Chapter 1

22 de agosto

1.1 Encontros

* Preferem horários fixos. * Enquete no moodle sobre horários.

1.2 Questões

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\\ \vec{v} &= v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\end{aligned}$$

Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão no plano XY, $u_3 = v_3 = 0$.
Como $\|\vec{v}\| = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$.
Já $\vec{u}$ é unitario, então $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

$$u_1 = \cos(\theta), \quad u_2 = \sin(\theta).$$

Obs.: Quando $\theta = 0$, $\vec{u} = \vec{i}$. Quando $\theta = \pi/2$, $\vec{u} = \vec{j}$,

1.3 Produto misto

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \underbrace{\vec{u} \times (\vec{v} \cdot \vec{w})}_{ERRADO}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\\ \vec{v} &= \vec{i} - \vec{k}\\ \vec{w} &= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 2$$

1.4 Ângulo entre vetores

Usaremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\|v\| \cos(\alpha)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \|u\|\|v\| \sin(\alpha)$$

1.5 Funções vetoriais

$$\vec{u}(t) = u_1(t)\vec{i} + u_2(t)\vec{j} + u_3(t)\vec{k}$$

Exemplo: vetor posição.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

A velocidade é a derivada:

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Teorema: Se $\|\vec{r}(t)\|$ é constante, então:

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$$

Aplicação na cinemática: Se a velocidade de uma partícula tem módulo constante, isto é, velocidade escalar constante, então:

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{v}\,'(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$$

Generalização: Se $\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$ onde $\vec{T}(t)$ é o vetor tangente unitário dado por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}$$

Diferenciando, temos:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\left[v(t)\vec{T}(t)\right] \\ &= \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{tangencial} + \underbrace{v(t)\vec{T}'(t)}_{normal} \end{aligned}$$

Observação. Como $\|\vec{T}(t)\| = 1$, o teorema citado anteriormente garante que $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$.

1.6 Curvatura

A curvatura de uma curva descrita por $\vec{r}(t)$ é dada por:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d}{ds}\vec{T}(s) \right\|$$

onde $s(t)$ é o comprimento da curva.

1.6.1 Circunferência

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \\
\|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1
\end{aligned}$$

Assim:

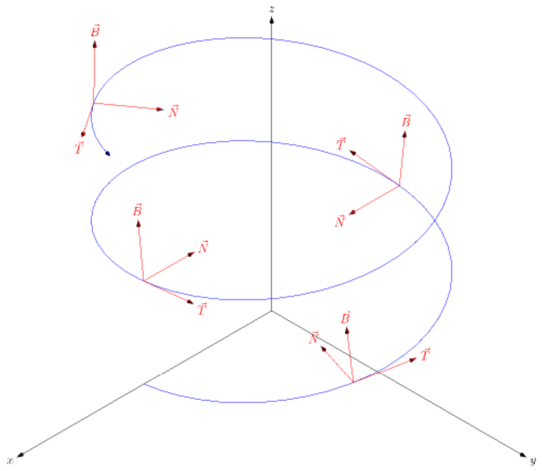
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}.$$

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \left\|\frac{d}{ds}\vec{T}(s)\right\| \\
&= \left\|\frac{d}{dt}\vec{T}(t)\right\| / \frac{ds}{dt} \\
&= \left\|\frac{d}{dt}\vec{T}(t)\right\| / \|\vec{r}\,'(t)\| \\
&= \left\|\frac{d}{dt}\vec{T}(t)\right\| \\
&= \left\|-\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}\right\| = 1
\end{aligned}$$

Chapter 2

24 de agosto

2.1 Vetores $\vec{T}$-$\vec{N}$-$\vec{B}$ (24/agosto)



2.1.1 Vetor tangente unitário

Se uma curva é parametrizada pela função $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Definimos o vetor tangente unitário:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}, \quad \vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}.$$

2.1.2 Vetor normal unitário

Definimos o vetor normal unitário como:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|}, \quad \vec{T}\,'(t) \neq \vec{0}.$$

Obs: $\vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = 0$ porque $\vec{T}(t)$ tem norma constante.

Aplicação na cinemática

Se a velocidade de uma partícula é a função $\vec{v}(t)$, então podemos escrever:

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$$

onde $\vec{T}(t)$ é o vetor tangente unitário dado por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$$

Diferenciando, temos:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{v}\,'(t) = \frac{d}{dt}\left[v(t)\vec{T}(t)\right] \\ &= \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{tangencial} + \underbrace{v(t)\vec{T}'(t)}_{normal} \end{aligned}$$

Como $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|}$, obtemos:

$$\vec{a} = \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{tangencial} + \underbrace{v(t)\|\vec{T}\,'(t)\|\vec{N}(t)}_{normal}$$

2.1.3 Vetor binormal unitário

O vetor binormal unitário é definido como:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

Obs: $\vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$ e

$$\|\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)\| = \|\vec{T}(t)\|\|\vec{N}(t)\| \sin(\alpha) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

2.1.4 Hélice

Seja hélice circular uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

isto é:

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \\ z(t) &= t \end{aligned}$$

$$\vec{r}\,'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$$

A norma é dada por:

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

Assim:

$$\vec{T}(t) = \frac{-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

Para calcular $\vec{N}$, derivamos $\vec{T}$:

$$\vec{T}\,'(t) = \frac{-\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

e

$$\|\vec{T}\,'(t)\| = \frac{\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

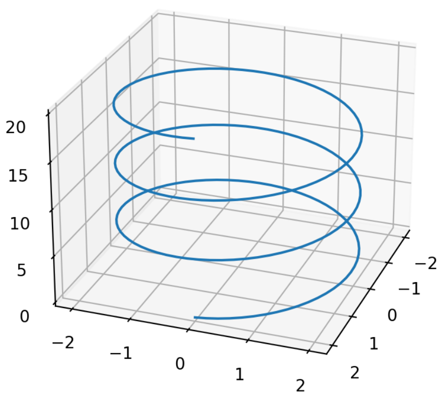
assim:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}\,'(t)}{\|\vec{T}\,'(t)\|} = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$$

Finalmente o vetor binormal unitário é dado por:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\vec{i}\,(0 + \sin(t)) + \vec{j}\,(-\cos(t) + 0) + \vec{k}\left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \vec{k} \right]
\end{aligned}$$



2.2 Parabóla

Considere a parábola dada por:

$$y = ax^2, \quad z = 0$$

com $a > 0$.

Primeiro, parametrizamos a curva:

$$x(t) = t, \quad y(t) = at^2, \quad z(t) = 0.$$

assim:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{i} + at^2\vec{j} \\ \vec{r}\,'(t) &= \vec{i} + 2at\vec{j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\vec{i} + 2at\vec{j}}{\sqrt{1+4a^2t^2}} \\ &= \left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2}\vec{i} + 2at\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2}\vec{j} \end{aligned}$$

Obs:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2} &= (-1/2)\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2-1}\left(8a^2t\right) \\ &= -4a^2t\left(1+4a^2t^2\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[2at\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2}\right] &= 2a\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2} + 2at\left[-4a^2t\left(1+4a^2t^2\right)^{-3/2}\right] \\ &= 2a\left(1+4a^2t^2\right)^{-1/2} - 8a^3t^2\left(1+4a^2t^2\right)^{-3/2} \\ &= \frac{2a(1+4a^2t^2) - 8a^3t^2}{(1+4a^2t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

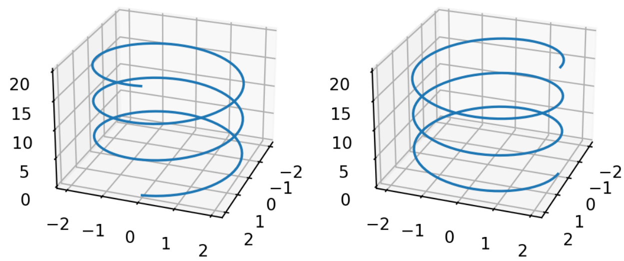
Portanto:

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}\left[-4a^2t\vec{i} + 2a\vec{j}\right]$$

$$\begin{aligned} \|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}\left\|-4a^2t\vec{i} + 2a\vec{j}\right\| \\ &= \frac{1}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}\sqrt{16a^4t^2 + 4a^2} \\ &= \frac{2a}{(1+4a^2t^2)^{3/2}}\sqrt{4a^2t^2+1} \\ &= \frac{2a}{(1+4a^2t^2)} \end{aligned}$$

O vetor normal é dado, portanto, por:

$$\begin{aligned}\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{1+4a^2t^2}}\left[-4a^2t\vec{i}+2a\vec{j}\right]\end{aligned}$$



2.3 Orientação

Circunferência no plano orientada no sentido anti-horário:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\pi/2) &= 0 \\ y(\pi/2) &= 1\end{aligned}$$

Circunferência no plano orientada no sentido horário:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \cos(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(\pi/2) &= 1 \\ y(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

2.4 Torçao - 41min

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \\ z(t) &= \sin(2t) \end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$$

$$\tau = \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \cdot \vec{r}\,'''}{\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\|^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k} \\ \vec{r}\,''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} - 4\sin(2t)\vec{k} \\ \vec{r}\,'''(t) &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} - 8\cos(2t)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'(\pi/2) &= -\vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{r}\,''(\pi/2) &= -\vec{j} \\ \vec{r}\,'''(\pi/2) &= \vec{i} + 8\vec{k} \end{aligned}$$

$$\vec{r}\,'(\pi/2) \times \vec{r}\,''(\pi/2) = \left(-\vec{i} - 2\vec{k}\right) \times (-\vec{j}) = \vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} + \vec{k}$$

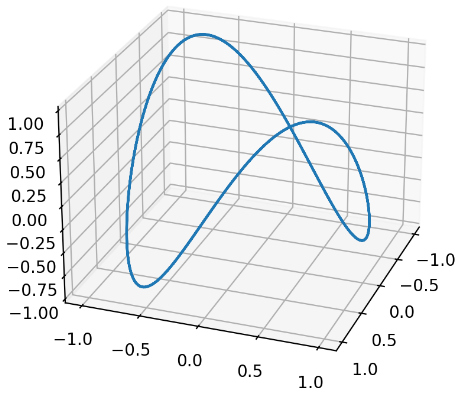
Dica: ijkij

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' \cdot \vec{r}\,''' = \left(-2\vec{i} + \vec{k}\right) \cdot \left(\vec{i} + 8\vec{k}\right) = -2 + 8 = 6$$

$$\|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\| = \|-2\vec{i} + \vec{k}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Finalmente

$$\tau = \frac{6}{5}$$



2.5

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^t \cos(\tau^2)d\tau \\
y(t) &= \int_0^t \sin(\tau^2)d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \cos(t^2) \\
y'(t) &= \sin(t^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x''(t) &= -2t\sin(t^2) \\
y''(t) &= 2t\cos(t^2)
\end{aligned}
$$

Teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(y)dy = f(x)$$

2.6

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sin(t) \\
y(t) &= \cos(t) \\
z(t) &= \cos(2t)
\end{aligned}
$$

Cacule t para $(1, 0, -1)$

$$\begin{aligned}\sin(t) = 1 &\Longrightarrow t = \pi/2 + 2k\pi \\ \cos(t) = 0 &\Longrightarrow t = \pi/2 + k\pi \\ \cos(2t) = -1 &\Longrightarrow 2t = \pi + 2k\pi\end{aligned}$$

2.7 Comprimento de arco. 122min

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 2\cos(\pi t)\vec{i} + 2\sin(\pi t)\vec{i} - t\vec{k} \\ \vec{r}\,'(t) &= -2\pi\sin(\pi t)\vec{i} + 2\pi\cos(\pi t)\vec{i} - \vec{k} \\ \|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{(2\pi)^2 + 1} = \sqrt{4\pi^2 + 1}\end{aligned}$$

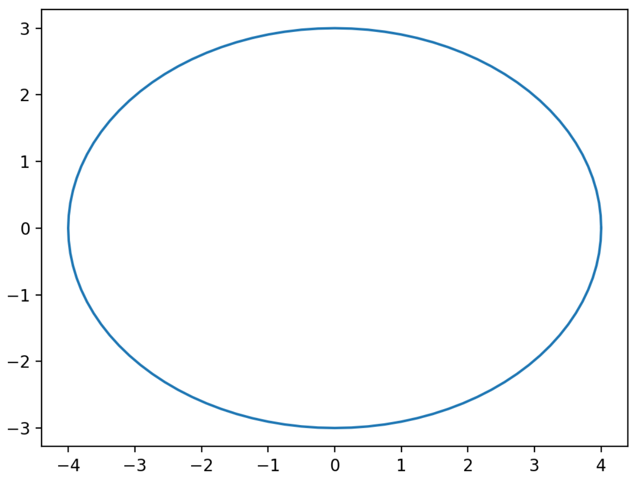
$$L = \int_0^1 ds = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\| dt = \sqrt{4\pi^2 + 1}$$

Chapter 3

28 de agosto

3.1 Curvatura da elipse

.



$$\vec{r}(t) = a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j}$$

onde a e b são constantes positivas.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= a\cos(t)\vec{i} + b\sin(t)\vec{j} \\
\vec{r}'(t) &= -a\sin(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j} \\
\vec{r}''(t) &= -a\cos(t)\vec{i} - b\sin(t)\vec{j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left(-a\sin(t)\vec{i} + b\cos(t)\vec{j}\right) \times \left(-a\cos(t)\vec{i} - b\sin(t)\vec{j}\right) \\
&= ab\sin^2(t)\vec{k} + ab\cos^2(t)\vec{k} = ab\vec{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{r}'(t)\| &= \| - a\sin(t)\vec{i} + b\cos^2(t)\vec{j}\| \\
&= \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos(t)}
\end{aligned}
$$

E obtemos:

$$
\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \\
&= \frac{|ab|}{\left[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{3/2}} \\
&= \frac{ab}{\left[a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Nos vértices $t = 0$ e $t = \pi$:

$$\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{a}{b^2}$$

Nos vértices $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$:

$$\kappa(\pi/2) = \kappa(3\pi/2) = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}$$

3.2 Aceleração normal e curvatura

Se um pessoa percorre uma trajetória elíptica com semi-eixos $a = 100$ e $b = 200$ com velocidade escalar constante de 2 m/s. Qual é a aceleração normal máxima.

$$a_N = \kappa v^2 = \kappa_{max} 2^2 = 4\frac{200}{100^2} = \frac{8}{100} = 0,08$$

3.3 Campos 53

- Campos vetoriais e escalares
- Campo (vetorial) conservativo. $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$, φ é o potencial. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.
- O campo elétrico é conservativo quando o campo magnético é constante no tempo.

3.4 Gradiente (pág 5/5)

O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Em cada ponto, é o vetor que aponta na direção e sentido de maior variação e cujo módulo é a máxima derivada direcional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f, \quad \|\vec{u}\| = 1$$

Obs: Direção de máxima derivada direcional é dada pelo vetor unitário (versor):

$$\vec{u} = \hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

Direção de mínima derivada direcional (maior valor absoluto e sinal negativo) é dada pelo vetor unitário (versor):

$$\vec{u} = \hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

Se $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$

3.5 Divergente

O divergente de um campo vetorial é o campo escalar dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ex.

$$\vec{F} = xy\vec{i} + y^3\vec{j} + xyz^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) \\ &= y + 3y^2 + 2xyz \end{aligned}$$

3.6

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \cos(\tau^2) d\tau \vec{i} + \int_0^t \sin(\tau^2) d\tau \vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \cos(t^2)\vec{i} + \sin(t^2)\vec{j}$$

Teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

$$\int \cos(t^2) dt \neq \sin(t^2) + C$$

3.7 Questão sobre gradientes (10min)

$$\vec{F} = x\vec{i} + xe^y\vec{j} + xyz\vec{k}$$
$$\vec{F}\cdot\vec{F} = x^2 + x^2e^{2y} + x^2y^2z^2$$

$$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{F}\right) = \left(2x + 2xe^{2y} + 2xy^2z^2\right)\vec{i} + \left(2x^2e^{2y} + 2x^2yz^2\right)\vec{j} + 2x^2y^2z\vec{k}$$

$$(e^y)^2 = e^{y^2}$$

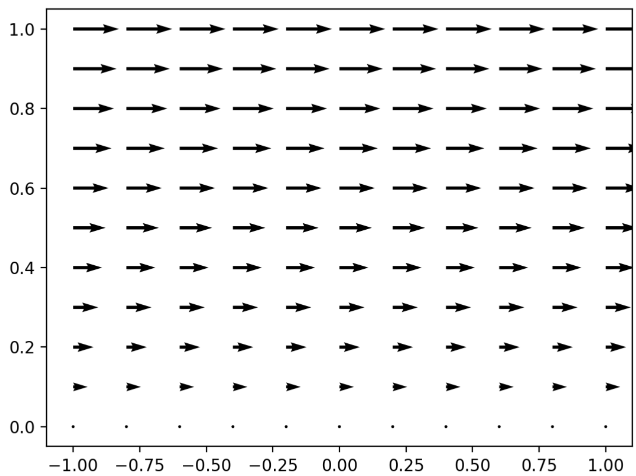
Chapter 4

31 de agosto

4.1 Campos vetoriais

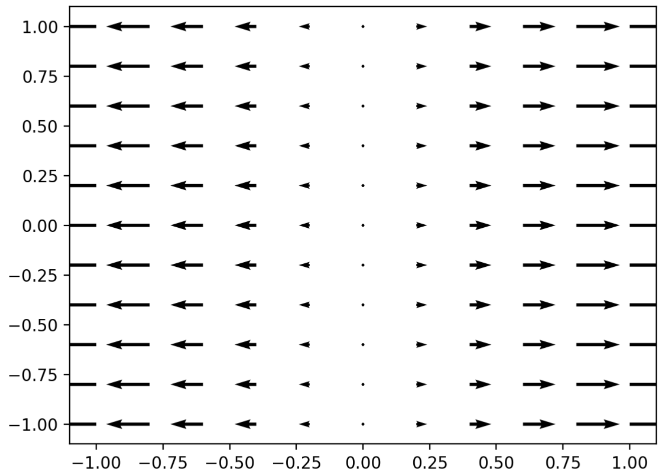
Exemplo 1, página 4/2.

$$\vec{F} = \sqrt{y}\,\vec{i}$$



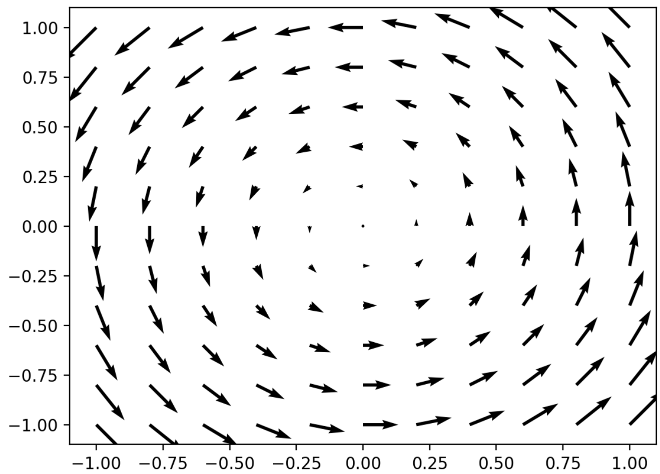
Exemplo 2.

$$\vec{F} = x\,\vec{i}$$



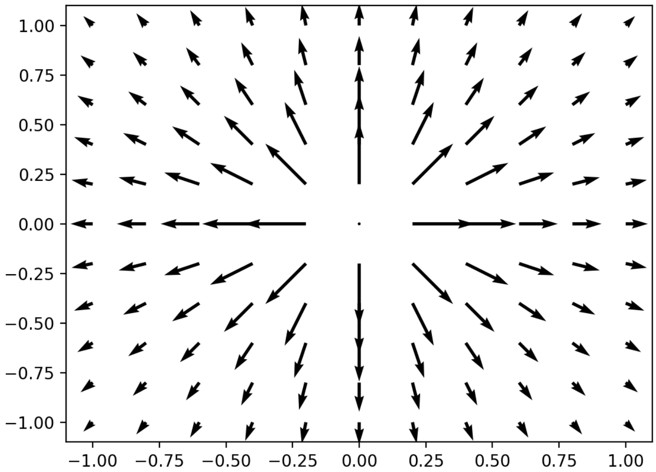
Exemplo 3.

$$\vec{F} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$$



Exemplo inverso do quadrado.

$$\vec{F} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3}$$



4.2 O operador del - 35min

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x}f + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}f + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}f = \vec{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right) = \frac{\partial}{\partial x}F_1 + \frac{\partial}{\partial y}F_2 + \frac{\partial}{\partial z}F_3$$

Rotacional:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

Laplaciano:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \\
&= \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} f + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} f + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} f \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}
\end{aligned}$$

4.3 Exemplo 4. 55min

$$f(x, y) = x + y$$
$$\vec{\nabla} f = \vec{i} + \vec{j}$$

4.4 Exemplo 5. 55min

$$\vec{F} = x^2 y \vec{i} + 2y^3 z \vec{j} + 3z \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2xy + 6y^2 z + 3$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k} \right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 2y^3 z & 3z \end{vmatrix} \\
&= \left(0 - 2y^3\right) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + \left(0 - x^2\right) \vec{k}
\end{aligned}$$

4.5 Exemplo 6 - 72min

$$f = xyz$$
$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k}$$

$$(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) f \quad = \quad ?$$

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) &= \left(-y\vec{i} + x\vec{j} + z\vec{k} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) f &= \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (xyz) \\
&= -y(yz) + x(xz) + z(xy) = -y^2 z + x^2 z + xyz
\end{aligned}$$

4.6 Exemplo 10 - pág 5/6 - 83min

$$T = \frac{xy}{1+x^2+y^2} = xy(1+x^2+y^2)^{-1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial x} &= y(1+x^2+y^2)^{-1} - xy(2x)(1+x^2+y^2)^{-2}\\ &= \frac{y(1+x^2+y^2)-2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{y-x^2y+y^3}{(1+x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x-y^2x+x^3}{(1+x^2+y^2)^2}$$

No ponto $(1,1)$:

$$\vec{\nabla}T(1,1) = \frac{1}{9}\vec{i} + \frac{1}{9}\vec{j}$$

Direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = \vec{u}\cdot\nabla f, \quad \vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = \frac{2\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1}{9}\vec{i}+\frac{1}{9}\vec{j}\right) = \frac{1}{9\sqrt{5}}(2-1) = \frac{\sqrt{5}}{45}$$

item b:

$$\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}T}{\|\vec{\nabla}T\|} = \frac{-2\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{5}}$$

Chapter 5

2 de setembro

5.1 Exemplo 11. pág 5/7

$$z = 2000 - 2x^2 - 4y^2$$

Seção transversal para $z = 0$:

$$2x^2 + 4y^2 = 2000 - 0$$

$$\frac{x^2}{1000} + \frac{y^2}{500} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Retornando:

$$2x^2 + 4y^2 = 2000 - z$$

Seção longitudinal para $x = 0$:

$$4y^2 = 2000 - z$$

$$z = 2000 - 4y^2$$

Item a: $P = (-20, 5)$. Veremos a elevação z como uma função de x e y, isto é, $z = f(x, y) = 2000 - 2x^2 - 4y^2$.

$$\vec{\nabla} f = -4x\vec{i} - 8y\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{-4x\vec{i} - 8y\vec{j}}{\| - 4x\vec{i} - 8y\vec{j}\|} \\ &= \frac{80\vec{i} - 40\vec{j}}{\|80\vec{i} - 40\vec{j}\|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5}\left(2\vec{i} - \vec{j}\right) \end{aligned}$$

Item b: Direção nordeste $\vec{v} = \frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} &= \vec{u}\cdot\vec{\nabla} f = \left(\frac{\vec{i}+\vec{j}}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(80\vec{i}-40\vec{j}\right)\\ &= \frac{80-40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}\end{aligned}$$

Qual é a unidade?

Adimensional!!!

5.2 Potenciais centrais- 40min

$$\varphi(x,y,z)=\varphi(r)$$
$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{z}$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Ex.

$$\varphi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$$

5.3 Exemplo 12 - página 5/9 - 48min

$$\varphi(r)=-k\frac{1}{r}=-kr^{-1}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{\nabla}\varphi(r)=\varphi'(r)\hat{r}\\ &= kr^{-2}\hat{r}=\frac{k}{r^2}\hat{r}\\ &= \frac{k}{r^3}\vec{r}\end{aligned}$$

Chapter 6

4 de setembro

6.1

Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = rot(\vec{F}) = curl(\vec{F})$$

6.2 Integral de linha, 40min

Define-se integral de linha como:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t)dt$$

onde $\vec{r}(t)$ é uma parametrização do caminho C entre $t = t_0$ e $t = t_1$.

Obs: O valor da integral de linha NÃO depente da parametrização.

Quando o caminho C é fechado, a integral de linha também é chamda de circulação de $\vec{F}$ ao longo de C:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

6.3 Exemplo 2 - pag 7/4. 45min

$$\vec{F} = x^3 y\vec{i} + (x - y)\vec{j}$$

O caminho é dado $C : y = x^2, z = 0$ de $P_1(-2, 4)$ até $P_2(1, 1)$.

Parametrizamos a curva como:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{i} + t^2\vec{j} \\ \vec{r}\,'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} \end{aligned}$$

com $t \in [-2, 1]$.

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{r}\,'(t) &= x^3 y \cdot 1 + (x - y) \cdot 2t \\ &= t^3(t^2) + (t - t^2)2t \\ &= t^5 + 2t^2 - 2t^3 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
W &= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \\
&= \int_{-2}^{1} \left(t^5 + 2t^2 - 2t^3\right) dt \\
&= \left(\frac{t^6}{6} + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} \\
&= \frac{1-64}{6} + \frac{2+16}{3} - \frac{1-16}{2} \\
&= -\frac{63}{6} + \frac{18}{3} + \frac{15}{2} \\
&= \frac{-63+36+45}{6} \\
&= 3
\end{aligned}$$

item b

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

A curva C é dada por:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$$

para $t \in [0,1]$.

Calculamos $\vec{r}\,'(t)$:

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F}\cdot\vec{r}\,'(t) &= yz + xz(2t) + xy(3t^2) \\
&= t^2t^3 + tt^3(2t) + tt^2(3t^2) \\
&= t^5 + 2t^5 + 3t^5 = 6t^5
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$W = \int_0^1 6t^5 dt = t^6\big|_0^1 = 1$$

6.4 Teorema fundamental das integrais de linha. Pág 7/5. 73min

$$\int_C \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

Onde C é um caminho que começa em P_0 e termina em P_1.

Dem: Seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ uma parametrização para C, definimos:

$$f(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$$

Derivamos em t:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t), z(t)) \\ &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}\right) \\ &= \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{r}\,'(t) \end{aligned}$$

Agora usamos o bom e velho Teorema Fundamental do Cálculo (TFC):

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t)dt = f(t)|_{t_0}^{t_1} = f(t_1) - f(t_0)$$

Portanto:

$$\int_C \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

6.5 Exemplo 3. Página 7/6. 90min

$$\vec{F} = 2xy^3\vec{i} + (1 + 3x^2y^2)\vec{j}$$

a.

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3 & (1 + 3x^2y^2) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 0)\,\vec{i} + (0 - 0)\,\vec{j} + \left(6xy^2 - 6xy^2\right)\vec{k} = \vec{0} \end{aligned}$$

b

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy^3 \\ F_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 \\ F_3 &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \end{aligned}$$

Da primeira equação:

$$\varphi = x^2y^3 + C(y, z)$$

Derivamos em y e igualamos a $1 + 3x^2y^2$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 3x^2y^2 + C_y(y, z) = 1 + 3x^2y^2$$

Assim

$$C_y(y,z) = 1$$

Logo

$$C(y,z) = y + D(z)$$

Derivamos em z e igualamos a 0, temos:

$$D'(z) = 0 \Longrightarrow D = cst$$

Logo

$$\varphi = x^2y^3 + y + D$$

item c

$$W = \varphi(3,1) - \varphi(1,4) = \left[3^2 1^3 + 1 + D\right] - \left[1^2 4^3 + 4 + D\right] = 10 - 68 = -58$$

Chapter 7

9 de setembro

7.1 Integrais de superfície - aula 8

Estudaremos integrais de superfícies do tipo:

$$\Phi = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{ds} = \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\eta}ds$$

Onde $\vec{n}$ é o vetor normal unitário.

Obs: $\vec{F}\cdot\vec{\eta} = \|\vec{F}\|\cos(\gamma)$ Onde γ é o ângulo entre $\vec{F}$ e o vetor normal.

O maior desafio é parametrizar a superfície e calcular $\vec{ds}$.

Casos particulares de superfíceis descritas por funções ns seguintes formas:

$$\begin{aligned} z &= f(x,y) \text{ ou} \\ y &= f(x,z) \text{ ou} \\ x &= f(y,z). \end{aligned}$$

No primeiro caso, a superfícies é parametrizada como:

$$\vec{r}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k}$$

Escrevemos na forma:

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= z - f(x,y) \text{ ou} \\ G(x,y,z) &= y - f(x,z) \text{ ou} \\ G(x,y,z) &= x - f(y,z). \end{aligned}$$

Assim a superfícies é a superfícies de nível de $G(x,y,z)$:

$$G(x,y,z) = 0$$

Como o gradiente de G é perpendicular às suas curvas de nível, o vetor normal será dado por:

$$\vec{\eta} = \pm\frac{\vec{\nabla}G}{\|\vec{\nabla}G\|}$$

Onde o sinal define a orientação da superfície.

$$\begin{aligned}\Phi &= \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\eta}ds \\ &= \pm\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G\frac{1}{\|\vec{\nabla}G\|}dS \\ &= \pm\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\nabla}GdA\end{aligned}$$

Para o primeiro caso:

$$G(x,y,z) = z - f(x,y)$$

$$\vec{\nabla}G = -\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}$$

então:

$$\vec{\nabla}G\cdot\vec{k} = 1$$

$$\cos(\gamma) = \vec{\eta}\cdot\vec{k} = \pm\frac{\vec{\nabla}G\cdot\vec{k}}{\|\vec{\nabla}G\|} = \pm\frac{1}{\|\vec{\nabla}G\|}$$

7.2 Exemplos - 52min

Exemplo 5.

Calcule o fluxo de $\vec{F} = 3z^2\vec{i} + 6\vec{j} + 6xz\vec{k}$ através da superfície S dada por:

$$y = x^2, \quad 0 \le x \le 2, \quad 0 \le z \le 3$$

orientada para fora da concavidade.

Isso é da forma $y = f(x,z)$? Sim, mesmo que constante em z.

Definimos:

$$G(x,y,z) = y - f(x,z) = y - x^2$$

$$\vec{\nabla}G(x,y,z) = -2x\vec{i} + \vec{j}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS \\ &= -\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z)dA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z) &= 3z^2(-2x) + 6(1) \\ &= -6xz^2 + 6\end{aligned}$$

A região projetada é o retângulo no plano xz restrito a $0 \le x \le 2, \ 0 \le z \le 3$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\int\int_R (-6xz^2+6)dA \\
&= -\int_0^3\int_0^2 (-6xz^2+6)dxdz \\
&= -36+6\int_0^3\int_0^2 xz^2dxdz \\
&= -36+3\int_0^3 x^2z^2\big|_0^2 dz \\
&= -36+3\int_0^3 4z^2dz \\
&= -36+4\ z^3\big|_0^3 \\
&= -36+4.27=72
\end{aligned}$$

Exemplo 7

$$\vec{F}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

$$S: z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad 0\le z\le 1.$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=z$$

$$\rho=z$$

Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S orientada para fora do cone.

$$G(x,y,z)=z-\sqrt{x^2+y^2}=z-(x^2+y^2)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}G(x,y,z) &= -(1/2)(x^2+y^2)^{-1/2}(2x)\vec{i}+-(1/2)(x^2+y^2)^{-1/2}(2y)\vec{j}+\vec{k} \\
&= \frac{-x\vec{i}-y\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}+\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z) = \frac{-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS \\
&= -\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{\nabla}G(x,y,z)dA
\end{aligned}$$

A região projetada é o disco de raio unitário no plano xy e centrado na origem. Para integrar neste disco usaremos coordenadas polares:

$$x=\rho\cos(\theta), \quad y=\rho\sin(\theta), \quad dxdy=\rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= -\int\int_A \left(\frac{-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right) dA \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}+1\right)\rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{-\rho\cos(\theta)-\rho\sin(\theta)}{\rho}+1\right)\rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-\cos(\theta)-\sin(\theta)+1)\,\rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho d\theta \\
&= -\int_0^{2\pi}(1/2)d\theta = -\pi
\end{aligned}$$

7.3

$$\vec{F} = r^2\vec{r}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{F} &= \vec{\nabla}\cdot(r^2\vec{r}) \\
&= \vec{\nabla}(r^2)\cdot\vec{r} + (r^2)\vec{\nabla}\cdot\vec{r} \\
&= (2r\hat{r})\cdot r^2\vec{r} + r^2 3 = 2r^4 + 3r^2
\end{aligned}$$

$$\vec{F} = r^2\vec{r} = (x^2+y^2+z^2)(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = (2x(x)+x^2+y^2+z^2)+...$$

Chapter 8

Dia 11 de setembro

8.1 Teorema da divergência

Seja V uma região limitada por uma superfície fechada S orientada para fora. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial suave, temos:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

8.2 Teorema de Stokes

Seja S uma superfícies orintáda, suave por partes, limitada por uma curva S. Seja $\vec{F}$ um campo vetorial suave, temos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS.$$

A curva é orientada conforme a regra da mão direita.

8.3 Outros teoremas

Teorema fundamental do cálculo

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Teorema fundamental das integrais de linha:

$$\int_C \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

8.4 Exemplos - 37min

Exemplo 8 item a

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV.$$

Como $\vec{F} = x\vec{i}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1$

$$\Phi = \iiint_V 1dV = volume = 8.$$

item b

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}dV.$$

Como $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 1 + 1 = 3$

$$\Phi = \iiint_V 3dV = 3 \times volume = 24.$$

item c

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}dV.$$

Como $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2x + 2y + 2z$

$$\begin{aligned} \Phi &= 2 \iiint_V (x + y + z)dV \\ &= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x + y + z)dxdydz = 0 \end{aligned}$$

Exemplo 10

$$\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^2\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 2z$$

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}ds = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F}dV.$$

Usando cilíndrica:

$$x = \rho\cos(\theta), \quad y = \rho\sin(\theta), \quad z = z.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3\rho^2 + 2z$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3\rho^2 + 2z)\rho dzd\theta d\rho \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (3\rho^3 + 2z\rho)dzd\theta d\rho \\ &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (6\rho^3 + 4\rho)d\theta d\rho \\ &= 2\pi \int_0^3 (6\rho^3 + 4\rho)d\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{2}\rho^4 + 2\rho^2 \right) \Big|_0^3 \\ &= 2\pi \left(\frac{3}{2}3^4 + 2 \cdot 3^2 \right) \\ &= \pi \left(3^5 + 4 \cdot 3^2\right) = \pi(243 + 36) = 279\pi \end{aligned}$$

8.5 Exemplo 11 - 72min

$$\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$

Em esféricas:

$$x = r\sin(\varphi)\cos(\theta), \quad y = r\sin(\varphi)\sin(\theta), \quad z = r\cos(\varphi)$$

Obs:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3r^2$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iiint_V (3r^2)dV \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^{|a|}(3r^2)r^2\sin(\varphi)drd\theta d\varphi \\
&= \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}|a|^5\sin(\varphi)d\theta d\varphi \\
&= \frac{6\pi|a|^5}{5}\int_0^{\pi/2}\sin(\varphi)d\varphi \\
&= \frac{6\pi|a|^5}{5}\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{6\pi|a|^5}{5}
\end{aligned}$$

8.6 105 min

Considere o campo central

$$\vec{F} = (e^{-(r-2)} - e^{(r-2)})\hat{r}$$

e as três esferas S_1, S_2 e S_3, com raios 1, 2 e 3, respectivamente, todas orientadas para fora e centradas na origem. Definimos

$$I_1 = \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS, \quad I_2 = \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS \quad e \quad I_3 = \iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{S_1}\vec{F}\cdot\hat{r}dS \\
&= \iint_{S_1}(e^{-(r-2)} - e^{(r-2)})dS \\
&= 4\pi(e^{-(1-2)} - e^{(1-2)})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{S_1} dS \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\varphi) r^2 d\varphi d\theta
\end{aligned}
$$