Chapter 1

18 de setembro

1.1 Definição

A transformada de Laplace é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad \Re(s) > s_0$$

Exemplo:

$$f(t) = 1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t\to\infty} \\ &= \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(t) = e^{as}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt \\
&= \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty \\
&= \frac{0-1}{a-s} \\
&= \frac{1}{s-a}, \quad s > a.
\end{aligned}$$

1.2 Propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

exemplo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{3 + 2e^t\} &= 3\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{e^t\} \\
&= \frac{3}{s} + \frac{2}{s-1}
\end{aligned}$$

1.3 Propriedade da derivada

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Exemplo:

$$f(t) = t$$
$$f'(t) = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} - 0$$
$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo:

$$f(t) = t^2$$
$$f'(t) = 2t$$

$$\mathcal{L}\{2t\} = s\mathcal{L}\{t^2\} - 0$$
$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Aplicação:

$$f'(t) + f(t) = 1$$

com $f(0) = 1$.

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$[sF(s) - f(0)] + F(s) = \frac{1}{s}$$

$$F(s)(s+1) = \frac{1}{s} + 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1+s}{s(s+1)} = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = 1$$

OBS: $f(t) = 1, t \neq 2,\ f(2) = 0$.

Chapter 2

21 de setembro

2.1 A transformada inversa

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

2.2 Propriedade da derivada - derivada segunda

Vimos a propriedade da derivada:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Agora aplicamos à derivada da função $f'(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0)\\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos(\omega t)\\ f'(t) &= -\omega\sin(\omega t)\\ f''(t) &= -\omega^2\cos(\omega t)\end{aligned}$$

isto é:

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Usamos a propriedade da derivada (segunda):

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = -\omega^2 F(s)$$

isto é:

$$(s^2+\omega^2)F(s) = sf(0) + f'(0) = s$$

Portanto:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad s > 0$$

Analogamente, temos:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{w}{s^2+\omega^2}$$

2.3 Método das frações parciais para calcular transformadas inversas

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2-6s+4}{s^3-3s^2+2s} \\ &= \frac{s^2-6s+4}{s(s^2-3s+2)} \\ &= \frac{s^2-6s+4}{s(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \end{aligned}$$

O teorema das frações parciais garante que existem constantes A, B e C tais que:

$$\frac{s^2-6s+4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \tag{2.1}$$

para todo s complexo.

Primeiro multiplicamos (2.1) por s:

$$\frac{s^2-6s+4}{(s-1)(s-2)} = A + \frac{Bs}{s-1} + \frac{Cs}{s-2}$$

Substituindo s por 0, temos:

$$\frac{4}{(-1)(-2)} = A \quad \Longrightarrow \quad A = 2$$

Agora multiplicamos a expressão (2.1) por $s-1$:

$$\frac{s^2-6s+4}{s(s-2)} = \frac{A(s-1)}{s} + B + \frac{C(s-1)}{s-2}$$

Substituindo s por 1, temos:

$$\frac{1-6+4}{1(1-2)} = B \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

Finalmente multiplicamos (2.1) por $s-2$:

$$\frac{s^2-6s+4}{s(s-1)} = \frac{A(s-2)}{s} + \frac{B(s-2)}{s-1} + C$$

E substuimos por $s = 2$:

$$\frac{4-12+4}{2(2-1)} = C \quad \Longrightarrow \quad C = -2$$

$$F(s) = \frac{s^2-6s+4}{s(s-1)(s-2)} \tag{2.2}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} \tag{2.3}$$

Olhanda na tabela, encontramos:

$$f(t) = 2 + e^t - 2e^{2t}, \quad t \geq 0$$

Tabela com item 1 e item 7 com $a = 1$ e $a = 2$.

Obs:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-2)^3} = \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-2)^2} + \frac{E}{(s-2)^3}$$

2.4 Propriedade de translação no eixo s

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ definida para $s > s_0$, então $e^{at}f(t)$ é a transformada inversa de $F(s-a)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \qquad s > s_0 + a$$

A demostração vem da aplicação da definição da transformada de Laplace $F(s-a)$:

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(f(t)e^{at}\right)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{at}\right\} = \frac{2}{(s-a)^3}$$

2.5 Oscilador harmônico

$$F(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + \kappa}$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 0$, $\kappa = 4$:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{s^2 + 2^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 2$, $\kappa = 5$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{1}{\underbrace{(s+1)^2}_{s^2+2s+1} + 4} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \\ &= G(s+1) \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{1}{s^2+2^2}$

Como

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Onde usamos o produto notável:

$$(s + a)^2 = s^2 + 2as + a^2.$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 3$, $\kappa = 2$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ F(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Usando a tabela, encontramos:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Pergunta: Quantas vezes $f(t)$ para por zero para $t \geq 0$.

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} = 0$$

$$e^{-t}(1 - e^{-t}) = 0$$

Assim $f(t) = 0$ se e somente se $e^{-t} = 1$, i.e., $t = 0$.

Chapter 3

23 de setembro

3.1 Exemplo de cálculo de transformada de Laplace usando função de Heaviside

Representar algebricamente em termos da função de Heaviside a função dada no gráfico da figura 3.2. Observe que podemos representar $f(t)$ da seguinte forma:

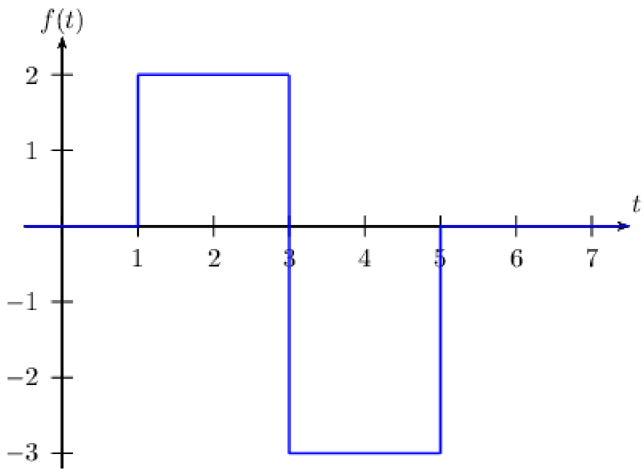

Figure 3.1:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & 1 < t < 3 \\ -3, & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para representar em termos da função de Heaviside, olhe para o gráfico pensando em dois pulsos: $2(u(t-1) - u(t-3))$ e $-3(u(t-3) - u(t-5))$. A soma deles é a função desejada:

$$f(t) = 2(u(t-1) - u(t-3)) - 3(u(t-3) - u(t-5)). \tag{3.2}$$

$$f(t) = 2u(t-1) - 5u(t-3) + 3u(t-5). \tag{3.3}$$

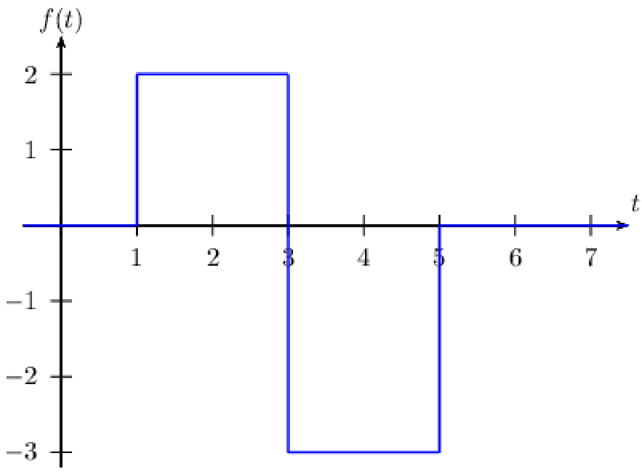

Figure 3.2:

$$F(s) = \frac{2e^{s} - 5e^{-3s} + 3e^{-5s}}{s}$$

onde usamos que

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

O que vamos provar agora.

3.2 Transformada de Laplace da Heaviside

$$f(t) = u(t-a), \quad a > 0$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a \underbrace{u(t-a)}_{0} e^{-st}dt + \int_a^\infty \underbrace{u(t-a)}_{1} e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}dt \\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=a}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0
\end{aligned}$$

3.3 Propriedade do deslocamento no tempo

Se $F(s)$ é a transformada de $f(t)$, então $f(t-a)u(t-a)$ é a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s), \qquad a > 0 \tag{3.4}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = u(t-a)f(t-a), \qquad a > 0. \tag{3.5}$$

Dem: Aplicamos a definição da transformada de Laplace e obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} &= \int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a \underbrace{u(t-a)}_{0} f(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty \underbrace{u(t-a)}_{1} f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt,
\end{aligned}$$

pois $u(t-a)$ é zero no intervalo $[0,a)$ e um no intervalo (a,∞). Depois usamos a mudança de variável $v = t-a$ na última integral:

$$\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}dv = e^{-as}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-as}F(s). \tag{3.6}$$

Observe que tomando $f(t) = 1$ na propriedade do deslocamento, temos:

$$\mathcal{L}\left\{1\,u(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad a > 0 \tag{3.7}$$

que coincide com a fórmula da transformada de Laplace da Heaviside. Quando $a = 0$ na equação acima, recaímos no item 1 da tabela de transformadas.

Exemplo Aplicando diretamente a propriedade do deslocamento em t e usando que $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, calculamos a transformada inversa de Laplace de $e^{-3s}\frac{2}{s^3}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\frac{2}{s^3}\right\} = u(t-3)(t-3)^2. \tag{3.8}$$

Cuidado:

$$u(t-3)(t-3)^2 \neq u(t-3)t^2. \tag{3.9}$$

Exemplo: Vamos calcular a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2-1}. \tag{3.10}$$

Obs: As raizes do denominador são:

$$(s+1)^2 - 1 = 0$$

$$(s+1)^2 = 1$$

$$(s+1) = \pm 1$$

$$s = -1 \pm 1$$

Primeiro calculamos a transformada de $\frac{1}{(s+1)^2-1}$ usando a propriedade.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\} &= e^{-t}\sinh(t) \\
&= e^{-t}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\
&= \frac{1-2e^{-2t}}{2}
\end{aligned}$$

Depois usamos a propriedade para concluir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\} = u(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\}_{t\to t-1} = u(t-1)e^{-(t-1)}\sinh(t-1). \tag{3.11}$$

3.4 A propriedade da transformada de Laplace da integral de uma função

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função contínua por partes $f(t)$, então $\int_0^t f(\tau)d\tau$ é a transformada inversa de $\frac{1}{s}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \tag{3.12}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

Dem: Seja $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Então $g'(t) = f(t)$. Aplicamos a propriedade da transformada da derivada e temos:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0). \tag{3.14}$$

Usando o fato que $g(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\{g(t)\} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g'(t)\} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= \frac{1}{s}F(s).
\end{aligned}$$