

Chapter 1

22 de agosto

1.1 Encontros

* Preferem horários fixos. * Enquete no moodle sobre horários.

1.2 Questões

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \\ \vec{v} &= v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\end{aligned}$$

Como \vec{u} e \vec{v} estão no plano XY, $u_3 = v_3 = 0$.

Como $\|\vec{v}\| = 0$, $\vec{v} = \vec{0}$.

Já \vec{u} é unitario, então $u_1^2 + u_2^2 = 1$.

$$u_1 = \cos(\theta), \quad u_2 = \sin(\theta).$$

Obs.: Quando $\theta = 0$, $\vec{u} = \vec{i}$. Quando $\theta = \pi/2$, $\vec{u} = \vec{j}$,

1.3 Produto misto

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \underbrace{\vec{u} \times (\vec{v} \cdot \vec{w})}_{ERRADO}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{v} &= \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{w} &= \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 2$$

1.4 Ângulo entre vetores

Usaremos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\alpha)$$

1.5 Funções vetoriais

$$\vec{u}(t) = u_1(t)\vec{i} + u_2(t)\vec{j} + u_3(t)\vec{k}$$

Exemplo: vetor posição.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

A velocidade é a derivada:

$$\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Teorema: Se $\|\vec{r}(t)\|$ é constante, então:

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

Aplicação na cinemática: Se a velocidade de uma partícula tem módulo constante, isto é, velocidade escalar constante, então:

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$$

Generalização: Se $\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$ onde $\vec{T}(t)$ é o vetor tangente unitário dado por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$$

Diferenciando, temos:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} [v(t)\vec{T}(t)] \\ &= \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{\text{tangencial}} + \underbrace{v(t)\vec{T}'(t)}_{\text{normal}} \end{aligned}$$

Observação. Como $\|\vec{T}(t)\| = 1$, o teorema citado anteriormente garante que $\vec{T}(t) \cdot \vec{T}'(t) = 0$.

1.6 Curvatura

A curvatura de uma curva descrita por $\vec{r}(t)$ é dada por:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d}{ds} \vec{T}(s) \right\|$$

onde $s(t)$ é o comprimento da curva.

1.6.1 Circunferência

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} \\
\vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} \\
\|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1
\end{aligned}$$

Assim:

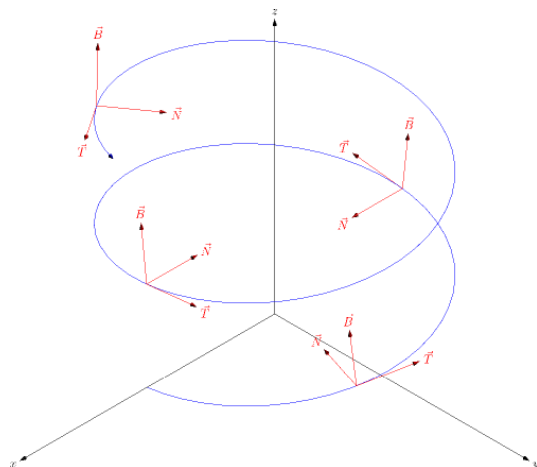
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}.$$

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \left\| \frac{d}{ds} \vec{T}(s) \right\| \\
&= \left\| \frac{d}{dt} \vec{T}(t) \right\| / \frac{ds}{dt} \\
&= \left\| \frac{d}{dt} \vec{T}(t) \right\| / \|\vec{r}'(t)\| \\
&= \left\| \frac{d}{dt} \vec{T}(t) \right\| \\
&= \left\| -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} \right\| = 1
\end{aligned}$$

Chapter 2

24 de agosto

2.1 Vetores \vec{T} - \vec{N} - \vec{B} (24/agosto)



2.1.1 Vetor tangente unitário

Se uma curva é parametrizada pela função $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Definimos o vetor tangente unitário:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}, \quad \vec{r}'(t) \neq \vec{0}.$$

2.1.2 Vetor normal unitário

Definimos o vetor normal unitário como:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}, \quad \vec{T}'(t) \neq \vec{0}.$$

Obs: $\vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = 0$ porque $\vec{T}(t)$ tem norma constante.

Aplicação na cinemática

Se a velocidade de uma partícula é a função $\vec{v}(t)$, então podemos escrever:

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{T}(t)$$

onde $\vec{T}(t)$ é o vetor tangente unitário dado por:

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}$$

Diferenciando, temos:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{v}'(t) = \frac{d}{dt} [v(t)\vec{T}(t)] \\ &= \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{\text{tangencial}} + \underbrace{v(t)\vec{T}'(t)}_{\text{normal}}\end{aligned}$$

Como $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$, obtemos:

$$\vec{a} = \underbrace{v'(t)\vec{T}(t)}_{\text{tangencial}} + \underbrace{v(t)\|\vec{T}'(t)\|\vec{N}(t)}_{\text{normal}}$$

2.1.3 Vetor binormal unitário

O vetor binormal unitário é definido como:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

Obs: $\vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \cdot \vec{T}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t) \cdot \vec{N}(t) = 0$ e

$$\|\vec{T}(t) \times \vec{N}(t)\| = \|\vec{T}(t)\| \|\vec{N}(t)\| \sin(\alpha) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

2.1.4 Hélice

Seja hélice circular uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + t\vec{k}$$

isto é:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t) \\ z(t) &= t\end{aligned}$$

$$\vec{r}'(t) = -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}$$

A norma é dada por:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} = \sqrt{2}$$

2.1. VETORES \vec{T} - \vec{N} - \vec{B} (24/AGOSTO)

7

Assim:

$$\vec{T}(t) = \frac{-\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

Para calcular \vec{N} , derivamos \vec{T} :

$$\vec{T}'(t) = \frac{-\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}}{\sqrt{2}}$$

e

$$\|\vec{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{\cos^2(t) + \sin^2(t)}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

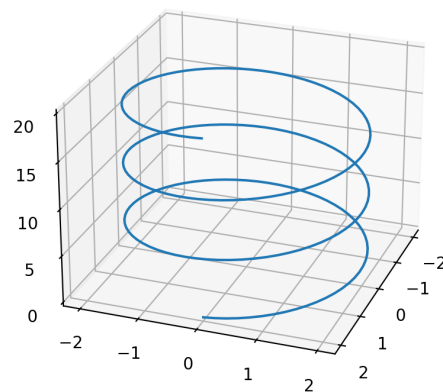
assim:

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$$

Finalmente o vetor binormal unitário é dado por:

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(t) & \cos(t) & 1 \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\vec{i}(0 + \sin(t)) + \vec{j}(-\cos(t) + 0) + \vec{k}(\sin^2(t) + \cos^2(t)) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \vec{k} \right] \end{aligned}$$



2.2 Parabola

Considere a parábola dada por:

$$y = ax^2, \quad z = 0$$

com $a > 0$.

Primeiro, parametrizamos a curva:

$$x(t) = t, \quad y(t) = at^2, \quad z(t) = 0.$$

assim:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + at^2\vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2at\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) &= \frac{\vec{i} + 2at\vec{j}}{\sqrt{1 + 4a^2t^2}} \\ &= (1 + 4a^2t^2)^{-1/2} \vec{i} + 2at(1 + 4a^2t^2)^{-1/2} \vec{j} \end{aligned}$$

Obs:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (1 + 4a^2t^2)^{-1/2} &= (-1/2) (1 + 4a^2t^2)^{-1/2-1} (8a^2t) \\ &= -4a^2t (1 + 4a^2t^2)^{-3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [2at(1 + 4a^2t^2)^{-1/2}] &= 2a(1 + 4a^2t^2)^{-1/2} + 2at[-4a^2t(1 + 4a^2t^2)^{-3/2}] \\ &= 2a(1 + 4a^2t^2)^{-1/2} - 8a^3t^2(1 + 4a^2t^2)^{-3/2} \\ &= \frac{2a(1 + 4a^2t^2) - 8a^3t^2}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

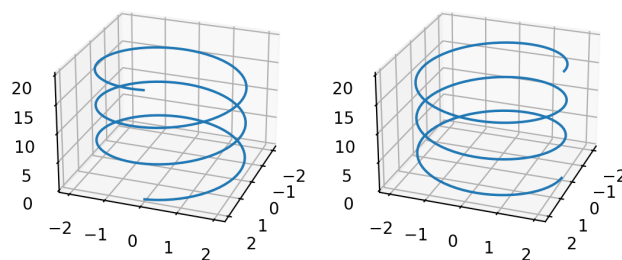
Portanto:

$$\vec{T}'(t) = \frac{1}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} [-4a^2t\vec{i} + 2a\vec{j}]$$

$$\begin{aligned} \|\vec{T}'(t)\| &= \frac{1}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \|-4a^2t\vec{i} + 2a\vec{j}\| \\ &= \frac{1}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \sqrt{16a^4t^2 + 4a^2} \\ &= \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)^{3/2}} \sqrt{4a^2t^2 + 1} \\ &= \frac{2a}{(1 + 4a^2t^2)} \end{aligned}$$

O vetor normal é dado, portanto, por:

$$\begin{aligned}\vec{N}(t) &= \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{1+4a^2t^2}} \left[-4a^2t\vec{i} + 2a\vec{j} \right]\end{aligned}$$



2.3 Orientação

Circunferência no plano orientada no sentido anti-horário:

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\ y(t) &= \sin(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\pi/2) &= 0 \\ y(\pi/2) &= 1\end{aligned}$$

Circunferência no plano orientada no sentido horário:

$$\begin{aligned}x(t) &= \sin(t) \\ y(t) &= \cos(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(0) &= 0 \\y(0) &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x(\pi/2) &= 1 \\y(\pi/2) &= 0\end{aligned}$$

2.4 Torção - 41min

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t) \\y(t) &= \sin(t) \\z(t) &= \sin(2t)\end{aligned}$$

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \sin(2t)\vec{k}$$

$$\tau = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} - 4\sin(2t)\vec{k} \\ \vec{r}'''(t) &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} - 8\cos(2t)\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(\pi/2) &= -\vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{r}''(\pi/2) &= -\vec{j} \\ \vec{r}'''(\pi/2) &= \vec{i} + 8\vec{k}\end{aligned}$$

$$\vec{r}'(\pi/2) \times \vec{r}''(\pi/2) = (-\vec{i} - 2\vec{k}) \times (-\vec{j}) = \vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} + \vec{k}$$

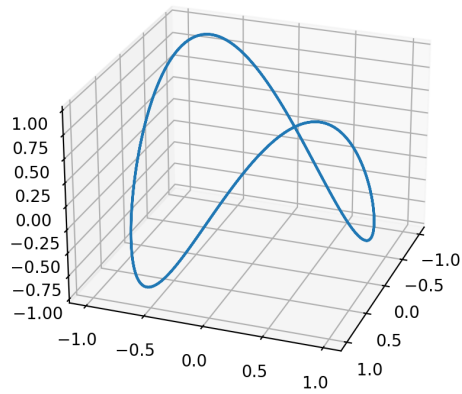
Dica: $ijkij$

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = (-2\vec{i} + \vec{k}) \cdot (\vec{i} + 8\vec{k}) = -2 + 8 = 6$$

$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\| = \|-2\vec{i} + \vec{k}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Finalmente

$$\tau = \frac{6}{5}$$



2.5

$$x(t) = \int_0^t \cos(\tau^2) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t \sin(\tau^2) d\tau$$

$$x'(t) = \cos(t^2)$$

$$y'(t) = \sin(t^2)$$

$$x''(t) = -2t \sin(t^2)$$

$$y''(t) = 2t \cos(t^2)$$

Teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x)$$

2.6

$$x(t) = \sin(t)$$

$$y(t) = \cos(t)$$

$$z(t) = \cos(2t)$$

Calcule t para $(1, 0, -1)$

$$\begin{aligned}\sin(t) = 1 &\implies t = \pi/2 + 2k\pi \\ \cos(t) = 0 &\implies t = \pi/2 + k\pi \\ \cos(2t) = -1 &\implies 2t = \pi + 2k\pi\end{aligned}$$

2.7 Comprimento de arco. 122min

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= 2\cos(\pi t)\vec{i} + 2\sin(\pi t)\vec{j} - t\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -2\pi\sin(\pi t)\vec{i} + 2\pi\cos(\pi t)\vec{j} - \vec{k} \\ \|\vec{r}'(t)\| &= \sqrt{(2\pi)^2 + 1} = \sqrt{4\pi^2 + 1}\end{aligned}$$

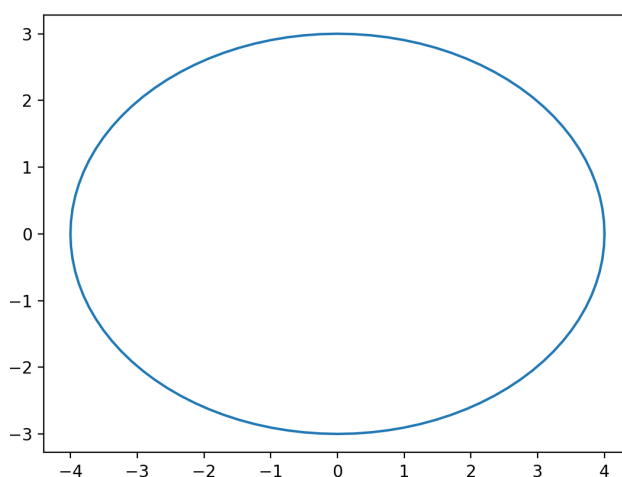
$$L = \int_0^1 ds = \int_0^1 \|\vec{r}'(t)\| dt = \sqrt{4\pi^2 + 1}$$

Chapter 3

28 de agosto

3.1 Curvatura da elipse

.



$$\vec{r}(t) = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{j}$$

onde a e b são constantes positivas.

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{j} \\ \vec{r}'(t) &= -a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j} \\ \vec{r}''(t) &= -a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j}\end{aligned}$$

$$\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) = \left(-a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j} \right) \times \left(-a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j} \right)$$

$$= ab \sin^2(t) \vec{k} + ab \cos^2(t) \vec{k} = ab \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= \|-a \sin(t) \vec{i} + b \cos^2(t) \vec{j}\| \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} \end{aligned}$$

E obtemos:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\|}{\|\vec{r}'(t)\|^3} \\ &= \frac{|ab|}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} \\ &= \frac{ab}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}} \end{aligned}$$

Nos vértices $t = 0$ e $t = \pi$:

$$\kappa(0) = \kappa(\pi) = \frac{ab}{(b^2)^{3/2}} = \frac{a}{b^2}$$

Nos vértices $t = \pi/2$ e $t = 3\pi/2$:

$$\kappa(\pi/2) = \kappa(3\pi/2) = \frac{ab}{(a^2)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}$$

3.2 Aceleração normal e curvatura

Se um pessoa percorre uma trajetória elíptica com semi-eixos $a = 100$ e $b = 200$ com velocidade escalar constante de 2 m/s. Qual é a aceleração normal máxima.

$$a_N = \kappa v^2 = \kappa_{max} 2^2 = 4 \frac{200}{100^2} = \frac{8}{100} = 0,08$$

3.3 Campos 53

- Campos vetoriais e escalares
- Campo (vetorial) conservativo. $\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$, φ é o potencial. $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.
- O campo elétrico é conservativo quando o campo magnético é constante no tempo.

3.4 Gradiente (pág 5/5)

O gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Em cada ponto, é o vetor que aponta na direção e sentido de maior variação e cujo módulo é a máxima derivada direcional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f, \quad \|\vec{u}\| = 1$$

Obs: Direção de máxima derivada direcional é dada pelo vetor unitário (versor):

$$\vec{u} = \hat{u} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

Direção de mínima derivada direcional (maior valor absoluto e sinal negativo) é dada pelo vetor unitário (versor):

$$\vec{u} = \hat{u} = -\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}$$

$$\text{Se } \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = 0$$

3.5 Divergente

O divergente de um campo vetorial é o campo escalar dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Ex.

$$\vec{F} = xy\vec{i} + y^3\vec{j} + xyz^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(y^3) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz^2) \\ &= y + 3y^2 + 2xyz\end{aligned}$$

3.6

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \cos(\tau^2) d\tau \vec{i} + \int_0^t \sin(\tau^2) d\tau \vec{j}$$

$$\vec{r}'(t) = \cos(t^2)\vec{i} + \sin(t^2)\vec{j}$$

Teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

$$\int \cos(t^2) dt \neq \sin(t^2) + C$$

3.7 Questão sobre gradientes (10min)

$$\begin{aligned}\vec{F} &= x\vec{i} + xe^y\vec{j} + xyz\vec{k} \\ \vec{F} \cdot \vec{F} &= x^2 + x^2e^{2y} + x^2y^2z^2\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{F}) = (2x + 2xe^{2y} + 2xy^2z^2)\vec{i} + (2x^2e^{2y} + 2x^2yz^2)\vec{j} + 2x^2y^2z\vec{k}$$

$$(e^y)^2 = e^{y^2}$$

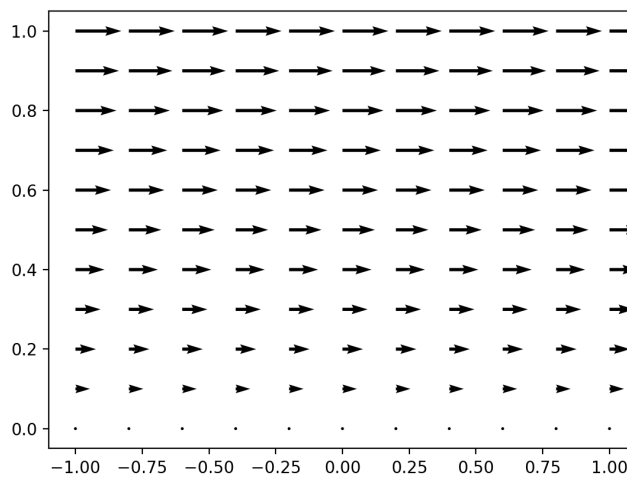
Chapter 4

31 de agosto

4.1 Campos vetoriais

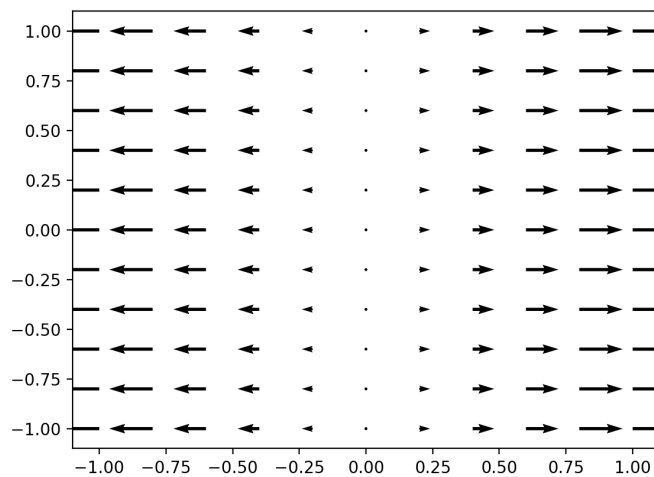
Exemplo 1, página 4/2.

$$\vec{F} = \sqrt{y} \vec{i}$$



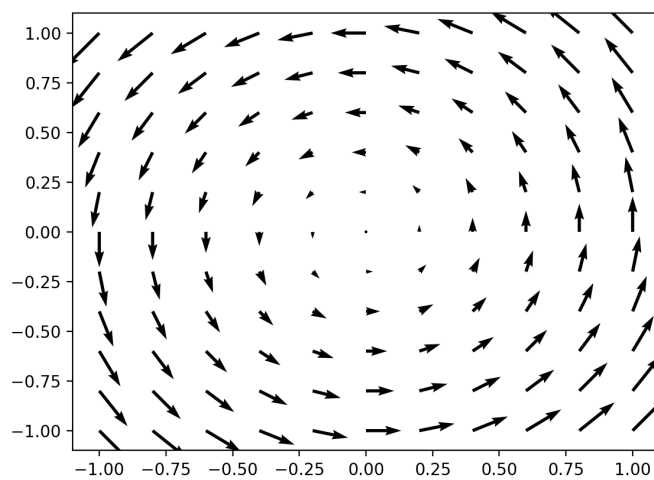
Exemplo 2.

$$\vec{F} = x \vec{i}$$



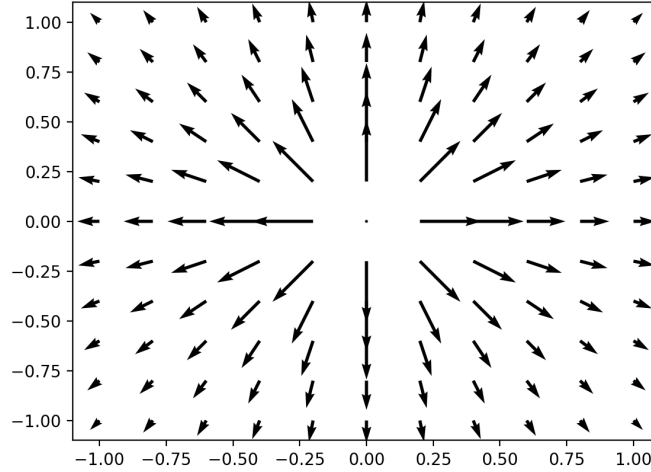
Exemplo 3.

$$\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$$



Exemplo inverso do quadrado.

$$\vec{F} = \frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3}$$



4.2 O operador del - 35min

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Gradiente:

$$\vec{\nabla} f = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} f + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} f + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

Divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}) = \frac{\partial}{\partial x} F_1 + \frac{\partial}{\partial y} F_2 + \frac{\partial}{\partial z} F_3$$

Rotacional:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Laplaciano:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f \\
&= \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} f + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} f + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} f \right) \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}
\end{aligned}$$

4.3 Exemplo 4. 55min

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= x + y \\
\vec{\nabla} f &= \vec{i} + \vec{j}
\end{aligned}$$

4.4 Exemplo 5. 55min

$$\vec{F} = x^2 y \vec{i} + 2y^3 z \vec{j} + 3z \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2xy + 6y^2 z + 3$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} + F_3 \vec{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y & 2y^3 z & 3z \end{vmatrix} \\
&= (0 - 2y^3) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + (0 - x^2) \vec{k}
\end{aligned}$$

4.5 Exemplo 6 - 72min

$$\begin{aligned}
f &= xyz \\
\vec{F} &= -y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k} \\
(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) f &= ?
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) &= (-y \vec{i} + x \vec{j} + z \vec{k}) \cdot \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \\
&= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) f &= \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) (xyz) \\
&= -y(yz) + x(xz) + z(xy) = -y^2 z + x^2 z + xyz
\end{aligned}$$

4.6 Exemplo 10 - pág 5/6 - 83min

$$T = \frac{xy}{1+x^2+y^2} = xy(1+x^2+y^2)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= y(1+x^2+y^2)^{-1} - xy(2x)(1+x^2+y^2)^{-2} \\ &= \frac{y(1+x^2+y^2) - 2x^2y}{(1+x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y - x^2y + y^3}{(1+x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x - y^2x + x^3}{(1+x^2+y^2)^2}$$

No ponto $(1, 1)$:

$$\vec{\nabla}T(1, 1) = \frac{1}{9}\vec{i} + \frac{1}{9}\vec{j}$$

Direção do vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = \vec{u} \cdot \nabla f, \quad \vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{9}\vec{i} + \frac{1}{9}\vec{j} \right) = \frac{1}{9\sqrt{5}}(2 - 1) = \frac{\sqrt{5}}{45}$$

item b:

$$\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}T}{\|\vec{\nabla}T\|} = \frac{-2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}}$$

Chapter 5

2 de setembro

5.1 Exemplo 11. pág 5/7

$$z = 2000 - 2x^2 - 4y^2$$

Seção transversal para $z = 0$:

$$2x^2 + 4y^2 = 2000 - 0$$

$$\frac{x^2}{1000} + \frac{y^2}{500} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Retornando:

$$2x^2 + 4y^2 = 2000 - z$$

Seção longitudinal para $x = 0$:

$$4y^2 = 2000 - z$$

$$z = 2000 - 4y^2$$

Item a: $P = (-20, 5)$. Veremos a elevação z como uma função de x e y , isto é, $z = f(x, y) = 2000 - 2x^2 - 4y^2$.

$$\vec{\nabla} f = -4x\vec{i} - 8y\vec{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{-4x\vec{i} - 8y\vec{j}}{\|-4x\vec{i} - 8y\vec{j}\|} \\ &= \frac{80\vec{i} - 40\vec{j}}{\|80\vec{i} - 40\vec{j}\|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} (2\vec{i} - \vec{j})\end{aligned}$$

Item b: Direção nordeste $\vec{v} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} &= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = \left(\frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right) \cdot (80\vec{i} - 40\vec{j}) \\ &= \frac{80 - 40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}\end{aligned}$$

Qual é a unidade?

Adimensional!!!

5.2 Potenciais centrais- 40min

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \varphi(r) \\ \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

Ex.

$$\varphi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$$

5.3 Exemplo 12 - página 5/9 - 48min

$$\varphi(r) = -k \frac{1}{r} = -kr^{-1}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{\nabla} \varphi(r) = \varphi'(r) \hat{r} \\ &= kr^{-2} \hat{r} = \frac{k}{r^2} \hat{r} \\ &= \frac{k}{r^3} \vec{r}\end{aligned}$$

Chapter 6

4 de setembro

6.1

Rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \text{rot}(\vec{F}) = \text{curl}(\vec{F})$$

6.2 Integral de linha, 40min

Define-se integral de linha como:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt$$

onde $\vec{r}(t)$ é uma parametrização do caminho C entre $t = t_0$ e $t = t_1$.

Obs: O valor da integral de linha NÃO depende da parametrização.

Quando o caminho C é fechado, a integral de linha também é chamada de circulação de \vec{F} ao longo de C :

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

6.3 Exemplo 2 - pag 7/4. 45min

$$\vec{F} = x^3 y \vec{i} + (x - y) \vec{j}$$

O caminho é dado $C : y = x^2, z = 0$ de $P_1(-2, 4)$ até $P_2(1, 1)$.

Parametrizamos a curva como:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= t\vec{i} + t^2\vec{j} \\ \vec{r}'(t) &= \vec{i} + 2t\vec{j} \end{aligned}$$

com $t \in [-2, 1]$.

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) &= x^3 y \cdot 1 + (x - y) \cdot 2t \\ &= t^3(t^2) + (t - t^2)2t \\ &= t^5 + 2t^2 - 2t^3 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{-2}^1 (t^5 + 2t^2 - 2t^3) dt \\
 &= \left(\frac{t^6}{6} + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{2} \right) \Big|_{-2}^1 \\
 &= \frac{1-64}{6} + \frac{2+16}{3} - \frac{1-16}{2} \\
 &= -\frac{63}{6} + \frac{18}{3} + \frac{15}{2} \\
 &= \frac{-63+36+45}{6} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

item b

$$\vec{F} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

A curva C é dada por:

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$$

para $t \in [0, 1]$.

Calculamos $\vec{r}'(t)$:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) &= yz + xz(2t) + xy(3t^2) \\
 &= t^2t^3 + tt^3(2t) + tt^2(3t^2) \\
 &= t^5 + 2t^5 + 3t^5 = 6t^5
 \end{aligned}$$

Finalmente:

$$W = \int_0^1 6t^5 dt = t^6 \Big|_0^1 = 1$$

6.4 Teorema fundamental das integrais de linha.

Pág 7/5. 73min

$$\int_C \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

Onde C é um caminho que começa em P_0 e termina em P_1 .

Dem: Seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ uma parametrização para C , definimos:

$$f(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$$

Derivamos em t :

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t), z(t)) \\
 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\
 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) \\
 &= \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{r}'(t)
 \end{aligned}$$

Agora usamos o bom e velho Teorema Fundamental do Cálculo (TFC):

$$\int_{t_0}^{t_1} f'(t) dt = f(t)|_{t_0}^{t_1} = f(t_1) - f(t_0)$$

Portanto:

$$\int_C \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(P_1) - \varphi(P_0)$$

6.5 Exemplo 3. Página 7/6. 90min

$$\vec{F} = 2xy^3 \vec{i} + (1 + 3x^2y^2) \vec{j}$$

a.

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3 & (1 + 3x^2y^2) & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (0 - 0) \vec{i} + (0 - 0) \vec{j} + (6xy^2 - 6xy^2) \vec{k} = \vec{0}
 \end{aligned}$$

b

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^3 \\
 F_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 1 + 3x^2y^2 \\
 F_3 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0
 \end{aligned}$$

Da primeira equação:

$$\varphi = x^2y^3 + C(y, z)$$

Derivamos em y e igualamos a $1 + 3x^2y^2$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3x^2y^2 + C_y(y, z) = 1 + 3x^2y^2$$

Assim

$$C_y(y, z) = 1$$

Logo

$$C(y, z) = y + D(z)$$

Derivamos em z e igualamos a 0, temos:

$$D'(z) = 0 \implies D = cst$$

Logo

$$\varphi = x^2 y^3 + y + D$$

item c

$$W = \varphi(3, 1) - \varphi(1, 4) = [3^2 1^3 + 1 + D] - [1^2 4^3 + 4 + D] = 10 - 68 = -58$$

Chapter 7

9 de setembro

7.1 Integrais de superfície - aula 8

Estudaremos integrais de superfícies do tipo:

$$\Phi = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} ds$$

Onde $\vec{\eta}$ é o vetor normal unitário.

Obs: $\vec{F} \cdot \vec{\eta} = \|\vec{F}\| \cos(\gamma)$ Onde γ é o ângulo entre \vec{F} e o vetor normal.

O maior desafio é parametrizar a superfície e calcular \vec{ds} .

Casos particulares de superfícies descritas por funções nas seguintes formas:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \text{ ou} \\ y &= f(x, z) \text{ ou} \\ x &= f(y, z). \end{aligned}$$

No primeiro caso, a superfície é parametrizada como:

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}$$

Escrevemos na forma:

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= z - f(x, y) \text{ ou} \\ G(x, y, z) &= y - f(x, z) \text{ ou} \\ G(x, y, z) &= x - f(y, z). \end{aligned}$$

Assim a superfície é a superfície de nível de $G(x, y, z)$:

$$G(x, y, z) = 0$$

Como o gradiente de G é perpendicular às suas curvas de nível, o vetor normal será dado por:

$$\vec{\eta} = \pm \frac{\vec{\nabla} G}{\|\vec{\nabla} G\|}$$

Onde o sinal define a orientação da superfície.

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\eta} ds \\
&= \pm \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G \frac{1}{\|\vec{\nabla} G\|} dS \\
&= \pm \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA
\end{aligned}$$

Para o primeiro caso:

$$G(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$\vec{\nabla} G = -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}$$

então:

$$\vec{\nabla} G \cdot \vec{k} = 1$$

$$\cos(\gamma) = \vec{\eta} \cdot \vec{k} = \pm \frac{\vec{\nabla} G \cdot \vec{k}}{\|\vec{\nabla} G\|} = \pm \frac{1}{\|\vec{\nabla} G\|}$$

7.2 Exemplos - 52min

Exemplo 5.

Calcule o fluxo de $\vec{F} = 3z^2\vec{i} + 6z\vec{j} + 6xz\vec{k}$ através da superfície S dada por:

$$y = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3$$

orientada para fora da concavidade.

Isso é da forma $y = f(x, z)$? Sim, mesmo que constante em z .

Definimos:

$$G(x, y, z) = y - f(x, z) = y - x^2$$

$$\vec{\nabla} G(x, y, z) = -2x\vec{i} + \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= - \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) dA
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) &= 3z^2(-2x) + 6(1) \\
&= -6xz^2 + 6
\end{aligned}$$

A região projetada é o retângulo no plano xz restrito a $0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 3$.

$$\begin{aligned}
\Phi &= - \int \int_R (-6xz^2 + 6) dA \\
&= - \int_0^3 \int_0^2 (-6xz^2 + 6) dx dz \\
&= -36 + 6 \int_0^3 \int_0^2 xz^2 dx dz \\
&= -36 + 3 \int_0^3 x^2 z^2 \Big|_0^2 dz \\
&= -36 + 3 \int_0^3 4z^2 dz \\
&= -36 + 4 z^3 \Big|_0^3 \\
&= -36 + 4.27 = 72
\end{aligned}$$

Exemplo 7

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \\
S : z &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 1. \\
\sqrt{x^2 + y^2} &= z \\
\rho &= z
\end{aligned}$$

Calcule o fluxo de \vec{F} através de S orientada para fora do cone.

$$\begin{aligned}
G(x, y, z) &= z - \sqrt{x^2 + y^2} = z - (x^2 + y^2)^{1/2} \\
\vec{\nabla} G(x, y, z) &= -(1/2)(x^2 + y^2)^{-1/2}(2x)\vec{i} - (1/2)(x^2 + y^2)^{-1/2}(2y)\vec{j} + \vec{k} \\
&= \frac{-x\vec{i} - y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) = \frac{-x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= - \int \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) dA
\end{aligned}$$

A região projetada é o disco de raio unitário no plano xy e centrado na origem. Para integrar neste disco usaremos coordenadas polares:

$$x = \rho \cos(\theta), \quad y = \rho \sin(\theta), \quad dx dy = \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
\Phi &= - \int \int_A \left(\frac{-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right) dA \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1 \right) \rho d\rho d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{-\rho \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)}{\rho} + 1 \right) \rho d\rho d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-\cos(\theta) - \sin(\theta) + 1) \rho d\rho d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta \\
&= - \int_0^{2\pi} (1/2) d\theta = -\pi
\end{aligned}$$