**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)**

**Е.П. Иванова**

# Ряды и функциональные семейства

**Учебное пособие**

Утверждено

на заседании редсовета

18 марта 2019

**Москва**
**Издательство МАИ**

2020

УДК 517.2
**Иванова Е.П.** Ряды и функциональные семейства: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2020. – 100 с.

Содержанием учебного пособия является курс лекций по математическому анализу, читаемых автором на факультете информационных технологий и прикладной математики МАИ. Пособие охватывает фундаментальные темы: числовые и функциональные ряды, степенные ряды, ряды Тейлора, несобственные интегралы, зависящие от параметра, ряды и преобразование Фурье. Особое внимание уделено понятию равномерной сходимости рядов и функциональных семейств. В пособии содержится также задание для курсовой и самостоятельной работы студентов, включающее теоретические и расчетные задачи.

Для студентов направлений прикладная математика, прикладная математика и информатика, фундаментальная информатика информационные технологии.

*Рецензенты:*

*Математический институт им. С.М. Никольского, РУДН (директор института: д.ф.-м.н., профессор Скубачевский А.Л.);*
*д.ф.-м.н., профессор Шамин Р.В.*

ISBN 978-5-4316-0692-2

## *Оглавление*

## *Предисловие*

В данном пособии изучаются разделы математического анализа, включающие функциональные ряды и интегралы, зависящие от параметра. Пособие соответствует курсу лекций по математическому анализу, читаемых автором для студентов факультета информационных технологий и прикладной математики.

Для изучения данных разделов требуются знания предыдущих разделов математического анализа: дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, теории предела.

В первой главе рассмотрены вопросы абсолютной и условной сходимости числовых рядов.

Во второй главе исследуются функциональные ряды. Особое внимание уделяется понятию равномерной сходимости. Показано, что именно равномерный характер сходимости функционального ряда позволяет осуществлять такие операции над рядами, как почленное интегрирование, дифференцирование, предельный переход. В пособии используется единый подход к исследованию равномерной сходимости семейства функций, зависящих от параметра. Применение теоремы о коммутативности двух предельных переходов (коммутативной диаграммы) позволяет исследовать вопросы дифференцирования, интегрирования функциональных рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметра. Изучаются также степенные ряды, ряды Тейлора, исследуется вопрос аппроксимации непрерывных функций алгебрами функций.

В третьей главе изучаются собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметра, возможность их дифференцирования и интегрирования по параметру.

В четвертой главе изучаются ряды Фурье по произвольной ортогональной системе в предгильбертовом пространстве. Рассматривается также классический тригонометрический ряд Фурье.

Изучаемые в пособии разделы имеют важное теоретическое и прикладное значение. Ряды Фурье, преобразование Фурье используются при изучении курсов уравнений математической физики, теории случайных процессов. Так, использование ряда или преобразования Фурье позволяет сводить задачи для уравнений в частных производных к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразование Фурье используется, в частности, при обработке статистической информации. Ряды Тейлора и Фурье широко применяются при решении прикладных задач, для построения приближенно-аналитических решений.

В пособии приводятся также задания для самостоятельной работы. Выполнение этих заданий позволит студентам приобрести необходимые навыки и умения по данному разделу курса математического анализа.

### Обозначения

$\mathbb{R}$ – пространство действительных чисел
$\mathbb{C}$ – пространство комплексных чисел
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел
◄ – начало доказательства
► – конец доказательства

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x),\ x \in E$ – последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится на множестве $E$

$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x),\ x \in E$ – последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве $E$

$f_n(x) \xrightarrow{СКВ} f(x),\ x \in E$ – последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в среднем квадратичном на множестве $E$

$\Re[a,b]$ – множество интегрируемых функций
$f\uparrow$ – неубывающая функция
$f\uparrow\uparrow$ – возрастающая функция
$C(K)$ – пространство непрерывных на множестве $K$ функций
$C^1(K)$ – пространство непрерывно-дифференцируемых на множестве $K$ функций
$\|\cdot\|$ – норма

яд

# Глава 1. Числовые ряды

Лекция 1

### *1.1. Основные определения*

**Определение 1.1.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n -$ *числовой ряд*, $a_n \in \mathbb{R}$ (или $a_n \in \mathbb{C}$).

Элементы $a_n$ последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} -$ *члены ряда*. Сумма

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i -$ *частичная сумма* ряда.

***Замечание 1.1.*** Пространство комплексных чисел $\mathbb{C}$:

$z \in \mathbb{C},\ z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1,\ i -$мнимая единица.

**Определение 1.2.** 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n -$ *сходится*, если $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$.

2. В противном случае ряд *расходится.*

**Пример 1.1.** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, при $|q|<1$ сходится; при $|q| \geq 1$ расходится.

**Утверждение 1.1 (необходимое условие сходимости ряда).**

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

◄ $a_n = S_n - S_{n-1},\ \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$ ►

**Утверждение 1.2.** Если р ы $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_b$ сходятся, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_1 a_n + \alpha_2 b_n) = \alpha_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \alpha_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha_1 S_a + \alpha_2 S_b.$$

**Определение 1.3.** Обозначим $r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k -$ *остаток ряда.*

**Утверждение 1.3.** $S = S_n + r_n$.

**Утверждение 1.4.** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} r_n = 0.$

***Замечание 1.2.*** Конечное число членов ряда не влияет на его сходимость.

**Теорема 1.1 (критерий Коши сходимости числового ряда).**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \ \forall p \in N \ \Big|\underbrace{a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}}_{S_{n+p} - S_n}\Big| < \varepsilon.$$

***Замечание 1.3.*** Ряд расходится, если:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N : \exists n > N \ \exists p \in N \ \left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\right| \geq \varepsilon.$$

***Замечание 1.4.*** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ с комплексными членами, $z_n = x_n + iy_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды из действительных и мнимых частей: $\sum_{n=1}^{\infty} x_n, \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .

Это следует из неравенств $\max\{|x|,|y|\} \leq |z| \leq |x| + |y|$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Пример 1.2.** *Гармонический ряд:* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится:

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right|>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}=\varepsilon$$

$$\exists\varepsilon=\frac{1}{2}\ \ \forall N(\varepsilon)\ \ \exists n>N\ \ \exists p=n:\left|a_{n+1}+\ldots+a_{n+p}\right|\geq\varepsilon.$$

### *1.2. Ряды с неотрицательными членами*

**Утверждение 1.5 (признак сходимости рядов с неотрицательными членами).** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \ (a_n\geq 0)$ сходится $\Leftrightarrow\exists C\ \forall n:S_n\leq C$

(последовательность частичных сумм ограничена сверху).

◄ ($\Leftarrow$) Последовательность $S_n$ ограничена и возрастает $\Rightarrow$ существует конечный предел $\Rightarrow$ ряд сходится.

($\Rightarrow$) сходящаяся последовательность ограничена. ►

**Теорема 1.2 (интегральный признак Коши).**

Пусть $f(x):[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \ f(x)\geq 0, f(x)\downarrow,\ f_n=f(n), n\in\mathbb{N}.$

Тогда несобственный интеграл $\int_1^{\infty}f(x)dx$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ сходятся и расходятся одновременно.

◄$\forall x\in\mathbb{R},\ x\geq 1\,\exists k\in\mathbb{N}:k\leq x\leq k+1,$

$$f\downarrow\ \Rightarrow f(k)\geq f(x)\geq f(k+1)\Rightarrow\int_k^{k+1}f(k)dx\geq\int_k^{k+1}f(x)dx\geq\int_k^{k+1}f(k+1)dx$$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)\geq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(x)dx=\int_1^{n+1}f(x)dx\geq\sum_{k=1}^{n}f(k+1)=S_{n+1}-f(1).$$

1) Пусть $\int_1^{\infty}f(x)dx$ сходится $\Rightarrow\int_1^{n}f(x)dx<\int_1^{\infty}f(x)dx\leq M\Rightarrow$

$$S_{n+1} \le \int_1^n f(x)dx + f(1) \le M + f(1) \Rightarrow$$ ряд сходится.

2) пусть $\sum_{n=1}^{\infty} f_n -$ сходится $\Rightarrow S_n \le M \Rightarrow$

$\int_1^n f(x)dx \le S_n \le M \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится. ►

**Пример 1.3.** Ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

При $\alpha > 1$ сходится; при $\alpha \le 1$ расходится, т.к. интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ сходится; при $\alpha \le 1$ расходится.

### *Признаки сравнения рядов с неотрицательными членами*

**Утверждение 1.6.** Пусть $\forall n \ge n_0 : 0 \le u_n \le v_n$.

Тогда: из того, что $\sum_{n=1}^{\infty} v_n -$ сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n -$ сходится,

а из того, что $\sum_{n=1}^{\infty} u_n -$ расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n -$ расходится.

◄ Обозначим $S_k = \sum_{n=1}^{k} u_n$, $\sigma_k = \sum_{n=1}^{k} v_n$. Если $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то $\sigma_k$ ограничена сверху, но т.к. $S_k \le \sigma_k$, то и $S_k$ ограничена сверху $\forall k:\ S_k \le \sigma_k \le C \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n -$ сходится. Второй пункт доказывается аналогично. ►

**Утверждение 1.7.** Пусть $u_n \ge 0, v_n \ge 0, \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, k \ne 0, k \ne \infty.$

Тогда: $\sum_{n=1}^{\infty} v_n -$ сходится $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n -$ сходится.

**Пример 1.4.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!)}{n^2}$, $a_n=\frac{\sin(n!)}{n^2}, |a_n|\le\frac{1}{n^2}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, следовательно, сходится исходный ряд.

**Пример 1.5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+2}$ ,

$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+2}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, $n\to\infty\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}<1\Rightarrow$ ряд расходится.

**Теорема 1.3 (признак Даламбера).**

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ $(u_n>0)$, $\exists\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

Тогда при $q<1$ ряд сходится, при $q>1$ ряд расходится, если $q=1$, то требуются дополнительные исследования.

◄ Пусть $q<1, \exists q_0: q<q_0<1, \quad \exists n_0\ \forall n\ge n_0\ :\frac{u_{n+1}}{u_n}<q_0$,

$u_{n_0+1}<q_0\cdot u_{n_0}$,

$u_{n_0+2}<q_0\cdot u_{n_0+1}<q_0^2u_{n_0}$,

$u_{n_0+k}<\ldots<q_0^ku_{n_0}$,

$\sum_{k=1}^{\infty}u_{n_0+k}<u_{n_0}\sum_{k=1}^{\infty}q_0^k, \quad q_0<1.$

Правый ряд сходится, следовательно, сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n_0+k}$ .

Если $q>1\Rightarrow u_{n+1}>u_n$ и $u_n$ не стремится к нулю и ряд расходится.►

**Пример 1.6.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, при этом в обоих случаях $q=1$.

**Теорема 1.4 (радикальный признак Коши).**

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \; (u_n \ge 0), \quad \exists \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = q.$

Тогда: при $q < 1$ ряд сходится, при $q > 1$ ряд расходится, а при $q = 1$ возможны оба варианта.

◄ Пусть $q < 1, \exists q_{0}: q < q_0 < 1, \quad \exists n_0 \; \forall n \ge n_0 \; : \sqrt[n]{u_n} < q_0 \Rightarrow u_n < q_0^n.$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} q_0^n$ – сходится, следовательно, сходится исходный ряд.

Для $q > 1$ не выполнено необходимое условие сходимости ряда. ►

Лекция 2

## *1.3. Знакопеременные ряды*

### *Абсолютная и условная сходимость рядов. Ряд Лейбница*

**Определение 1.4.** Будем говорить, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится;

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится условно*, если он сходится, но не сходится абсолютно.

**Утверждение 1.8.** Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.

◄ $\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} a_n \right| \le \left| \sum_{n=m+1}^{m+p} |a_n| \right| \le \varepsilon.$►

**Определение 1.5.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \; a_n \ge 0 -$ *знакочередующийся ряд.*

**Определение 1.6.** *Ряд Лейбница* – знакочередующийся ряд, у которого $a_n \downarrow 0$ ($a_n$ монотонно не возрастает и стремится к нулю).

**Теорема 1.5 (признак Лейбница).**

Ряд Лейбница сходится.

◄ Обозначим $S_n^{n+p} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (-1)^k a_k$ ($p > 0$).

1. $p = 2k$: поскольку $a_n \downarrow 0$

$$\left|S_n^{n+2k}\right| = \left|a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_{n+2k}\right| \le \left|a_{n+1}\right| - \left|a_{n+2}\right| + \left|a_{n+3}\right| - \left|a_{n+4}\right| + \ldots - \left|a_{n+2k}\right| =$$
$$= \left|a_{n+1}\right| - \left(\left|a_{n+2}\right| - \left|a_{n+3}\right|\right) - \ldots - \left|a_{n+2k}\right| \le \left|a_{n+1}\right|;$$

2. $p = 2k+1$:

$$\left|S_n^{n+2k+1}\right| = \left|a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots + a_{n+2k+1}\right| \le \left|a_{n+1}\right| - (\left|a_{n+2}\right| + \left|a_{n+3}\right|) -$$
$$\ldots - (\left|a_{n+2k}\right| - \left|a_{n+2k+1}\right|) \le \left|a_{n+1}\right|;$$

следовательно, $\left|S_n^m\right| < \left|a_{n+1}\right|$. Поскольку $S_n^m \underset{m\to\infty}{\to} r_n$, то и $\left|r_n\right| \le \left|a_{n+1}\right|$.

Так как $a_n \to 0, n \to \infty$, $\left|S_n^m\right| < \left|a_{n+1}\right| < \varepsilon$. Далее используется критерий Коши. ►

**Следствие 1.1 (оценка ряда Лейбница).** $\left|r_n\right| \le \left|a_{n+1}\right|$.

### *Свойства абсолютно сходящихся рядов*

**Утверждение 1.9.** Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно.

Тогда ряд $\sum\limits_{n_k=1}^{\infty} u_{n_k}$, полученный из данного любой перестановкой его членов, сходится к той же сумме, что и данный, причём абсолютно.

◄ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} \left|u_n\right| < \varepsilon.$

Введём следующие обозначения: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $S_N = \sum\limits_{m=1}^{N} u_m$, $\tilde{S}_k = \sum\limits_{n_k=1}^{k} u_{n_k}$.

1) $\forall N\ \exists k$: все слагаемые суммы $S_N$ входят в сумму $\tilde{S}_k$, тогда:

$$\left|\tilde{S}_k - S\right| \le \left|\tilde{S}_k - S_N\right| + \left|S_N - S\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|u_n\right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|u_n\right| = 2\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|u_n\right| < 2\varepsilon.$$

Таким образом, $\tilde{S}_k$ стремится к тому же пределу $S$, что и $S_N \Rightarrow \sum\limits_{n_k=1}^{\infty} u_{n_k} = S.$

2) Если в пункте 1 вместо $u_k$ взять $|u_k|$, то докажем абсолютную сходимость. ►

**Утверждение 1.10.** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно.

Тогда: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно.

**Определение 1.7.** *Произведением* рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ будем называть ряд $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$, составленный из всевозможных попарных произведений их членов.

**Утверждение 1.11.** Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = A,$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$ сходятся абсолютно.

Тогда: $\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j = AB$ (их произведение сходится к произведению сумм данных рядов, причём также сходится абсолютно).

◄ 1) Для любой конечной суммы $\sum a_i b_j$ существует номер $N$ такой, что произведение сумм $A_N := \sum\limits_{i=1}^{N} a_i$, $B_N := \sum\limits_{i=1}^{N} b_i$ содержит все слагаемые исходной суммы, тогда $\sum |a_i b_j| \le \sum\limits_{i=1}^{N} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{N} |b_j| \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i| \sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j| < \infty.$

Так как такие частичные суммы ограничены сверху, то ряд $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_i b_j$ сходится абсолютно.

2) В силу утверждения 1.9 сумма $S$ абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования, ее можно получить как

$S = \lim\limits_{N\to\infty} A_N B_N = \lim\limits_{N\to\infty} A_N \lim\limits_{N\to\infty} B_N = AB.$ ►

***Замечание 1.5.*** Данные утверждения, вообще говоря, не имеют места для условно сходящихся рядов.

**Теорема 1.6 (Римана).** Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится условно.

Тогда $\forall S \in \mathbb{R}$ существует такая перестановка членов ряда, что $\sum_{n_k=1}^{\infty} u_{n_k} = S$ (перестановкой слагаемых ряда можно добиться, чтобы он сходился к любому наперёд заданному числу $S$).

◄ Положительные члены: $u_1^+, u_2^+, ..., u_k^+, ...$ $u_k^+ \underset{k\to\infty}{\to} 0$,

отрицательные члены: $u_1^-, u_2^-, ..., u_k^-, ...$ $u_k^- \underset{k\to\infty}{\to} 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^+ = +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^- = -\infty$.

Для $S \in \mathbb{R}$ будем строить ряд следующим образом:

1) $\tilde{u}_1 := \begin{cases} u_1^+, S \ge 0, \\ u_1^-, S < 0, \end{cases}$ $\tilde{S}_1 := \tilde{u}_1;$

2) $\tilde{u}_2 := \begin{cases} u_{i_2}^+, S - \tilde{S}_1 \ge 0, \\ u_{i_2}^-, S - \tilde{S}_1 < 0, \end{cases}$ $\tilde{S}_2 = \sum_{i=1}^{2} \tilde{u}_i;$

$\vdots$

$N)$ $\tilde{u}_N := \begin{cases} u_{i_N}^+, S - \tilde{S}_{N-1} \ge 0, \\ u_{i_N}^-, S - \tilde{S}_{N-1} < 0, \end{cases}$ $\tilde{S}_N = \sum_{i=1}^{N} \tilde{u}_i;$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \left| \tilde{S}_N - S \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \tilde{S}_N = S.$$

Т.о., построенный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n$ сходится к $S$.►

***Замечание 1.6.*** Для условно сходящегося ряда неверны законы коммутативности и ассоциативности сложения (верные для конечных сумм и абсолютно сходящихся рядов).

**Пример 1.7.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$, и ряд расходится. При этом

$$(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 0,$$
$$-1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = -1.$$

**Теорема 1.7 (признак Абеля – Дирихле).**

*Признак Абеля:* Пусть: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \in \mathbb{C})$ сходится, последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \in \mathbb{R}$ монотонна и ограничена.

Тогда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n. \tag{1.1}$$

*Признак Дирихле:* Если: $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$, $|S_N| < M$, последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $b_n \in \mathbb{R}$ монотонно стремится к нулю.

Тогда ряд (1.1) сходится.

**Пример 1.8.** Ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n}$, $\alpha \neq 2\pi k$.

1) $a_n = \sin n\alpha$,

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \sin n\alpha = \sum_{n=1}^{N} \frac{2\sin n\alpha \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos\left(n\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(n\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(N\alpha + \frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = -\frac{\sin\frac{N\alpha}{2}\sin\frac{N\alpha+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$|S_N| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =: M;$$

2) $b_n = \frac{1}{n} \downarrow 0,\ n \to \infty \Rightarrow$ по признаку Дирихле исходный ряд сходится.

# Глава 2. Функциональные ряды

## *2.1. Функциональные последовательности и ряды*

Лекция 3

### *Поточечная и равномерная сходимость*

**Определение 2.1.** Будем говорить, что последовательность $\left\{ f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ сходится в точке $x_0 \in E$, если сходится числовая последовательность $\left\{ f_n(x_0) \right\}_{n=1}^{\infty}$ значений данных функций в точке $x_0$.

**Определение 2.2.** Будем называть *множеством (областью) сходимости* последовательности $\left\{ f_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ функций $f_n : E \to \mathbb{R}$ множество таких $x_0 \in E$, в которых данная последовательность сходится.

**Определение 2.3.** Будем называть функцию $f(x)$ *предельной функцией* последовательности функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, если $\forall x_0$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу $f(x_0)$.

**Пример 2.1.** $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0\equiv f(x)\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

**Пример 2.2.** $f_n:[0;1]\to\mathbb{R}:f_n(x)=x^n\underset{n\to\infty}{\to}f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1),\\ 1, & x=1.\end{cases}$

***Сходимость и равномерная сходимость семейства функций, зависящих от параметра***

**Определение 2.4.** Будем называть: *семейством функций, зависящих от параметра* $\{f_t(x):X\to\mathbb{R},\ t\in T\}$, функцию двух переменных $F(x,t):X\times T\to\mathbb{R}$, если $\forall x\in X\,\forall t\in T: F(x,t)=f_t(x)$; $t-$ *параметром,* $T-$ *областью значений* параметра.

**Определение 2.5.** Будем говорить, что:

1) семейство функций $\{f_t(x),t\in T\}$ *сходится в точке* $x_0$ *при базе* $\mathcal{B}$ в множестве $T$, если $\exists\lim\limits_{\mathcal{B}}f_t(x_0)$;

2) семейство функций *сходится на множестве* $E$ (*множестве сходимости*) *при базе* $\mathcal{B}$, если оно сходится во всех точках этого множества.

**Определение 2.6.** Будем называть *предельной функцией* семейства функций $f_t(x)$ на множестве $E$ при базе $\mathcal{B}$ функцию $f(x):=\lim\limits_{\mathcal{B}}f_t(x)$.

**Определение 2.7.** Будем говорить, что семейство функций $\{f_t(x):X\to\mathbb{R},t\in T\}$ сходится *поточечно* к функции $f(x)$ при базе $\mathcal{B}$ (в множестве $T$) на множестве $E\subset X$, и обозначать это $f_t(x)\underset{\mathcal{B}}{\to}f(x)$, если:

1) $\forall x \in E \;\; \lim\limits_{\mathcal{B}} f_t(x) = f(x)$

или

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall x \in E \;\; \exists B \in \mathcal{B} \;\; \forall t \in B \;\; \left| f_t(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$

**Определение 2.8.** Будем говорить, что семейство функций $\left\{ f_t(x) : X \to \mathbb{R}, t \in T \right\}$ *сходится равномерно* к функции $f(x)$ при базе $\mathcal{B}$ (в множестве $T$) на множестве $E \subset X$, и обозначать это $f_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f(x)$,

если $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists B \in \mathcal{B} \;\; \forall x \in E \;\; \forall t \in B \;\; \left| f_t(x) - f(x) \right| < \varepsilon$.

***Замечание 2.1.*** В первом определении сначала выбирается точка $x$, а потом элемент $B$ базы, во втором – наоборот. То есть в первом случае $B$ зависит от $x$, а во втором – нет.

**Определение 2.9.** Обозначим: $\Delta_t(x) := \left| f_t(x) - f(x) \right|$,

$\Delta_t := \sup\limits_{x \in E} \left| f_t(x) - f(x) \right|$. Будем говорить, что

$f_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\to} f(x)$ на $E$, если $\forall x \in E : \Delta_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\to} 0,$

$f_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E$, если $\Delta_t \underset{\mathcal{B}}{\to} 0$.

**<u>Пример 2.3.</u>** $\left\{ f_t(x) = x^t, t \in \mathbb{N} \right\}$, $f_t : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} : \; t \to \infty$.

$$f_t(x) \underset{t \to \infty}{\to} f(x) = \begin{cases} 0, \; x \in [0,1), \\ 1, \; x = 1. \end{cases}$$

$$\Delta_t = \sup_{x \in [0,1)} \left( f_t(x) - f(x) \right) = \sup_{x \in [0,1)} \left( x^t \right) = 1 \underset{n \to \infty}{\not\to} 0.$$

Сходимость неравномерная.

**Пример 2.4.** $f_t(x)=\dfrac{\sin tx}{t}\underset{t\to\infty}{\to}0=f(x)\ \forall x\in\mathbb{R},$

$$\left|f_t(x)-f(x)\right|=\left|\frac{\sin tx}{t}\right|\le\Delta_t=\frac{1}{t}\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

Сходимость равномерная.

**Теорема 2.1 (критерий Коши равномерной сходимости).**

Если: $\{f_t(x),t\in T\}-$ семейство функций $f_t:X\to\mathbb{R},\mathcal{B}$ - база в $T$, $E\subset X$.

Тогда $f_t(x)\underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows}f(x)$ на $E\ \Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}:\forall x\in E\forall t_1,t_2\in B\ \left|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\right|<\varepsilon.$$

◄ ($\Rightarrow$) Если семейство равномерно сходится, то по определению:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}\ \forall x\in E\ \forall t_1,t_2\left|f_{t_1}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2},\left|f_{t_2}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow\left|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\right|<\varepsilon.$$

($\Leftarrow$) $\forall\varepsilon>0\ \exists B\in\mathcal{B}:\forall x\in E\ \forall t_1,t_2\in B\ \left|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\right|<\varepsilon.$

Для любого фиксированного $x\in E$ по критерию Коши для функций (если рассматривать $f_t(x)$ как функцию $t$) $\exists f(x):\ f_t(x)\underset{\mathcal{B}}{\to}f(x)$ поточечно.

Теперь осуществим в неравенстве $\left|f_{t_1}(x)-f_{t_2}(x)\right|<\varepsilon$ предельный переход при базе $\mathcal{B}$ по переменной $t_1$: $\left|f(x)-f_{t_2}(x)\right|\le\varepsilon\ \forall x\in E,\forall t_2$. Т.е. $f_t(x)$ сходится равномерно при базе $\mathcal{B}$.►

***Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов***

**Определение 2.10.** Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x),n\in\mathbb{N}\}$ функций $f_n(x):X\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$ сходится к функции $f(x)$ на

$E \subset X:\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x),\ x \in E$ если

$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in E\ \exists N(\varepsilon, x): \forall n > N\ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon.$

**Определение 2.11.** Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ функций $f_n(x): X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *сходится равномерно* к функции $f(x)$ на $E \subset X:\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall x \in E\ \forall n > N\ \left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$.

**Определение 2.12.** Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ функций $f_n: X \to \mathbb{C}$ сходится равномерно на $E \subset X$, если на $E$ сходится равномерно последовательность его частичных сумм.

**Теорема 2.2 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности функций).** $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $E \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x \in E\ \forall m, n > N:\ \left| f_m(x) - f_n(x) \right| < \varepsilon.$

**Теорема 2.3 (критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда).** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$ на $E \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall x \in E\ \forall n > N\ \forall p:\ \left| f_{n+1}(x) + \ldots + f_{n+p}(x) \right| < \varepsilon.$

**Следствие 2.1 (необходимый признак равномерной сходимости ряда).** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $E: \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} S(x)$, то $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$

**Следствие 2.2 (критерий равномерной сходимости ряда).** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на $E$ $\Leftrightarrow$ $r_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0,\ x\in E.$

**Утверждение 2.1.** Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ сходится равномерно на $X$ и $\forall x\in X, \forall n\in N$ $|a_n(x)| \le b_n(x)$.

Тогда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $X$.

◄ $\big||a_n(x)|+\ldots+|a_m(x)|\big| \le |b_n(x)+\ldots+b_m(x)| < \varepsilon.$ ►

**Теорема 2.4 (признак Вейерштрасса).**

Пусть: числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится и $\forall x\in X, \forall n\in N$ $|a_n(x)| \le b_n$.

Тогда: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $X$.

<u>**Пример 2.5.**</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ln(x^6)}{n^2}$ – равномерно сходится, т.к. $|a_n(x)| \le \frac{1}{n^2}$.

## Лекция 4

### ***Свойства равномерно сходящихся семейств функций, зависящих от параметра***

Пусть $f_n(x)\in C(E),\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x)$. Будет ли $f(x)\in C(E)$? То есть, если последовательность непрерывных функций $f_n$ сходится к функции $f$, будет ли и $f$ непрерывной? Оказывается, это вообще говоря, несправедливо. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для непрерывности нужно, чтобы:

$$f\left(x_0\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(x_0\right) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n\left(x\right) \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n\left(x\right) = \lim_{x\to x_0} f\left(x\right).$$

Таким образом, $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если центральные предельные переходы коммутируют между собой.

**<u>Пример 2.6.</u>** $f_n\left(x\right) = x^n$, $f_n\left(x\right) \in C\left[0,1\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$f_n\left(x\right) \underset{n\to\infty}{\to} f\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0,1\right), \\ 1, & x = 1, \end{cases} \quad f\left(x\right) \notin C\left[0,1\right].$$

### *Условия коммутативности двух предельных переходов. Коммутативная диаграмма*

**Теорема 2.5.** Пусть $\left\{F_t\left(x\right), t \in T\right\}$ – семейство функций $F_t : X \to \mathbb{C}$, $\mathcal{B}_x$ – база в $X$, $\mathcal{B}_T$ – база в $T$,

1. $F_t\left(x\right) \underset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} F\left(x\right)$;

2. $\forall t \in T \ \ \exists \lim\limits_{\mathcal{B}_x} F_t\left(x\right) = A_t$.

Тогда: $\lim\limits_{\mathcal{B}_T}\lim\limits_{\mathcal{B}_x} F_t\left(x\right) = \lim\limits_{\mathcal{B}_x}\lim\limits_{\mathcal{B}_T} F_t\left(x\right) = A.$

Эту теорему можно записать в виде диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
F_t\left(x\right) \arrow[r, "\rightrightarrows"', "\mathcal{B}_T"'] \arrow[d, "\mathcal{B}_x"'] & F\left(x\right) \arrow[d, "\mathcal{B}_x"'] \arrow[dl, dash, dashed] \\
A_t \arrow[r, "\mathcal{B}_T"'] & A
\end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Над диагональю записано «если», а снизу – «то».

◀ 1) Докажем, что $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t = A$. Поскольку $F_t(x) \underset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} F(x)$, по критерию

Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}_T : \forall t_1, t_2 \in B\ \forall x \in X : \left|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)\right| < \varepsilon.$

Переходя в неравенстве

$$\left|F_{t_1}(x) - F_{t_2}(x)\right| < \varepsilon \tag{2.2}$$

к пределу при базе $\mathcal{B}_X$, получим:

$$\left|A_{t_1} - A_{t_2}\right| \le \varepsilon. \tag{2.3}$$

В силу критерия Коши $\exists \lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t = A$.

2) Докажем, что $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x) = A$.

Не меняя $t_2$, совершим в неравенствах (2.2) и (2.3) предельный переход по базе $\mathcal{B}_T$ относительно параметра $t_1$. Получим:

$$\left|F(x) - F_{t_2}(x)\right| \le \varepsilon \ \ (\forall x \in X); \tag{2.4}$$

$$\left|A - A_{t_2}\right| \le \varepsilon. \tag{2.5}$$

В силу условия 1: $\forall t_2 \in B_T\ \exists B_x \in \mathcal{B}_x : \forall x \in B_x\ \left|F_{t_2}(x) - A_{t_2}\right| < \varepsilon.$

Используя последнее неравенство и неравенства (2.4),(2.5), получаем:

$\left|F(x) - A\right| < 3\varepsilon\ \ \forall x \in B_x \in \mathcal{B}_x \Rightarrow \lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x) = A.$

3) Из условий теоремы и пунктов 1 и 2 имеем:

$\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F_t(x) = A_t$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} A_t = A$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} F_t(x) = F(x)$, $\lim\limits_{\mathcal{B}_X} F(x) = A$.

Таким образом, $\lim\limits_{\mathcal{B}_T} \lim\limits_{\mathcal{B}_X} F_t(x) = \lim\limits_{\mathcal{B}_X} \lim\limits_{\mathcal{B}_T} F_t(x) = A.$ ▶

### *Непрерывность и предельный переход*

**Теорема 2.6.** Пусть: $\left\{ f_t\left(x\right), t\in T\right\}$ – семейство функций $f_t : X \to \mathbb{C}$, $f_t\left(x\right)\underset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f\left(x\right)$ на $X$, $\mathcal{B}_T$ – база в $T$; $\forall t\ f_t$ непрерывны в точке $x_0 \in X$.

Тогда: $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.

◄ В теореме 2.3 $\mathcal{B}_T$ – произвольная база, база $\mathcal{B}_X : x \to x_0$:

$$
\begin{array}{ccc}
 & f_t\left(x\right)\underset{\mathcal{B}_T}{\rightrightarrows} f\left(x\right) & \\
x\to x_0 \downarrow & & \downarrow x\to x_0 \\
 & f_t\left(x_0\right)\underset{\mathcal{B}_T}{\to} f(x_0) &
\end{array}
$$

получаем, что $f\left(x\right)\underset{x\to x_0}{\to} f(x_0)$, т.е. $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$.►

**Следствие 2.3.** Пусть: $f_n : X \to \mathbb{C}$, $f_n\left(x\right)\in C(X)\ \forall n\in\mathbb{N}$, последовательность функций $\left\{ f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ (ряд функций $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$) сходится на $X$ равномерно.

Тогда предельная функция последовательности (сумма ряда) непрерывна на $X$.

**Теорема 2.7 (Дини).** Пусть:

1) $K$ – компакт, $f_n \in C\left(K\right)$,

2) $\forall x\in K$ последовательность $f_n\left(x\right)$ монотонна,

3) $f_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\to} f\left(x\right)$, $f\in C\left(K\right)$.

Тогда: $f_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f\left(x\right)$ на $K$.

◄ Пусть $f_n(x)$ монотонно не убывает: $f_n(x)\uparrow$.

$\forall x \in K \quad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$:

$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \ \exists n(\varepsilon, x): \forall m > n,\ 0 < f(x) - f_m(x) < \varepsilon \Rightarrow$

$\exists U(x): \forall \xi \in U(x) \ \ 0 < f(\xi) - f_m(\xi) < 2\varepsilon$ (поскольку $f, f_m$ непрерывны). Система окрестностей $U(x)$ образует покрытие компакта: $K \subset \bigcup\limits_{x\in K} U(x)$, выделяем из него конечное подпокрытие: $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{N} U_i(x_i)$.

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x_i \ \exists n_i(\varepsilon, x_i) \ \exists \bar{N} = \max\{n_1, ..., n_N\}$:

$\forall \xi \in K \ \forall n > \bar{N} \ \ 0 < f(\xi) - f_n(\xi) < \varepsilon \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{\to}{\to}} f(x)$.►

**Следствие 2.4.** Пусть $a_n(x) \in C(K), a_n(x) \geq 0, \forall n \in N$, $K$ – компакт, $\exists S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) \in C(K)$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $K$.

## Лекция 5

***Признак Абеля – Дирихле равномерной сходимости функционального ряда***

**Утверждение 2.2 (дискретное преобразование Абеля).**

$$\sum_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n \quad (a_k = A_k - A_{k-1}).$$

◄ $\sum\limits_{k=n}^{m} a_k b_k = \sum\limits_{k=n}^{m} A_k b_k - A_{k-1} b_k = \sum\limits_{k=n}^{m} A_k b_k - \sum\limits_{k=n-1}^{m-1} A_k b_{k+1} =$

$= \sum\limits_{k=n}^{m-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_m b_m - A_{n-1} b_n$. ►

**Определение 2.13.** Будем называть функцию $f : X \to \mathbb{C}$ равномерно ограниченной на множестве $E \subset X$, если $\exists M : \forall x \in E \ \left|f(x)\right| \le M$.

**Определение 2.14.** Будем называть последовательность функций $\{f_n(x)\}$ неубывающей $(f_n(x)\uparrow)$ (невозрастающей $(f_n(x)\downarrow)$) на множестве $X$, если $\forall x \in X$ неубывающей (невозрастающей) является соответствующая числовая последовательность. Эти последовательности – монотонные.

**Лемма 2.1.** Пусть : $b_n(x)\uparrow(\downarrow)$ на $X$, $\left\{a_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ – равномерно ограничена на $X$ ($\exists M \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X : |a_n(x)| \le M$), $a_k = A_k - A_{k-1}$.

Тогда:

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x)\right| \le 4 \max_{n-1\le k\le m}\left\{|A_k|\right\}\max\left\{|b_n|,|b_m|\right\}. \qquad (2.6)$$

◄ $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=n}^{m-1} A_k\left(b_k - b_{k+1}\right) + A_m b_m - A_{n-1} b_n\right| \le$

$\le \left|\sum_{k=n-1}^{m-1} |A_k|\left(b_k - b_{k+1}\right)\right| + \left|A_m b_m\right| + \left|A_{n-1} b_n\right| \le$

$\le \max_{n-1\le k\le m-1}|A_k| \sum_{k=n-1}^{m-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) + \left|A_m b_m\right| + \left|A_{n-1} b_n\right| \le$

$\le \max_{n-1\le k\le m}|A_k|\left(\left|b_{n-1}\right| + \left|b_m\right| + \left|b_n\right| + \left|b_m\right|\right)$. ►

**Теорема 2.8 (признак Абеля –Дирихле).**

Пусть $a_n : X \to \mathbb{C}, b_n : X \to \mathbb{R}, E \subset X$ и выполнены:

*1) условия Абеля:*

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно на $E$;

б) последовательность $b_n(x)$ монотонна и равномерно ограничена на $E$;

или

*2) условия Дирихле:*

а) $S_N(x) := \sum_{n=1}^{N} a_n(x)$, $S_N(x)$ равномерно ограничена на $E$,

б) последовательность $b_n(x)$ монотонно и равномерно на $E$ стремится к нулю.

Тогда сходится равномерно на $E$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x). \tag{2.7}$$

◀ Введем последовательность $A_k(x)$:

$a_k = A_k - A_{k-1}, A_k = S_k - S_{n-1} = \sum_{i=n}^{k} a_i(x).$

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно $\Rightarrow$ по критерию Коши равномерной сходимости: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \forall m, n > N\ \forall x \in E : |A_m| < \varepsilon$.

Последовательность $b_n(x)$ равномерно ограничена:

$\exists M : \forall x \in E\ \forall n\ |b_n(x)| < M$. Используя неравенство (2.6), получаем:

$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x) \right| \le 4M\varepsilon = \tilde{\varepsilon}.$ В силу критерия Коши ряд (2.7) равномерно сходится.

2. Из ограниченности $S_N(x)$ получаем: $\exists M : \forall m\ |A_m| < M$. Т.к. $b_n(x)$ монотонно и равномерно стремится к нулю:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \forall x \in E\ \forall n > N : |b_n(x)| < \varepsilon$. Отсюда, используя неравенство (2.6), получаем: $\left| \sum_{k=n}^{m} a_k(x) b_k(x) \right| \le 4\varepsilon M = \tilde{\varepsilon}.$ В силу критерия Коши ряд (2.7) равномерно сходится. ▶

Следствием этой теоремы является признак Абеля – Дирихле для числового ряда.

**Пример 2.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$. При $\alpha>1$ ряд равномерно сходится по признаку Вейерштрасса: $\left|a_n(x)\right|\le\frac{1}{n^{\alpha}}$; при $\alpha\le 0$ ряд расходится.

При $0<\alpha\le 1$: обозначим $u_n(x):=\sin nx$. Из примера 1.8 следует $\left|\sum\limits_{n=1}^{N}u_n(x)\right|<\left|\sin\frac{x}{2}\right|^{-1}$.

Если множество $E$ таково, что $\inf\limits_{x\in E}\left|\sin\frac{x}{2}\right|=k>0$ (например, $E=(\varepsilon,2\pi-\varepsilon)$), то $\left|S_N(x)\right|<\frac{1}{k}$. Так как $v_n:=\frac{1}{n^{\alpha}}\downarrow 0,\ \alpha>0,$ по признаку Дирихле ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ сходится равномерно при $\alpha>0$.

Покажем, что при $0<\alpha\le 1$ для $\forall\delta>0$ ряд сходится неравномерно на множестве $(0,\delta)$. Для $\forall\delta>0$ найдется $n$, так что $x=\frac{\pi}{4n}\in[0,\delta]$. Рассмотрим отрезок ряда: $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$ при $x=\frac{\pi}{4n}$. Для $n+1\le k\le 2n$ $\frac{\pi}{4}<kx\le\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}<\sin kx.$ Тогда $\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{\sin kx}{k^{\alpha}}>\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^{\alpha}}>$ $>\frac{\sqrt{2}}{2}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, так как $k^{\alpha}\le k\le 2n$ при $0<\alpha\le 1$. В силу критерия Коши ряд на промежутке $(0,\delta)$ сходится неравномерно.

### *Интегрирование и предельный переход*

**Теорема 2.9.** Пусть: $\left\{ f_t\left(x\right), t \in T\right\}$ – семейство функций

$f_t : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$, $f_t \in \Re\left[a,b\right]$, $f_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\left[a,b\right]$, $\mathcal{B}$ – база в $T$.

Тогда: $f \in \Re[a,b]$ и $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{\mathcal{B}} f_t\left(x\right)dx = \lim\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_a^b f_t\left(x\right)dx.$

◄ Построим $\tau = \left(P,\xi\right) -$ разбиение отрезка $\left[a,b\right]$ с отмеченными точками,

$F_t\left(P,\xi\right) := \sum\limits_{i=1}^{n} f_t\left(\xi_i\right)\Delta x_i$, $F\left(P,\xi\right) := \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i -$ интегральные суммы.

По условию $f_t(x) \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathcal{B}\ \forall t \in \mathcal{B}\ \forall x \in \left[a,b\right] : \left| f_t\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тогда $\left|F_t\left(P,\xi\right) - F\left(P,\xi\right)\right| = \left| \sum\limits_{i=1}^{n}\left( f_t\left(\xi_i\right) - f\left(\xi_i\right)\right)\Delta x \right| < \varepsilon$ при любом

разбиении $\tau = \left(P,\xi\right)$ из множества разбиений $\Re = \left\{\left(P,\xi\right)\right\}$ отрезка $\left[a,b\right]$.

Т.е. $F_t\left(P,\xi\right) \underset{\mathcal{B}}{\rightrightarrows} F\left(P,\xi\right)$ на $\Re$ при базе $\mathcal{B}$. Возьмем в $\Re$ базу $\lambda(P) \to 0$

и построим коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{i=1}^{n} f_t\left(\xi_i\right)\Delta x_i =: F_t\left(P,\xi\right) \arrow[r, "\rightrightarrows"', "\mathcal{B}"'] \arrow[d, "\lambda(P)\to 0"', "\exists"] & F\left(P,\xi\right) := \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)\Delta x_i \arrow[d, "\exists"', "\lambda(P)\to 0"] \arrow[dl, dashed, dash, "\exists"] \\
\int\limits_a^b f_t\left(x\right)dx := A_t \arrow[r, "\mathcal{B}"'] & A := \lim\limits_{\mathcal{B}} \int\limits_a^b f_t\left(x\right)dx = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx
\end{tikzcd}$$

Утверждение теоремы следует из этой диаграммы. ►

**Следствие 2.5.** Пусть $\left\{ f_n\left(x\right), n \in \mathbb{N} \right\}$ – последовательность функций,

$f_n : \left[a,b\right] \to \mathbb{R}$, $f_n\left(x\right) \in \Re\left[a,b\right]$, $f_n\left(x\right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $\left[a,b\right]$.

Тогда: $f\left(x\right) \in \Re\left[a,b\right], \int\limits_a^b f\left(x\right)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n\left(x\right)dx.$

**Следствие 2.6 (теорема о почленном интегрировании ряда).**

Пусть: $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \in \Re\left[a,b\right]$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right) \rightrightarrows S(x)$ на $\left[a,b\right]$.

Тогда: $\exists \int\limits_a^b \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n\left(x\right)dx.$

(Равномерно сходящийся ряд можно почленно интегрировать.)

**Следствие 2.7 (теорема о почленном интегрировании последовательности).**

Пусть: $f_n(x) \rightrightarrows f\left(x\right), n \to \infty$, $f$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f_n \in \Re\left[a,b\right]$.

Тогда: $f \in \Re\left[a,b\right]$, $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

**Теорема 2.10.** Пусть: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)$ равномерно сходится на $\left[a,b\right]$,

$f_n \in \Re\left[a,b\right]$.

Тогда: $\forall x \in \left[a,b\right]$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x f_n\left(t\right)dt = \int\limits_a^x \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(t\right)dt$ равномерно сходятся.

◄ Обозначим $S_n(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(t), S(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t).$ В силу равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на $[a,b]$: $\Delta := \sup\limits_{t\in[a,b]} |S_n(t)-S(t)| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Следовательно, $\forall x\in[a,b]$: $\left|\int\limits_a^x S_n(t)dt-\int\limits_a^x S(t)dt\right|=\left|\int\limits_a^x (S_n(t)-S(t))dt\right|\le$

$\le\int\limits_a^x |S_n(t)-S(t)|dt<(b-a)\Delta \underset{n\to\infty}{\to} 0.$►

Лекция 6

***Дифференцирование и предельный переход***

**Теорема 2.11**. Пусть для ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ \ f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$:

1. $\forall n\, \exists f_n'(x)$ на $[a,b]$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\varphi(x)$ равномерно сходится на $[a,b]$;
3. $\exists x_0\in[a,b]:\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)=S(x_0).$

Тогда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)=S(x)-$ равномерно сходится на $[a,b]$, $\exists S'(x)=\varphi(x).$

◄ Будем доказывать утверждение с дополнительным условием: $f_n(x)\in C^1[a,b]$ (т.е. $f_n'(x)\in C[a,b]$). Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)=\varphi(x)$ применим Теорему 2.10 о почленном интегрировании:

$$S(x)-S(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(f_n(x)-f_n(x_0)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)dt=\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(t)dt\,.$$

Этот ряд сходится равномерно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)=S(x_0)$ сходится

(равномерно) $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n\left(x\right)=S(x)$ равномерно сходится.

В силу Следствия 2.1 $\varphi \in C[a,b] \Rightarrow$

$$\exists\left(\int\limits_{x_0}^{x}\varphi(t)\,dt\right)' = \varphi(x) = S'(x) - \underset{0}{S'(x_0)} = S'(x).$$ ►

### *2.2. Степенные ряды*

**Определение 2.15.** Будем называть *степенным рядом*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (c_n, z, z_0 \in \mathbb{C}). \tag{2.8}$$

**Теорема 2.12 (о характере сходимости степенного ряда).** Обозначим $K := \{|z-z_0|<R\}$ – круг радиуса $R$, где $R$ определяется формулой *Коши–Адамара:*

$$R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}. \tag{2.9}$$

Тогда ряд (2.8):

1) сходится абсолютно в $K$;

2) расходится в области $|z-z_0|>R$;

3) сходится равномерно в любом замкнутом круге $\bar{K}_1 \subset K$.

◄1) Следует из применения радикального признака Коши к ряду (2.8) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = q < 1.$

2) При $|z-z_0|>R$: $a_n = \left(z-z_0\right)^n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0,$ т.е. нарушен необходимый признак сходимости.

3) Для любого замкнутого круга $\bar{K}_1 \subset K$ выбираем

$\xi : |z - z_0| < |\xi - z_0| < R$ (т.е. $\xi$ вне $\bar{K}_1$, но внутри $K$). Обозначим

$q := \left| \dfrac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n |\xi - z_0|^n$ сходится $\Rightarrow c_n |\xi - z_0|^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

$$|a_n| = |c_n||z - z_0|^n = |c_n||\xi - z_0|^n \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right|^n = |c_n||\xi - z_0|^n q^n < q^n, q < 1.$$

Таким образом, ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса внутри $\bar{K}_1$. ►

***Замечание 2.2.*** Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, которая следует из применения к степенному ряду формулы Даламбера.

***Замечание 2.3.*** При $|z - z_0| = R$ ряд может сходиться, а может расходиться.

**Пример 2.8.** Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}, |z| = 1,$ сходится; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}, |z| = 1,$ расходится.

**Теорема 2.13 (первая теорема Абеля).** Если ряд (2.8) сходится в точке $z^*$, то он сходится $\forall z : |z - z_0| < |z^* - z_0|$.

**Теорема 2.14 (вторая теорема Абеля).** Если ряд (2.8) сходится в точке $\xi$, то он сходится равномерно на $[z_0, \xi]$.

◄ $z \in [z_0, \xi] \Rightarrow z = z_0 + t(\xi - z_0), t \in [0,1] \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n =$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n t^n (\xi - z_0)^n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n (\xi - z_0)^n$ равномерно сходится (т.к. это числовой ряд), последовательность $t^n$ – монотонна и равномерно ограничена $\Rightarrow$ по признаку Абеля ряд равномерно сходится. ►

### *Аналитические функции в действительной области*

**Теорема 2.15 (о дифференцировании степенного ряда).**

Пусть

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n. \qquad (2.10)$$

Радиус сходимости этого ряда $R>0$.

Тогда: $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n n(x-x_0)^{n-1}$ и радиус сходимости этого ряда $R'=R$.

◄ $R'=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|n}\right)^{-1}=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}=R$ (т.к. $\sqrt[n]{n}\underset{n\to\infty}{\to}1$). При $|x-x_0|\le r<R$ формально продифференцированный ряд сходится равномерно и ряд (2.10) сходится в точке $x=x_0$. Следовательно, ряд (2.10) можно почленно дифференцировать по теореме 2.9.►

**Определение 2.16.** Будем называть функцию аналитической в точке, если в окрестности этой точки она раскладывается в ряд (2.10).

**Следствие 2.8.** Если функция $f$ аналитическая в точке $x_0$, то она имеет в этой точке производные всех порядков: $f^{(n)}(x_0)=n!c_n$.

◄ $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n n(x-x_0)^{n-1}\Rightarrow f'(x_0)=c_1$, аналогично получаются производные произвольных порядков. ►

**Определение 2.17.** Будем называть рядом Тейлора для функции $f$ в окрестности точки $x_0$ ряд

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \qquad (2.11)$$

***Замечание 2.4.*** Из формулы (2.11) следует единственность разложения в степенной ряд (т.к. производные единственны).

Лекция 7

**Теорема 2.16 (об интегрировании степенных рядов).**

Пусть ряд (2.10) сходится на интервале $I=(x_0-R, x_0+R)$, $R>0$.

Тогда $\forall x\in I\ \exists\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$

(степенной ряд можно почленно интегрировать внутри интервала сходимости, радиус сходимости нового ряда $R''=R$).

◄ $R''=\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|/(n+1)}\right)^{-1}=\left(\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1}=R$ (т.к. $\sqrt[n]{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}1$). При $|x-x_0|\le r<R$ ряд сходится равномерно. ►

***Замечание 2.5.*** Таким образом, степенные ряды можно почленно интегрировать и дифференцировать внутри интервала сходимости.

**Пример 2.9.** Из существования всех производных функции не следует ее аналитичность: $f\in C^{\infty}$, но не аналитическая, где

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x\ne 0,\\ 0, x=0.\end{cases}$$

**Теорема 2.17.** Пусть $f\in C^{n+1}\left(O(x_0)\right)$,

$$r_n(x):=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$\xi:=x_0+\theta(x-x_0), 0\le\theta\le 1.$

Тогда: $f$ – аналитическая $\Leftrightarrow r_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}0$.

**Теорема 2.18.** Пусть: $f$ имеет в $O(x_0)=(x_0-h,x_0+h)$ производные всех порядков, ограниченные в совокупности, т.е. $\exists c:\forall n\in N,\forall x\in O(x_0)\ \left|f^{(n)}(x)\right|<c$.

Тогда: $f$ является аналитической в $O(x_0)$.

◄ $$|r_n|=\frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}\right|}{(n+1)!}\le c\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\le c\frac{h^{n+1}}{(n+1)!};$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n!}$ сходится по признаку Даламбера, т.к. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{h}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}0\ \Rightarrow f$ аналитическая в силу теоремы 2.17. ►

**Формула Стирлинга.** $n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n},\ n\to\infty.$

### ***Разложение элементарных функций в ряд Тейлора***

Пусть в формуле (2.11) $x_0=0$. Ряд Тейлора в этом случае называется *рядом Маклорена.*

1. $f(x)=e^x$.

$\forall n\in\mathbb{N}: f^{(n)}(x)=e^x,\ \ \forall x\in(-a,a):\left|f^{(n)}(x)\right|<e^a\Rightarrow\ f$ – аналитическая в силу Теоремы 2.18 $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$

***Замечание 2.6.*** В силу первой теоремы Абеля этот ряд сходится $\forall z\in\mathbb{C}:|z|<|x|$, и функцию $e^z$ можно определить на $\mathbb{C}$ как $e^z:=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$.

2. $f(x)=\sin x$.

$f^{(n)}(0)=0$ или $(-1)^n$, $\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\mathbb{R}:|f^{(n)}(x)|\le1\Rightarrow\ f$ – аналитическая в силу Теоремы 2.18 и $\forall x\in\mathbb{R}$ $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \; x \in \mathbb{R}.$

**Замечание 2.7.** Функции $\sin z, \cos z$ можно определить на $\mathbb{C}$ аналогично функции $e^z$.

**Утверждение 2.3.** $\forall z \in \mathbb{C}$ $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.

Для $z = x, \; x \in \mathbb{R}$ получаем отсюда *формулу Эйлера*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Следствие 2.9.** $e^{i\pi} = -1.$

4. $f(x) = \ln(1+x).$

а) $\forall x \in (-1,1)$:

$$\ln(1+x) = \int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\right) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n};$$

б) $x = 1$:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ – ряд Лейбница $\Rightarrow$ он сходится. По второй теореме Абеля ряд равномерно сходится на $[0,1]$. А так как $\ln(x) -$ непрерывная функция, имеем: $\ln 2 = \lim\limits_{x \to 1-0} \ln(1+x) = \lim\limits_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$. Из а) и б) получаем $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \; x \in (-1,1].$

5. $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - n + 1) x^n}{n!}. \tag{2.12}$$

$|x| < 1, \forall \alpha$ сходится;

$x=1$, $\alpha \geq -1-$ сходится, $\alpha < -1-$ расходится;
$x=-1$, $\alpha > 0-$ сходится, $\alpha \leq 0-$ расходится.

Лекция 8

### *2.3. Приближения непрерывных функций. Теорема Стоуна*

#### *Алгебра функций*

**Определение 2.18.** Будем называть вещественной (комплексной) *алгеброй* $A$ над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ на множестве $X$ совокупность вещественно (комплексно) значных функций $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, если

$\forall f, g \in A, \forall \alpha \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \Rightarrow f+g \in A,\ f \cdot g \in A, \alpha f \in A.$

**Определение 2.19.** Будем говорить, что семейство $S$ функций $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *разделяет точки* множества $X$, если $\forall x_1, x_2 \in X$ $\exists f \in S : f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Определение 2.20.** Будем говорить, что семейство $S$ функции $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ *не исчезает* на множестве $X$, если $\forall x_0 \in X\ \exists f \in S : f(x_0) \neq 0.$

**Пример 2.10.** Семейство полиномов $S=\{P_n(x)=c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_0 \mid n \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{R}, x \in X \subset \mathbb{R}\}$ есть вещественная алгебра на множестве $X$. Алгебра разделяет точки $X$, (разделяющая функция $x$) и не исчезает на $X$.

**Лемма 2.2.** Пусть: $A-$ вещественная (комплексная) алгебра на $X$, $A$ разделяет точки $X$ и не исчезает на $X$.

Тогда: $\forall x_0, x_1 \in X, \forall c_0, c_1 \in \mathbb{R}(\mathbb{C})\quad \exists f \in A : f(x_0)=c_0, f(x_1)=c_1.$

◄ 1) Построим функцию $z \in A : 0 \neq z(x_0) \neq z(x_1) \neq 0$. Так как $A$ разделяет точки $X$, то $\exists h \in A : h(x_0) \neq h(x_1)$. Если $h(x_0) \neq 0, h(x_1) \neq 0$, то $z := h$.

Если $h(x_0)=0 \Rightarrow$т.к. $A$ не исчезает на $X$, то $\exists g \in A: g(x_0) \neq 0.$

Положим $z := h + \lambda g,$ где $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{C}(\mathbb{R}).$ Тогда $z(x_0) = h(x_0) + \lambda g(x_0) = \lambda g(x_0) \neq 0.$ Далее, $\lambda$ можно выбрать так, чтобы $z(x_1) = h(x_1) + \lambda g(x_1) \neq \lambda g(x_0) = z(x_0),$ $z(x_1) = h(x_1) + \lambda g(x_1) \neq 0$ ($\lambda g(x_1) \neq -h(x_1),$ $\lambda(g(x_0) - g(x_1)) \neq h(x_1)$). Таким образом, $z -$искомая функция: она разделяет точки $x_0, x_1$ и не обращается в этих точках в нуль.

2) Ищем $f$ в виде $f := \alpha z + \beta z^2,$ $f \in A,$ т.к. $z \in A$ и $A$ – алгебра. Коэффициенты $\alpha, \beta$ являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} f(x_0) = \alpha z(x_0) + \beta z^2(x_0) = c_0, \\ f(x_1) = \alpha z(x_1) + \beta z^2(x_1) = c_1. \end{cases}$$

Определитель $\Delta$ этой системы:

$$\Delta = z(x_0) z^2(x_1) - z(x_1) z^2(x_0) = z(x_0) z(x_1)\big(z(x_1) - z(x_0)\big) \neq 0,$$

следовательно, существует единственное решение $\alpha, \beta$

$\Rightarrow \exists f \in A: f(x_0) = c_0, f(x_1) = c_1.$►

### *Банахова алгебра*

**Определение 2.21.** Будем называть *банаховой алгеброй* ($B$-алгеброй) алгебру $A$ над полем $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ с единицей $e$, если:

1) она снабжена нормой $\|\cdot\|$ и является относительно этой нормы банаховым пространством;
2) $\|e\| = 1$;
3) $\forall f, g \in A$ $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

**Определение 2.22.** Будем обозначать $C(K, \mathbb{R})$ ($C(K, \mathbb{C})$) множество функций $f : X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$, непрерывных на компакте $K$.

**Утверждение 2.4.** Множество $C(K,\mathbb{R})$ относительно нормы $\|f\|=\sup\limits_{x\in X}|f(x)|$ является банаховой алгеброй.

◄ 1) Сходимость по данной норме означает равномерную сходимость, а если последовательность непрерывных функций равномерно сходится, то она сходится к непрерывной функции. Следовательно, $C(K,\mathbb{R})$ является полным и банаховым пространством.

2) Единичным элементом является $e\equiv 1$.

3) $|f\cdot g|\le|f|\cdot|g|\Rightarrow\|f\cdot g\|\le\|f\|\cdot\|g\|$. ►

***Замечание 2.8.*** Далее рассмотрим задачу приближения функции из $C(K,\mathbb{R})$ функциями из какой-либо подалгебры этой алгебры (например, подалгебры полиномов).

**Лемма 2.3.** Если $A$ – замкнутая $(\bar{A}=A)$ подалгебра в $C(K,\mathbb{R})$, то:

1) $f\in A\Rightarrow|f|\in A$,

2) $f_1,\dots,f_n\in A\Rightarrow\min\limits_k\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}\in A,\max\limits_k\{f_1(x),\dots,f_n(x)\}\in A$.

◄ 1) а) Обозначим $B$ – алгебру полиномов на $[-1,1]$. Рассмотрим функцию $|t|$, $t\in[-1,1]$. Докажем, что $|t|\in\bar{B}$. В силу формулы (2.12) при $|x|<1,\alpha>0$ справедливо разложение:

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!}+\dots \qquad (2.13)$$

При $x=\pm1,\alpha>0$ – ряд сходится по признаку Гаусса. Следовательно, по второй теореме Абеля ряд (2.13) сходится равномерно на $-1\le x\le 1$. Поскольку функция $(1+x)^\alpha$ непрерывна на $[-1,1]$, формула (2.13) имеет место и для $x=-1$. В частности, ряд

$$\left(1-x^2\right)^\alpha = 1-\alpha x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)x^4}{2!} - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^6}{3!} + \ldots \quad (2.14)$$

равномерно сходится $\forall \alpha > 0$ при $\left|-x^2\right| < 1$. Полагая в (2.14) $\alpha = \frac{1}{2}$,

$t^2 = 1 - x^2$, при $|t| \le 1$ получим:

$$|t| = \left(t^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(1-t^2\right) + \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(1-t^2\right)^2 + \ldots .$$

Т.о., ряд многочленов равномерно сходится к $|t|$ на $[-1,1]$ и

$|t|$ является предельной точкой множества полиномов $B$, т.е. $|t| \in \overline{B}$ и

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P_n(t) \ \left\| |t| - P_n(t) \right\|_{C(-1,1)} < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.15)$$

б) Возьмём $f \in A$. Обозначим $M := \| f \|_{C(K,\mathbb{R})} \Rightarrow f(x) \in [-M, M]$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{M} \in [-1,1], \frac{f}{M} \in A.$$

В качестве $t$ в формуле (2.15) возьмём $\frac{f}{M}$:

$$\left\| \left|\frac{f}{M}\right| - P_n\left(\frac{f}{M}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow \left\| |f| - MP_n\left(\frac{f}{M}\right) \right\| < \varepsilon.$$

Таким образом, к $|f|$ сходится последовательность функций из

$A \Rightarrow |f| \in \overline{A} = A.$

2) Для $n = 2$: $\min(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\left(f_1 + f_2 - |f_1 - f_2|\right) \in A,$

$$\max(f_1, f_2) = \frac{1}{2}\left(f_1 + f_2 + |f_1 - f_2|\right) \in A.$$

Для $n > 2$ доказательство по индукции. ►

**Теорема 2.19 (Стоуна).** Если $A-$ разделяющая точки компакта $K$ и неисчезающая на $K$ подалгебра $C\left(K,\mathbb{R}\right)$, то $A$ всюду плотна в $C\left(K,\mathbb{R}\right)$, т.е. $\overline{A}=C\left(K,\mathbb{R}\right)$.

Иными словами, любую непрерывную на компакте $K$ вещественную функцию можно равномерно на $K$ приблизить функциями из $A$.

◄ 1) Зафиксируем $f\in C\left(K,\mathbb{R}\right)$ и точку $x\in K$. Докажем, что

$$\forall\varepsilon>0\ \exists g_x\in A: g_x\left(x\right)=f\left(x\right), g_x\left(t\right)>f\left(t\right)-\varepsilon\ \forall t\in K \qquad (2.16)$$

По лемме 2.3 $\forall y\in K$: $\exists h_y\in A: h_y\left(x\right)=f\left(x\right), h_y\left(y\right)=f\left(y\right)$.

Из непрерывности функций $f, h_y$ в точке $y$ вытекает, что в некоторой окрестности $U_y$ точки $y$ в $K$ выполняется неравенство

$$h_y\left(t\right)>f\left(t\right)-\varepsilon\ \forall t\in U_y.$$

Из покрытия $K$ системой таких окрестностей $U_y$, $y\in K$ выделим конечное подпокрытие: $K\subset\left\{U_{y1}\cup\ldots\cup U_{yn}\right\}$. Обозначим $g_x\left(t\right):=\max\limits_i\left\{h_{yi}(t)\right\}$. По лемме 2.3 $g_x\in\overline{A}$ и есть искомая функция.

2) Для $\forall x\in K$ находим окрестность $V_x$ точки $x$ в $K$, в которой

$$g_x\left(t\right)<f\left(t\right)+\varepsilon, \forall t\in V_x.$$

Покроем $K$ системой таких окрестностей, выделим конечное подпокрытие: $K\subset\left\{V_{x1}\cup\ldots\cup V_{xn}\right\}$, $g\left(t\right):=\min\limits_i\left\{g_{xi}(t)\right\}$, $g\left(t\right)\in\overline{A}$.

3) Из пунктов 1), 2) следует, что $\forall t\in K$ выполнены неравенства

$$g\left(t\right)-\varepsilon<f\left(t\right)<g\left(t\right)+\varepsilon,$$

т.е. $\left\|f-g\right\|_{C(K,\mathbb{R})}<\varepsilon$. Т.о.,$\forall f\in C\left(K,\mathbb{R}\right)$ $f\in\overline{A}\Rightarrow\overline{A}=C\left(K,\mathbb{R}\right)$. ►

Лекция 9

### *Комплексный вариант теоремы Стоуна*

**Определение 2.23.** Будем называть комплексную алгебру $A$ *самосопряжённой,* если она с любым своим элементом содержит ещё и его комплексно сопряжённый элемент (т.е. $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$).

**Теорема 2.20 (Комплексный вариант теоремы Стоуна).** Если $A-$ разделяющая точки компакта $K$ и неисчезающая на $K$ самосопряженная подалгебра $C(K,\mathbb{C})$, то $A$ всюду плотна в $C(K,\mathbb{C})$: $\overline{A} = C(K,\mathbb{C})$.

◀ 1) Пусть $A_R \subset A$ – подалгебра $A$, состоящая из вещественнозначных функций $\Rightarrow$ $A_R$ – вещественная банахова алгебра. Докажем, что $A_R$ разделяет точки $K$ и не исчезает на $K$. Поскольку $A$ самосопряженная: $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$. Следовательно,

$f \in A \Rightarrow \operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f, |f|^2 \in A \Rightarrow \operatorname{Im} f, \operatorname{Re} f, |f|^2 \in A_R$.

Так как $A$ не исчезает на $K$, то $\forall x_0 \in K\ \exists f_0 \in A\colon f_0(x_0) \neq 0$ $\Rightarrow \left|f_0(x_0)\right|^2 \neq 0$. Но $|f_0|^2 \in A_R \Rightarrow A_R$ не исчезает на $K$.

Далее

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \operatorname{Re} f(x_1) \neq \operatorname{Re} f(x_2) \vee \operatorname{Im} f(x_1) \neq \operatorname{Im} f(x_2),$$

следовательно, $A_R$ разделяет $K$.

2) $\forall f \in C(K,\mathbb{C}),\ f = a + ib \Rightarrow a \in C(K,\mathbb{R}), b \in C(K,\mathbb{R})$.

По теореме Стоуна для вещественной алгебры: $\forall \varepsilon > 0\ \exists a_1 \in A_R, b_1 \in A_R$ : $\|a - a_1\|_{C(K,\mathbb{R})} < \varepsilon, \|b - b_1\|_{C(K,\mathbb{R})} < \varepsilon$. Но тогда $f_1 := a_1 + ib_1,\ f_1 \in A$ и

$$\| f - f_1\|_{C(K,\mathbb{C})} = \sup_{x\in K}|f - f_1| = \sup_{x\in K}\left((a-a_1)^2 + (b-b_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \sqrt{2}\varepsilon = \varepsilon_1.$$

Таким образом, любую функцию $f \in C(K,\mathbb{C})$ можно с любой точностью равномерно приблизить функциями из $A$ на $K \Rightarrow \overline{A} = C(K,\mathbb{C})$.▶

**Теорема 2.21 (Вейерштрасса №1).** Функцию $f \in C(K,\mathbb{C})$ ($K \subset \mathbb{R}^n$ – компакт) можно с любой точностью аппроксимировать последовательностью многочленов $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, равномерно сходящейся к $f$.

Если, кроме того, $f \in C(K,\mathbb{R})$, то $P_n(x)$ можно выбрать с вещественными коэффициентами.

◄ Множество функций $\{1, x_1, ..., x_n\}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ порождает алгебру полиномов $A$. Алгебра $A$ является самосопряжённой, не исчезает на $K$, разделяет точки $K$. По теореме Стоуна $A$ всюду плотна в $C(K,\mathbb{C})$: $\overline{A} = C(K,\mathbb{C})$. Т.о., любую функцию $f \in C(K,\mathbb{C})$ можно с любой точностью аппроксимировать многочленами из $A$.

Если $f \in C(K,\mathbb{R})$, то полиномы – из вещественной подалгебры. ►

***Замечание 2.9.*** Чаще всего теоремой Вейерштрасса №1 пользуются в случае, когда $K$ – это отрезок из $\mathbb{R}$. То есть, множество многочленов на отрезке всюду плотно в пространстве непрерывных на этом отрезке функций.

**Определение 2.24.** Будем обозначать $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ множество непрерывных, $2\pi$ - периодических функций:

$$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{ f \in C[-\pi,\pi] \ \middle| f(-\pi) = f(\pi) \right\}.$$

**Определение 2.25.** Будем называть *тригонометрическими полиномами* функции

$$Q(\varphi) = a_0 + \sum_{k\in N} a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi. \qquad (2.17)$$

**Теорема 2.22 (Вейерштрасса №2).** Функцию $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ с любой степенью точности можно аппроксимировать равномерно сходящейся к ней последовательностью тригонометрических полиномов вида (2.17).

Если, кроме того, $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, то $Q_n(\varphi)$ можно выбрать с вещественными коэффициентами.

◄ 1) Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. Множество функций $\left\{z, \frac{1}{z}\right\}$ порождает алгебру функций $A = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k\right\}$. $A$ является самосопряжённой, не исчезает на $K$, разделяет точки $K$. По теореме Стоуна $\overline{A} = C(K,\mathbb{C})$.

2) Так как на $K$ $|z|=1$, то $z = e^{i\phi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$ и мы можем построить отображение алгебры $C(K,\mathbb{C})$ в алгебру $2\pi$ - периодических на $\mathbb{R}$ функций: $A = \left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{i\varphi k}\right\}, \overline{A} = C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. По формуле Эйлера ($e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$) функции $e^{ik\varphi}$ можно представить через тригонометрические функции $\Rightarrow \forall f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ может быть аппроксимирована равномерно сходящейся к ней последовательностью тригонометрических полиномов. ►

***Замечание 2.10.*** Если взять пространство $C([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ (без периодичности), то алгебра тригонометрических полиномов уже не будет полна в этом пространстве, т.к. она не разделяет точки $-\pi$ и $\pi$ отрезка. Для функций из $C([0,\pi],\mathbb{C})$ теорема Вейерштрасса №2 верна, т.к. их можно чётным образом продолжить на $[-\pi,0)$ и они станут $2\pi$ - периодическими.

# Глава 3. Интегралы, зависящие от параметра

Лекция 10

### *3.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра*

**Определение 3.1.** Будем называть *собственным интегралом, зависящим от параметра*, функцию вида:

$$F(y)=\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b f_y(x)dx, \quad y\in T_y, \tag{3.1}$$

если для любого фиксированного $y$ интеграл является собственным.

**Теорема 3.1 (непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра).**

Пусть: $f(x,y)\in C(P), P=\{(x,y)|a\le x\le b, c\le y\le d\}\subset\mathbb{R}^2.$

Тогда: $\exists F(y)=\int_a^b f(x,y)dx,\ F\in C[c,d].$

◄ Так как $P$ – компакт и $f\in C(P)\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на $P$. Для $\forall y\in[c,d]$ введем функции $\varphi_y(x)=f(x,y)$.

Так как $\varphi_y(x)\rightrightarrows\varphi_{y_0}(x),\ y\to y_0$ при $x\in[a,b]$, то

по коммутативной диаграмме $\varphi_{y_0}(x)$ непрерывна.

В силу теоремы об интегрировании и предельном переходе:

$$F(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)dx=\int_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx=\lim_{y\to y_0}\int_a^b f(x,y)dx=\lim_{y\to y_0}F(y).$$

$F(y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}F(y)\Rightarrow F\in C[c,d].$ ►

**Теорема 3.2 (дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметра).** Пусть: $f,\, f'_y \in C(P)$,

$$P=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}\subset\mathbb{R}^2,\; F(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Тогда: $F(y)\in C^1[c,d]$, $F'_y(y):=\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)'_y=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

◄ $\forall y_0, y_0+h\in[c,d]$: $\left|F(y_0+h)-F(y_0)-h\int\limits_a^b f'_y(x,y_0)dx\right|=$

$$=\left|\int\limits_a^b\left[f(x,y_0+h)-f(x,y_0)-hf'_y(x,y_0)\right]dx\right|\le$$

$(0<\theta<1,\; f'_y\in C)$

$$\le|h|\left|\int\limits_a^b f'_y(x,y_0+h\theta)-f'_y(x,y_0)dx\right|\le|h|\phi(y_0,h)\underset{\substack{y\to y_0\\|h|\to 0}}{\rightarrow}0, \phi(y_0,h)\underset{h\to 0}{\rightarrow}0. ►$$

**Теорема 3.3 (дифференцирование собственных интегралов, зависящих от параметра).** Пусть: $f,\, f'_y \in C(P)$,

$$P=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, c\le y\le d\}\subset\mathbb{R}^2,$$

$$F(y):=\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx,\;\; \alpha,\beta:[c,d]\to[a,b], \alpha,\beta\in C^1[c,d].$$

Тогда: $F\in C^1[c,d]$,

$$F'(y)=f(\beta(y),y)\beta'(y)-f(\alpha(y),y)\alpha'(y)+\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x,y)dx. \quad (3.2)$$

◄ $\Phi(\alpha,\beta,y):=\int\limits_\alpha^\beta f(x,y)dx,\; f\in C(P)$, существуют

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}=f(\beta,y),\; \frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}=-f(\alpha,y),\; \frac{\partial\Phi}{\partial y}=\int\limits_\alpha^\beta f'_y(x,y)dx.$$

Эти частные производные непрерывны в силу теоремы о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра. Формула (3.2) получается дифференцированием по $y$ сложной функции $\Phi\big(\alpha(y),\beta(y),y\big)$.►

**Теорема 3.4 (интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра).** Пусть: $f\in C(P),\ P:=\big\{(x,y)\big|a\le x\le b, c\le y\le d\big\}\subset\mathbb{R}^2$,

$$F(y):=\int_a^b f(x,y)dx.$$

Тогда: $F\in\Re[c,d]$,

$$\int_c^d F(y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy. \tag{3.3}$$

◄ Обозначим $\varphi(u):=\int_c^u dy\int_a^b f(x,y)dx,\ \psi(u):=\int_a^b dx\int_c^u f(x,y)dy.$

В силу теоремы 3.3 $\varphi'(u)=\int_a^b f(x,u)dx=\psi'(u)$,

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(u)=\psi'(u)\Rightarrow\varphi(u)=\psi(u)+c\\ \varphi(c)=\psi(c)=0\end{array}\right|\Rightarrow\varphi(u)\equiv\psi(u).$$

При $u=d$ получаем равенство (3.2). ►

Лекция 11

### *3.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра*

**Определение 3.2.** Будем называть *несобственным интегралом, зависящим от параметра,* функцию вида

$$F(y)=\int_a^\omega f(x,y)dx,\ y\in Y, \tag{3.4}$$

если для любого фиксированного $y\in Y$ этот интеграл является несобственным интегралом.

***Замечание 3.1.*** Будем далее считать, что этот интеграл имеет единственную особенность в $\omega$.

**Пример 3.1**. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^y},\ Y=(-\infty,1).$

**Определение 3.3.** Будем говорить, что несобственный интеграл (3.4), зависящий от параметра $y\in Y$, *сходится равномерно* на $E\subset Y$, если:

1) $\forall\varepsilon>0\ \exists U(\omega)\forall b\in U(\omega)\ \ \forall y\in E: \left|\int\limits_b^{\omega} f(x,y)dx\right|<\varepsilon$

или

2) $F_b(y)\underset{b\to\omega}{\rightrightarrows} F(y)$ на $E$, где $F_b(y):=\int\limits_a^b f(x,y)dx$.

**Пример 3.2.** $\int\limits_0^{\infty} e^{-xy}dx$ сходится равномерно $\forall y_0>0$ на $E=[y_0,+\infty)$,

т.к. $\left|\int\limits_b^{\infty} e^{-xy}dx\right|=\left|\frac{e^{-by}}{y}\right|<\left|\frac{e^{-by_0}}{y_0}\right|\underset{b\to\infty}{\rightarrow}0,\ y\ge y_0.$

**Теорема 3.5 (критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра).**

$F(y)=\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $E$ $\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists U(\omega):\forall b_1,b_2\in U(\omega)\ \ \forall y\in E\ \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right|<\varepsilon.$$

**Следствие 3.1.** Пусть: $f(x,y)\in C([a,b]\times[c,d])\ \ \forall b\in(a,\omega)$,

$\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится $\forall y\in(c,d)$ и расходится при $y=c$.

Тогда: $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ не сходится равномерно на любом множестве, замыкание которого содержит точку $c$ (в частности на $(c,d)$).

◀ Интеграл расходится при $y=c \Rightarrow$ по критерию Коши: $\exists \varepsilon>0 \ \forall U(\omega) \ \exists b_1,b_2: \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,c)dx\right|>\varepsilon$. Так как интеграл есть непрерывная по $y$ функция на $[c,d]$, то: $\forall y\in U(c) \ \left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right|>\frac{\varepsilon}{2}$.

По критерию Коши этот интеграл также не может сходиться равномерно ни на каком $E\subset(c,d)$, замыкание которого содержит $c$. ▶

**<u>Пример 3.3.</u>** $\int\limits_0^{\infty} e^{-xy}dx$ сходится при $y>0$ и расходится при $y=0$, следовательно, он сходится неравномерно на $E=(0,+\infty)$.

**Теорема 3.6 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра).**

Пусть:

1. $f(x,y), g(x,y)$ интегрируемы по $x$ на $[a,b]$ $\forall b\in(a,\omega)$, $\forall y\in Y$;
2. $|f(x,y)|\le g(x,y)$ $\forall x\in(a,\omega), \forall y\in Y$;
3. $\int\limits_a^{\omega} g(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$.

Тогда: $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится на $Y$ равномерно и абсолютно.

◄ $\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x,y)dx\right| \le \int\limits_{b_1}^{b_2} |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_{b_1}^{b_2} g(x,y)dx < \varepsilon$, далее применяем критерий Коши. ►

**Следствие 3.2.** Частный случай теоремы 3.6: $g(x,y) = g(x)$.

**Теорема 3.7 (признак Абеля - Дирихле).**

Пусть: $f(x,y), g(x,y)$ $\forall b \in (a,\omega)$ $\forall y \in Y$ интегрируемы в собственном смысле и непрерывны на $[a,b]$, и выполнены

*условия Абеля:*

1) $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$;

2) $|g(x,y)| < M$ равномерно ограничена и $\forall y \in Y$ монотонна по $x$,

ИЛИ

*условия Дирихле:*

1) $\left|\int\limits_a^{b} f(x,y)dx\right| < M$ $\forall b \in (a,\omega)$;

2) $g(x,y) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} 0, x \to \omega$ на $Y$, $\forall y \in Y$ $g$ монотонна по $x$.

Тогда: $\int\limits_a^{\omega} f(x,y)g(x,y)dx$ сходится равномерно на $Y$.

◄ По теореме о среднем $\exists \xi \in (b_1, b_2)$:

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} (f \cdot g)(x,y)dx = g(b_1,y)\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x,y)dx + g(b_2,y)\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x,y)dx \le 2M\varepsilon. \text{ ►}$$

Лекция 12

## *Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра*

**Теорема 3.8 (предельный переход под знаком несобственного интеграла).** Пусть: $f(x,y)-$ семейство функций, зависящих от параметра $\forall y \in Y$, $\forall b \in [a,\omega)$ $f(x,y) \in \Re[a,b]$ по $x$, $\mathcal{B}_Y -$ база в $Y$,

1) $\forall b \in [a,\omega)$ $f(x,y) \underset{\mathcal{B}_Y}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ на $[a,b]$;

2) $\int\limits_a^{\varpi} f(x,y)dx -$ сходится равномерно на $Y$.

Тогда: $\varphi(x)$ несобственно интегрируема на $[a,\omega)$,

$$\lim_{\mathcal{B}_Y} \int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega} \lim_{\mathcal{B}_Y} f(x,y)dx = \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)dx.$$

◄ Доказательство основано на коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} F_b(y) := \int\limits_a^b f(x,y)dx & \underset{b\to\omega}{\rightrightarrows} & \int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx =: F(y) \\ \downarrow \mathcal{B}_Y & & \exists \downarrow \mathcal{B}_Y \\ \int\limits_a^b \varphi(x)dx & \overset{\exists}{\underset{b\to\omega}{\to}} & \int\limits_a^{\omega} \varphi(x)dx. \end{array}$$ ►

<u>**Пример 3.4.**</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, 0 \le x \le y, \\ 0, x > y, \end{cases} \quad f(x,y) \underset{y\to\infty}{\rightrightarrows} \varphi(x) \equiv 0 \quad \text{на } x \in [0,\infty),\ Y = (0,\infty).$$

При этом условие 2 теоремы 3.8 нарушено и

$$\int\limits_0^{\infty} f(x,y)dx = \int\limits_0^{y} \frac{1}{y}dx = 1 \ne \int\limits_0^{\infty} \varphi(x)dx = 0.$$

**Теорема 3.9 (непрерывность несобственного интеграла).** Пусть:

1) $f(x,y)\in C(P)$, $P=\{(x,y)|a\le x\le\omega, c\le y\le d\}$;

2) $F(y)=\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $y\in[c,d]$.

Тогда: $F(y)\in C[c,d]$.

◄ $F_b(y):=\int\limits_a^b f(x,y)dx.$ По теореме о непрерывности собственного интеграла $\forall b\in[a,\omega)$ $F_b(y)\in C[c,d]$ и $F_b(y)\underset{b\to\omega}{\overset{\to}{\to}}F(y)$ на $[c,d]$

$\Rightarrow F(y)\in C[c,d]$. ►

**Теорема 3.10 (дифференцирование несобственного интеграла по параметру).** Пусть:

1) $f, f'_y\in C(P)$, $P=\{(x,y)|a\le x\le\omega, c\le y\le d\}$;

2) $\Phi(y)=\int\limits_a^{\omega} f'_y(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$;

3) $\int\limits_a^{\omega} f(x,y_0)dx$ сходится хотя бы при одном $y_0\in[c,d]$.

Тогда: $F(y)=\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$,

$F(y)\in C^1[c,d]$, $F'_y=\int\limits_a^{\omega} f'_y(x,y)dx.$

◄ Функция $F_b(y):=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ в силу 1) определена и дифференцируема на $[c,d]$ $\forall b\in[a,\omega)$ и $(F_b)'_y(y)=\int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$.

В силу 2): $\left(F_b\right)'_y \underset{b\to\omega}{\overset{\to}{\to}} \Phi(y)$. При этом из 3): $\exists y_0 : F_b(y_0)$ сходится.

По теореме о дифференцировании семейства функций, зависящих от параметра, получаем: $F_b(y) \underset{b\to\omega}{\overset{\to}{\to}} F(y)$ на $[c,d]$, $F'_y = \Phi(y)$. ►

**<u>Пример 3.5.</u>** *Интеграл Дирихле:* $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

◄1) Покажем, что $F(y) := \int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}e^{-xy}dx$ сходится равномерно на $0 \le y < \infty$. Так как $\left|\int\limits_0^b \sin x dx\right| < 2$, $\frac{1}{x}\downarrow 0$, $x\to\infty$, интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ сходится равномерно на $y \in [0,\infty)$ по признаку Дирихле. Функция $e^{-xy}$ монотонна и ограничена при $y \ge 0$, $x \to \infty$. Т.е. $F(y)$ сходится равномерно по признаку Абеля. Так как функция $\frac{\sin x}{x}e^{-xy}$ непрерывна, в силу теоремы 3.9 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim\limits_{y\to+0} F(y)$.

2) $F'_y(y) = \int\limits_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\right)'_y dx = -\int\limits_0^\infty \sin x e^{-xy}dx = -\frac{1}{1+y^2}$ сходится равномерно на $0 < y_0 \le y < \infty$. $F'_y(y) = -\frac{1}{1+y^2} \Rightarrow$

$F(y) = -arctg\, y + C = -arctg\, y + \frac{\pi}{2}$ (т.к. $F(y) \underset{y\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$). Тогда

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim\limits_{y\to+0}\left(-arctg\ y + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. ►

**Теорема 3.11 (интегрирование несобственного интеграла по параметру).** Пусть:

1) $f(x,y)\in C(P)$, $P=\{(x,y)|a\le x<\omega, c\le y\le d\}$;

2) $F(y)=\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$.

Тогда: $F(y)\in\Re[c,d]$, $\int\limits_c^d F(y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx=\int\limits_a^{\omega} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

◄ $F_b(y):=\int\limits_a^b f(x,y)dx,$ в силу (3.3) $\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$.

Пользуясь 2) и теоремой о предельном переходе в собственном интеграле, переходим в левой части равенства к пределу при $b\to\omega$, предел же правой части при $b\to\omega$ и есть несобственный интеграл по определению. ►

**Теорема 3.12 (достаточное условие перестановочности несобственных интегралов).** Пусть:

1) $f(x,y)\in C(P)$, $P=\{(x,y)|a\le x<\omega, c\le y\le d\}$;

2) $F(y)=\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx$ сходится равномерно на $[c,d]$ $\forall d\in(c,\tilde{\omega})$;

3) $\Phi(x)=\int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$ сходится равномерно на $[a,b]$ $\forall b\in(a,\omega)$;

4) хотя бы один из интегралов $\int\limits_a^{\omega} dx\int\limits_c^{\tilde{\omega}}|f(x,y)|dy$ и $\int\limits_c^{\tilde{\omega}} dy\int\limits_a^{\omega}|f(x,y)|dx$ сходится.

Тогда: $\exists\int\limits_c^{\tilde{\omega}} dy\int\limits_a^{\omega} f(x,y)dx=\int\limits_a^{\omega} dx\int\limits_c^{\tilde{\omega}} f(x,y)dy$.

**Определение 3.4.** $B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx -$ $B$- функция.

**Утверждение 3.1.** $B(p,q)$ существует и непрерывна для $p>0, q>0$.

◄ 1) $B(p,q) = \int_0^{1/2} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

Первый интеграл сходится при $1-p<1 \Rightarrow p>0$. Второй – при $1-q<1 \Rightarrow q>0$. При $p\le 0, q\le 0$ интеграл расходится.

2) Для $p \ge p_0 > 0, q \ge q_0 > 0$ интеграл равномерно сходится, из чего следует непрерывность $B(p,q)$. ►

**Утверждение 3.2.** $B(p,q)=B(q,p)$ (замена $t=1-x$).

**Утверждение 3.3 (формула понижения).**

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\alpha-1+\beta} B(\alpha-1,\beta)\ (\beta>0, \alpha>1).$$

◄ $$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^{\alpha-1}, du = (\alpha-1)x^{\alpha-2}dx \\ dv = (1-x)^{\beta-1}\,dx, v = -\dfrac{(1-x)^\beta}{\beta} \end{matrix} \right| =$$

$$= -x^{\alpha-1}\frac{(1-x)^\beta}{\beta}\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \frac{\alpha-1}{\beta} x^{\alpha-1}(1-x)^\beta\,dx = \frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx -$$

$$\frac{\alpha-1}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta) - \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha,\beta),$$

$$B(\alpha,\beta)\left(1+\frac{\alpha-1}{\beta}\right) = \frac{\alpha-1}{\beta}B(\alpha-1,\beta).$$ ►

**Утверждение 3.4.** $B(m,n) = \dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ $(m,n\in\mathbb{N})$.

**Определение 3.5.** $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ – $\Gamma$ - *функция.*

**Утверждение 3.5.** $\Gamma(p)$ существует и непрерывна при $p>0$.

**Утверждение 3.6.** $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$.

◄ $\Gamma(p+1)=\int\limits_0^\infty x^p e^{-x}dx=\left|\begin{matrix} x^p=u \\ e^{-x}dx=dv\end{matrix}\right|=-x^p e^{-x}\Big|_0^\infty+p\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$.►

**Следствие 3.3.** $\Gamma(n+1)=n!\,(n\in\mathbb{N})$.

**Утверждение 3.7.** $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$.

# Глава 4. Ряд и интеграл Фурье

## *4.1. Ряд Фурье в предгильбертовом пространстве*

Лекция 13

**Определение 4.1.** Будем называть:

– *предгильбертовым пространством* $E$ линейное пространство бесконечной размерности со скалярным произведением;

– *евклидовым пространством* линейное пространство конечной размерности со скалярным произведением;

– *унитарным*, если оно евклидово или предгильбертово.

**Определение 4.2.** Будем называть систему векторов в предгильбертовом пространстве $E$ *линейно независимой*, если любая её конечная подсистема линейно независима.

**Определение 4.3.** Будем называть систему векторов $\{e_n\}_{n=1}^\infty, e_n\in E$ в предгильбертовом пространстве $E$:

*ортогональной,* если $(e_i,e_j)=0, \forall i\neq j$;

*ортонормированной*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$

**Утверждение 4.1.** Ортогональная система является линейно независимой.

**Определение 4.4.** Пусть $E$ предгильбертово пространство, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(e_n \in E)$ – произвольная ортонормированная система в $E$.

Будем называть *рядом Фурье* для $f \in E$ по системе $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ряд

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad c_n = (f, e_n), \tag{4.1}$$

$c_n$ – *коэффициентами Фурье* для $f \in E$.

***Замечание 4.1.*** В случае ортогональной системы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(e_n \in E)$:

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad (f, e_n) = c_n \|e_n\|^2 \Rightarrow c_n = \frac{(f, e_n)}{\|e_n\|^2}. \tag{4.2}$$

**Утверждение 4.2 (экстремальное свойство коэффициентов Фурье).**

Пусть: $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ – конечная ортонормированная система в $E$, $f \in E$, $c_i = (f, \varphi_i)$, $\lambda_i$ –произвольные числа, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$ .

Тогда среди всех сумм вида $S_n$ наилучшую аппроксимацию $f$ даёт сумма, в которой $\lambda_i = c_i$ (частичная сумма ряда Фурье).

◄ Норма вводится как $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$. $\|f - S_n\| = (f - S_n, f - S_n)^{\frac{1}{2}} \to \min\limits_{\lambda_i}$.

$$\| f - S_n \|^2 = \left( f - S_n, f - S_n \right) = \left( f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i, f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i \right) =$$

$$= \| f \|^2 - 2\left( f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i \right) + \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i \right\|^2 =$$

(т.к. $\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \delta_{ij}, \left( f, \varphi_i \right) = c_i$)

$$= \| f \|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \| f \|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left( \lambda_i - c_i \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \geq 0 .$$

Второе слагаемое при $\lambda_i = c_i$ обращается в $0$. Получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \leq \| f \|^2 . \blacktriangleright \tag{4.3}$$

**Определение 4.5.** Будем называть систему $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ элементов предгильбертова пространства $E$ *замкнутой,* если $\forall f \in E$ выполнено *равенство Парсеваля:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 = \| f \|^2 . \tag{4.4}$$

**Утверждение 4.3**. Если система элементов предгильбертова пространства замкнута, то ряд Фурье для $\forall f \in E$ по этой системе сходится к самой $f$ .

**Определение 4.6.** Будем называть систему $\left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ элементов предгильбертова пространства $E$ *базисом,* если:

1) она линейно независима,

2) $\forall f \in E \ \exists \alpha_i : f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i$ .

**Утверждение 4.4.** Замкнутая система векторов предгильбертова пространства является базисом.

**Пример 4.1.** $E = l_2 = \{c = (c_1, ..., c_n, ...) \mid \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty, c_i \in \mathbb{R}\}$.

Скалярное произведение в $l_2$: $(x, y)_{l_2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$,

$x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l_2$ $(\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_2$

$\left(\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty\right)$. Базис и замкнутая ортонормированная система

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty} : e_1 = (1, 0, 0, ...), e_2 = (0, 1, 0, ...), ..., e_3 = (0, 0, 1, ...), ... \ (e_i \in l_2)$.

$(e_i, e_j)_{l_2} = \delta_{ij}$. При этом $x_i = (x, e_i) = c_i$.

### *Ортонормированные системы в сепарабельном предгильбертовом пространстве*

**Определение 4.7.** Будем называть множество $D \subset E$ *всюду плотным* в $E$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in E \ \exists y \in D : \|y - x\| < \varepsilon$.

**Определение 4.8.** Будем называть пространство *сепарабельным,* если в нём существует счётное всюду плотное множество.

**Определение 4.9.** Будем называть систему векторов *полной* в $E$, если множество конечных линейных комбинаций, составленных из этих векторов, всюду плотно в $E$.

**Теорема 4.1.** Пусть: $E$ – сепарабельное предгильбертово пространство, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в $E$.

Тогда: $\{\varphi_i\}$ является замкнутой $\Leftrightarrow \{\varphi_i\}$ является полной.

◄ Так как система полная, то любой элемент пространства аппроксимируется с помощью конечной линейной комбинации элементов системы. В силу экстремального свойства коэффициентов Фурье аппроксимация с помощью частичных сумм ряда Фурье является ещё более точной. Следовательно, ряд сходится к порождающему элементу и система является замкнутой: $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i \Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists n : \| f - f_n \| < \varepsilon \Rightarrow \{\varphi_i\}$ – полная система. ►

**Следствие 4.1.** Пусть: $E$ – сепарабельное предгильбертово пространство, $\{\varphi_i\}$ – ортонормированная система в $E$.

Тогда: $\{\varphi_i\}$ – полная $\Leftrightarrow \{\varphi_i\}$ – замкнутая $\Leftrightarrow \{\varphi_i\}$ – базис.

◄ Это утверждение доказывается по схеме:
замкнутость $\Rightarrow$ базисность $\Rightarrow$ полнота $\Leftrightarrow$ замкнутость. ►

***Замечание 4.2.*** Если система не является ортонормированной, а является просто линейно независимой, то в предгильбертовом пространстве, в отличие от конечномерного пространства, из полноты не следует базисность.

**Утверждение 4.5.** В любом сепарабельном предгильбертовом пространстве $E$ существует ортонормированный базис.

◄ $E$ – сепарабельное $\Rightarrow$ существует счётное всюду плотное множество: $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Построим последовательность $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^{\infty}$:

1) $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$,

$$\tilde{\varphi}_2 := \begin{cases} \varphi_2, \textit{если } \tilde{\varphi}_1 \textit{ и } \varphi_2 \textit{ линейно независимы,} \\ \textit{следующий элемент из } \{\varphi_i\} \textit{ в противном случае,} \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}_3 := \ldots$

$\vdots$

Полученная система $\{\tilde{\varphi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ счётная, всюду плотная и линейно независимая.

2) Применяем *процесс ортогонализации Грамма – Шмидта:*

$$e_1 := \frac{\tilde{\varphi}_1}{\|\tilde{\varphi}_1\|},\ e_2 := \frac{\tilde{\varphi}_2 - (\tilde{\varphi}_2, e_1)e_1}{\|\tilde{\varphi}_2 - (\tilde{\varphi}_2, e_1)e_1\|}, \ldots,\ e_k := \frac{\tilde{\varphi}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\tilde{\varphi}_k, e_i)e_i}{\left\|\tilde{\varphi}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\tilde{\varphi}_k, e_i)e_i\right\|}, \ldots.$$

$\left(e_k, e_j\right) = (\tilde{\varphi}_k, e_j) - \sum\limits_{i=1}^{k-1}(\tilde{\varphi}_k, e_i)(e_i, e_j) = \delta_{kj} \Rightarrow \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис. ►

***Замечание 4.3.*** Таких базисов бесконечно много.

**Определение 4.10.** Будем называть предгильбертово пространство *полным*, если любая фундаментальная последовательность элементов этого пространства сходится к элементу этого пространства.

**Определение 4.11.** Будем называть *гильбертовым пространством* полное сепарабельное предгильбертово пространство.

***Замечание 4.4.*** Если для произвольной $f \in E$ вычислить коэффициенты Фурье $c_i = (f, e_i)$ по ортонормированному базису $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ и построить ряд Фурье, то ряд будет сходится к $f: f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$. А если взять некоторые числа $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ и базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, то найдётся ли $f$, такая, что построенный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i e_i$ будет сходиться к $f$, а $c_i$ будут для $f$ коэффициентами Фурье? Ответ дает следующая теорема.

**Теорема 4.2 (Рисса – Фишера).** Пусть: $H$ – гильбертово пространство, $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $H$,

$\{c_i\}_{i=1}^{\infty} : \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^2 < \infty,\ c_i \in \mathbb{R}$ (т.е. $c = (c_1, \ldots, c_n, \ldots) \in l_2$).

Тогда: $\exists!\, f \in H:$

1) $f=\sum_{i=1}^{\infty}c_ie_i$, 2) $c_i=(f,e_i)$, 3) $\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2$.

◄ Обозначим $f_n:=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$. Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Покажем, что она фундаментальна: $\|f_{n+p}-f_n\|^2=$

$=\left(\sum_{i=n+1}^{n+p}c_ie_i,\sum_{i=n+1}^{n+p}c_ie_i\right)=\sum_{i=n+1}^{n+p}c_i^2<\varepsilon$ в силу критерия Коши. Так как $H$ – полное, то фундаментальная последовательность сходится $\Rightarrow$ $\exists f\in H: f_n\underset{n\to\infty}{\to}f$.

Докажем 2): $(f,e_i)=(f_n+f-f_n,e_i)=\underbrace{(f_n,e_i)}_{=c_i}+\underbrace{(f-f_n,e_i)}_{\underset{n\to\infty}{\to}0}\underset{n\to\infty}{\to}c_i$.

Докажем 3): $\|f-f_n\|^2=\left(f-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i,f-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right)=\|f\|^2+\sum_{i=1}^{n}c_i^2-2\sum_{i=1}^{n}c_i^2=$

$=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}c_i^2\underset{n\to\infty}{\to}0\Rightarrow\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}c_i^2$.►

**Определение 4.12.** Будем называть пространства $H$ и $H^*$ *изоморфными*, если:

1) существует биекция $H\leftrightarrow H^*$,

2) $\forall x,y\in H: x\leftrightarrow x^*\in H^*, y\leftrightarrow y^*\in H^*$:

$x+y\leftrightarrow x^*+y^*, \alpha x\leftrightarrow\alpha x^*, (x,y)=(x^*,y^*)$.

**Следствие 4.2.** Любое гильбертово пространство изоморфно пространству $l_2$, следовательно, все гильбертовы пространства изоморфны между собой.

Лекция 14

## *4.2. Тригонометрический ряд Фурье*

**Определение 4.13.** Введем пространство

$CL_2\left[a,b\right]=\{ f \in C(a,b) \mid \int\limits_a^b f^2(x)dx<\infty\}$ со скалярным произведением

$$\left(f,g\right)_{CL_2[a,b]}=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx \tag{4.5}$$

***Замечание 4.5.*** Норма в этом пространстве:

$$\|f\|_{CL_2[a,b]}=\left(\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Определение 4.14.** Будем называть *среднеквадратической сходимостью* ($\xrightarrow{СКВ}$) сходимость по норме пространства $CL_2\left[a,b\right]$.

**Утверждение 4.6.** Если: $\left\{f_n\right\}$ сходится к $f$ равномерно на $[a,b]$, то: $\left\{f_n\right\}$ сходится к $f$ в среднем квадратичном.

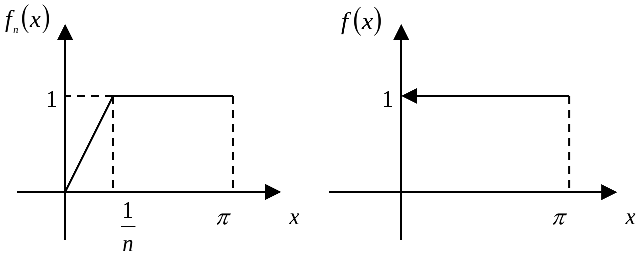
◄ Обозначим $\left|f\right|' = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f\left(x\right)\right| -$ норму равномерной сходимости.

$\|f\|^2_{CL_2[a,b]}=\int\limits_a^b f^2\left(x\right)dx \le (b-a)\sup\limits_{x\in[a,b]} f^2\left(x\right)= (b-a)(\left|f\right|')^2 \Rightarrow$ если $\left(\left|f\right|'\right)^2<\varepsilon$, то $\|f\|^2_{CL_2[a,b]}<(b-a)\varepsilon$ .►

**Утверждение 4.7.** Пространство $CL_2\left[-\pi,\pi\right]$ не является полным (и, следовательно, не является гильбертовым).

◄ Приведём пример последовательности функций, принадлежащих $CL_2\left[-\pi,\pi\right]$, сходящихся в среднем квадратичном к функции, не принадлежащей $CL_2\left[-\pi,\pi\right]$.

$$f_n(x)=\begin{cases}0, -\pi\le x\le 0,\\ nx, 0<x<\dfrac{1}{n},\\ 1, \dfrac{1}{n}\le x\le\pi,\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0,-\pi\le x\le 0,\\ 1,0<x\le\pi.\end{cases}$$




$$\| f_n - f\|^2_{CL_2[-\pi,\pi]} = \int_0^{\frac{1}{n}}(1-nx)^2\,dx \le \int_0^{\frac{1}{n}}1dx=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0 \Rightarrow f_n(x)\underset{n\to\infty}{\overset{СКВ}{\to}} f(x),$$ но

$f(x)$ имеет разрыв в нуле $\Rightarrow$ $f(x)\notin CL_2[-\pi,\pi]$.►

***Замечание 4.6.*** Если пространство $CL_2[-\pi,\pi]$ понимать как пространство кусочно непрерывных функций (т.е. функций, имеющих конечное число точек разрыва 1-го рода), то можно доказать, что это пространство также не является полным.

**Утверждение 4.8.** Система $\{1, x^2, x^3,..., x^n,...\}$ полна в $CL_2[-\pi,\pi]$, но не является базисом.

**Следствие 4.3.** Так как в $CL_2[-\pi,\pi]$ существует счётное всюду плотное множество полиномов, то оно является сепарабельным.

**Определение 4.15.** Будем называть *основной тригонометрической системой* систему

$$\left\{\frac{1}{2},\sin x,\cos x,...,\sin nx,\cos nx,...\right\} \tag{4.6}$$

**Утверждение 4.9.** Основная тригонометрическая система (4.6) ортогональна в $CL_2[-\pi,\pi]$.

**Утверждение 4.10.** Система

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ldots,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\} \tag{4.7}$$

является ортонормированной в $CL_2[-\pi,\pi]$.

**Определение 4.16.** Будем называть тригонометрическим рядом Фурье функции $f \in CL_2[-\pi,\pi]$ ряд

$$f \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx, \tag{4.8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \ (n=0,1,\ldots),\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \ (n=1,2,\ldots).$$

***Замечание 4.7.*** Ряд (4.8) является рядом Фурье для $f$ по ортогональной системе (4.6) в смысле определения 4.4 и замечания 4.1

$$f \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n,\ (f,e_n)=c_n\|e_n\|^2 \Rightarrow c_n = \frac{(f,e_k)}{\|e_n\|^2}.$$

Например, $a_0 = \dfrac{\int_{-\pi}^{\pi} f\cdot\frac{1}{2}dx}{\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 dx} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f dx}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f dx.$

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nx dx}{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos nx)^2 dx} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f\cos nx dx}{\pi} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\cos ndx.$$

**Утверждение 4.11.** Для функции: $f \in CL_2[-\pi,\pi]$

1) ряд Фурье (4.3) сходится в среднем квадратичном к $f$;

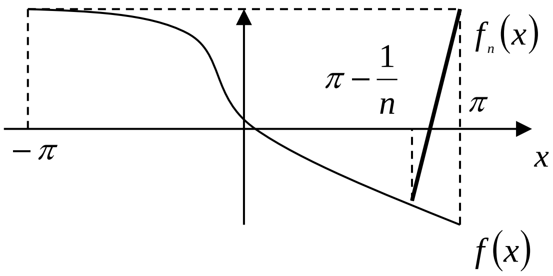
2) выполнено равенство *Парсеваля – Стеклова:*

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx. \tag{4.9}$$

◄ Введем пространство: $C_{2\pi}[-\pi,\pi] = \{y \in C[-\pi,\pi] \mid y(-\pi)=y(\pi)\}$.

1) По теореме Вейерштрасса №2 система тригонометрических полиномов полна в $C_{2\pi}\left[-\pi,\pi\right]$ в метрике равномерной сходимости, следовательно, полна и в метрике среднеквадратической сходимости.

2) Покажем, что $\overline{C_{2\pi}\left[-\pi,\pi\right]}=CL_2\left[-\pi,\pi\right]$ (т.е. $C_{2\pi}\left[-\pi,\pi\right]$ всюду плотно в $CL_2\left[-\pi,\pi\right]$).




$\forall f \in CL_2\left[-\pi,\pi\right]$ можно по такой схеме построить последовательность $f_n \in C_{2\pi}\left[-\pi,\pi\right]$ таких, что $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{СКВ} f$. Таким образом, система тригонометрических полиномов полна в $CL_2\left[-\pi,\pi\right]$.►

### *Ряд Фурье на произвольном отрезке*

***Замечание 4.8.*** Тригонометрический ряд Фурье можно построить не только для $2\pi$ - периодических функций на отрезке $\left[-\pi,\pi\right]$, но и для любой функции с периодом $T=2l$ на отрезке $\left[-l,l\right]$ с помощью замены $\tilde{x}=\dfrac{xl}{\pi}$.

Если $x\in\left[-\pi,\pi\right]\Rightarrow \tilde{x}\in\left[-l,l\right]$ и

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right],$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\ n=0,1,2,...,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(x\right)\sin\frac{\pi nx}{l}dx,\ \ n=1,2,....$$

***Замечание 4.9.***

1. В силу $2l$ периодичности подынтегральных функций можно считать интегралы по любому промежутку $[a,a+2l]$.

2. Если $f-$ чётная, то $b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$

Если $f-$ нечётная, то $a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$.

## Лекция 15

### *Ряд Фурье в комплексной форме*

**Определение 4.17.** Будем называть скалярным произведением комплекснозначных функций $f$ и $g$: $(f,g)_{CL_2[-\pi,\pi]} = \int\limits_a^b f\,\overline{g}dx$.

**Утверждение 4.12.** $\left\{\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в $CL_2[-\pi,\pi]$.

$$◀\ \left\|e^{inx}\right\|^2_{CL_2[-\pi,\pi]} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi \Rightarrow \left\|\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}\right\|^2_{CL_2[-\pi,\pi]} = 1.\ ▶$$

**Определение 4.18.** Будем называть рядом Фурье в комплексной форме для $f$ ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{4.10}$$

***Замечание 4.10.*** Коэффициенты ряда Фурье в комплексной форме и тригонометрического ряда Фурье связаны между собой:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cos nx + ic_n\sin nx =$$

$$\left| c_0 = \frac{a_0}{2}, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = ic_n - ic_{-n} \right| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos nx + b_n\sin nx\right].$$

***Замечание 4.11.*** При замене $t = e^{ix}$ получаем степенной ряд.

**Лемма Римана.** Пусть: $f(x)$ локально интегрируема и абсолютно интегрируема ($\exists \int\limits_a^b |f(x)|dx$ хотя бы в несобственном смысле).

Тогда: $\int\limits_a^b f(x)\sin pxdx \underset{p\to\infty}{\to} 0$.

◄ Обозначим $\tau = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\} -$ разбиение $[a,b]$, $m_i := \inf\limits_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$, $M := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\sin pxdx\right| = \left|\sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} f(x)\sin pxdx\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(f(x) - m_i\right)\sin pxdx + \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} m_i \sin pxdx\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^n \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \left(M_i - m_i\right)dx + \frac{|m_i|\,2n}{p}\right| \le \varepsilon + \frac{M}{p}2n \underset{p\to\infty}{\to} \varepsilon + \tilde{\varepsilon} = \tilde{\tilde{\varepsilon}}. ►$$

### *Интегральное представление частичных сумм ряда Фурье. Ядра Дирихле*

**Определение 4.19.** Будем называть ядром Дирихле $n$ - го порядка ($n$ -м ядром Дирихле) $D_n(y) := \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{iky}$ .

**Утверждение 4.13.** $D_n(y) = \dfrac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}$.

$$◄\ D_n(y) = \sum_{k=-n}^{n} e^{iky} = e^{-iny}\frac{1 - e^{i(2n+1)y}}{1 - e^{iy}} = \frac{\left(e^{i(n+1)y} - e^{-iny}\right)e^{-i\frac{y}{2}}}{\left(e^{iy} - 1\right)e^{-i\frac{y}{2}}} =$$

$$= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)y} - e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)y}}{e^{i\frac{y}{2}} - e^{-i\frac{y}{2}}} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)y}{\sin\frac{y}{2}}. \blacktriangleright$$

**Утверждение 4.14.** Пусть: $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ – частичная сумма ряда Фурье для $f(x)$.

Тогда:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u)\,du. \qquad (4.11)$$

◄ В силу (4.10)

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) e^{-iku} du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} du =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(x-u)\,du. \blacktriangleright$$

***Свойства ядер Дирихле***

1. $D_n(u)$ является чётной и $2\pi$ - периодической функцией (из определения).

2. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 1.$

$$\blacktriangleleft \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} du = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^{iku} du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i0u} du. \blacktriangleright$$

3. $\forall \delta > 0 \ \int_{\delta}^{\pi} D_n(u)\,du \underset{n\to\infty}{\to} 0.$

◄ По лемме Римана, если $\int_{\delta}^{\pi} |f(y)|\,dy < \infty$, то $\int_{\delta}^{\pi} f(y) \sin ny dx \underset{n\to\infty}{\to} 0.$

В нашем случае $f(y)=\dfrac{1}{\sin\frac{y}{2}}$ и $\int\limits_{\delta}^{\pi}\dfrac{dy}{\sin\frac{y}{2}}<\infty.$ ►

***Поточечная сходимость тригонометрического ряда Фурье***

**Определение 4.20.** Будем говорить, что $f\left(x\right)$ удовлетворяет в точке $x$ условию Дини, если $\exists\delta>0$:

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}\frac{\left|f\left(x+z\right)-f\left(x\right)\right|}{\left|z\right|}dz<\infty. \tag{4.12}$$

**Утверждение 4.15.** Если: $f\left(x\right)$ дифференцируема в точке $x$, то $f\left(x\right)$ удовлетворяет в точке $x$ условию Дини.

◄ Если $f\left(x\right)$ дифференцируема, то $\left|f\left(x+z\right)-f\left(x\right)\right|\le k\left|z\right|\Rightarrow$ (4.12), причём интеграл в (4.12) собственный. ►

**Утверждение 4.16.** Пусть $f\left(x\right)$ кусочно непрерывно-дифференцируема на отрезке (т.е. $f'\left(x\right)$ имеет конечное число точек разрыва 1 рода).

Тогда: $f\left(x\right)$ удовлетворяет условию Дини на этом отрезке.

**Теорема 4.3 (поточечная сходимость ряда Фурье).**

Пусть: $f-2\pi$ - периодическая, $f\in CL_2\left[-\pi,\pi\right]$, непрерывна в точке $x$ и удовлетворяет условию Дини $\forall x\in\left[-\pi,\pi\right]$.

Тогда: частичная сумма $S_n(x)$ ряда Фурье для $f(x)$

$$S_n\left(x\right)\underset{n\to\infty}{\to}f\left(x\right).$$

◄ Из формулы (4.11) в силу $2\pi$ периодичности функций $D_n, f$ получим

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)D_n(x-u)\,du = | u=x+z | = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+z)D_n(z)\,dz =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+z)}{z}z\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}.$$

В силу свойства 2 функции $D_n(x)$: $f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(z)\,dz.$

По лемме Римана

$$S_n(x)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\cdot\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\frac{z}{2}\cdot 2dz\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

т.к. $\frac{1}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\frac{z}{2}\underset{z\to 0}{\to}1$ и по условию Дини $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|f(x+z)-f(z)|}{|z|}dz<\infty.$

Таким образом, $\left|S_n(x)-f(x)\right|\underset{n\to\infty}{\to}0.$ ►

**Теорема 4.4.** Если: $f\in CL_2[-\pi,\pi]$, $f-2\pi$ - периодическая, кусочно непрерывно-дифференцируемая, $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье для $f$.

Тогда: $S_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}f(x)$, если $x$ – точка непрерывности;

$S_n(x)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, если $x$ – точка разрыва первого рода;

$S_n(\pi)\underset{n\to\infty}{\to}\frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}.$

◄ Доказательство аналогично предыдущей теореме, использует разложение: $S_n(x)-\frac{f(x+0)-f(x-0)}{2}=\int_{-\pi}^{0}\ldots+\int_{0}^{\pi}\ldots$ . ►

### *Равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье*

**Утверждение 4.17.** Если тригонометрический ряд сходится равномерно, то это ряд Фурье для некоторой функции.

◀ Пусть $\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\underset{\to}{\to} f(x)$, $N\to\infty$. Тогда его можно почленно интегрировать (предварительно умножив на $\cos kx$):

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)dx=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx\Rightarrow a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx.$$

Аналогично для $b_k$. Таким образом, получаем, что данный ряд – это ряд Фурье для $f(x)$.▶

***Замечание 4.12.*** Если тригонометрический ряд сходится к функции неравномерно, то он может не быть её рядом Фурье, что показывает следующий пример.

**Пример 4.2**. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}=g(x)$. Этот ряд сходится по признаку Дирихле. Но это не ряд Фурье, т.к. $b_n^2=\frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$, а если бы это был ряд Фурье для некоторой функции $g(x)$, то в силу неравенства Бесселя должно было быть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\le\left\|g(x)\right\|^2$.

**Теорема 4.5.** Пусть: $f\in C[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f$ – $2\pi$ – периодическая, $f'\in CL_2[-\pi,\pi]$.

Тогда: ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно к ней на $[-\pi,\pi]$, т.е. $S_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

◄ Ряды Фурье для функции $f, f' : f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$,

$$f'(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a'_n \cos nx + b'_n \sin nx].$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left( f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}dx \right) = -\frac{b'_n}{n}.$$

Аналогично $b_n = \frac{a'_n}{n}$. Используя неравенство $\left|\frac{a'_n}{n}\right| \le (a'_n)^2 + \frac{1}{n^2}$, получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|a'_n|}{n} + \frac{|b'_n|}{n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2} + (a'_n)^2 + (b'_n)^2\right) \le \|f'\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}.$$

Поскольку $f' \in CL_2 \Rightarrow \|f'\|^2 < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2} < \infty$, ряд Фурье для $f$ мажорируется сходящимся числовым рядом и константой, следовательно, он сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса. ►

## Лекция 16

### *Теорема Фейера*

**Определение 4.21.** Будем называть *суммой Фейера* $\sigma_n(x)$ для $f$

$$\sigma_n(x) := \frac{S_0(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n},$$ где $S_i(x)$ – частичные суммы ряда Фурье для $f(x)$.

**Определение 4.22.** Будем называть *ядром Фейера* $n$ - го порядка ($n$ - м ядром Фейера) функцию $\Phi_n(z)$:

$$\Phi_n(z)=\frac{\sin^2\frac{nz}{2}}{n\sin^2\frac{z}{2}}.$$

**Утверждение 4.18.** Пусть: $f-2\pi$ - периодическая, $\sigma_n\left(x\right)$ – ее сумма Фейера.

Тогда: $\sigma_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\Phi_n(z)dz.$

◄ Используя представление $S_n=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x+z\right)D_n\left(z\right)dz,$ получим

$$\sigma_n\left(x\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k\left(x\right)=\frac{1}{2\pi n}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x+z\right)\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f\left(x+z\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\frac{\sin^2\frac{nz}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}}dz=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+z)\Phi_n(z)dz.$$

Мы воспользовались преобразованием:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)z}{\sin\frac{z}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\cos kz-\cos\left(k+1\right)z}{2\sin^2\frac{z}{2}}=\frac{1-\cos nz}{2\sin^2\frac{z}{2}}=\frac{\sin^2\frac{nz}{2}}{\sin^2\frac{z}{2}}.$$ ►

***Свойства ядер Фейера***

1. $\Phi_n(x)\geq 0, T=2\pi.$

2. $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(x)dx = 1.$

3. $\forall\delta > 0: \int\limits_{\delta}^{\pi}\Phi_n(x)dx \to 0,\ n\to\infty.$

**Теорема 4.6 (Фейера).** Пусть: $\sigma_n(x)$ – сумма Фейера для $f$, $f\in C[-\pi,\pi],\ f(-\pi) = f(\pi).$

Тогда: $\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x),\ x\in[-\pi,\pi].$

◄ $$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+s)\Phi_n(s)ds - \frac{1}{2\pi}f(x)\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(s)ds\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+s) - f(x))\Phi_n(s)ds\right| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+s) - f(x)|\Phi_n(s)ds +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}|f(x+s) - f(x)|\Phi_n(s)ds + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}|f(x+s) - f(x)|\Phi_n(s)ds =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Так как $f(x)\in C[-\pi,\pi] \Rightarrow |f(x)| \le M$ и $f(x)$ равномерно непрерывна на $[-\pi,\pi]$: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon): |s| < \delta \Rightarrow |f(x+s) - f(x)| < \varepsilon/3,$

следовательно,

$$I_1 \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}|f(x+s) - f(x)|\Phi_n(s)ds \le \frac{\varepsilon}{3},$$

$$I_3 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}|f(x+s) - f(x)|\Phi_n(s)ds \le \frac{2M}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\Phi_n(s)ds \to 0,\ n\to\infty,$$

те $I_3 < \varepsilon/3$. Аналогично $I_2 < \varepsilon.$

Отсюда: $\forall x\in[-\pi,\pi]: |f(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x).$ ►

## *4.3. Преобразование Фурье*

Лекция 17

***Интеграл Фурье***

**Определение 4.23.** Будем обозначать $CL_1(\mathbb{R})$ нормированное пространство функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таких, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$ (т.е. $f$ абсолютно интегрируема) с нормой $\|f\|_{CL_1(\mathbb{R})}:=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx.$

**Определение 4.24.** Сходимость по норме пространства $CL_1(\mathbb{R})$ будем называть *сходимостью в среднем*.

**Определение 4.25.** Будем называть интегралом Фурье для $f\in CL_1(\mathbb{R})$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt.$$

**Теорема 4.7** Пусть $f\in CL_1(\mathbb{R})$ и в точке $x$ функция $f$ удовлетворяет условию Дини.

Тогда в точке $x$ интеграл Фурье сходится к $f(x)$, т.е.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt. \qquad (4.13)$$

◄ Обозначим $I_A=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{A}d\lambda\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt.$ Нужно доказать, что $I_A\to f(x),\ A\to\infty.$ Поскольку $|f(t)\cos\lambda(x-t)|\le|f(t)|$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt<\infty$ по признаку Вейерштрасса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)dt$ сходится равномерно для $\lambda\in[0,A]$ и мы можем менять порядок интегрирования:

$$I_A = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt\int_0^A \cos\lambda\left(x-t\right)d\lambda = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt = |t-x=z| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+z)\frac{\sin Az}{z}dz.$$

Используя интеграл Дирихле, получим:

$$I_A - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(f(x+z)-f(x))\frac{\sin Az}{z}dz = I_1 + I_2 + I_3.$$

Здесь

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-N}^{+N}\frac{f(x+z)-f(x)}{z}\sin Azdz,\ I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{|z|>N} f(x+z)\frac{\sin Az}{z}dz,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{|z|>N} f(x)\frac{\sin Az}{z}dz.$$

Зафиксируем такое $N$, чтобы выполнялись неравенства:

$$|I_2| \le \frac{1}{\pi}\int_{|z|>N}|f(x+z)|\frac{\sin Az}{z}dz < \frac{\varepsilon}{3},\ |I_3| \le \frac{|f(x)|}{\pi}\int_{|z|>N}\frac{\sin Az}{z}dz < \frac{\varepsilon}{3}.$$

В силу условия Дини, $I_1 \to 0,\ A\to\infty$, и $|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Окончательно,

$|I_A - f(x)| < \varepsilon.$ ►

**Следствие 4.4.** Пусть $f$ − кусочно-гладкая, абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция.

Тогда в точке непрерывности $x$ интеграл Фурье сходится к $f(x)$.

### *Преобразование Фурье*

Пусть $f \in CL_1(\mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Дини.

В силу Теоремы 4.7 и четности функции $\cos x$:

$$f(x)=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^A d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt\Rightarrow$$

$f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\,dt$ (в смысле главного значения).

Так как $i\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\,dt\,d\lambda=0$ в силу нечётности $\sin x$,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\lambda(x-t)}dt. \tag{4.14}$$

**Определение 4.26.** Будем называть *(прямым) преобразованием Фурье* функции $f$

$$F[f]:=g(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \tag{4.15}$$

*обратным преобразованием Фурье* функции $g$:

$$F^{-1}[g]:=f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda. \tag{4.16}$$

***Замечание 4.13.*** $f=F^{-1}\left(F(f)\right)$.

**Определение 4.27.** Будем называть $b(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\,dt$ *синус-преобразованием* Фурье функции $f$, $a(\lambda)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\,dt$ – *косинус-преобразованием* Фурье функции $f$.

***Замечание 4.14.*** В силу Теоремы 4.7

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(\lambda)\cos(\lambda x)+b(\lambda)\sin(\lambda x)\,d\lambda. \tag{4.17}$$

Для четной функции ее синус преобразование равно нулю, для нечетной – косинус преобразование равно нулю.

### *Свойства преобразования Фурье*

1. Линейность.

2. $f \in CL_1(\mathbb{R}) \Rightarrow F(f)$ ограничена.

$$◀ |F(f)| = |g(\lambda)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty. ▶$$

3. Если: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\overset{CL_1(R)}{\to}} f(x)$ (сходится в среднем), то: $g_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} g(\lambda)$.

$$◀ \left|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_n(t) - f_m(t) \right| dt \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| f_n - f_m \|_{CL_1(\mathbb{R})}. ▶$$

4. Если: $f, f' \in CL_1(\mathbb{R})$, то: $\exists F(f') = i\lambda F(f)$.

$$◀ F(f') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( f(t) e^{-i\lambda t} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(-i\lambda) e^{-i\lambda t} dt \right) =$$

$$= \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt = i\lambda F(f). ▶$$

**Следствие 4.5.** Если: $f, \ldots, f^{(k)} \in CL_1(\mathbb{R})$, то $F\left(f^{(k)}\right) = (i\lambda)^k F(f)$.

5. Теорема подобия $g(\lambda) = F(f(x)) \Rightarrow \frac{1}{a} g(\frac{\lambda}{a}) = F(f(ax))$.

6. $F(f) -$ непрерывна, $F(f) = g(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0$.

◀ Определим $f_A(x) = \begin{cases} 1, x \in (-A, A), \\ 0, |x| \ge A. \end{cases}$

$$F(f_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(-i\lambda)} \left( e^{-i\lambda A} - e^{i\lambda A} \right), \ |F| \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0.$$

Любую функцию $f \in CL_1(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать функциями вида $f_A(x)$ так, чтобы они сходились по норме пространства $CL_1(\mathbb{R})$, тогда их образы сходятся в метрике равномерной сходимости, $F(f)$ непрерывна, как предел последовательности непрерывных функций. ►

**Утверждение 4.19.** Связь между гладкостью функции и скоростью убывания на бесконечности её преобразования Фурье.

Пусть: $f^{(k)}(x) \in CL_1(\mathbb{R})$. Тогда: $F(f) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right), \lambda \to \infty.$

◄ $F\left(f^{(k)}\right) = (i\lambda)^k F(f).$

$$\left|F\left(f^{(k)}\right)\right| = |\lambda|^{(k)} |F(f)| \Rightarrow \frac{\left|F\left(f^{(k)}\right)\right|}{|\lambda|^k} = |F(f)| \Rightarrow$$

$$F\left(f^{(k)}\right) \underset{\lambda \to \infty}{\to} 0 \Rightarrow F(f) = \overline{\overline{o}}\left(\frac{1}{|\lambda|^k}\right). ►$$

7. $\left(F(f)\right)' = F((-ix)f).$

◄ $$\left(F(f)\right)'_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x}(-ix)\,dx = F((-ix)f). ►$$

8. Если: $f(x), g(x) \in CL_1(\mathbb{R})$, $(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) g(x - \xi)\,d\xi$ – *свёртка.*

Тогда: $\exists F(f * g) = \sqrt{2\pi} F(f) F(g).$

## Лекция 18

### *Пространство Шварца*

**Определение 4.28.** Будем называть *пространством Шварца* ($S$) пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ таких, что $\forall p, q\ \exists C_{p,q} : \left|x^p f^{(q)}(x)\right| \underset{x \to \infty}{<} C_{p,q}.$

**__Пример 4.3.__** $f(x) = e^{-x^2} \in S$.

**Утверждение 4.20.** Если: $f \in S$, то: $F(f) \in S$.

◄ 1) $\forall p,q\ \exists C_{p+2,q} : |x^{p+2} f^{(q)}(x)| < C_{p+2,q} \Rightarrow$

$$\left|x^p f^{(q)}(x)\right| < \frac{C_{p+2,q}}{x^2} \in CL_1(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists F\left(x^p f^{(q)}(x)\right) = \tilde{g}.$$

2) $g = F(f)$

$$\left.\begin{array}{l} g^{(k)} = F\left((-ix)^k f\right) \\ (-ix)^k f \in CL_1 \end{array}\right| \Rightarrow g^{(k)} \in CL_1 \Rightarrow g^{(k)} \underset{\lambda \to \infty}{\to} 0, g^{(k)} \in C^\infty.$$

$$(i\lambda)^p g^{(k)} = F\left(\left((-ix)^k f\right)^{(p)}\right) \Rightarrow \left|\lambda^p g^{(k)}\right| = \left|F\left(\left(x^k f\right)^{(p)}\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x^k f\right)^{(p)} e^{-i\lambda x} dx\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\left(x^k f\right)^{(p)}\right| dx = C_{p,k} < \infty \Rightarrow g \in S. ►$$

**Утверждение 4.21.** Если: $g \in S$, то: $\exists f = F^{-1}(g), f \in S$.

◄ $f^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$, $f^*(x) \in S$ по предыдущему утверждению. Обозначим $f(x) := f^*(-x) \in S.$

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x) e^{i\lambda x} dx = F(f) \Rightarrow f = F^{-1}(g). ►$$

***Замечание 4.15.*** Из утверждений 4.20, 4.21 следует, что преобразование Фурье взаимно однозначно отображает пространство Шварца в себя.

### *Теорема Планшереля*

**Определение 4.29.** Будем обозначать $L_p$ пространство, полученное замыканием $CL_p$ по его норме.

**Теорема 4.8 (Планшереля).** Пусть: $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$.

Тогда: $\exists g_N(\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}dx\in L_2(\mathbb{R})$,

$\exists \lim\limits_{N\to\infty} g_N(\lambda)=g(\lambda)\in L_2(\mathbb{R})$ (т.е. $\|g_N-g\|_{L_2(\mathbb{R})}\underset{N\to\infty}{\to}0$),

$\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}=\|f\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Если $f\in L_1(\mathbb{R})\bigcap L_2(\mathbb{R})\Rightarrow g=F(f)$, т.е. $g$ является преобразованием Фурье в обычном смысле.

*Замечание 4.16.* Идея доказательства: сначала доказательство проводится для функций из пространства Шварца $S$, а затем показывается, что все элементы $L_2(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать элементами из $S$.

**Следствие 4.6.** Если: $f_1, f_2\in L_2(\mathbb{R}), g_i=F(f_i)$,

Тогда: $(f_1, f_2)_{L_2(\mathbb{R})}=(g_1,g_2)_{L_2(\mathbb{R})}$.

**Следствие 4.7.** Преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_2(\mathbb{R})$ в себя.

### *Преобразование Фурье функций многих переменных*

**Определение 4.30.** Будем называть:

1. *преобразованием Фурье (прямым)* функции $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$F(f)=g(\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx,$$

$x=(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n;$

2. обратным преобразованием Фурье функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$F^{-1}(g)=f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\lambda)e^{i(\lambda,x)}d\lambda.$$

**Определение 4.31.** Будем обозначать:

$\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ $(\alpha_i\geq 0,\ \alpha_i\in\mathbb{Z}, \alpha_1+...+\alpha_n=|\alpha|)-$ *мультииндекс;*

$D^{\alpha} f = D^{\alpha_1} \dots D^{\alpha_n} f = \dfrac{\partial^{\alpha} f}{\partial x^{\alpha}}$ – частную смешанную производную вида:

$$D^{\alpha} f := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

***Замечание 4.17.*** Если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс и $x = (x_1, \dots, x_n)$, то запись $x^{\alpha}$ следует понимать как $x^{\alpha} := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

***Свойства преобразования Фурье***

1. Линейность;

2. $F\left(D^{\alpha} f\right) = (i\lambda)^{\alpha} F(f)$;

3. $D^{\alpha}\left(F(f)\right) = F\left((-ix)^{\alpha} f(x)\right)$.

**Определение 4.32.** Будем называть свёрткой функции $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функцию $(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$.

**Утверждение 4.22.** $F(f * g) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F(f) \cdot F(g)$.

**Теорема 4.9 (Планшереля).** Если: $f \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Тогда: $\forall N \ \exists g_N(\lambda) = \dfrac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{|x| < N} f(x) e^{-i(\lambda, x)} dx.$

$\exists \lim\limits_{N \to \infty} g_N(\lambda) = g(\lambda) \in L_2\left(\mathbb{R}^n\right)$ (т.е. $\|g_N - g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \underset{N \to \infty}{\to} 0$),

$\|g\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$.

Если $f \in L_1\left(\mathbb{R}^n\right) \cap L_2\left(\mathbb{R}^n\right) \Rightarrow g = F(f)$.

**Следствие 4.8.** Преобразование Фурье осуществляет изометрический изоморфизм пространства $L_2(\mathbb{R})$ в себя.

## *Вопросы для подготовки к экзамену*

**Числовые ряды**

1. Числовые ряды (ЧР). Необходимое условие сходимости ЧР. Критерий Коши. Свойства сходящихся рядов.
2. Признаки сравнения ЧР с неотрицательными членами.
3. Интегральный признак Коши сходимости ЧР.
4. Признак Даламбера.
5. Признак Коши.
6. Условная сходимость ЧР. Признак Лейбница.
7. Признаки Абеля и Дирихле для ЧР.
8. Теорема Римана.
9. Действия над абсолютно сходящимися рядами.

**Функциональные ряды**

10. Сходимость и равномерная сходимость (РС) семейства функций, зависящих от параметра.
11. Критерий Коши равномерной сходимости ряда. Необходимый признак РС ряда.
12. Признак Вейерштрасса РС.
13. Признаки Абеля и Дирихле РС.
14. Условия коммутативности двух предельных переходов для семейства функций, зависящих от параметра. Коммутативная диаграмма.
15. Непрерывность и предельный переход.
16. Теорема Дини.
17. Интегрирование и предельный переход.
18. Дифференцирование и предельный переход.
19. Степенные ряды. Формула Коши – Адамара. Теорема о характере сходимости степенного ряда.
20. Первая и вторая теоремы Абеля.
21. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
22. Аналитические функции в действительной области.
23. Ряд Тейлора.
24. Формула Стирлинга.
25. Теорема Стоуна.
26. Приближения непрерывных функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами. Теоремы Вейерштрасса.

**Интегралы, зависящие от параметра**

27. Собственные $\int$, зависящие от параметра (ПАР). Непрерывность собственных $\int$ (ПАР). Интегрирование собственных $\int$ (ПАР).
28. Дифференцирование собственных $\int$ (ПАР).
29. Несобственные $\int$, зависящие от параметра (ПАР). Равномерная сходимость (РС). Критерий Коши РС.
30. Признак Вейерштрасса РС несобственного $\int$ (ПАР).

31. Признак Абеля – Дирихле РС несобственного $\int$ (ПАР).
32. Предельный переход под знаком несобственного $\int$ (ПАР).
33. Непрерывность несобственного $\int$ (ПАР).
34. Дифференцирование несобственного $\int$ (ПАР).
35. Интеграл Дирихле.
36. Интегрирование несобственного $\int$ (ПАР). Достаточное условие перестановочности несобственных $\int$.
37. Эйлеровы интегралы.

**Ряд и интеграл Фурье**

38. Ряды Фурье в предгильбертовом пространстве. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля.
39. Ортонормированные системы векторов в сепарабельном предгильбертовом пространстве. Полные и замкнутые системы. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном предгильбертовом пространстве.
40. Гильбертово пространство. Теорема Рисса – Фишера.
41. Предгильбертово пространство $CL_2[a,b]$.
42. Тригонометрическая система на отрезке, ее свойства. Тригонометрический ряд Фурье периодической функции. Сходимость в среднем квадратичном. Равенство Ляпунова.
43. Ряды Фурье для четных и нечетных периодических функций с произвольным периодом. Ряд Фурье в комплексной форме.
44. Лемма Римана.
45. Ядра Дирихле, их свойства.
46. Достаточные условия поточечной сходимости тригонометрического ряда Фурье.
47. Достаточные условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье.
48. Теорема Фейера.
49. Интеграл Фурье. Теорема обращения.
50. Преобразование Фурье, его свойства.
51. Преобразование Фурье свертки.
52. Пространство Шварца S быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций. Преобразование Фурье в S.
53. Теорема Планшереля.
54. Преобразование Фурье для функций многих переменных. Теорема Планшереля.

## *Задания на курсовую работу*

### *1. Методические указания*

Темы курсовых работ: «Несобственные интегралы и ряды», «Применение специальных функций к исследованию несобственных интегралов», «Ряды и интегралы Фурье». Работы содержат задания из следующих разделов: несобственные интегралы с параметром, Эйлеровы интегралы, ряды и интегралы Фурье.

Расчетные задачи должны быть решены с полным обоснованием. Необходимо исследовать характер сходимости соответствующих рядов и интегралов. При использовании Эйлеровых интегралов необходимо привести их свойства. При разложении функций в ряд Фурье нужно построить графики самой функции и графики последовательностей частичных сумм ряда Фурье. Также необходимо исследовать характер сходимости ряда к порождающей его функции. Аналогичное исследование должно быть проведено для интеграла Фурье.

### *1. Теоретические задания*

1. Пусть $\{a_n\}-$ произвольная монотонная последовательность. Доказать, что если ряЗд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то существует такая монотонная последовательность $\{b_n\}$, что $a_n = o(b_n),\, n \to \infty,$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то существует такая монотонная последовательность $\{b_n\}$, что $b_n = o(a_n),\, n \to \infty,$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится [2, №№9,11,13, §7, гл. 1].

2. Привести пример сходящихся рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, для которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$ а) сходится; б) расходится [**2**, №№4,5, §7, гл. 1].

3. Доказать, что для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\alpha$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\alpha$, где последовательность $\{a_n\}$ монотонна, условия 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и 2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ необходимы и достаточны соответственно для сходимости и абсолютной сходимости этих рядов при $\alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ [**2**, №41, §7, гл. 1].

4. Привести пример последовательности, не являющейся бесконечно малой, для которой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n$ сходится абсолютно. (Доказать, что хотя бы одна из точек 0 или 1 является предельной точкой последовательности $\{\pi n - [\pi n]\}, n \in \mathbb{N}$.) [**2**, №44, §7, гл. 1].

5. Пусть последовательности $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$ равномерно сходятся на $M$ к ограниченным функциям $\{u(x)\}$ и $\{v(x)\}$ соответственно. Доказать, что последовательность $\{u_n(x)v_n(x)\}$ сходится равномерно [**2**, №54, §7, гл. 1].

6. Привести пример двух последовательностей $\{u_n(x)\}, \{v_n(x)\}$, равномерно сходящихся на $[0,1]$, таких, что последовательность $\{u_n(x)v_n(x)\}$ сходится на $[0,1]$ неравномерно [**2**, №55, §7, гл. 1].

7. Привести пример последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций $f_n(x)$, сходящейся на $[0,1]$ к функции $f \notin \tilde{R}[0,1]$, $\tilde{R}[0,1]-$ множество функций, интегрируемых в несобственном смысле на $[0,1]$ [**2**, №60, §7, гл. 1].

8. Привести пример последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций $f_n(x)$, сходящейся к непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$, и такой, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx \neq \int\limits_0^1 f(x)dx$ [**2**, №62, §7, гл. 1].

9. Привести пример последовательности непрерывных на $[0,1]$ функций $f_n(x)$, неравномерно сходящейся к непрерывной на $[0,1]$ функции $f(x)$, и такой, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx$ [**2**, №63, §7, гл. 1].

10. Пусть функция $f_0(x)$ определена условиями:

1. $f_0(x)=\begin{cases} x, 0\le x\le 0.5, \\ 1-x, 0.5<x<1. \end{cases}$ 2. $f_0(x)$ периодична с периодом 1. Положим

$f_n(x)=\dfrac{f_0(4^n x)}{4^n}$ и $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Показать, что $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и не имеет производной ни в одной точке $x\in\mathbb{R}$ [**2**, №68, §7, гл. 1].

11. Доказать, что функция $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n}\cos(n^2x)$ имеет производные всех порядков в любой точке $x\in\mathbb{R}$, а ее ряд Тейлора с центром в нуле имеет нулевой радиус сходимости [**2**, №75, §7, гл. 1].

12. Пусть $\{p_n\},\{q_n\}$ – последовательности положительных чисел, для которых сходятся бесконечные произведения $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} q_n$. Что можно сказать о сходимости бесконечных произведений: 1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$; 2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n^{\alpha}, \alpha>0$: 3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$; 4) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(p_nq_n)$; 5) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{q_n}{p_n}$ [**2**, №99, §7, гл. 1].

13. Доказать критерий Коши сходимости бесконечного произведения: бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} p_n,\ p_n > 0$ сходится

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n,m > N(\varepsilon): |\prod_{k=n}^{m} p_k - 1| < \varepsilon$ [**2**, №100, §7, гл. 1].

14. Пусть $f \in \tilde{R}\langle a,b\rangle$ и $|f| \in \tilde{R}\langle a,b\rangle$. Доказать, что для любого промежутка $\langle \alpha,\beta\rangle, a < \alpha < \beta < b,\ \lim\limits_{h\to 0}\int_{\alpha}^{\beta}\left| f(x+h) - f(x)\right| dx = 0$

(интегральная непрерывность функции $f$) [**2**, №17, §5, гл. 2].

15. Пусть $f \in \tilde{R}\langle a,\infty\rangle$ и $|f| \in \tilde{R}\langle a,\infty\rangle$ $a > -\infty$. Доказать, что

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{a}^{\infty} f(x)\sin nx dx = 0$ [**2**, №18, §5, гл. 2].

16. Пусть $0-$ единственная особая точка положительной функции $f$ на $\langle 0,1\rangle$, $f \in \tilde{R}\langle 0,1\rangle$ и $\Phi(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$. Доказать, что $\frac{f}{\sqrt{\Phi}} \in \tilde{R}\langle 0,1\rangle$ [**2**, №19, §5, гл. 2].

17. Пусть функция $f$ монотонна на $[a,+\infty)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)\sin x dx$ сходится. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ [**2**, №44, §5, гл. 2].

18. Пусть функция $f$ монотонна на $[a,+\infty)$ и интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)\sin x dx$ сходится абсолютно. Доказать, что $|f| \in \tilde{R}\langle a,\infty\rangle$ [**2**, №45, §5, гл. 2].

19. Привести пример непрерывной, неотрицательной, неограниченной на $[0,\infty)$ функции $f$, для которой интеграл $\int_{0}^{\infty} f(x)\sin x dx$ сходится

абсолютно, а интеграл $\int\limits_0^{\infty} f(x)dx$ расходится [**2**, №46, §5, гл. 2].

20. Пусть $C_2[-1,1]-$ пространство непрерывных на $[a,b]$ функций с метрикой среднего квадратичного уклонения. Объясните, почему система функций $\{1, x, x^2, \dots\}$ линейно независима и полна в $C_2[-1,1]$, но не является базисом этого пространства [**1**, №2, гл. XVШ, §1 ].

21. Многочлен $P_n(x) = \dfrac{(-1)^n \sqrt{2n+1}}{n! 2^{\frac{n+1}{2}}} \dfrac{d^n (1-x^2)^n}{dx^n}$ называется нормированным многочленом Лежандра порядка $n$. Доказать, что: 1) $P_n$ образуют ортонормальную систему на $[-1,1]$; 2) система $P_n$ полна и является базисом в $C_2[-1,1]$ [**2**, №№6,7, §5 , гл.3].

### *3. Расчетные задания*

В первом задании требуется исследовать интеграл на равномерную сходимость в указанном промежутке.

**Вариант 1**

**1.** $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x \sin \alpha x dx}{x^2+1}$ $(0 < \alpha_0 < \alpha < +\infty)$.

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{(\alpha-1)}(x)dx \ \ (\alpha > 0).$$

**3**. Разложите в ряд Фурье

$f(x) = x\sin x$ на $[-\pi, \pi]$.

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0, \\ e^{-x}, x > 0. \end{cases}$$

**Вариант 2**

**1.** $\int\limits_0^{2} \dfrac{x^p dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $(|p| < \dfrac{1}{2})$.

**2**. Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}}.$$

**3**. Разложите в ряд Фурье

$f(x) = x\cos x$ на $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

**4**. Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}-x,\ x\in(-1,0),\\ 2x,\ x\in[0,1),\\ 0,|x|\geq 1.\end{cases}$$

**Вариант 3**

**1**. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\alpha}dx}{\sqrt{\alpha^2x^4+1}}\ (0\leq\ \alpha\leq 1).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x}dx.$$

**3**. Разложите в ряд Фурье

$f(x)=|\cos x|.$

**4**. Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}x,\ x\in(-1,0),\\ 1,\ x\in[0,1),\\ 0,|x|\geq 1.\end{cases}$$

**Вариант 4**

**1.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha^2x}{x+\alpha}dx\ \ (\alpha\in[1,\infty)).$

**2**. Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}dt.$$

**3**. Разложите в ряд Фурье

$f(x)=|\sin x|.$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\cos x,|x|\leq\frac{\pi}{2},\\ 0,|x|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

**Вариант 5**

**1.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\cos(\alpha x)dx}{1+x^2}$

*а*) $\alpha\in(1,20)$; *б*) $\alpha\in(0,20)$.

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}tg^{\beta}xdx\ \ (|\beta|<1).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье по синусам $f(x)=\cos 2x,\ x\in[0,\ \pi]$.

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\in(-1,0),\\ x,\ x\in[0,1),\\ 0,|x|\geq 1.\end{cases}$$

**Вариант 6**

**1.** $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\cos\alpha^2xdx}{1+x^{\alpha}}$

*а*) $\alpha\in(1,10)$; *б*) $\alpha\in(0,10)$.

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{arctg(ax)dx}{x(1+x^2)}\ \ (\alpha>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье по косинусам на $[0,\ \pi]$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}-x,\ 0<x<\frac{\pi}{2},\\ 0,\ \frac{\pi}{2}\leq x<\pi.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\cos 2x,\ x\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\\ 0,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$f(x)=-f(-x).$

**Вариант 7**

**1.** $\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\alpha x}\dfrac{\cos(x)}{x^2}dx\ \ (0\le\alpha<+\infty).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(ax)-ax}{x^3}dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье

$f(x)=|\cos(x/2)|.$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}1,\ x\in(-1,0),\\ -x,\ x\in[0,1],\\ 0,\ |x|>1.\end{cases}$$

**Вариант 8**

**1.** $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-2x}\dfrac{\sin(\alpha x)}{x}dx\ \ (0<\alpha_0<\alpha).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin(ax)\sin^2(x)}{x^3}dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\sin x,\ -\pi<x<0,\\ x,\ 0\le x<\pi.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in[0,1],\\ 2-x,\ x\in(1,2],\\ 0,\ x>0.\end{cases}$$

$f(x)=f(-x).$

**Вариант 9**

**1.** $\int\limits_{0}^{1} x^{p-1}\ln^2 x dx\ \ (0\le p_0<p<+\infty).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^6}.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на [2, 4]

$$f(x)=\begin{cases}x,\ 2<x<3,\\ 6-x,\ 3\le x<4.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}-x,\ x\in(-1,0),\\ x,\ x\in[0,1),\\ 0,\ |x|\ge 1.\end{cases}$$

**Вариант 10**

**1.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\sin x^2 arctg\alpha x dx\quad (\alpha\in\mathbb{R}).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int\limits_{0}^{1} x^{n-1}\ln x dx\ \ (n>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на [2, 4]

$$f(x)=\begin{cases}4-x,\ 2<x<3,\\ x-2,\ 3\le x<4.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} x, |x|<1, \\ 0, |x|\geq 1. \end{cases}$$

**Вариант 11**

**1.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2 x^4+1}}dx \quad (1<\alpha<+\infty).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{arctg(ax)arctg(bx)}{x^2}dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на [2, 4]

$$f(x)=\begin{cases} 5-x, 2<x<3, \\ 4-x, 3<x<4. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} e^x, x\leq 0, \\ 0, x>0. \end{cases}$$

**Вариант 12**

**1.** $\displaystyle\int_0^{1} \frac{a^2-x^2}{(x^2+a^2)^2}dx \ (0<a\leq 1).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin(mx)dx$$

$(\alpha>0, \beta>0).$

**3.** Разложите в ряд Фурье по косинусам

$$f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}, 0<x<2, \\ 0, 2<x<\pi. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} -x, x\in(-2,0), \\ 2-x, x\in[0,2), \\ 0, |x|\geq 2. \end{cases}$$

**Вариант 13**

**1.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2 x^4+1}}dx \ (0\leq a\leq 1).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2}-e^{-\beta x^2}}{x} \ (\alpha>0, \beta>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на (4, 6)

$$f(x)=\begin{cases} x-2, 4<x<5, \\ 8-x, 5\leq x<6. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$f(x)=e^x, x\in(-\infty,0); \ f(-x)=f(x).$

**Вариант 14**

**1.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x}\sin(x)}{1+x^2}dx \ (0\leq\beta<+\infty).$

**2.** Вычислите интеграл

$$\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\sin(bx)dx \ (\alpha>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье по косинусам

$$f(x)=\begin{cases} \cos\pi x, 0\leq x<\dfrac{1}{2}, \\ 0, \dfrac{1}{2}\leq x<1. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=e^{x},\ x\in(-\infty,0);\ f(-x)=-f(x).$$

**Вариант 15**

**1.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+4}\quad (0\le\alpha\le 10).$

**2.** Выразите через Г-функцию

$$\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье по синусам

$$f(x)=\begin{cases}-1,\ -2\le x\le -1,\\ x,\ -1\le x<0.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}-3x,\ -1<x\le 0,\\ 2x,\ 0<x\le 2,\\ 0,\ x<-1, x>2.\end{cases}$$

**Вариант 16**

**1.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$

$a)\ 0<\alpha\le 1;\ б)\ 1\le\ \alpha<\infty.$

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{1+x^3}\ dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на (0, 2)

$$f(x)=\begin{cases}2x+1,\ 0<x<1,\\ 1-x, 1\le x<2.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}3x,\ 0<x<1,\\ -x, 1<x<2,\\ 0,\ x>2.\end{cases}$$

$$f(-x)=f(x).$$

**Вариант 17**

**1.** $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x-\alpha)^2+4}\quad (0<a<+\infty)\,.$

**2.** Выразите через Г-функцию

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x}dx.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на (2, 4)

$$f(x)=\begin{cases}5-x,\ 2<x\le 3,\\ x-3, 3<x<4.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases}\cos x,\ 0<x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0,\ x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

$$f(-x)=-f(x).$$

**Вариант 18**

**1.** $\displaystyle\int_1^{\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos(2x)}{\sqrt{x}}dx\quad (0\le\alpha<+\infty).$

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int_0^{+\infty}x^p e^{-\alpha x}\ln x dx\ (\alpha>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на (2, 4)

$$f(x)=\begin{cases}3-x,\ 2<x\le 3,\\ x-3, 3<x<4.\end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} x+1, -1<x<0, \\ 2x, 0\le x<1, \\ 0, |x|>1. \end{cases}$$

**Вариант 19**

**1.** $\int\limits_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^{\alpha}}dx \ (0<\alpha<2)$.

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \ (m>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье по косинусам в интервале $(0, 2)$

$$f(x)=\begin{cases} 1, 0<x<1, \\ x+1, 1\le x<2. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} 2x, -1<x\le 0, \\ 3x, 0<x<2, \\ 0, x<-1, x>2. \end{cases}$$

**Вариант 20**

**1.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^m}} \ (0\le n<+\infty)$.

**2.** Выразите через Г- функцию

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^n}dx \ (n>0).$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на $(0, 2)$

$$f(x)=\begin{cases} 2x, 0<x<1, \\ x+1, 1\le x<2. \end{cases}$$

**4.** Представьте интегралом Фурье

$$f(x)=\begin{cases} -x, 0<x<1, \\ 2, 1\le x<2, \\ 0, x>2. \end{cases}$$

$f(x)=-f(-x)$.

**Вариант 21**

**1.** $\int\limits_0^1 \frac{arctg\alpha x}{(1-x^2)^{\alpha}}dx$

1. $\alpha\in[-2, 2/3]$;     2. $\alpha\in(-1,1)$.

**2.** Используя интегралы Эйлера, вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x\,dx}{1+x^4}.$$

**3.** Разложите в ряд Фурье на $[0, 3]$

$f(x)=x-[x]$.

**4.** Найти преобразование Фурье

$f(x)=e^{-2|x-1|}$.

## Библиографический список

*1. Зорич В.А.* Математический анализ. ч. 2. – М.: Наука, 1984.

2. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. – М.: Высшая школа, 2000.

3. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. Т. 3. – М.: Высшая школа, 1981.

4. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1976.

5. *Иванова Е.П.* Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – М.: Изд-во МАИ, 2009.

Тем. план 2020, поз. 18

Иванова Елена Павловна

Ряды и функциональные семейства

Редактор М.С. Виниченко
Подписано в печать 6.07.2020.
Бум. писчая. Формат $60 \times 84$ 1 / 16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 250 экз. Зак. 1110/774.
Издательство МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Отпечатано с готового оригинал-макета
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993