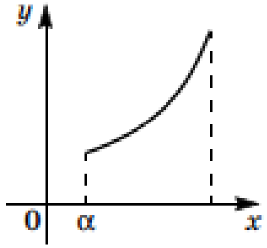

Рис. 28

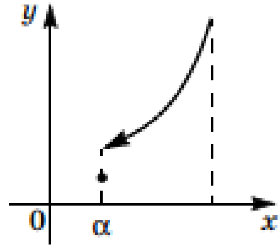

Рис. 29

Этим завершается доказательство следствия, так как, согласно теореме 4, пределы слева $f(x_0 - 0)$ и справа $f(x_0 + 0)$ существуют, причём

$$f(x_0 - 0) = \underset{X<(x_0)}{sup}\ f(x), f(x_0 + 0) = \underset{X>(x_0)}{inf}\ f(x)$$

поэтому неравенства (5.61) совпадают с неравенством (5.67).□

З а м е ч а н и е 1. В теореме 4 для возрастающей функци $f : X \to R$ рассмотрены случаи, когда $\inf X = \alpha \notin X$ и $\sup X = \beta \notin X$. Если же, например, $\alpha \in X$, то, как и для произвольной (немонотонной) функции, здесь возможны два случая : предел $\lim_{\substack{x\to\alpha \\ x\in X}} f(x)$ существует, тогда функция f является непрерывной в точке α (рис. 28) или не существует (рис. 29). Аналогичная ситуация имеет место и для точки β.

З а м е ч а н и е 2. Из элементарной математики известно, что функция

$$f(r) = \alpha^r,\ \alpha > 0 \quad (5.68)$$

где r - рациональное число, $r \in Q$, монотонна на множества всех рациональных чисел Q (см. также п. 2.6*). Для каждого действительного числа x множества рациональных чисел $r < x, r > x$, не пусты и x является их точкой прикосновения. Поэтому, согласно сделствия теоремы 4, для любого действительного числа x существуют пределы $\underset{r\to x-0}{lim}\ \alpha^r$ и $\underset{r\to x+0}{lim}\ \alpha^r$, $r \in Q$ (по множеству рациональных чисел Q, так как пока у нас показательная функция определена только для рациональных показателей).

В частности, указанные пределы существуют для $x = 0$. Согласно определению предела, их значения равны соответственно значениям пределом последовательностей α^{r_n} при