Chapter 1

18 de setembro

1.1 Definição

A transformada de Laplace é definida como:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad \Re(s) > s_0$$

Exemplo:

$$f(t) = 1$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=0}^{t\to\infty} \\ &= \frac{0-1}{-s} = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

Exemplo:

$$f(t) = e^{as}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty e^{(a-s)t}dt \\ &= \left.\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right|_0^\infty \\ &= \frac{0-1}{a-s} \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \end{aligned}$$

1.2 Propriedade da linearidade

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$$

exemplo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{3 + 2e^t\} &= 3\mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{e^t\} \\ &= \frac{3}{s} + \frac{2}{s-1} \end{aligned}$$

1.3 Propriedade da derivada

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Exemplo:

$$f(t) = t$$

$$f'(t) = 1$$

$$\mathcal{L}\{1\} = s\mathcal{L}\{t\} - 0$$

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

Exemplo:

$$f(t) = t^2$$

$$f'(t) = 2t$$

$$\mathcal{L}\{2t\} = s\mathcal{L}\{t^2\} - 0$$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Aplicação:

$$f'(t) + f(t) = 1$$

com $f(0) = 1$.

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$[sF(s) - f(0)] + F(s) = \frac{1}{s}$$

$$F(s)(s+1) = \frac{1}{s} + 1$$

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)} + \frac{1}{(s+1)}$$

$$F(s) = \frac{1+s}{s(s+1)} = \frac{1}{s}$$

$$f(t) = 1$$

OBS: $f(t) = 1, t \neq 2,\ f(2) = 0$.

Chapter 2

21 de setembro

2.1 A transformada inversa

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, dizemos que $f(t)$ é a transformada inversa de $F(s)$:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

2.2 Propriedade da derivada - derivada segunda

Vimos a propriedade da derivada:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$$

Agora aplicamos à derivada da função $f'(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Analogamente:

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Exemplo:

$$\begin{aligned}f(t) &= \cos(\omega t) \\ f'(t) &= -\omega\sin(\omega t) \\ f''(t) &= -\omega^2\cos(\omega t)\end{aligned}$$

isto é:

$$f''(t) = -\omega^2 f(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = -\omega^2\mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Usamos a propriedade da derivada (segunda):

$$s^2F(s) - sf(0) - f'(0) = -\omega^2 F(s)$$

isto é:

$$(s^2 + \omega^2)F(s) = sf(0) + f'(0) = s$$

Portanto:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$$

Analogamente, temos:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{w}{s^2 + \omega^2}$$

2.3 Método das frações parciais para calcular transformadas inversas

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s^3 - 3s^2 + 2s} \\ &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s(s^2 - 3s + 2)} \\ &= \frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \end{aligned}$$

O teorema das frações parciais garante que existem constantes A, B e C tais que:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} \tag{2.1}$$

para todo s complexo.

Primeiro multiplicamos (2.1) por s:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{(s-1)(s-2)} = A + \frac{Bs}{s-1} + \frac{Cs}{s-2}$$

Substituindo s por 0, temos:

$$\frac{4}{(-1)(-2)} = A \quad \Longrightarrow \quad A = 2$$

Agora multiplicamos a expressão (2.1) por $s - 1$:

$$\frac{s^2 - 6s + 4}{s(s-2)} = \frac{A(s-1)}{s} + B + \frac{C(s-1)}{s-2}$$

Substituindo s por 1, temos:

$$\frac{1-6+4}{1(1-2)} = B \quad \Longrightarrow \quad B = 1$$

Finalmente multiplicamos (2.1) por $s-2$:

$$\frac{s^2-6s+4}{s(s-1)} = \frac{A(s-2)}{s} + \frac{B(s-2)}{s-1} + C$$

E substuimos por $s = 2$:

$$\frac{4-12+4}{2(2-1)} = C \quad \Longrightarrow \quad C = -2$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{s^2-6s+4}{s(s-1)(s-2)} && (2.2)\\ &= \frac{2}{s} + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s-2} && (2.3) \end{aligned}$$

Olhanda na tabela, encontramos:

$$f(t) = 2 + e^t - 2e^{2t}, \quad t \geq 0$$

Tabela com item 1 e item 7 com $a = 1$ e $a = 2$.

Obs:

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-2)^3} = \frac{A+Bs}{s^2+1} + \frac{C}{(s-2)} + \frac{D}{(s-2)^2} + \frac{E}{(s-2)^3}$$

2.4 Propriedade de translação no eixo s

Se $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$ definida para $s > s_0$, então $e^{at}f(t)$ é a transformada inversa de $F(s-a)$, isto é

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} = F(s-a), \qquad s > s_0 + a$$

A demostração vem da aplicação da definição da transformada de Laplace $F(s-a)$:

$$\begin{aligned} F(s-a) &= \int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt \\ &= \int_0^\infty f(t)e^{at}e^{-st}dt \\ &= \int_0^\infty \left(f(t)e^{at}\right)e^{-st}dt \\ &= \mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\} \end{aligned}$$

Exemplo:

$$\mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\left\{t^2e^{at}\right\} = \frac{2}{(s-a)^3}$$

2.5 Oscilador harmônico

$$F(s) = \frac{1}{ms^2 + \gamma s + \kappa}$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 0$, $\kappa = 4$:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2+2^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 2$, $\kappa = 5$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2+2s+5} \\ &= \frac{1}{\underbrace{(s+1)^2}_{s^2+2s+1}+4} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2+2^2} \\ &= G(s+1) \end{aligned}$$

onde $G(s) = \frac{1}{s^2+2^2}$

Como

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

Onde usamos o produto notável:

$$(s+a)^2 = s^2 + 2as + a^2.$$

Caso $m = 1$, $\gamma = 3$, $\kappa = 2$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^2+3s+2} \\ F(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \end{aligned}$$

Usando a tabela, encontramos:

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Pergunta: Quantas vezes $f(t)$ para por zero para $t \geq 0$.

$$f(t) = e^{-t} - e^{-2t} = 0$$

$$e^{-t}(1 - e^{-t}) = 0$$

Assim $f(t) = 0$ se e somente se $e^{-t} = 1$, i.e., $t = 0$.