UFRGS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2023/2
Prova da área I

1	2	3	4	5	Total

Nome: ____ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert = \dfrac{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert}{\lVert\vec{r}\,'(t)\rVert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\lVert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\rVert = \left\lVert\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\lVert\vec{a}\times\vec{v}\rVert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Um motoboy saiu de uma pizzaria para uma entrega na casa de um cliente ao longo de uma estrada descrita pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = 10t\vec{i} + \frac{t^3}{30}\vec{j}, \quad 0 \le t \le 10.$$

A pizzaria está localizada no ponto $(0, 0)$ e o cliente no ponto final da trajetória medida em metros. Observe que o motoboy estava com pressa, percorrendo todo o trajeto desde a pizzaria até o ponto $P\left(100, \dfrac{1000}{30}\right)$ em apenas 10 segundos.

a) (0.5 ponto) Calcule a velocidade e a aceleração do motoboy em $t = 2$.

b) (0.5 ponto) Calcule os vetores $\vec{T}$ e $\vec{N}$ em $t = 2$.

c) (1.0 ponto) Calcule as componentes normal e tangencial da aceleração em $t = 2$.

d) (1.0 ponto) Suponha que o motoboy voltou para a pizzaria pelo mesmo trajeto, mas agora com velocidade constante igual a 10m/s. Calcule as componentes normal e tangencial da aceleração no retorno para a pizzaria no mesmo ponto da curva onde o motoboy estava nos itens b), c) e d).

Solução:

a) Derivando a função vetorial $\vec{r}$, calculamos a velocidade e a aceleração:

$$\vec{v} = \vec{r}' = 10\vec{i} + \frac{t^2}{10}\vec{j}$$

e

$$\vec{a} = \vec{r}'' = \frac{t}{5}\vec{j}$$

Em $t = 2$, temos

$$\vec{v} = 10\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}$$

e

$$\vec{a} = \frac{2}{5}\vec{j}$$

b) Calculamos

$$v = \|\vec{v}\| = \sqrt{100 + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{2500 + 4}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{2504},$$

e

$$\vec{T} = \frac{5}{\sqrt{2504}}\left(10\vec{i} + \frac{2}{5}\vec{j}\right) = \frac{50\vec{i} + 2\vec{j}}{\sqrt{2504}}.$$

Agora, procuramos um vetor unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{T} \cdot \vec{N} = 0$. Existem apenas duas possibilidades:

$$\frac{2\vec{i} - 50\vec{j}}{\sqrt{2504}} \quad \text{ou} \quad \frac{-2\vec{i} + 50\vec{j}}{\sqrt{2504}}.$$

Uma interpretação geométrica do vetor $\vec{N}$ ao longo da trajetória ajuda a concluir o resultado. Basta escolher aquele que aponta para dentro da curva.

$$\vec{N} = \frac{-2\vec{i} + 50\vec{j}}{\sqrt{2504}}.$$

c) Calculamos

$$\vec{a} \times v = -4\vec{k},$$
$$\|\vec{a} \times v\| = 4,$$

e

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$$

Assim,

$$a_N = \frac{\|\vec{a} \times v\|}{v} = \frac{20}{\sqrt{2504}}$$

e

$$a_T = \frac{\vec{a} \cdot v}{v} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{1}{5}\sqrt{2504}} = \frac{4}{5\sqrt{2504}}$$

d) Começamos calculando a curvatura em $t = 2$:

$$\kappa(2) = \frac{\|\vec{a} \times v\|}{v^3} = \frac{4}{\frac{1}{125}\sqrt{2504^3}} = \frac{500}{\sqrt{2504^3}}$$

Temos

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{500}{\sqrt{2504^3}}10^2 = \frac{50000}{\sqrt{2504^3}}.$$

e

$$a_T = v' = 0.$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Calcule a função torção para a curva

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{t^4}{4}\vec{j} + \frac{t^3}{3}\vec{k}, \qquad t > 0.$$

Solução:

$$\vec{r}'(t) = \vec{i} + t^3\vec{j} + t^2\vec{k},$$
$$\vec{r}''(t) = 3t^2\vec{j} + 2t\vec{k},$$
$$\vec{r}'''(t) = 6t\vec{j} + 2\vec{k},$$

Fazemos,

$$\vec{r}' \times \vec{r}'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & t^3 & t^2 \\ 0 & 3t^2 & 2t \end{vmatrix} = -t^4\vec{i} - 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k},$$
$$\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2 = t^8 + 4t^2 + 9t^4,$$
$$\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}''' = -12t^2 + 6t^2 = -6t^2,$$

e

$$\tau(t) = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}'' \cdot \vec{r}'''}{\|\vec{r}' \times \vec{r}''\|^2} = \frac{-6t^2}{t^8 + 4t^2 + 9t^4} = \frac{-6}{t^6 + 9t^2 + 4}.$$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (y+x)\vec{j} + z\vec{k}$$

e a curva C dada pela parametrização

$$\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + \operatorname{sen}(2t)\vec{k}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

a) (0.5 ponto) Verifique se o campo $\vec{F}$ é conservativo.

b) (1.5 ponto) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

a) O campo é conservativo se e somente se for irrotacional. Portanto, vamos calcular o irrotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x-y & y+x & z \end{vmatrix} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (1-(-1))\vec{k} = 2\vec{k}.$$

Como o rotacional não é zero, o campo não é conservativo.

b) Como o campo não é conservativo, o teorema fundamental para integral de linhas não se aplica. Vamos integrar usando a parametrização direta. Temos:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (\cos(t) - \operatorname{sen}(t))\vec{i} + (\cos(t) + \operatorname{sen}(t))\vec{j} + \operatorname{sen}(2t)\vec{k},$$
$$\vec{r}' = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + 2\cos(2t)\vec{k},$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{r}' &= -\operatorname{sen}(t)(\cos(t) - \operatorname{sen}(t)) + \cos(t)(\cos(t) + \operatorname{sen}(t)) + 2\cos(2t)\operatorname{sen}(2t) \\ &= -\operatorname{sen}(t)\cos(t) + \operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t) + \operatorname{sen}(t)\cos(t) + 2\cos(2t)\operatorname{sen}(2t) \\ &= 1 + 2\cos(2t)\operatorname{sen}(2t) \\ &= 1 + \operatorname{sen}(4t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen}(4t))dt = \left[t - \frac{\cos(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

- **Questão 4** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = x^3z^2\vec{i} + y^3z^2\vec{j} + 2z^3\vec{k}$$

e a superfície fechada formada pelo cubo formado pelos planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$, orientado para fora.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Solução:

a) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3z^2x^2 + 3z^2y^2 + 6z^2 = 3z^2(x^2 + y^2 + 2)$.

b) Usando o teorema da divergência de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \iiint_V z^2(3x^2 + 3y^2 + 6) dV.
\end{aligned}$$

Em coordenadas cartesianas, resolvemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 3z^2(x^2 + y^2 + 2) dz dy dx \\
&= 3\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[(x^2 + y^2 + 2)\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^{1} dy dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[(x^2 + y^2 + 2)\right] dy dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} \left[(x^2y + \frac{y^3}{3} + 2y)\right]_{y=-1}^{y=1} dx \\
&= 2\int_{-1}^{1} \left[(x^2 + \frac{1}{3} + 2) - (-x^2 - \frac{1}{3} - 2)\right] dx \\
&= 4\int_{-1}^{1} \left(x^2 + \frac{7}{3}\right) dx \\
&= 4\left[\frac{x^3}{3} + \frac{7x}{3}\right]_{-1}^{1} \\
&= 8\left[\frac{1}{3} + \frac{7}{3}\right] = \frac{64}{3}
\end{aligned}$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere o campo

$$\vec{F} = (x - 2zy^2 + z)\vec{i} + (3zx^2 + y - z)\vec{j} + (-x + y + z)\vec{k}$$

e a curva fechada formada pela poligonal formada pelos pontos $P_0 = (0, 0, 1)$, $P_1 = (4, 2, 1)$ e $P_2 = (4, 0, 1)$ no sentido $P_0 \to P_1 \to P_2 \to P_0$.

a) (0.5 ponto) Calcule $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

b) (1.5 ponto) Calcule

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Solução:

a)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x - 2zy^2 + z & 3zx^2 + y - z & -x + y + z \end{vmatrix} \\ &= (1 - (3x^2 - 1))\vec{i} + (1 - 2y^2 - (-1))\vec{j} + (6zx - (-4zy))\vec{k} \\ &= (2 - 3x^2)\vec{i} + (2 - 2y^2)\vec{j} + 2z(3x + 2y)\vec{k}. \end{aligned}$$

b) Pelo teorema de Stokes, temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

onde S é o plano $z = 1$, limitado pelo triângulo do enunciado com orientação $\vec{n} = -\vec{k}$. Em $z = 1$, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (2 - 3x^2)\vec{i} + (2 - 2y^2)\vec{j} + 2(3x + 2y)\vec{k}.$$

Também, $G = z - 1$ e $\vec{\nabla} G = \vec{k}$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -2 \iint_S (3x + 2y) dA \\ &= -2 \int_0^4 \int_0^{x/2} (3x + 2y) dy dx \\ &= -2 \int_0^4 \left[(3xy + y^2)\right]_0^{x/2} dx \\ &= -2 \int_0^4 \left[3x\left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2\right] dx \\ &= -2 \int_0^4 \frac{7x^2}{4} dx \\ &= -\left[\frac{7x^3}{6}\right]_0^4 \\ &= -\frac{224}{3}. \end{aligned}$$