

1	2	3	4	5	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador  $\vec{\nabla}$ :

$f = f(x, y, z)$  e  $g = g(x, y, z)$  são funções escalares;  
 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  e  $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$  são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $-(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$
Curvatura	$\kappa = \left\  \frac{d\vec{T}}{ds} \right\  = \left\  \frac{d\vec{T}}{dt} \right\  = \frac{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }{\ \vec{r}'(t)\ ^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ ^2}$
Módulo da Torção	$ \tau  = \left\  \frac{d\vec{B}}{ds} \right\  = \left\  \frac{d\vec{B}}{dt} \right\ $
Aceleração normal	$a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

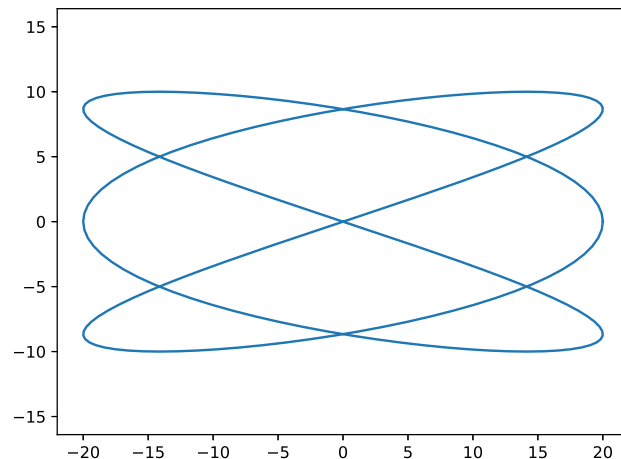
$\frac{d\vec{T}}{ds}$	=	$\kappa\vec{N}$
$\frac{d\vec{N}}{ds}$	=	$-\kappa\vec{T} \quad +\tau\vec{B}$
$\frac{d\vec{B}}{ds}$	=	$-\tau\vec{N}$

- **Questão 1** (3.0 pontos) A curva produzida pelas equações paramétricas

$$x(t) = 20 \cos(3t), \quad y(t) = 10 \sin(2t), \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

é chamada de curva de Lissajous. Em uma apresentação de drift, o desafio do piloto é descrever o movimento da curva acima mantendo a velocidade do carro constante. É sabido que o carro pode sair da trajetória ou rodar na pista se a aceleração normal exceder  $45\text{m/s}^2$ .

- (0.5 ponto) Sem calcular, marque sobre a curva o(s) ponto(s) crítico(s) onde o carro pode sair da trajetória com maior facilidade.
- (0.5 ponto) Calcule os vetores  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$  no ponto  $t = \pi$ .
- (0.5 ponto) Calcule o ponto  $t$  no intervalo  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  onde a curvatura é máxima. Assuma que a curva é simétrica pelo eixo  $x$ . Neste item, não é necessário calcular os pontos críticos derivando a função curvatura, mas justifique o resultado usando seus conhecimentos geométricos de curvatura, a simetria da figura ao lado e a expressão dada no enunciado.
- (1.0 ponto) Calcule a curvatura da curva dada no ponto do item c).
- (0.5 ponto) Calcule a velocidade máxima do carro para que o veículo não saia da trajetória no intervalo  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ .



- **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \ln(t)\vec{k}, \quad t > 0.$$

- **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo **conservativo**

$$\vec{F} = (y - 1)e^{x(y-1)}\vec{i} + xe^{x(y-1)}\vec{j} + \vec{k}$$

e a curva  $C$  dada pela parametrização

$$\vec{r} = t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)\vec{i} + t \cos(2\pi t)\vec{j} + t \cos(4\pi t)\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- a) (1.0 ponto) Calcule o potencial.
- b) (1.0 ponto) Calcule  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = x^3 z \vec{i} + y^3 z \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo cone  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $2 \leq z \leq 4$  e o plano  $z = 2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 4$ , orientada para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ .

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

- **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - zy^2 + z)\vec{i} + (zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos  $P_0 = (0, 0, 2)$ ,  $P_1 = (4, 0, 2)$  e  $P_2 = (4, 2, 2)$ , no sentido  $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_0$ .

- a) (0.5 ponto) Calcule  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ .
- b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$