

1	2	3	4	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Ao usar sistemas de coordenadas curvilíneas (cilíndricas, esféricas etc), indique a correspondência para o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z).
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas nem usar folhas adicionais.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones, computadores ou qualquer outro recurso computacional.

Formulário:

$$1. \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2. \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$3. \cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

$$4. \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

$$5. \cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$$

$$6. \sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$$

$$7. (a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos): Considere a elipse sobre o plano  $xy$  cujos pontos satisfazem a equação dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

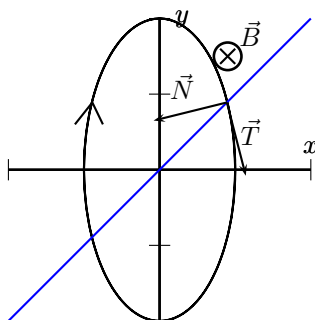
orientada no sentido horário. Aqui  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

• **Item a** (0.75) Esboce o gráfico desta curva **orientada** para  $a = 1$  e  $b = 2$ . Sem a necessidade de calculá-los algebricamente, desenhe os vetores  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  e  $\vec{B}$  no ponto do primeiro quadrante em que  $y = x$ .

• **Item b** (1.5) Através de uma parametrização adequada, encontre uma expressão para a curvatura em função das constantes  $a$ ,  $b$  e das coordenadas  $x$  e  $y$ .

• **Item c** (0.75) Sabendo que o raio de curvatura em um vértice vale 8 e a distância deste vértice até a origem vale 2, calcule os comprimentos dos semieixos da elipse.

**Resposta do item a**



**Resposta do item b** Parametrizamos a curva conforme a seguir:

$$x(t) = a \cos(t)$$

$$y(t) = b \sin(t)$$

onde  $a$  e  $b$  indicam os comprimentos dos semi-eixos da elipse e  $0 \leq t \leq 2\pi$ . A fim de obter o raio de curvatura, calculamos a curvatura através da fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3}.$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição dado por

$$\vec{r}(t) = a \cos(t)\vec{i} + b \sin(t)\vec{j}$$

as derivadas de  $\vec{r}(t)$  são, portanto, dadas por:

$$r'(t) = -a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j}$$

$$r''(t) = -a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) &= \left( -a \sin(t)\vec{i} + b \cos(t)\vec{j} \right) \times \left( -a \cos(t)\vec{i} - b \sin(t)\vec{j} \right) \\ &= ab \sin^2(t)\vec{k} + ab \cos^2(t)\vec{k} = ab\vec{k} \end{aligned}$$

Onde usamos a identidade trigonométrica  $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$  e as identidades vetoriais  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ,  $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$  e  $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}$ . Agora calculamos  $\|\vec{r}'(t)\|$ :

$$\|\vec{r}'(t)\| = [a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{1/2}$$

Desta forma, temos:

$$\kappa(t) = \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|}{\|r'(t)\|^3} = \frac{ab}{[a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)]^{3/2}}$$

Substituindo as variáveis originais, temos:

$$\kappa(t) = \frac{ab}{\left[\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2\right]^{3/2}}$$

**Resposta do item c** Consideremos que estamos no vértice  $(a, 0)$  com  $a = 2$ , pelo que temos

$$\kappa = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{8}$$

temos  $b^2 = 8a = 16$ , o que implica  $b = 4$ .

• **Questão 2** (2.0 pontos) Seja  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $r = \|\vec{r}\|$ , prove as seguintes identidades:

- **Item a** (1.0)  $\vec{\nabla} f(r) = \frac{f'(r)}{r} \vec{r}$ ,  $r \neq 0$
- **Item b** (1.0)  $\nabla^2 f(r) = 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r)$ ,  $r \neq 0$

**Resposta do item a** Primeiro observamos que  $f(r)$  é uma função de  $r$  e  $r$  é uma função de  $x$ ,  $y$  e  $z$  e aplicamos a regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f(r) &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} f(r) + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} f(r) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} f(r) \\ &= \vec{i} \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{df(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial z} \\ &= \frac{df(r)}{dr} \left[ \vec{i} \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial r}{\partial z} \right]\end{aligned}$$

Agora calculamos as derivadas de  $r$  em relação às variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(2z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}\end{aligned}$$

Retornando à expressão anterior, obtemos:

$$\frac{df(r)}{dr} \left[ \vec{i} \frac{x}{r} + \vec{j} \frac{y}{r} + \vec{k} \frac{z}{r} \right] = f'(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

**Resposta do item b** Primeiro aplicamos os itens 7 e 5 da tabela:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(r) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{f'(r)}{r} \vec{r} \right) \\ &= \vec{\nabla} \left( \frac{f'(r)}{r} \right) \cdot \vec{r} + \frac{f'(r)}{r} (\vec{\nabla} \cdot \vec{r})\end{aligned}$$

Agora usamos o resultado do item (a) para calcular o gradiente envolvido:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(r) &= \frac{\left( \frac{f'(r)}{r} \right)'}{r} \vec{r} \cdot \vec{r} + 3 \frac{f'(r)}{r} \\ &= \frac{\left( \frac{f'(r)}{r} - 2 \frac{f''(r)}{r^2} \right)}{r} r^2 + 3 \frac{f'(r)}{r} \\ &= \frac{(r f'(r) - 2 f''(r))}{r} + 3 \frac{f'(r)}{r} \\ &= 2 \frac{f'(r)}{r} + f''(r)\end{aligned}$$

onde usamos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \vec{\nabla} \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

• **Questão 3** (2.0 pontos): Use o teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F} = yx^2 \cos(z)\vec{i} - z\vec{j} + \sin(xz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo da circunferência de raio 1, centrada na origem sobre o plano  $xy$ , orientada no sentido horário.

Como a curva está sobre o plano  $xy$ , o vetor normal deve ser  $\pm\vec{k}$ , pela orientação da curva, vemos pela regra da mão direita que  $\vec{n} = -\vec{k}$ . Calculamos:

$$W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &= 0 - x^2 \cos(z) = -x^2, \quad z = 0 \end{aligned}$$

Parametrizamos em coordenadas polares:

$$x = \rho \cos(\phi), \quad y = \rho \sin(\phi)$$

$$\begin{aligned} W &= - \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 x^2 \rho d\rho d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3 \cos^2 \phi d\rho d\phi \\ &= \left( \int_0^1 \rho^3 d\rho \right) \left( \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \right) = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1 + \cos(2t)}{2} \right) \phi d\phi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

- **Questão 4** (3.0 pontos): Calcule o fluxo do campo

$$\vec{F} = (2 + z^2)\vec{k}$$

atraves da fronteira da região limitada superiormente pela superfície

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - z$$

e inferiormente pelo plano  $z = 0$  orientada para fora.

- **Item a** (1.5) Usando o Teorema da Divergência.
- **Item b** (1.5) Integrando o fluxo diretamente sobre a superfícies usando parametrizações adequadas e sem usar o Teorema da Divergência.

**Resposta do item a** Calculamos o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$$

Pelo teorema da divergência, temos:

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

Usando coordenadas polares, integramos no cone:

$$x = \rho \cos \phi, \quad x = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-z} z \rho d\rho dz d\phi \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} z \rho d\rho dz \\ &= \pi \int_0^1 z(1-z)^2 dz = \pi \int_0^1 z(z-1)^2 dz \\ &= \frac{1}{2}\pi \int_{-1}^0 u^2 du = \frac{1}{6}\pi \end{aligned}$$

**Resposta do item b** Escrevemos o fluxo através da superfície como a soma de dois fluxos:

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_b$$

onde  $\Phi_c$  é o fluxo através da superfície cônica e  $\Phi_b$  é o fluxo através da superfície plana.

$$\begin{aligned} \Phi_b &= \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dS = - \iint_{S_1} (2 + z^2) dS \\ &= -2 \iint_{S_1} dS = -2\pi \quad (\text{área do círculo}). \end{aligned}$$

Para calcular  $\Phi_c$ , projetamos a superfície cônica,  $S_2$ , no plano  $xy$ :

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= z - \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \\ \vec{\nabla} G &= -\vec{i} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \vec{j} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \vec{k} \end{aligned}$$

Vemos que  $\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} G}{\|\vec{\nabla} G\|}$ , pelo que

$$\Phi_c = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dS$$

e

$$\vec{F} \cdot \vec{\nabla} G = (2 + z^2) = 2 + \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 2 + (1 - \rho)^2 = \rho^2 - 2\rho + 3$$

Onde se usa o sistema de coordenadas polares:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi$$

$$\begin{aligned}\Phi_c &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + 2\rho + 3) \rho d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^1 (\rho^3 - 2\rho^2 + 3\rho) d\rho = 2\pi \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \right) = 2\pi \frac{3 - 8 + 18}{12} = \frac{13}{6}\pi\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos o fluxo total:

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_b = \frac{13}{6}\pi - 2\pi = \frac{1}{6}\pi$$