^j\right\|=\det J-$ *ориентированный объём параллепипеда,* натянутого на векторы ξ_i. Пусть $G:=JJ^T$, $G=\left\|g_{ij}\right\|_{i,j=1}^n$, $g_{ij}=(\xi_i,\xi_j)-$скалярное произведение в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда $\det G=(\det J)^2\Rightarrow|\det J|=\sqrt{G}.$

Объём $V(\Pi)$ параллепипеда Π:

$$V(\Pi)=\sqrt{G}. \tag{4.11}$$

2. Пусть $S-$ k - мерная поверхность в $\mathbb{R}^n$.

$r=\varphi(t), t\in I^k, r\in C^1$

$x_0=r(t_0)$

$\Delta t=\left(\Delta t_1,..,\Delta t_k\right)$

$r\left(I^k\right)-$ криволинейный параллелепипед, лежащий на S.

В силу дифференцируемости отображения r, получим

$r\left(t_{10},..,t_{i-10},t_{i0}+\Delta t_i,t_{i+10},..,t_{k0}\right)-r\left(t_0\right)=\dot{r}_{t_i}\Delta t_i+o\left(\Delta t_i\right),\dot{r}_{t_i}\in TS_{x0}$.

На векторах $\dot{r}_{t_i}\Delta t_i, i=1\div k$ построим параллелепипед Π в касательном пространстве TS_{x_0}.

В силу формулы (4.11) $V(\Pi)=\sqrt{\left|\left(\dot{r}_i,\dot{r}_j\right)\right|}\Delta t_1...\Delta t_k-$ объём параллелепипеда Π. Объем параллелепипеда $r\left(I^k\right)$ приближенно оценим как $V(\Pi)$.

Определение 5.16. Пусть $S-$ гладкая поверхность, $S:r=r(t), t\in D\subset\mathbb{R}^k, r\in C^1(D), S=r(D).$ *Объём (площадь) поверхности* S:

$$V\left(S\right):=\int_D\sqrt{\left|\left(\dot{r}_i,\dot{r}_j\right)\right|}dt_1...dt_k, \tag{4.12}$$

$\dot{r}_i:=\dfrac{\partial r}{\partial t_i}.$

Замечание 5.1. Это определение имеет смысл, если область D измерима по Жордану.

Пример 5.4. Пусть $k=1$, тогда поверхность S это кривая, здесь объем поверхности это длина l кривой.

$r:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^3, r=r\left(t\right), t\in\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}^1$

$V\left(S\right)=l(S)=\int_a^b\left|\dot{r}\right|dt=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}dt.$

Эта формула длины кривой совпадает с формулой (2.7).

Пример 5.5. Пусть $k=n$, тогда поверхность $S=x\left(D\right)$ это область.

$x=x\left(t\right), t\in D\subset\mathbb{R}^n, S=x(D)$

$V\left(S\right)=\int_D\left|\dot{x}\left(t\right)\right|dt=\int_S dx.$

Эта формула совпадает с формулой замены переменных в кратном интеграле.

Определение 5.17. Пусть $S=r\left(D\right)-$ k - мерная поверхность

$r=r\left(t\right), r:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n, r\in C^1$.

Площадь $\sigma(S)$ поверхности S:

$$\sigma(S)=\int_D \sqrt{|G|}dt, \tag{4.13}$$

где $|G|$ – определитель матрицы Грама: $G=\|g_{ij}\|_{i,j=1}^k, g_{ij}=(\dot{r}_i,\dot{r}_j)=\left(\frac{\partial r}{\partial t_i},\frac{\partial r}{\partial t_j}\right)$.

В частном случае $n=3, k=2$ эта формула совпадает с формулой (2.13).

Если: $S-$ кусочно-гладкая поверхность, то после удаления из S конечного или счётного числа поверхностей размерности не выше, чем $k-1$, S распадается на конечное число гладких поверхностей: $\tilde{S}=\bigcup_i S_i$, $\sigma(S):=\sum_i \sigma(S_i)=\sigma(\tilde{S})$.

Замечание 5.2. Если из поверхности удалить множество меры ноль, то площадь не изменится, но полученную поверхность возможно можно будет задать одной локальной картой.

Утверждение 5.3. Независимость площади поверхности от выбора гладкой параметризации.

Если поверхность задана различными параметризациями

$$S:\begin{array}{l} r_1=r(t), t=(t_1,..,t_k)\in D, \\ r_2=r(\tilde{t}), \tilde{t}=(\tilde{t}_1,..,\tilde{t}_k)\in \tilde{D}. \end{array}$$

$r_1,r_2\in C^1$, и отображение $\tilde{D}\ni\tilde{t}\leftrightarrow t\in D$ взаимно однозначно с невырожденной матрицей Якоби $J=\left\|\frac{\partial t_i}{\partial \tilde{t}_j}\right\|$.

Тогда $\sigma(S)=\tilde{\sigma}(S)$.

■ В силу формулы (4.13):

$$\sigma(S)=\int_D \sqrt{|G|}dt, G=\|g_{ij}\|, g_{ij}=\left(\frac{\partial r}{\partial t_i},\frac{\partial r}{\partial t_j}\right);$$

$$\tilde{\sigma}(S)=\int_D \sqrt{|\tilde{G}|}d\tilde{t}, \tilde{G}=\|\tilde{g}_{ij}\|, \tilde{g}_{ij}=\left(\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}_i},\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}_j}\right).$$

В силу свойств матрицы Грама $\tilde{G}=J^*GJ$, тогда $|\tilde{G}|=|J^*||G||J|=|G||J|^2$. Используя формулу (1.8) замены переменных в кратном интеграле:

$$\sigma(S)=\int_D \sqrt{|G|}dt=\int_{\tilde{D}} \sqrt{\left|G(t(\tilde{t}))\right|}\,|J|\,d\tilde{t}=\int_{\tilde{D}} \sqrt{|\tilde{G}|}d\tilde{t}=\tilde{\sigma}(S).\square$$

Лекция 18

Глава 6. Дифференциальные формы в $\mathbb{R}^n$

6.1. Алгебра форм

Определение 6.1. Если: $X-$ линейное пространство, $X^k = X\times\underset{k}{\dots}\times X$,

$L: X^k \to \mathbb{R},\ y = L(x_1,...,x_k);\ x_i \in X, y\in\mathbb{R}.$

То:

1. Отображение L называется *формой размерности* k, если она является полилинейной формой, т.е. формой, линейной относительно каждого аргумента:

$L(x_1,...,\lambda x_i,...,x_k) = \lambda L(x),\ \forall\lambda\in\mathbb{R},$

$L(x_1,...,x_i^1 + x_i^2,...,x_k) = L(x_1,...,x_i^1,...,x_k) + L(x_1,...,x_i^2,...,x_k).$

2. При $k=1$ L называется *линейной формой,* при $k=2-$ *билинейной.*

Пример 6.1. Пусть $L(u,v)=(u,v)-$ скалярное произведение, $u,v\in\mathbb{R}^3$. Отображение $L:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ является билинейной формой.

Пусть $X-$ конечномерное линейное пространство, $e_1,..,e_n-$ базис в X,

$\forall x\in X, x=\sum_{i=1}^{n} x^i e_i =: x^i e_i$.

Пусть $F^k : X^k \to\mathbb{R}$, $F^k - k$-форма, обозначим $a_{j_1\cdots j_k} := F^k\left(e_{j_1},...,e_{j_k}\right) -$ значение формы F^k на базисных векторах $e_{j_1},...,e_{j_k}$.

Утверждение 6.1. Если: $F^k - k$ - форма, $F^k : X^k \to R$,

$e_1,...,e_n-$ базис в X, $\forall x_i \in X$ $x_i = \sum_{j_m=1}^{n} x_i^{j_m} e_{j_m} =: x_i^{j_m} e_{j_m}$ (знак суммирования опускаем).

То: $F^k(x_{i_1},..,x_{i_n}) = x_{i_1}^{j_1}...x_{i_k}^{j_k} a_{j_1\cdots j_k}$ (т.е. форма однозначно определяется набором чисел $a_{j_1\cdots j_k}$).

■ $x_{i_m} = x_{i_m}^{j_m} e_{j_m} \Rightarrow$

$F^k\left(x_{i_1},...,x_{i_k}\right) = F^k\left(x_{i_1}^{j_1}e_{j_1},...,x_{i_k}^{j_k}e_{j_k}\right) = x_{i_1}^{j_1}...x_{i_k}^{j_k} F^k\left(e_{j_1},...,e_{j_k}\right) = x_{i_1}^{j_1}...x_{i_k}^{j_k} a_{j_1\cdots j_k}$. □

Замечание 6.1 Множество $\mathcal{F}^k = \{F^k\}-$ линейное пространство k - форм

1) $F^k = (F_1^k + F_2^k)(x) = F_1^k(x) + F_2^k(x)$

2) $(\lambda F^k)(x) = \lambda F^k(x)$

$F^k(x_1,...,x_k), x_i\in\mathbb{R}^n -$ k-форма

$F^k:\mathbb{R}^n\times\underset{k}{\dots}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}.$

Определение 6.2. $X-$ линейное пространство; $X^* -$ множество линейных функций F^1, определённых на X.

То: X^* называется пространством, сопряжённым пространству X.

Определение 6.3. Пусть $e_1,...,e_k -$ базис в X.

Базис $e^1,...,e^k$ пространства X^* называется взаимным (сопряженным) базису $e_1,...,e_k$, если:

$e^i\left(e_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$.

Утверждение 6.2. Если: $e_1,...,e_k-$ базис X, $e^1,...,e^k-$ сопряженный ему базис X^*. То: $e^j\left(x\right)=x^j$.

■ $\forall x\in X \;\; x=x^ie_i$

$e^j\left(x\right)=e^j\left(x^ie_i\right)=x^ie^j\left(e_i\right)=x^i\delta_{ij}=x^j$.□

Определение 6.4. Оператор $e^j\left(x\right)=x^j$ или $\pi^i\left(x\right)=x^j$ называется оператором проектирования.

Лекция 19

Алгебра кососимметрических форм

Определение 6.5.

1. Форма F^k называется *кососимметрической,* если:
$\forall i,j: F^k\left(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_k\right)=-F^k\left(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_k\right)$.

2. Подпространство кососимметрических форм размерности k обозначим $\Omega^k\subset\mathcal{F}^k$.

Утверждение 6.3.

1. В силу определения кососимметрической формы F^k, она равна нулю, если в ней есть одинаковые аргументы:
$F^k\left(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_k\right)=-F^k\left(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_k\right)=F^k\left(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_k\right)\Rightarrow$
$F^k\left(x_1,...,x_i,...,x_i,...,x_k\right)=0.$
2. Если размерность k формы $F^k \quad k>n=\dim X\Rightarrow F^k=0$.

Пример 6.2. Смешанное произведение $(x_1,x_2,x_3), x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}^3$ задает кососимметрическую форму $F^3\left(x_1,x_2\right):=(x_1,x_2,x_3), F^3:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},$ в силу свойств смешанного произведения $(x_1,x_2,x_3)=-(x_2,x_1,x_3)=(x_2,x_3,x_1)=-(x_1,x_3,x_2)$.

Пример 6.3. В силу свойств определителей $F(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=\det(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-$ полилинейная форма строк $\xi_i\in\mathbb{R}^n$.

В силу обратной теоремы об определителях любая полилинейная кососимметрическая функция строк $L(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=C\det(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$, $\det(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)-$ определитель матрицы, составленной из этих строк, $C=L(e_1,...,e_n), e_1=(1,0,...,0), e_n=(0,...,0,1)$.

Внешнее произведение форм

Определение 6.6. Пусть $L_1,...,L_p-1$- формы.

Внешним произведением $L_1\wedge...\wedge L_p$ назовем $p-$форму:

$$L_1\wedge...\wedge L_p\left(x_1,...,x_k\right):=\begin{vmatrix}L_1\left(x_1\right) & ... & L_p\left(x_1\right)\\ \vdots & & \vdots\\ L_1\left(x_k\right) & ... & L_p\left(x_k\right)\end{vmatrix} \tag{6.1}$$

Операция $\wedge-$ *внешнее произведение*.

Из свойств определителей следует полилинейность и кососимметричность.

Пример 6.4.

1. $e^{i_1}\wedge e^{i_2}\left(x_1,x_2\right)=\begin{vmatrix} e^{i_1}\left(x_1\right) & e^{i_2}\left(x_1\right)\\ e^{i_1}\left(x_2\right) & e^{i_2}\left(x_2\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & x_1^{i_2}\\ x_2^{i_1} & x_2^{i_2}\end{vmatrix}.$

2. $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}(x_1,\ldots,x_k)=\begin{vmatrix} e^{i_1}\left(x_1\right) & \ldots & e^{i_k}\left(x_1\right)\\ \vdots & & \vdots\\ e^{i_1}\left(x_k\right) & \ldots & e^{i_k}\left(x_k\right)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_1^{i_k}\\ \vdots & & \vdots\\ x_k^{i_1} & \ldots & x_k^{i_k}\end{vmatrix}.$

Форма $e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$ называется *простейшей* $k-$*формой*.

Свойства внешнего произведения

Пусть $L_1,\ldots,L_p-1$- формы. Из формулы (6.1) следует:

1. $L_1\wedge L_2\ldots\wedge L_i\ldots\wedge L_j\ldots\wedge L_k=-L_1\wedge L_2\ldots\wedge L_j\ldots\wedge L_i\ldots\wedge L_k.$
2. $(L_1+L_2)\wedge L_3=L_1\wedge L_3+L_2\wedge L_3.$

Для произвольных ω^k-форм

1. $\left(\omega_1^k+\omega_2^k\right)\wedge\omega^l=\omega_1^k\wedge\omega^l+\omega_2^k\wedge\omega^l$
2. $\left(\omega^k\wedge\omega^l\right)\wedge\omega^s=\omega^k\wedge\left(\omega^l\wedge\omega^s\right)$
3. $\left(\lambda\omega^k\right)\wedge\omega^l=\lambda\left(\omega^k\wedge\omega^l\right)$
4. $\omega^k\wedge\omega^l=(-1)^{k\cdot l}\omega^l\wedge\omega^k$.

Координатная запись кососимметрической формы

Утверждение 6.4. Если: $L-$ кососимметрическая $k-$ форма,
То: $L=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} a_{i_1\ldots i_k}e^{i_1}\wedge\ldots\wedge e^{i_k}$.

То есть L является линейной комбинацией простейших форм.

Следствие 6.1

Т.к. $e^{i_1}(x)=x^{i_1}$, то $\omega(x_1,\ldots,x_k)=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}a_{i_1\ldots i_k}x_1^{i_1}\ldots x_k^{i_k}$.

Лекция 20

6.2. Дифференциальные формы

Определение 6.6.

1. Говорят, что в области $D\subset\mathbb{R}^n$ задана вещественнозначная дифференциальная p - форма ω, если $\forall x\in D$ определена кососимметрическая форма $\omega(x):\left(TD_x\right)^p\to\mathbb{R}$, где TD_x-касательное пространство к D.
2. p - порядок (степень) дифференциальной формы ω.

Пример 6.5.

1. $D\subset\mathbb{R}^n, f:D\to R, f\in C^1(D).$ Дифференциал df функции f:

$$df(x)=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\frac{\partial f}{\partial x^2}dx^2+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n.$$

Для $\xi\in TD_x,\ \xi=\left(\xi^1,\ldots,\xi^n\right)$ получим

$$df\left(x\right)\left(\xi\right)=\frac{\partial f}{\partial x^1}\xi^1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}\xi^n$$

Таким образом, дифференциал функции в точке – её 1- форма.

Если $f(x)=x^i, df(x)(\xi)=dx^i(\xi)=\xi^i$

$dx^i(\xi)=\xi^i$ *– простейшая дифференциальная 1- форма.*

2. а) $D\subset\mathbb{R}^n$

$\forall x\in D$ $F(x)$ - непрерывное векторное поле

$F(x)=(F_1(x),...,F_n(x))$

$\omega_F^1(x)=(F,\bullet)=F_1dx_1+...+F_ndx_n,$

$\omega_F^1(x)(\xi)=F_1\xi^1+...+F_n\xi^n=(F(x),\xi).$

б) $n=3$

$F(x)$ - силовое поле, $\xi\in TD_x=\mathbb{R}^3$

$\omega_F^1(x)=(F,\bullet)=F_1dx_1+F_2dx_2+F_3dx_3,$

$\omega_F^1(x)(\xi)=(F,\xi).$

Физический смысл. Если $F(x)-$непрерывное силовое поле, $\xi-$вектор смещения от точки x, то элементарная работа A поля, отвечающая этому смещению: $A=(F,\xi)$. Поле силы F в $D\subset\mathbb{R}^3$ порождает в TD_x дифференциальную 1-форму ω_F^1, которая называется *формой работы*: $\omega_F^1(x)(\xi)=(F,\xi)=A.$

Координатная запись дифференциальной формы

Утверждение 6.5. Если: $dx^j(\xi_i)=\xi_i^j-$ простейшая дифференциальная 1- форма, $\xi_i\in TD_x$, $\xi_i=(\xi_i^1,...,\xi_i^n)$.

То:

$$dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_k}(\xi_1,...,\xi_k)=\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \cdots & \xi_1^{i_k}\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_k^{i_1} & \cdots & \xi_k^{i_k}\end{vmatrix}-$$

координатная запись простейшей дифференциальной k *- формы.*

Из Утверждения 6.4. следует

Утверждение 6.6. Если: $\omega-$дифференциальная k форма.

То: $$\omega(x)(\xi_1,...,\xi_k)=\sum_{1\le i_1<..<i_k\le n}a_{i_1...i_k}(x)dx^{i_1}\wedge...\wedge dx^{i_k}(\xi_1,...,\xi_k)=\sum_{1\le i_1<...<i_k\le n}a_{i_1...i_k}(x)\begin{vmatrix}\xi_1^{i_1} & \cdots & \xi_1^{i_k}\\ \vdots & & \vdots\\ \xi_k^{i_1} & \cdots & \xi_k^{i_k}\end{vmatrix}.$$

Таким образом, произвольная дифференциальная k - форма есть линейная комбинация простейших дифференциальных форм.

Пример 6.6. Для формы $\omega(x)=dx^1\wedge dx^3+x^1dx^2\wedge dx^4$ найти значение ω на векторах $\xi_1,\xi_2\in TR^4_{(2,3,4,5)}$ в точке $x=(2,3,4,5)$, $\xi_1=(3,5,7,9),\xi_2=(2,4,6,8)$.

$$\omega(x)(\xi_1,\xi_2)=\begin{vmatrix}\xi_1^1 & \xi_1^3\\ \xi_2^1 & \xi_2^3\end{vmatrix}+x^1\begin{vmatrix}\xi_1^2 & \xi_1^4\\ \xi_2^2 & \xi_2^4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}5 & 9\\ 4 & 8\end{vmatrix}=12.$$

Пример 6.7. Пусть в области $D\subset\mathbb{R}^n$ задано векторное поле $V(x)=(V_1(x),...,V_n(x))$.

Вектора $\xi_1,...,\xi_{n-1}$, $\xi_i\in TD_x$, где TD_x-касательное пространство к D в точке x.

Построим параллелепипед на векторах $V, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$. Ориентированный объём Ω этого параллелепипеда – определитель из координат этих векторов:

$$\Omega = \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_n \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \xi_{n-1}^2 & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Разложив его по 1-й строке, получаем ω_V^{n-1} форму:

$$\omega_V^{n-1}(x)(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} V_i(x) dx^1 \wedge ... \wedge d\hat{x}^i \wedge ... \wedge dx^n (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}),$$

где $d\hat{x}^i$ обозначает отсутствие dx^i. Или

$$\omega_V^{n-1}(x) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i} V_i(x) dx^1 \wedge ... \wedge d\hat{x}^i \wedge ... \wedge dx^n.$$

Форма потока

Пусть $n = 3$. Векторное поле $V(x) \in \mathbb{R}^3, x \in D \in \mathbb{R}^3$.

Обозначим $\omega_V^2(\xi_1, \xi_2) := (V, \xi_1, \xi_2), \quad \xi_1, \xi_2 \in TD_x$,

$$\omega_V^2 = V_1(x) dx^2 \wedge dx^3 + V_2(x) dx^3 \wedge dx^1 + V_3(x) dx^1 \wedge dx^2.$$

Физический смысл. Если $V(x)$ – скорость течения жидкости в области D, то (V, ξ_1, ξ_2) – элементарный объем жидкости, протекающей через площадку, натянутую на векторы ξ_1, ξ_2 за единицу времени (поток), $\omega_V^2(\xi_1, \xi_2)$ – *форма потока векторного поля.*

Внешний дифференциал формы

Определение 6.7. Обозначим

Ω_k^p – пространство p- форм гладкости k,

Ω^p – пространство p- форм гладкости ∞.

Определение 6.8. *Внешним дифференциалом дифференциальной формы* называется линейный оператор $d : \Omega_k^p \to \Omega_{k-1}^{p-1}$, обладающий свойствами:

1) если f – функция ($\omega^0 = f$, функция – это 0- форма), то df – обычный дифференциал функции.

2) $d(\omega_1^p \wedge \omega_2^k) = d\omega_1^p \wedge \omega_2^k + (-1)^p \omega_1^p \wedge d\omega_2^k$

3) $d(d\omega) = 0$.

Координатное представление внешнего дифференциала

Утверждение 6.8. Если: $\omega(x)(\xi) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} a_{i_1 ... i_k}(x) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(\xi_1, ..., \xi_k)$

То: $(d\omega(x))(\xi) = \sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} d(a_{i_1 ... i_k}) dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(\xi_1, ..., \xi_k)$.

Таким образом, при дифференцировании формы нужно продифференцировать её коэффициенты $a_{i_1 ... i_k}(x)$.

$$■\left(d\omega(x)\right)(\xi)=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} d\left(a_{i_1\ldots i_k}(x)\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\left(\xi_1,\ldots,\xi_k\right)+a_{i_1\ldots i_k}(x)\,d\left(dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\right)=$$

$$=\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} d\left(a_{i_1\ldots i_k}(x)\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\left(\xi_1,\ldots,\xi_k\right),$$

т.к. в силу определения внешнего дифференциала $d(dx^i)=0$. □

Пример 6.8.

$\omega^0=f(x)$,

$$d\omega^0=df=\frac{\partial f}{\partial x^1}dx^1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x^n}dx^n=\omega^1.$$

Пример 6.9.

$\omega^1(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

$$d\left(\omega^1(x,y)\right)=dP\wedge dx+dQ\wedge dy=\left(\frac{\partial P}{\partial x}dx+\frac{\partial P}{\partial y}dy\right)\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx+\frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)\wedge dy=\frac{\partial P}{\partial y}dy\wedge dx+$$

$$+\frac{\partial Q}{\partial x}dx\wedge dy=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy=\omega^2(x,y).$$

Лекция 21

6.3. Дифференциальные операторы векторного анализа. Их связь с дифференциальными формами

Скалярные и векторные поля

Определение 6.9.

1) $\mathbb{R}^n\supset D\ni\forall x\to f(x)\in\mathbb{R}-$ скалярное поле,

2) $\mathbb{R}^n\supset D\ni\forall x\to A(x)\in\mathbb{R}^3-$ векторное поле.

Связь между векторными полями и формами в $\mathbb{R}^3$

Утверждение 6.9. Если: $\mathbb{R}^3-$ ориентированное евклидово пространство, $A\in\mathbb{R}^3-$ векторное поле.

То: полю A соответствует линейная и билинейная форма.

■ $A\in\mathbb{R}^3\ \forall\xi\in\mathbb{R}^3\ A(\xi)=(A,\xi)$,

$A\in\mathbb{R}^3\ \forall\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}^3\ A(\xi_1,\xi_2)=(A,\xi_1,\xi_2)$. □

Утверждение 6.10. Задание в области $D\subset\mathbb{R}^3$ ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ дифференциальных один и два форм эквивалентно заданию в этой области векторных полей A и B.

Задание нуль-формы и три-формы эквивалентно заданию скалярного поля.

■ Для векторных полей $A:D\to\mathbb{R}^3,B:D\to\mathbb{R}^3,A=(A_1,A_2,A_3),B=(B_1,B_2,B_3),D\subset\mathbb{R}^3$ определим ω_A^1- один форму:

$\omega_A^1\leftrightarrow A,A=(A_1,A_2,A_3)$,

$\omega_A^1=(A,\bullet)=A_1dx_1+A_2dx_2+A_3dx_3$,

$\omega_A^1(x)(\xi)=(A(x),\xi)=A_1(x)\xi^1+A_2(x)\xi^2+A_3(x)\xi^3$, и ω_B^2 – два форму:

$$\omega_B^2 \leftrightarrow B,\ B=\left(B_1,B_2,B_3\right)$$

$$\omega_B^2=\left(B,\bullet,\bullet\right)=B_1dx_2\wedge dx_3+B_2dx_3\wedge dx_1+B_3dx_1\wedge dx_2,$$

$$\omega_B^2\left(x\right)\left(\xi_1,\xi_2\right)=\left(B\left(x\right),\xi_1,\xi_2\right)=\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \end{vmatrix}.$$

Здесь векторы $\xi_1,\xi_2,\xi\in TD_x$, TD_x – касательное пространство к области D.

В случае скалярного поля $f:D\to\mathbb{R}$:

$$\omega_f^3\leftrightarrow f,\quad \omega_f^0\leftrightarrow f$$

$$\omega_f^0\left(x\right)=f\left(x\right)$$

$$\omega_f^3\left(x\right)=f\left(x\right)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3=fdV.\quad \square$$

Дифференциальные операторы градиент, ротор и дивергенция и их связь с дифференциальными формами

Оператор Гамильтона $\nabla:=\left(\dfrac{\partial}{\partial x},\dfrac{\partial}{\partial y},\dfrac{\partial}{\partial z}\right).$

Определение 6.10. *Градиент*

$f\left(x\right)-$ скалярная функция

$$gradf:=\nabla\cdot f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

Ротор

$$F(x)=\left(F_1\left(x\right),F_2\left(x\right),F_3\left(x\right)\right)$$

$$rotF:=\left[\nabla,F\right]=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=i\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)+k\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

Дивергенция

$$F(x)=\left(F_1\left(x\right),F_2\left(x\right),F_3\left(x\right)\right),$$

$$divF:=\left(\nabla,F\right)=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}.$$

Утверждение 6.11. Операции **в**нешнего дифференцирования 0,1,2 – форм в ориентированном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ отвечают операции нахождения градиента скалярного поля и нахождения ротора и дивергенции векторных полей, определённых соотношениями:

$$d\omega_f^0:=\omega_{gradf}^1$$

$$d\omega_A^1:=\omega_{rotA}^2$$

$$d\omega_B^2:=\omega_{divB}^3$$

■ В декартовых координатах:

1. $\omega_f^0=f$

$$d\omega_f^0=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}dx_3=\omega_{gradf}^1$$

2. $\omega_A^1 = A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3$

$$d\omega_A^1 = d\left(A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3\right) = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1 +$$

$$+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial A_2}{\partial x_3}dx_3\right)dx_2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}dx_3\right)dx_3 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 +$$

$$+\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)dx_1dx_3 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2}\right)dx_2dx_3 = \omega_{rotA}^2,$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = rotA\,.$$

3. $\omega_B^2 = B_1dx_2 \wedge dx_3 + B_2dx_3 \wedge dx_1 + B_3dx_1 \wedge dx_2$.

$$d\omega_B^2 = \left(\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3}\right)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \omega_{divB}^3. \quad \square$$

Используя доказанное утверждение, можно дать эквивалентное определение операций векторного анализа.

Определение 6.11.

Градиент:

$\omega_f^0 = f$

$d\omega_f^0 = df = \omega_F^1 = \omega_{gradf}^1$

$gradf -$ операция, соответствующая форме df

$gradf \leftrightarrow df = \omega_{gradf}^1$.

Ротор:

$\omega_F^1 \leftrightarrow F$

$d\omega_F^1 = r_1dy \wedge dz + r_2dz \wedge dx + r_3dx \wedge dy = \omega_r^2$

$rotF -$операция, соответствующая форме $d\omega_F^1$

$rotF = r \leftrightarrow d\omega_F^1 = \omega_{rotF}^2$

Дивергенция:

$\omega_V^2 \leftrightarrow V$

$d\omega_V^2 = (divV)dx \wedge dy \wedge dz = \omega_{divV}^3$.

$divV -$ операция, соответствующая форме $d\omega_V^2$

$divV = d \leftrightarrow d\omega_V^2 = \omega_d^3$

Утверждение 6.12. Определения 6.10 и определения 6.11 эквивалентны.

Лекция 22

Перенос форм при отображениях

1. Перенос нуль-форм (функций)

Определение 6.12. Пусть задано отображение $\varphi : U \to V$, $x = \varphi(t)$, $t = (t_1, ..., t_m) \in U \subset R_t^m$, $x = (x_1, ..., x_n) \in V \subset R_x^n$.

На области V задана функция $f: V \to \mathbb{R}$, ей соответствует нуль форма:
$\omega_f^0 = f(x), f \in \Omega^0(V)$.
Операция переноса функции f с V на U:
$(\varphi^* f)(t) := f(\varphi(t)) = f(x)$,
$\varphi^*: \Omega^0(V) \to \Omega^0(U)$.

2. Перенос форм

Определение 6.13. Пусть задано гладкое отображение $\varphi: U \to V$, $x = \varphi(t)$,
$t = (t_1, ..., t_m) \in U \subset R_t^m$, $x = (x_1, ..., x_n) \in V \subset R_x^n$.

Ему соответствует непрерывное отображение: $\varphi': TU_t \to TV_{x=\varphi(t)}$ – отображение касательных пространств.

В области V на векторах касательного пространства $\xi_1, ..., \xi_n \in TV_{x=\varphi(t)}$ задана $\omega^p \in \Omega^p(V)$ – дифференциальная p – форма, $n \geq p$. Ей можно сопоставить $\varphi^* \omega^p \in \Omega^p(U)$ – форму, действующую на векторах $\tau_1, ..., \tau_p \in TU_t$.

Определим *операцию переноса формы* $\omega^p \in \Omega^p(V)$ с $TV_{x=\phi(t)}$ на TU_t:

$$\varphi^* \omega(t)(\tau_1, ..., \tau_p) := \omega(\varphi(t))(\varphi'\tau_1, ..., \varphi'\tau_p). \tag{6.2}$$

Здесь $\varphi^* \omega^p \in \Omega^p(U)$, при этом $\xi_i = \varphi'(t)\tau_i$.

Таким образом, гладкому отображению $\varphi: U \to V$, соответствует отображение $\varphi^*: \Omega^p(V) \to \Omega^p(U)$, которое переносит заданные на V формы в U.

Из формулы (6.2) следуют
Свойства операции переноса:
1. $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^* \omega_1 + \varphi^* \omega_2$
2. $\varphi^*(\lambda\omega) = \lambda\varphi^* \omega$
3. $\varphi^*(d\omega) = d\varphi^* \omega$
4. $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

Координатная запись форм, возникающих при переносе

Пример 6.9. Перенесем форму $\omega^2 = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$, заданную в $V \subset \mathbb{R}_x^n$.
Пусть $x_i = x_i(t_1, ..., t_m), i = 1, ..., n$ – координатное представление отображения
$\varphi: U \to V, x = \varphi(t), \varphi \in C^1, \quad t = (t_1, ..., t_m) \in U \subset \mathbb{R}_t^m, x = (x_1, ..., x_n) \in V \subset \mathbb{R}_{x=\varphi(t)}^n$.
Найдем координатное представление формы $\varphi^* \omega$ в U. Пусть векторы $\tau_1, \tau_2 \in TU_t$, в касательном пространстве $TV_{x=\varphi(t)}$ им соответствуют векторы $\xi_1, \xi_2 \in TV_{x=\varphi(t)}$,
$\xi_1 = \varphi'(t)\tau_1$, $\xi_2 = \varphi'(t)\tau_2$, или в координатном выражении $\xi_1^i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}\tau_1^j$, $\xi_2^i = \dfrac{\partial x_i}{\partial t_j}\tau_2^j$ (опускаем индекс суммирования по j).

$$\varphi^* \omega^2(t)(\tau_1, \tau_2) := \omega^2(\varphi(t))(\xi_1, \xi_2) = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_1^{i_1} & \xi_1^{i_2} \\ \xi_2^{i_1} & \xi_2^{i_2} \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial t_{j_1}}\tau_1^{j_1} & \dfrac{\partial x_{i_2}}{\partial t_{j_2}}\tau_1^{j_2}\\ \dfrac{\partial x_{i_1}}{\partial t_{j_1}}\tau_2^{j_1} & \dfrac{\partial x_{i_2}}{\partial t_{j_2}}\tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=\frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_{j_1}}\cdot\frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_{j_2}}\begin{vmatrix}\tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2}\\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=\sum_{j_1,j_2=1}^{m}\frac{\partial x_{i_1}}{\partial t_{j_1}}\cdot\frac{\partial x_{i_2}}{\partial t_{j_2}}\begin{vmatrix}\tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2}\\ \tau_2^{j_1} & \tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_2\le m}\frac{\partial\left(x_{i_1},x_{i_2}\right)}{\partial\left(t_{j_1},t_{j_2}\right)}\begin{vmatrix}\tau_1^{j_1} & \tau_1^{j_2}\\ \tau_1^{j_2} & \tau_2^{j_2}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_2\le m}\frac{\partial\left(x_{i_1},x_{i_2}\right)}{\partial\left(t_{j_1},t_{j_2}\right)}dt^{j_1}\wedge dt^{j_2}\left(\tau_1,\tau_2\right)=\varphi^*\omega\left(\tau_1,\tau_2\right).$$

В общем случае справедливо

Утверждение 6.13.

Если: $\omega^p\left(x\right)=\sum\limits_{1\le i_1<\ldots<i_p\le n}a_{i_1\ldots i_n}\left(x\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$. То

$$\varphi^*\omega=\sum_{\substack{1\le i_1<\ldots<i_p\le n\\ 1\le j_1<\ldots<j_p\le m}}a_{i_1\ldots i_n}\left(\varphi\left(t\right)\right)\frac{\partial\left(x^{i_1},\ldots,x^{i_p}\right)}{\partial\left(t_{j_1},\ldots,t_{j_p}\right)}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}. \tag{6.3}$$

Здесь $\dfrac{\partial\left(x^{i_1},\ldots,x^{i_p}\right)}{\partial\left(t_{j_1},\ldots,t_{j_p}\right)}$ – Якобиан отображения φ.

Утверждение 6.14. Если: $V\subset\mathbb{R}_x^n$, в TV_x задана дифференциальная форма ω, $\phi:U\to V,\phi\in C^1(U)$.

То: Координатная запись формы $\varphi^*\omega$ может быть получена из координатной записи исходной формы ω прямой заменой переменных $x=\varphi(t)$ с последующим преобразованием в соответствии со свойствами внешнего произведения.

■ $a_{i_1\ldots i_n}\left(x\right)dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}=a_{i_1\ldots i_n}\left(x(t)\right)(\dfrac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}dt^{j_1})\wedge\ldots\wedge(\dfrac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_p})=$

$$=a_{i_1\ldots i_n}\left(x(t)\right)\frac{\partial x^{i_1}}{\partial t^{j_1}}\ldots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial t^{j_p}}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}=$$

$$=\sum_{1\le j_1<\ldots<j_p\le m}a_{i_1\ldots i_n}\left(\varphi\left(t\right)\right)\frac{\partial\left(x^{i_1},\ldots,x^{i_p}\right)}{\partial\left(t^{j_1},\ldots,t^{j_p}\right)}dt^{j_1}\wedge\ldots\wedge dt^{j_p}.\ \square$$

Пример 6.10. Пусть поверхность $S=\{\varphi(u,v)\,|\,(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2\},S\subset\mathbb{R}^3$,

$$S:\begin{cases}x=uv,\\ y=u^2+v^2,\\ z=u^2-v^2.\end{cases}$$

На поверхности S задана форма $\omega=xydx\wedge dy+yzdy\wedge dz+xzdz\wedge dx.$

Перенести форму на D.

$dx=vdu+udv,\ dy=2udu+2vdv,\quad dz=2udu-2vdv.$

Из формулы (6.3) получим

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} v & u \\ 2u & 2v \end{vmatrix} du \wedge dv = 2(v^2 - u^2) du \wedge dv,$$

$$dy \wedge dz = \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix} du \wedge dv = -8uv du \wedge dv,$$

$$dz \wedge dx = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} du \wedge dv = 2(v^2 + u^2) du \wedge dv,$$

$$\varphi^* \omega = 8uv(v^4 - u^4) du \wedge dv.$$

Лекция 23

Глава 7. Интегрирование дифференциальных форм

7.1. Определение интеграла от дифференциальной формы

Определение 7.1. $S \subset \mathbb{R}^n, S -$поверхность, k - форма ω,

$\forall x \in S \ \xi \in TS_x, \omega(x)$
$D \subset \mathbb{R}^n, S^k \subset D \Rightarrow TS \subset TD$

$\omega|_S(x) -$ сужение формы $\omega(x) -$ на S.

Определение 7.2. Пусть $S -$ гладкая ориентированная поверхность,

$\varphi : I^k \to S -$ её локальная карта,

$\forall x \in S$ определена $\omega(x)(\xi_1, ..., \xi_k) -$дифференциальная k - форма на векторах касательного пространства $\xi_i \in TS_{x=\phi(t)}, t \in I^k$

$x = \varphi(t_i), \varphi' \neq 0, \varphi -$диффеоморфизм

$\tau_j -$ касательные векторы, $\tau_j \in TI^k = I^k$,

$\xi_j = \varphi'(t)\tau_j \in TS_{x=\varphi(t)}$.

Используем операцию переноса формы

$$\varphi^* \omega(t)(\tau_1, ..., \tau_k) := \omega(x(t))(\varphi'(t)\tau_1, ..., \varphi'(t)\tau_k) = \omega(x)(\xi_1, ..., \xi_k) \qquad (7.1)$$

Определение 7.3. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированной поверхности S размерности k.

а) для $k = n$

$\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n$

$$\int_D \omega(x) = \int_D f(x) dx_1 \wedge ... \wedge dx_n := \int_D f(x) dx_1 ... dx_n.$$

б) если поверхность размерности k S задана картой $\phi : D \to S, D \subset \mathbb{R}^k$

$$\int_{S=\varphi(D)} \omega := \pm \int_D \varphi^* \omega$$

«+» - когда ориентация поверхности согласована с ориентацией, задаваемой параметризацией φ, иначе «-».

в) Когда $S-$ кусочно-гладкая $S=\bigcup_i S_i$. Поверхность S, после удаления из неё поверхностей размерности не выше, чем $k-1$, состоит из гладких поверхностей S_i со взаимно согласованной ориентацией. Тогда

$$\int_S \omega := \sum_i \int_{S_i} \omega.$$

Пример 7.1. Если из куба удалить рёбра и вершины, то останутся шесть гладких поверхностей.

Утверждение 7.1. Вышеприведённое определение не зависит от параметризации.

■ $a)\quad D_x \subset \mathbb{R}^k, D_t \subset \mathbb{R}^k$

$$\varphi : D_t \to D_x, \det \varphi' > 0$$
$$\int_{D_x} f(x) dx_1 \wedge ... \wedge dx_k = \int_{D_x} f(x) dx_1 ... dx_k = \int_{D_t} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt_1 ... dt_k = \int_{D_t} \varphi^* \omega$$

б) $\varphi_t : D_t \to S, \varphi_x : D_x \to S$

$$\varphi_t = \varphi_x \circ \varphi_x^{-1} \circ \varphi_t = \varphi_x \circ \varphi, \varphi = \varphi_x^{-1} \circ \varphi_t$$
$$\varphi : D_t \to D_x$$

в) Корректность определения вытекает из свойства аддитивности кратного интеграла. □

7.2. Интегралы от формы работы, потока. Форма объёма

Интеграл от формы работы

Если в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное (силовое) поле $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и

$$\gamma : I \to \gamma(I), I = [a,b]$$

$\gamma(I)-$ параметризованная кривая, $x \in \gamma(I)$, $dx = (dx_1, dx_2, dx_3) \in T\gamma(I) -$ касательное пространство к $\gamma(I)$, задана форма работы

$$\omega_F^1 = F_1(x)dx_1 + F_2(x)dx_2 + F_3(x)dx_3$$

То в силу определения 7.4 интеграл по γ от формы ω_F^1:

$$\int_\gamma \omega_F^1(x) = \int_\gamma F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \int_a^b \varphi^* \omega_F^1 =$$
$$= \int_a^b \left(F_1(x(t))\dot{x}_1 + F_2(x(t))\dot{x}_2 + F_3(x(t))\dot{x}_3 \right) dt = \int_a^b \left(F(x(t)), \dot{x}(t) \right) dt. \qquad (7.2)$$

Это криволинейный интеграл второго рода. См. раздел 3.1.

Интеграл от формы потока

Если в области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, V \in C^1$ – поле скоростей, S – ориентированная параметризованная поверхность (размерности 2), $\varphi : D \to S$ – её карта. На векторах касательного пространства TS задана форма потока: $\omega_V^2(x) = V_1 dx_2 \wedge dx_3 + V_2 dx_3 \wedge dx_1 + V_3 dx_1 \wedge dx_2$.

Тогда интеграл от этой формы по поверхности в силу определения 7.4

$$\int\limits_{S=\phi(D)} \omega_V^2 = \int\limits_S V_1 dx_2 \wedge dx_3 + V_2 dx_3 \wedge dx_1 + V_3 dx_1 \wedge dx_2 = \pm \int\limits_D \varphi^* \omega_V^2 =$$

$$= \pm \int\limits_D \left(V_1(x(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{vmatrix} + V_2(x(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \end{vmatrix} + V_3(x(t)) \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_1}{\partial t_2} \end{vmatrix} \right) = \pm \int\limits_D \begin{vmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \frac{\partial x_3}{\partial t_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_2} & \frac{\partial x_2}{\partial t_2} & \frac{\partial x_3}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2.$$

Этот интеграл - поверхностный интеграл второго рода.

Лекция 24

Форма объёма

Определение 7.4. Пусть $\mathbb{R}^k$ – ориентированное евклидово пространство со скалярным произведением, $(e_1, ..., e_k)$ – ориентирующий репер.

Формой объёма Ω на $\mathbb{R}^k$ называется кососимметрическая k - форма, которая на ортонормированном репере данного класса ориентации принимает единичное значение: $\Omega(e_1, ..., e_k) = 1$.

Утверждение 7.2. Определение корректно, т.е. не зависит от выбора репера.

■ Выберем два репера из одного класса ориентации

$e_1, ..., e_k, \tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_k$

A – матрица перехода от одного репера к другому, $\det A = 1$,

$\Omega(e_1, ..., e_k) = \det A \Omega(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_k) = \Omega(\tilde{e}_1, ..., \tilde{e}_k) = 1$. □

Утверждение 7.3. Значение формы объёма на наборе векторов $\xi_1, ..., \xi_k$ - ориентированный объём параллелепипеда, натянутого на эти векторы.

■ Положим $\Omega = \pi^1 \wedge ... \wedge \pi^k$.

$$\pi^1 \wedge \ldots \wedge \pi^k \left(e_1, \ldots, e_k\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Тогда

$$\Omega\left(\xi_1, \ldots, \xi_k\right) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_k^1 & \cdots & \xi_k^k \end{vmatrix} = V\left(\xi_1, \ldots, \xi_k\right). \ \square$$

Определение 7.5. $S \subset \mathbb{R}^n$, S – гладкая поверхность размерности k, $\forall x \in S\ \exists TS_x$ – касательное пространство. Пусть в касательном пространстве ориентация согласована с исходной ориентацией пространства $\mathbb{R}^n$, тогда форма объёма в TS_x называется формой объёма на поверхности S.

Определение 7.6. Площадью поверхности S называется интеграл по этой поверхности от формы объема: $\int\limits_S \Omega$.

Замечание 7.1. Площадь поверхности не зависит от ориентации, т.к. при изменении ориентации меняется и форма объёма.

Определение 7.7. Пусть поверхность S задана параметрически $S : r(t), t \in I^k, r : I^k \to R^n, r \in C^1(I^k)$.

Тогда площадь поверхности определяется формулой

$$V(S) = \int\limits_{I^k} \sqrt{\det\left(\dot{r}_i, \dot{r}_j\right)} dt^1 \ldots dt^k, \tag{7.3}$$

где $g_{ij} = \left(\dot{r}_i, \dot{r}_j\right), \dot{r}_i = \dfrac{\partial r}{\partial t_i}$.

Утверждение 7.4. Определения 7.7 эквивалентно определения 7.6 .

■ В силу определения 7.6

$$V = \int\limits_S \Omega = \int\limits_{I^k} \varphi^* \Omega, \quad \Omega\left(\xi_1, \ldots, \xi_k\right) = \begin{vmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_k^1 & \cdots & \xi_k^k \end{vmatrix} = \sqrt{\det\left(\xi_i, \xi_j\right)}.$$

Поскольку $\xi_i = \varphi' \tau_i$, $\omega = \varphi^* \Omega = \sqrt{\det\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_i}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial t_j}\right)} dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_n$ и мы получаем формулу (7.3).

□

Определения 7.8. Если S – кусочно-гладкая поверхность, состоящая из гладких частей S_i, пересекающихся по поверхностям размерности не выше, чем $k-1$, то площадь S равна сумме площадей S_i.

Выражение формы объёма в декартовых координатах

Утверждение 7.5. Если: $S \subset \mathbb{R}^n$ – поверхность размерности $n-1$,

$\eta(x), |\eta| = 1$ - единичный вектор нормали.

То: $\Omega(\xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta_i dx_1 \wedge ... \wedge d\hat{x}_i \wedge ... \wedge dx_n$,

где галочка означает отсутствие данного множителя.

■ Из геометрии следует: $V(\eta, \xi_1, ..., \xi_{n-1}) = |\eta| \Omega = \Omega$.

$$V(\eta, \xi_1, ..., \xi_{n-1}) = \begin{vmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \\ \xi_1^1 & \cdots & \xi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1}^1 & \cdots & \xi_{n-1}^n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \eta_i dx_1 \wedge ... \wedge d\hat{x}_i \wedge ... \wedge dx_n = \Omega(\xi_1, ..., \xi_{n-1}). \square \qquad (7.4)$$

Утверждение 7.6. Если: $S \subset \mathbb{R}^3$ – поверхность размерности 2,

$\eta = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3)$ – единичная нормаль к поверхности.

То: $\Omega = \cos\alpha_1 dx_2 \wedge dx_3 + \cos\alpha_2 dx_3 \wedge dx_1 + \cos\alpha_3 dx_1 \wedge dx_2$ и

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 \Omega &= dx_2 \wedge dx_3 \\ \cos\alpha_2 \Omega &= dx_3 \wedge dx_1 \\ \cos\alpha_3 \Omega &= dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned} \qquad (7.5)$$

■ $V(e_i, \xi_1, ..., \xi_{n-1}) = (\eta, e_i) \Omega(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$

$V(e_i, \xi_1, ..., \xi_{n-1}) = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge ... \wedge d\hat{x}_i \wedge ... \wedge dx_n = \eta_i \Omega(\xi_1, ..., \xi_{n-1}), \eta_i = (\eta, e_i) = \cos\alpha_i$,

$\cos\alpha_i \Omega = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge ... \wedge d\hat{x}_i \wedge ... \wedge dx_n$

Для $n = 3$ отсюда получаем формулы (7.5). □

Интегралы I и II рода

Определение 7.9. Пусть S – ориентированная поверхность, на ней задана непрерывная функция $\rho : S \to \mathbb{R}$, и форма объема Ω. Тогда

$\int_S \rho\Omega$ - интеграл I рода по ориентированной поверхности S.

Если ω – произвольная форма,

$\int\limits_S \omega -$ интеграл II рода по ориентированной поверхности S.

Пример 7.2. Пусть $\rho -$ плотность, тогда

$$\int\limits_S \rho\Omega = M \text{ - масса.}$$

Замечание 7.2. Изменение ориентации не меняет интеграл I рода, т.к. при изменении ориентации поверхности изменяется и форма объёма.

Замечание 7.3. Т.к. k - мерные кососимметрические формы размерности k пропорциональны между собой, то любой интеграл II рода может быть представлен через интеграл I рода.

Пример 7.3.

1. $\int\limits_\gamma \omega_F^1 = \int\limits_\gamma F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3 = \int\limits_\gamma \left(\overline{F}, \overline{ds}\right) = \int\limits_\gamma \left(\overline{F}, \overline{e}\right) ds, \quad \overline{ds} = ds \cdot \overline{e}.$

$\overline{e}$ - касательный вектор к кривой γ, s - натуральный параметр.

Слева – интеграл второго рода от формы работы, справа интеграл первого рода.

2. Используем формулу (7.5):

$$\int\limits_S \omega_V^2 = \int\limits_S V_1 dx_2 \wedge dx_3 + V_2 dx_3 \wedge dx_1 + V_3 dx_1 \wedge dx_2 = \int\limits_S \left(\cos\alpha_1 V_1 + \cos\alpha_2 V_2 + \cos\alpha_3 V_3\right) dS =$$
$$= \int\limits_S \left(\overline{V}, \overline{dS}\right) = \int\limits_S \left(\overline{V}, n\right) dS,$$

$\overline{dS} = n \cdot dS, n = \left(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\right) -$ единичный вектор внешней нормали.

Слева – интеграл второго рода от формы потока, справа интеграл первого рода.

Лекция 24

7.3. Общая формула Стокса

Теорема 7.1. Если: $S -$ ориентированная кусочно-гладкая k - мерная компактная поверхность с краем ∂S, $S \subset G \subset \mathbb{R}^n$, в G задана гладкая $k-1$ - форма ω, ориентация ∂S согласована с ориентацией S, то:

$$\int\limits_S d\omega = \int\limits_{\partial S} \omega. \tag{7.6}$$

Формула (7.6) носит название общей формулы Стокса.

■ Пусть поверхность S задана локальной картой $\varphi : I_k \to S, \varphi \in C^1(I_k),\ I_k - k$ - мерный промежуток $I_k = \{x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \mid 0 \le x_i \le 1, i = 1, ..., k\}$. В силу определения интеграла от дифференциальной формы по поверхности

$$\int_S d\omega := \int_{I_k} \varphi^*(d\omega),$$

$$\int_{\partial I_k} \varphi^*\omega =: \int_{\partial S} \omega.$$

Для доказательства формулы (7.6) в цепочке равенств

$$\int_S d\omega := \int_{I_k} \varphi^*(d\omega) = \int_{I_k} d\varphi^*(\omega) \overset{?}{=} \int_{\partial I_k} \varphi^*\omega =: \int_{\partial S} \omega$$

достаточно доказать переход $\overset{?}{=}$, т.е. доказать формулу Стокса для куба I_k. Из нее будет следовать формула (7.6) для произвольной поверхности S.

Пусть дифференциальная форма ω имеет вид $\omega = a(t)\,dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k$, где галочка над dt^i означает отсутствие данного множителя. В силу свойств дифференциала формы $d\omega = d(a(t))dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k = (-1)^{k-1}\dfrac{\partial a}{\partial t_i} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^i \wedge \ldots \wedge dt^k$.

$$\int_{I_k} d\omega = \int_{I_k} (-1)^{i-1}\frac{\partial a}{\partial t_i} dt^1 \wedge \ldots \wedge dt^i \wedge \ldots \wedge dt^k = (-1)^{i-1}\int_{I_{k-1}} dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial t_i} dt^i =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_{I_{k-1}} (a(t^1,\ldots,t^{i-1},1,t^{i+1},\ldots,t^k) - a(t^1,\ldots,t^{i-1},0,t^{i+1},\ldots,t^k))dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k =$$

$$= (-1)^{i-1}\int_{I_{k-1}} a(t^1,\ldots,t^{i-1},1,t^{i+1},\ldots,t^k)dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k +$$

$$= (-1)^{i}\int_{I_{k-1}} a(t^1,\ldots,t^{i-1},0,t^{i+1},\ldots,t^k))dt^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dt}^i \wedge \ldots \wedge dt^k.$$

Обозначим Γ_{i1} – верхнюю грань промежутка I_k, Γ_{i0} – нижнюю грань промежутка I_k.

Координаты $t^1,\ldots,t^{i-1},t^{i+1},\ldots,t^k$ задают на этих гранях ориентирующий репер $e^1,\ldots,e^{i-1},e^{i+1},\ldots,e^k$, отличающийся от репера пространства $\mathbb{R}^k$ отсутствием вектора e^i. Вектор e^i на Γ_{i1} является по отношению к I^k внешней нормалью, вектор $-e^i$ на Γ_{i0} является также внешней нормалью. Репер $e^i,e^1,\ldots,e^{i-1},e^{i+1},\ldots,e^k$ после $i-1$ перестановки соседних векторов переходит в репер $e^1,\ldots,e^i,\ldots,e^k$ – ориентирующий репер пространства $\mathbb{R}^k$. Т.е. указанная параметризация с множителем $m = (-1)^{i-1}$ равна ориентации Γ_{i1}, согласованной с ориентацией I^k. Аналогично для Γ_{i0} множитель $m = (-1)^i$. Отсюда получим

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\Gamma_{i1}} \omega + \int_{\Gamma_{i0}} \omega,$$

где ориентация Γ_{i1}, Γ_{i0} согласована с ориентацией I^k.

Остальная часть Γ границы куба I^k есть цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси $0t_i$, следовательно, сужение формы $a(t)dt^1 \wedge ... \wedge \widehat{dt^i} \wedge ... \wedge dt^k$, на Γ есть $k-1$ форма от $k-2$ переменных и она равна нулю. Отсюда

$$\int_{I^k} d\omega = \int_{\partial I^k} \omega, \qquad (7.7)$$

где край куба ∂I^k ориентирован согласованно с кубом I^k.

В силу координатного представления дифференциальной формы и линейности интеграла следует формула (7.7) для произвольной $k-$ формы. □

Замечание 7.4. Если поверхность является кусочно-гладкой, т.е. состоит из гладких кусков размерности не выше $k-1$, причём ориентация кусков согласована, то общая их часть проходится в разных направлениях и таким образом интеграл по общей части равен нулю:

$$\int_S d\omega = \sum_i \int_{S_i} d\omega = \sum_i \int_{\partial S_i} \omega = \int_{\partial S} \omega.$$

Классические формулы векторного интегрального исчисления

Формула Ньютона-Лейбница

Если: $\gamma(t)$ – параметризованная кривая, $\gamma : [a,b] \to \gamma \subset D \subset \mathbb{R}^3$,

$\partial\gamma = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$ – точки (край кривой γ), на кривой γ определена функция f (нуль форма) $\omega = \omega_f^0$. То: $d\omega = d\omega_f^0 = \omega_{gradf}^1$ и из общей формулы Стокса

$$\int_\gamma \omega_{gradf}^1 = \int_{\partial\gamma} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

$$\int_\gamma gradf \cdot dS = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

В частном случае, когда $\gamma -$ отрезок, получаем классическую формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(b) - f(a).$$

Формула Стокса

Если в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное силовое поле $A : D \to \mathbb{R}^3$,

∂S - замкнутый ориентированный контур. Определим форму работы $\omega = \omega_A^1$.

То: $d\omega = d\omega_A^1 = \omega_{rotA}^2$ и из общей формулы Стокса получаем классическую формулу Стокса

$$\int_{\partial S} \omega_A^1 = \int_S \omega_{rotA}^2,$$
$$\oint_{\partial S} \left(A, \overline{dl}\right) = \int_S \left(rotA, \overline{dS}\right),$$

где $\overline{dl} = dl \cdot \bar{e}$, $\bar{e}-$ единичный касательный вектор к кривой, $\overline{dS} = dS \cdot \bar{n}$, $\bar{n}-$ нормаль к поверхности S.

Циркуляция векторного поля вдоль замкнутого контура ∂S равна потоку ротора этого поля через поверхность, натянутую на данный контур. При этом ориентация контура согласована с ориентацией поверхности.

Формула Остроградского-Гаусса

Если: $V \subset \mathbb{R}^3 -$ ограниченная область ориентированного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, $\partial V -$ край (граница) V, $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B \in C^1\left(V\right) -$ гладкое векторное поле в области V. Ему соответствует форма потока $\omega = \omega_B^2$. Тогда $d\omega = d\omega_B^2 = \omega_{divB}^3$ и из общей формулы Стокса получаем формулу Остроградского-Гаусса

$$\int_{\partial V} \omega_B^2 = \int_V \omega_{divB}^3,$$
$$\int_{\partial V} \bar{B} d\bar{S} = \int_V div\bar{B} dV.$$

Поток векторного поля через границу области равен интегралу от дивергенции этого поля по самой области.

Замкнутые и точные формы

Определение 7.10. Дифференциальная p - форма ω^p называется точной в области D, если: $\exists \omega^{p-1} : \omega^p = d\omega^{p-1}$.

Определение 7.11. Дифференциальная p - форма ω^p замкнута в области D, если $d\omega^p = 0$.

Утверждение 7.12. Если: ω^p - точная. То: ω^p - замкнута.

■ $\omega^p = d\left(\omega^{p-1}\right),$
$d\omega^p = d^2\left(\omega^{p-1}\right) = 0.$ □

Лемма Пуанкаре. Если дифференциальная форма замкнута в шаре.

То: она точна в этом шаре.

Теорема 7.2 Пуанкаре. Если дифференциальная форма замкнута на стягивающемся в точку многообразии. То: она точна на нём.

Перечень экзаменационных вопросов

Кратные интегралы

1. Интеграл Римана на n–мерном промежутке**.**
2. Множество Лебеговой меры нуль. Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.
3. Критерий Дарбу интегрируемости вещественнозначной функции.
4. Интеграл по множеству. Мера Жордана множества и ее геометрический смысл. Критерий Лебега существования интеграла по измеримому множеству.
5. Общие свойства интеграла.
6. Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема Фубини и следствия из нее.
7. Замена переменных в кратном интеграле.
8. Геометрический смысл знака и модуля Якобиана отображения.
9. Приложения кратных интегралов.
10. Несобственные кратные интегралы.

Кривая в пространстве

11. Предел, непрерывность, дифференцируемость вектор-функции скалярного аргумента.
12. Параметрически заданная кривая. Касательная к кривой.
13. Длина дуги кривой. Натуральная параметризация.
14. Естественный трехгранник кривой. Формулы Френе.
15. Определение, вычисление, геометрический смысл кривизны и кручения кривой
16. Вид кривой вблизи произвольной точки.

Поверхности и дифференциальные формы

17. Поверхность в евклидовом пространстве. Примеры.
18. Ориентация поверхности. Ориентируемые и неориентируемые поверхности.
19. Край поверхности. Согласованная ориентация поверхности и ее края.
20. Касательное пространство.
21. Касательная плоскость и нормаль к поверхности в R^3.
22. Площадь поверхности в евклидовом пространстве.
23. Первая квадратичная форма поверхности. Площадь поверхности в R^3, длины кривых на поверхности.
24. Алгебра форм. Кососимметрические формы. Операция внешнего умножения.
25. Дифференциальные формы в областях евклидова пространства. Определения и примеры: дифференциал функции, форма работы, форма потока.
26. Координатная запись дифференциальной формы.
27. Перенос дифференциальных форм при отображениях.
28. Внешний дифференциал формы.

Криволинейные и поверхностные интегралы

29. Интеграл от дифференциальной формы по ориентированной поверхности. Независимость интеграла от выбора систем криволинейных координат. Примеры приложений.
30. Форма объема. Площадь поверхности.
31. Интегралы от дифференциальных форм 1 и 2 рода.

32. Общая формула Стокса.
33. Классические интегральные формулы Ньютона-Лейбница, Стокса, Остроградского-Гаусса.

Элементы векторного анализа

34. Скалярные и векторные поля в областях евклидова пространства. Связь с дифференциальными формами.
35. Дифференциальные операторы векторного анализа.
36. Интегральные формулы в векторных обозначениях. Геометрическое определение div, rot.
37. Потенциал векторного поля, необходимое условие потенциальности. Критерий потенциальности векторного поля.
38. Соленоидальные поля, их свойства.
39. Теорема Пуанкаре. Точные и замкнутые формы.

Список литературы

1. *В.А. Зорич.* Математический анализ. В 2-х ч. − М.: МЦНМО, 2002 .
2. *Л.Д. Кудрявцев.* Курс математического анализа. В 3-х т. − М.: Дрофа, 2004.
3. *Е.П. Иванова.* Дифференциальное исчисление функций одной переменной. − М.: Изд. МАИ, 2009.
4. *Е.П. Иванова.* Дифференциальное исчисление функций многих переменных. − М.: Изд. Буки-Веди, 2015.
5. *И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А.Садовничий.* Задачи и упражнения по математическому анализу. − М.: Дрофа 2001.
6. *В.М. Будак, С.В. Фомин.* Кратные интегралы и ряды.− М.: Наука, 1965.

Интегральное исчисление функций многих переменных

Учебное пособие

Дизайн — Н.П. Яшина
Верстка — Е.П. Иванова

Подписано в печать 10.03.2016.
Формат 60 x 84 $^1/_8$. Гарнитура Times.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ л. 8.
Тираж 100 экз. Заказ № 1275.

Отпечатано в цифровой типографии ООО «Буки Веди»

на оборудовании Konica Minolta

105066, г. Москва, ул. Новорязанская, д. 38, стр. 1, пом. IV

Тел.: (495) 926-63-96, www.bukivedi.com, info@bukivedi.com