

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad \begin{matrix} (m > 0, \\ n > 0) \end{matrix}$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

- **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \sin(n\pi t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi t}.$$

Responda:

Período fundamental

- () $T_f = 1$
 (X) $T_f = 2$
 () $T_f = \pi$
 () $T_f = 2\pi$
 () N.D.A

Valor médio $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$

- () -2
 () -1
 (X) 0
 () 1
 () N.D.A

Módulo de C_2

- (X) $|C_2| = \frac{e^{-2}}{2}$
 () $|C_2| = \frac{\sqrt{2}e^{-2}}{2}$
 () $|C_2| = e^{-2}$
 () $|C_2| = 2e^{-2}$
 () N.D.A

Potência média $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$

- () $\bar{P}_f = 1 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{e^2 - 1}$
 () $\bar{P}_f = 2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{e^2 - 1}$
 (X) $\bar{P}_f = \frac{1}{2} \frac{1}{e^2 - 1}$
 () $\bar{P}_f = \frac{1}{2} \frac{1}{e - 1}$
 () N.D.A

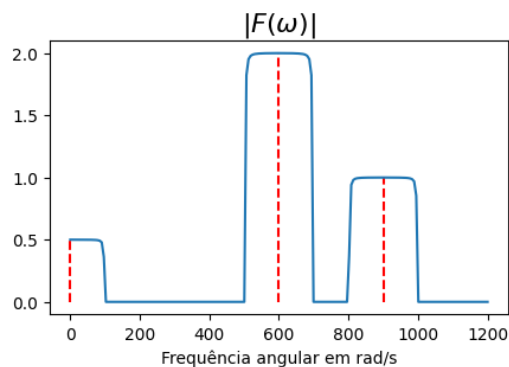
Solução da d:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{-n}}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \frac{1}{2} \frac{e^{-2}}{1 - e^{-2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{e^2 - 1} \end{aligned}$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere os diagramas de espectro de magnitudes das função $f(t)$ dada. Sabendo que $f(t)$ representa uma função real, sabendo que $\bar{f} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ e $E := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$, assinale as alternativas que melhor aproximam os valores de $|\bar{f}|$ e E :

- $|\bar{f}|$
- () 0
- () 0.25
- (X) 0.5
- () 0.75
- () 1.0

- E
- () 215
- () 165
- () 231
- (X) 326
- () 541

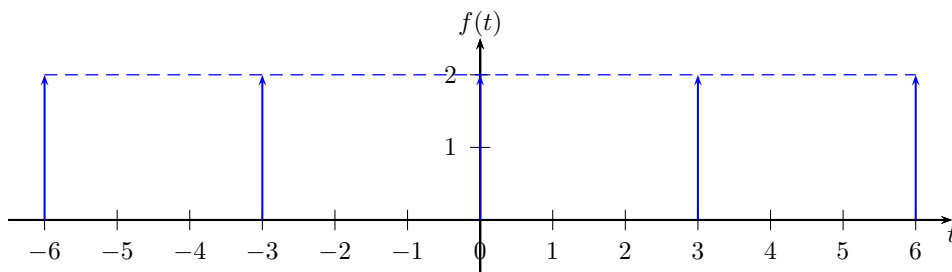


Solução:

$$\bar{f} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) \Rightarrow |\bar{f}| = |F(0)| = 0.5$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{\pi} [0.5^2 \times 100 + 2^2 \times 200 + 1^2 \times 200] \\ &= \frac{1025}{\pi} \approx 326. \end{aligned}$$

• **Questão 3** (1.0 pontos) Considere a função periódica dada pelo gráfico abaixo:

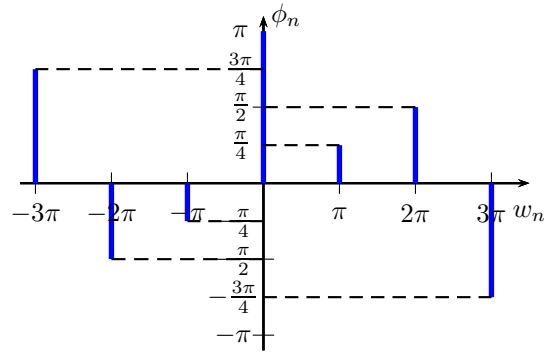
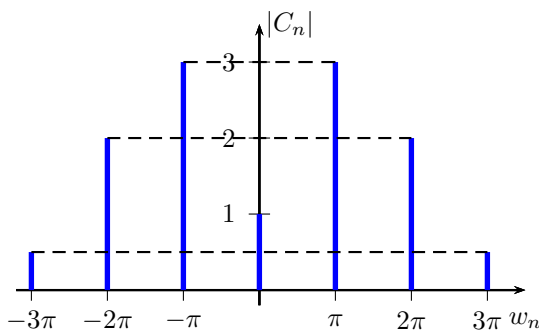


Seja a expansão em série de Fourier dada por: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t))$

Indique os valores de a_n e b_n .

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| () $a_n = \frac{8}{3}$ | () $b_n = \frac{8}{3}$ |
| (X) $a_n = \frac{4}{3}$ | () $b_n = \frac{4}{3}$ |
| () $a_n = \frac{8}{3n}$ | () $b_n = \frac{8}{3n}$ |
| () $a_n = \frac{4}{3n}$ | () $b_n = \frac{4}{3n}$ |
| () $a_n = 0$ | (X) $b_n = 0$ |

- **Questão 4** (1.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de amplitude e fase de um sinal $f(t)$ dados nos gráficos abaixo.



A forma exponencial do sinal é dada por

$$f(t) = C_{-3}e^{-3\pi t} + C_{-2}e^{-2\pi t} + C_{-1}e^{-\pi t} + C_0 + C_1e^{\pi t} + C_2e^{2\pi t} + C_3e^{3\pi t}$$

e a forma trigonométrica é dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\pi t) + b_1 \sin(\pi t) + a_2 \cos(2\pi t) + b_2 \sin(2\pi t) + a_3 \cos(3\pi t) + b_3 \sin(3\pi t)$$

Assinale as alternativas corretas.

(X) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = 2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = -1$

() $C_3 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = -2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = 1$

(X) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = 2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = -1$

() $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = -2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = 1$

() n.d.a.

() $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = -1$,
 $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = -2$

() $a_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$,
 $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = -2$

() $a_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = -1$,
 $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = 2$

(X) n.d.a.

- **Questão 5** (1.0 pontos) Considere as funções dadas por:

$$f(t) = te^{-t^2}$$

$$g(t) = t \cos(2t)e^{-t^2}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

$F(w)$

() $\frac{-\sqrt{\pi}w}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

() $\frac{\sqrt{\pi}w}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

(X) $\frac{-\sqrt{\pi}iw}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

() $\frac{\sqrt{\pi}iw}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

() n.d.a.

$G(w)$

() $\frac{-\sqrt{\pi}(w+2)}{4}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{-\sqrt{\pi}(w-2)}{4}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

() $\frac{\sqrt{\pi}(w+2)}{4}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}(w-2)}{4}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

() $\frac{-\sqrt{\pi}i(w+2)}{2}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{-\sqrt{\pi}i(w-2)}{2}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

() $\frac{\sqrt{\pi}i(w+2)}{2}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}i(w-2)}{2}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

(X) n.d.a.

• **Questão 6** (2.0 pontos) Um fluido se desloca em um tubo com perdas de calor e com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x, t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t - vu_x - u_{xx} + u = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x, 0) = 300\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 1m/s$.

Resposta resumida

$$\frac{d}{dt}U(k, t) + ivkU(k, t) + k^2U(k, t) + U(k, t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}U(k, t) = -(ivk + k^2 + 1)U(k, t) = 0$$

$$\begin{aligned} U(k, t) &= U(k, 0)e^{-(ivk+k^2+1)t} \\ &= 300e^{-(1+ivk+k^2)t} \\ &= e^{-t}e^{-ivk}300e^{-k^2t} \end{aligned}$$

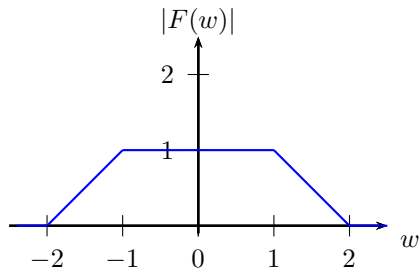
Calculamos a transformada inversa de $300e^{-k^2t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{300e^{-k^2t}\} &= \frac{150}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t} e^{ikx} dx \\ &= \frac{300}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2t} \cos(kx) dx \\ &= \frac{300}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{150}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Usando a propriedade do deslocamento, temos a solução:

$$u(x, t) = \frac{150}{\sqrt{\pi t}} e^{-t} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4t}}$$

- **Questão 7** (2.0 pontos) Sejam $f(t)$ uma função cuja transformada de Fourier é dada por $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce a diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier da função $g(t) = f''(t) + \cos(3t)$

Resposta resumida

$$|F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w + 2, & -2 \leq w < -1, \\ 1, & -1 \leq w < 1, \\ 2 - w, & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

A transformada de $f''(w)$ é $(iw)^2 F(w)$, assim:

$$|w^2 F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w^2(w + 2), & -2 \leq w < -1, \\ w^2, & -1 \leq w < 1, \\ w^2(2 - w), & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

Além disso, sabemos que $\mathcal{F}\{\cos(3t)\} = \pi\delta(w - 3) + \pi\delta(w + 3)$

