Chapter 1

18 de setembro

1.1 Definição

A transformada de Laplace é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad \Re(s) > s_0$$

Exemplo:

$$f(t) = 1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t\to\infty} \\ &= \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(t) = e^{as}$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt \\
&= \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty \\
&= \frac{0-1}{a-s} \\
&= \frac{1}{s-a}, \quad s > a.
\end{aligned}$$

1.2 Propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

exemplo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{3 + 2e^t\} &= 3\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{e^t\} \\
&= \frac{3}{s} + \frac{2}{s-1}
\end{aligned}$$

1.3 Propriedade da derivada

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Exemplo:

$$f(t) = t$$

$$f'(t) = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} - 0$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo:

$$f(t) = t^2$$

$$f'(t) = 2t$$

$$\mathcal{L}\{2t\} = s\mathcal{L}\{t^2\} - 0$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Aplicação:

$$f'(t) + f(t) = 1$$

com $f(0) = 1$.

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$[sF(s) - f(0)] + F(s) = \frac{1}{s}$$

$$F(s)(s+1) = \frac{1}{s} + 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1+s}{s(s+1)} = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = 1$$

OBS: $f(t) = 1, t \neq 2,\ f(2) = 0.$

Chapter 2

21 de setembro

2.1 A transformada inversa

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

2.2 Propriedade da derivada - derivada segunda

Vimos a propriedade da derivada:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Agora aplicamos à derivada da função $f'(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \cos(\omega t) \\
f'(t) &= -\omega \sin(\omega t) \\
f''(t) &= -\omega^2 \cos(\omega t)
\end{aligned}$$

isto é:

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Usamos a propriedade da derivada (segunda):

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = -\omega^2F(s)$$

isto é:

$$(s^2 + \omega^2)F(s) = sf(0) + f'(0) = s$$

Portanto:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

Analogamente, temos:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{w}{s^2 + \omega^2}$$

2.3 Método das frações parciais para calcular transformadas inversas

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s^3 - 3s^2 + 2s} \\ &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s(s^2 - 3s + 2)} \\ &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \end{aligned}$$

O teorema das frações parciais garante que existem constantes A, B e C tais que:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \tag{2.1}$$

para todo s complexo.

Primeiro multiplicamos (2.1) por s:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{(s-1)(s-2)} = A + \frac{Bs}{s-1} + \frac{Cs}{s-2}$$

Substituindo s por 0, temos:

$$\frac{4}{(-1)(-2)} = A \implies A = 2$$

Agora multiplicamos a expressão (2.1) por $s - 1$:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-2)} = \frac{A(s-1)}{s} + B + \frac{C(s-1)}{s-2}$$

Substituindo s por 1, temos:

$$\frac{1-6+4}{1(1-2)} = B \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

Finalmente multiplicamos (2.1) por $s-2$:

$$\frac{s^2-6s+4}{s(s-1)} = \frac{A(s-2)}{s} + \frac{B(s-2)}{s-1} + C$$

E substuimos por $s = 2$:

$$\frac{4-12+4}{2(2-1)} = C \quad \Longrightarrow \quad C = -2$$

$$F(s) = \frac{s^2-6s+4}{s(s-1)(s-2)} \tag{2.2}$$

$$= \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} \tag{2.3}$$

Olhanda na tabela, encontramos:

$$f(t) = 2 + e^t - 2e^{2t}, \quad t \geq 0$$

Tabela com item 1 e item 7 com $a = 1$ e $a = 2$.

Obs:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-2)^3} = \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-2)^2} + \frac{E}{(s-2)^3}$$

2.4 Propriedade de translação no eixo s

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ definida para $s > s_0$, então $e^{at}f(t)$ é a transformada inversa de $F(s-a)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \qquad s > s_0 + a$$

A demostração vem da aplicação da definição da transformada de Laplace $F(s-a)$:

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(f(t)e^{at}\right)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{at}\right\} = \frac{2}{(s-a)^3}$$

2.5 Oscilador harmônico

$$F(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + \kappa}$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 0$, $\kappa = 4$:

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4} = \frac{1}{s^2 + 2^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 2$, $\kappa = 5$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 2s + 5} \\ &= \frac{1}{\underbrace{(s+1)^2}_{s^2+2s+1} + 4} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \\ &= G(s+1) \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{1}{s^2+2^2}$

Como

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Onde usamos o produto notável:

$$(s + a)^2 = s^2 + 2as + a^2.$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 3$, $\kappa = 2$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \\ F(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Usando a tabela, encontramos:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Pergunta: Quantas vezes $f(t)$ para por zero para $t \geq 0$.

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} = 0$$

$$e^{-t}(1 - e^{-t}) = 0$$

Assim $f(t) = 0$ se e somente se $e^{-t} = 1$, i.e., $t = 0$.

Chapter 3

23 de setembro

3.1 Exemplo de cálculo de transformada de Laplace usando função de Heaviside

Representar algebricamente em termos da função de Heaviside a função dada no gráfico da figura 3.2. Observe que podemos representar $f(t)$ da seguinte forma:

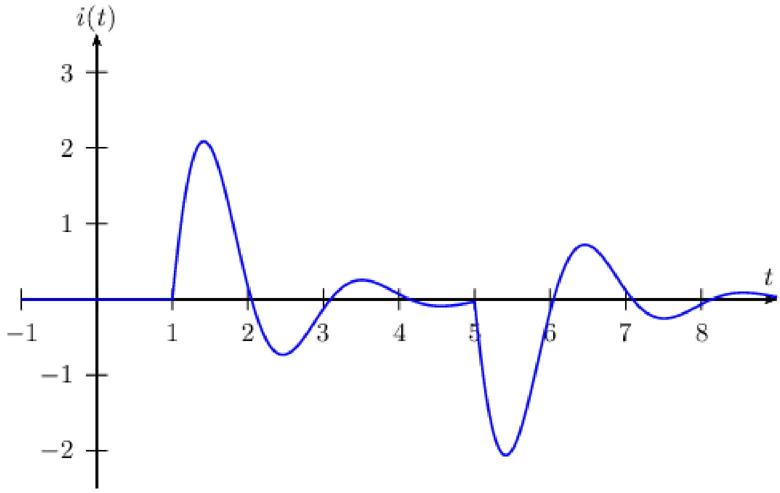

Figure 3.1:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 2, & 1 < t < 3 \\ -3, & 3 < t < 5 \\ 0, & t > 5. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para representar em termos da função de Heaviside, olhe para o gráfico pensando em dois pulsos: $2(u(t-1) - u(t-3))$ e $-3(u(t-3) - u(t-5))$. A soma deles é a função desejada:

$$f(t) = 2(u(t-1) - u(t-3)) - 3(u(t-3) - u(t-5)). \tag{3.2}$$

$$f(t) = 2u(t-1) - 5u(t-3) + 3u(t-5). \tag{3.3}$$

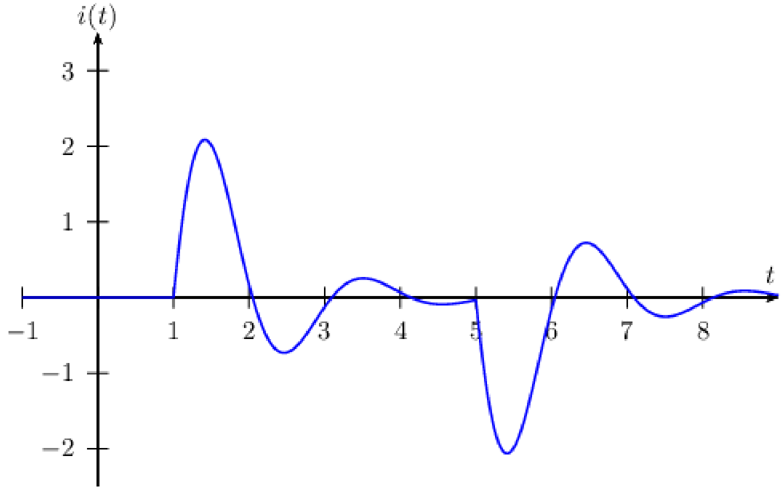

Figure 3.2:

$$F(s) = \frac{2e^{s} - 5e^{-3s} + 3e^{-5s}}{s}$$

onde usamos que

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

O que vamos provar agora.

3.2 Transformada de Laplace da Heaviside

$$f(t) = u(t-a), \quad a > 0$$

$$\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a \underbrace{u(t-a)}_{0} e^{-st}dt + \int_a^\infty \underbrace{u(t-a)}_{1} e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}dt \\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=a}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0
\end{aligned}$$

3.3 Propriedade do deslocamento no tempo

Se $F(s)$ é a transformada de $f(t)$, então $f(t-a)u(t-a)$ é a transformada inversa de $e^{-as}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s), \qquad a>0 \tag{3.4}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = u(t-a)f(t-a), \qquad a>0. \tag{3.5}$$

Dem: Aplicamos a definição da transformada de Laplace e obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} &= \int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a \underbrace{u(t-a)}_{0} f(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty \underbrace{u(t-a)}_{1} f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt,
\end{aligned}$$

pois $u(t-a)$ é zero no intervalo $[0,a)$ e um no intervalo (a,∞). Depois usamos a mudança de variável $v=t-a$ na última integral:

$$\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt = \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}dv = e^{-as}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\left\{u(t-a)f(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = e^{-as}F(s). \tag{3.6}$$

Observe que tomando $f(t)=1$ na propriedade do deslocamento, temos:

$$\mathcal{L}\left\{1\,u(t-a)\right\} = \frac{e^{-as}}{s}, \qquad a>0 \tag{3.7}$$

que coincide com a fórmula da transformada de Laplace da Heaviside. Quando $a=0$ na equação acima, recaímos no item 1 da tabela de transformadas.

Exemplo Aplicando diretamente a propriedade do deslocamento em t e usando que $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$, calculamos a transformada inversa de Laplace de $e^{-3s}\frac{2}{s^3}$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\frac{2}{s^3}\right\} = u(t-3)(t-3)^2. \tag{3.8}$$

Cuidado:

$$u(t-3)(t-3)^2 \neq u(t-3)t^2. \tag{3.9}$$

Exemplo: Vamos calcular a transformada inversa de Laplace da função

$$F(s) = e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2-1}. \tag{3.10}$$

Obs: As raizes do denominador são:

$$(s+1)^2-1=0$$

$$(s+1)^2=1$$

$$(s+1) = \pm 1$$

$$s = -1 \pm 1$$

Primeiro calculamos a transformada de $\frac{1}{(s+1)^2-1}$ usando a propriedade.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\} &= e^{-t}\sinh(t) \\
&= e^{-t}\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) \\
&= \frac{1-2e^{-2t}}{2}
\end{aligned}$$

Depois usamos a propriedade para concluir

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-s}\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\} = u(t-1)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2-1}\right\}_{t\to t-1} = u(t-1)e^{-(t-1)}\sinh(t-1). \tag{3.11}$$

3.4 A propriedade da transformada de Laplace da integral de uma função

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de uma função contínua por partes $f(t)$, então $\int_0^t f(\tau)d\tau$ é a transformada inversa de $\frac{1}{s}F(s)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s), \tag{3.12}$$

ou

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}F(s)\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau. \tag{3.13}$$

Dem: Seja $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$. Então $g'(t) = f(t)$. Aplicamos a propriedade da transformada da derivada e temos:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0). \tag{3.14}$$

Usando o fato que $g(0) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} &= \mathcal{L}\left\{g(t)\right\} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{g'(t)\} \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} \\
&= \frac{1}{s}F(s).
\end{aligned}$$

Chapter 4

Dia 25 de setembro

4.1 Oscilador harmônico - regime de amortecimento

Ver aula no `https://colab.research.google.com/drive/197QbUeLlV2GEulEhjyVfpBeNRngxLls3`
Mais exemplos de PVI em: `https://colab.research.google.com/drive/1MTC1GSOP_DLPYZusqohP9DcaWr_ab-UX`

4.2 Delta de dirac

Muitos fenômenos físicos exigem a representação de uma força muito grande em um intervalo de tempo muito pequeno, por exemplo:

- um circuito elétrico recebe uma força eletromotriz grande em um curto intervalo de tempo.
- um sistema massa-mola é atingido por uma martelo.
- uma bola de futebol parada recebe um chute, ou seja, uma força quase instantânea, que a coloca em movimento.
- um avião é atingido por um raio.

Para representar essa força, vamos tomar a função pulso unitário em um curto intervalo de tempo $[-\epsilon, \epsilon]$ em torno da origem, isto é, um pulso com integral unitária:

$$\delta_\epsilon(t) = \frac{1}{2\epsilon}\left(u(t+\epsilon) - u(t-\epsilon)\right) = \begin{cases} 0, & t < -\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}, & -\epsilon < t < \epsilon \\ 0, & t > \epsilon. \end{cases} \tag{4.1}$$

Um pulso unitário em torno de $t = a$ é representado por

$$\delta_\epsilon(t-a) = \frac{1}{2\epsilon}\left(u(t-(a-\epsilon)) - u(t-(a+\epsilon))\right) = \begin{cases} 0, & t < a-\epsilon \\ \frac{1}{2\epsilon}, & a-\epsilon < t < a+\epsilon \\ 0, & t > a+\epsilon. \end{cases} \tag{4.2}$$

Observe que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t-a) = 1$ para qualquer $\epsilon > 0$. A figura 4.1 apresenta o gráfico de $\delta_\epsilon(t-a)$ para $a > 0$ e $\epsilon = 1$, $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\epsilon = \frac{1}{4}$, $\epsilon = \frac{1}{8}$ e $\epsilon = \frac{1}{12}$. A função que representa uma grande força instantânea é chamada de **função impulso** ou **função Delta de Dirac** e pode ser definida pelo limite das funções pulsos:

$$\delta(t-a) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t-a). \tag{4.3}$$

Este limite não pode ser interpretado pontualmente, isto é, como o limite usual de funções reais, mas apenas no contexto de uma integral, como veremos. A figura 4.1 apresenta o gráfico de $\delta_\epsilon(t-a)$ quando ϵ diminui e uma representação gráfica para $\delta(t-a)$. **Obs:**A função delta de Dirac pode ser definida como

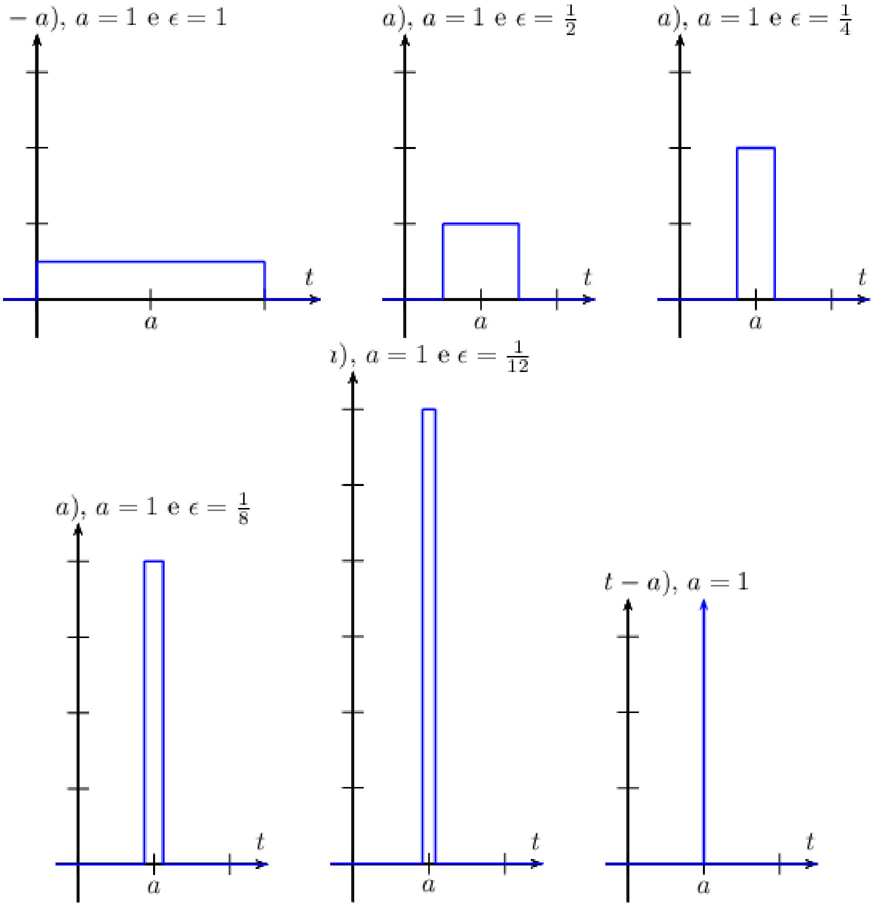

Figure 4.1:

limite de outras sequências de funções com propriedades análogas a sequência de pulsos. Por exemplo, podemos definir $\delta(t)$ como limite das funções

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\epsilon^2}} \tag{4.4}$$

A função Impulso é zero em todo ponto, exceto em $t = a$:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0, & t \neq a \\ \infty, & t = a \end{cases} \tag{4.5}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1 \tag{4.6}$$

A função Delta de Dirac deve ser sempre compreendida como o limite de funções reais no contexto de uma integração, isto conduz à chamada **propriedade da filtragem**, que define totalmente a Delta da Dirac: Se $f(t)$ for um função contínua em torno de $t = a$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a). \tag{4.7}$$

Para chegar a esta conclusão, definimos $F(t) = \int_a^t f(\tau)d\tau$ e calculamos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a)f(t)dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-a+\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(t)dt \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{F(\varepsilon) - F(-\varepsilon)}{2\varepsilon} \\ &= F'(0) = f(a). \end{aligned}$$

4.2.1 Delta de Dirac como derivada distribucional da função Heaviside

Na equação (4.2) definimos a função Delta de Dirac como

$$\delta(t-a) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \left(u(t - (a-\epsilon)) - u(t - (a+\epsilon)) \right). \tag{4.8}$$

Por outro lado, usamos a definição de derivada para escrever

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{2\epsilon} \left(u((t-a)+\epsilon)) - u((t-a)-\epsilon)) \right) = \frac{d}{dt} u(t-a) \tag{4.9}$$

ou seja,

$$\delta(t-a) = \frac{d}{dt} u(t-a). \tag{4.10}$$

Observe que as funções de Heaviside e de Dirac não são funções no sentido do cálculo diferencial e integral. Naturalmente, a derivada acima também vale somente num sentido generalizado, mas é coerente quando olhamos a função de Heaviside como limite de funções rampas (ver figura **??**), pois na origem a derivada tende ao infinito. A transformada de Laplace de função Delta de Dirac é obtido pela propriedade da filtragem dada na equação (4.7):

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-st}dt = e^{-as}. \tag{4.11}$$

Chapter 5

Aula do dia 28/09

5.1 Circuito RLC

Ver `https://colab.research.google.com/drive/1R3rCOc8zv70rSwCf7W30yQlleP6J2Mf2`

Considere o circuito Resistor/Capacitor/Indutor representado na figura 5.1 com uma tensão $V(t)$ aplicada do tipo pulso,

$$V(t) = V_0 \left(u(t-a) - u(t-b)\right). \tag{5.1}$$

O modelo para a corrente $i(t)$ obedece a lei de Kirchoff:

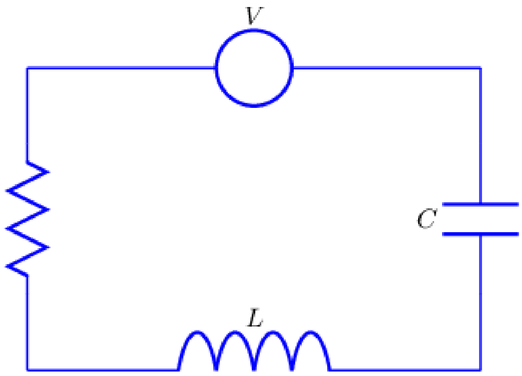

Figure 5.1:

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = V_0 \left(u(t-a) - u(t-b)\right), \tag{5.2}$$

onde $q(t)$ é a carga no capacitor, $\frac{1}{C}q(t)$ é a tensão no capacitor de capacitância C, $Ri(t)$ é a tensão no resistor de resistência R e $Li'(t)$ é a tensão no indutor de indutância L. Considere as condições iniciais $i(0) = 0$ e $q(0) = 0$. Dado que $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$, derivamos a equação do circutio para obter a seguinte equação diferencial:

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = V_0 \left(\delta(t-a) - \delta(t-b)\right), \tag{5.3}$$

onde usamos que a derivada da função de Heaviside é a função delta de Dirac. As condições iniciais para a equação (5.3) são $i'(0) = 0$ e $i(0) = 0$. Com o objetivo de resolver a problema de valor inicial, aplicamos a transformada de Laplace para obter a equação subsidiária

$$Ls^2 I(s) + RsI(s) + \frac{1}{C} I(s) = V_0 \left(e^{-as} - e^{-bs}\right),$$

que tem solução

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_0 \left(e^{-as} - e^{-bs}\right)}{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}} \\ &= \frac{1}{L} \frac{V_0 \left(e^{-as} - e^{-bs}\right)}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ &= \frac{V_0}{L} \left[\frac{e^{-as}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \eta} - \frac{e^{-bs}}{\left(s + \frac{R}{2L}\right)^2 + \eta} \right] \end{aligned}$$

onde

$$\eta = \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2. \tag{5.4}$$

Vamos exemplificar os casos subamortecido, superamortecido e criticamente amortecido tomando $V_0 = 10V$, $a = 1$ e $b = 5$:

- Caso subamortecido ($\eta > 0$): escolhemos o caso onde $L = 1\,\mathrm{H}$, $C = \frac{1}{10}\,\mathrm{F}$ e $R = 2\Omega$. Nesse caso

  $$I(s) = 10 \left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2 + 9} - \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2 + 9} \right]. \tag{5.5}$$

  Logo,

  $$i(t) = \frac{10}{3} \left(u(t-1) e^{-(t-1)} \sin\left(3(t-1)\right) - u(t-5) e^{-(t-5)} \sin\left(3(t-5)\right) \right). \tag{5.6}$$

  O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.2.

- Caso superamortecido ($\eta < 0$): escolhemos o caso onde $L = 1\,\mathrm{H}$, $C = 1\,\mathrm{F}$ e $R = 4\Omega$. Nesse caso

  $$I(s) = 10 \left[\frac{e^{-s}}{(s+2)^2 - 3} - \frac{e^{-5s}}{(s+2)^2 - 3} \right]. \tag{5.7}$$

  Logo,

  $$\begin{aligned} i(t) &= 10 \left(u(t-1) \frac{e^{-2(t-1)}}{\sqrt{3}} \sinh\left(\sqrt{3}(t-1)\right) - u(t-5) \frac{e^{-2(t-5)}}{\sqrt{3}} \sinh\left(\sqrt{3}(t-5)\right) \right) \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}} u(t-1) \left(e^{\left(\sqrt{3}-2\right)(t-1)} - e^{-\left(\sqrt{3}+2\right)(t-1)} \right) + \\ &+ \frac{5}{\sqrt{3}} u(t-5) \left(e^{\left(\sqrt{3}-2\right)(t-5)} - e^{-\left(\sqrt{3}+2\right)(t-5)} \right) \end{aligned}$$

  O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.3.

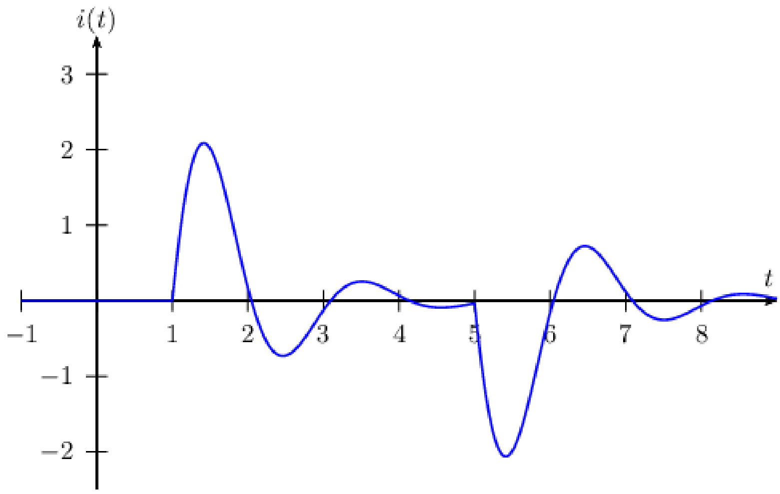

Figure 5.2:

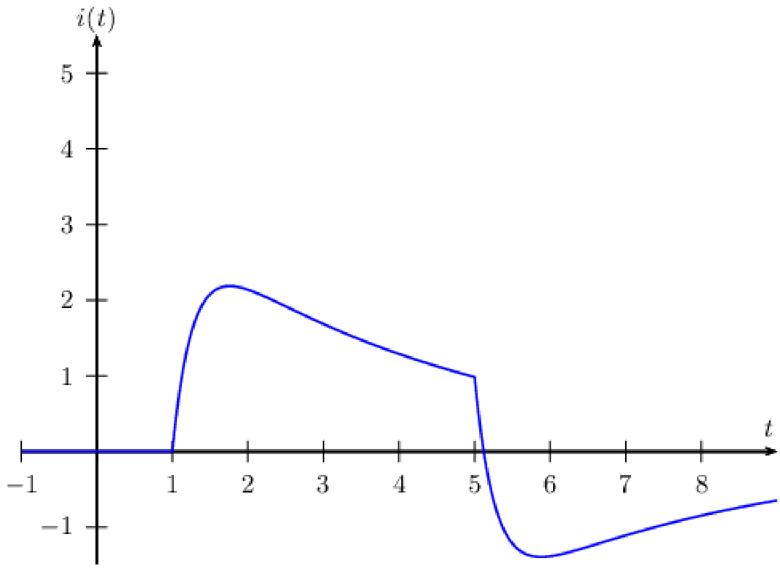

Figure 5.3:

- Caso criticamente amortecido ($\eta = 0$): escolhemos o caso onde $L = 1\,\mathrm{H}$, $C = 1\,\mathrm{F}$ e $R = 2\Omega$. Nesse caso

$$I(s) = 10\left[\frac{e^{-s}}{(s+1)^2} - \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2}\right]. \tag{5.8}$$

Logo,

$$i(t) = 10\left(u(t-1)e^{-(t-1)}(t-1) - u(t-5)e^{-(t-5)}(t-5)\right). \tag{5.9}$$

O gráfico da corrente é apresentado na figura 5.4.

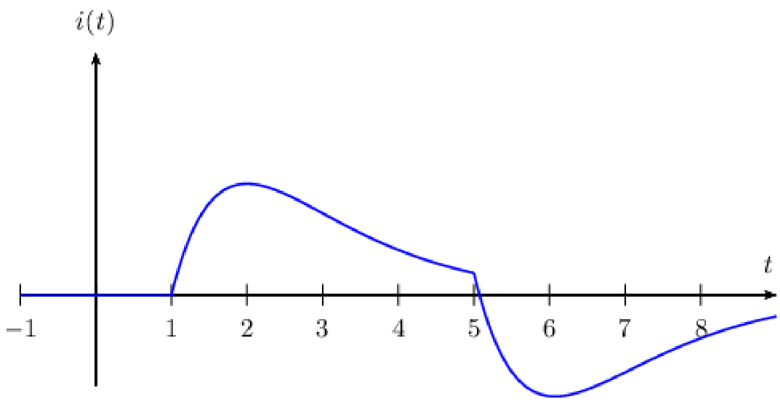

Figure 5.4:

5.2 Exemplo

Resolva o PVI $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \delta(t-5) - u(t-10) \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2 \end{cases}$

1. Aplicar a transformada de Laplace e substituir as condições iniciais

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = e^{-5s} - \frac{e^{-10s}}{s}.$$

$$s^2Y(s) - \frac{1}{2} + 3sY(s) + 2Y(s) = e^{-5s} - \frac{e^{-10s}}{s}.$$

2. Resolver o problema algébrico

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{1}{2} + e^{-5s} - \frac{e^{-10s}}{s}.$$

$$Y(s) = \frac{1}{2(s^2+3s+2)} + \frac{e^{-5s}}{(s^2+3s+2)} - \frac{e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)}.$$

3. Calcular a transformada inversa.

Primeiro termo

$$\frac{1}{2(s^2+3s+2)} = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2(s^2+3s+2)}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Segundo termo

$$\frac{e^{-5s}}{(s^2+3s+2)} = \frac{e^{-5s}}{(s+1)} - \frac{e^{-5s}}{(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s^2+3s+2)}\right\} = u(t-5)\left(e^{-(t-5)} - e^{-2(t-5)}\right).$$

Terceiro termo

$$\frac{1}{s(s^2+3s+2)} = \frac{1}{2s} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{2(s+2)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+3s+2)}\right\} = \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{e^{-2t}}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-10s}}{s(s^2+3s+2)}\right\} = u(t-10)\left(\frac{1}{2} - e^{-(t-10)} + \frac{e^{-2(t-10)}}{2}\right)$$

Solução:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + u(t-5)\left(e^{-(t-5)} - e^{-2(t-5)}\right) + u(t-10)\left(\frac{1}{2} - e^{-(t-10)} + \frac{e^{-2(t-10)}}{2}\right).$$