UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ____________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\\|}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}$
Curvatura	$\kappa = \left\\|\frac{d\vec{T}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\| = \frac{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|}{\\|\vec{r}\,'(t)\\|^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\\|^2}$
Módulo da Torção	$\|\tau\| = \left\\|\frac{d\vec{B}}{ds}\right\\| = \left\\|\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\\|$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\\|\vec{a}\times\vec{v}\\|}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

(X) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Binormal unitário em $t = 0$:

(X) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Curvatura em $t = 0$:

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(X) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\kappa(0) = \frac{1}{3}$

Torção em $t = 0$:

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(X) $\tau(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\tau(0) = \frac{1}{3}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,'''(t) &= \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k}
\end{aligned}$$

Subsituímos em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(0) &= \vec{j} + \vec{k} \\
\vec{r}\,''(0) &= -\vec{i} + \vec{k} \\
\vec{r}\,'''(0) &= -\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\left\|\vec{r}\,'(0)\right\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)\right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \cdot \vec{r}\,'''(0) = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \times \vec{r}\,'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \times \vec{r}\,'(0)\right\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\kappa(0) &= \frac{\|\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\|}{\|\vec r\,'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{6}}{4},\\
\tau(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\cdot\vec r\,'''(0)}{\|\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\|^2} = \frac{2}{\sqrt{3}^2} = \frac{2}{3},\\
\vec T(0) &= \frac{\vec r\,'(0)}{\|\vec r\,'(0)\|} = \frac{\vec j+\vec k}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec j+\vec k\right),\\
\vec N(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\times\vec r\,'(0)}{\|\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\times\vec r\,'(0)\|} = \frac{-2\vec i-\vec j+\vec k}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec i-\vec j+\vec k\right)\\
\vec B(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)}{\|\vec r\,'(0)\times\vec r\,''(0)\|} = \frac{\vec i-\vec j+\vec k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec i-\vec j+\vec k\right)
\end{aligned}$$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma abelha viaja sobre uma trajetória $\vec r(t)$ com velocidade $\vec r\,'(t)=\vec v(t)=t\vec i+t^2\vec j+\vec k$, $0\le t\le 1$. Sabendo que a abelha passa pelo ponto $(1,1,1)$ em $t=0$, marque a resposta correta para cada coluna.

Posição da abelha $\vec r(t)$

( ) $\vec r(t)=\frac{t^2}{2}\vec i+\frac{t^3}{3}\vec j+t\vec k$

(X) $\vec r(t)=\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i+\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j+(t+1)\vec k$

( ) $\vec r(t)=\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i+\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j+t\vec k$

( ) $\vec r(t)=\frac{t^2}{2}\vec i+\frac{t^3}{3}\vec j+\vec k$

( ) $\vec r(t)=\vec i+2t\vec j$

Componente tangencial da aceleração a_T

( ) $a_T=\frac{1+t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

( ) $a_T=\frac{t+2t^2}{\sqrt{t^3+t^2+t}}$

( ) $a_T=\frac{1+t^2}{\sqrt{t^4+t^2+t}}$

(X) $a_T=\frac{t+2t^3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

( ) $a_T=\frac{1+2t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

Solução:

$$\vec v(t)=t\vec i+t^2\vec j+\vec k$$

$$\vec r(t)=\left(\frac{t^2}{2}+C_1\right)\vec i+\left(\frac{t^3}{3}+C_2\right)\vec j+(t+C_3)\vec k$$

Como em $t=0$, $\vec r(0)=(1,1,1)$, temos:

$$\vec r(t)=\left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i+\left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j+(t+1)\vec k$$

$$\vec a(t)=\vec i+2t\vec j$$

$$v(t)=\|\vec v(t)\|=\sqrt{t^2+t^4+1}$$

$$a_T=v'(t)=\frac{1}{2}\left(t^2+t^4+1\right)^{-1/2}(2t+4t^3)=\frac{t+2t^3}{\sqrt{t^2+t^4+1}}$$

$$\begin{aligned}
\vec v(t)\times\vec a(t) &= \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ t & t^2 & 1\\ 1 & 2t & 0\end{vmatrix}\\
&= (0-2t)\vec i+(1-0)\vec j+(2t^2-t^2)\vec k\\
&= -2t\vec i+\vec j+t^2\vec k
\end{aligned}$$

$$\|\vec v(t)\times\vec a(t)\|=\sqrt{4t^2+1+t^4}$$

$$\kappa=\frac{\sqrt{4t^2+1+t^4}}{\sqrt{(t^2+t^4+1)^3}}$$

$$a_N=\kappa v^2=\frac{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}{(t^4+t^2+1)^{1/2}}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a superfície fechada limitada pelos plano $x=\pm2$, $y=\pm2$ e $z=\pm2$, orientada para fora, e o campo $\vec F=-2(z^2+1)xy\vec i+(z^2+1)y^2\vec j+xyz^2\vec k$.

Divergente

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F=-2(z^2+1)xy+(z^2+1)y^2+xyz^2$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F=-2(z^2+1)x+xyz^2$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F=-2(z^2+1)x+xyz$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F=-(z^2+1)y+2xyz$

(X) $\vec\nabla\cdot\vec F=2xyz$

Integral de superfície

(X) $\iint_S\vec F\cdot\vec n dS=0$

( ) $\iint_S\vec F\cdot\vec n dS=4$

( ) $\iint_S\vec F\cdot\vec n dS=8$

( ) $\iint_S\vec F\cdot\vec n dS=16$

( ) $\iint_S\vec F\cdot\vec n dS=24$

Solução: O divergente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial(-2(z^2+1)xy)}{\partial x} + \frac{\partial((z^2+1)y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial z} = -2(z^2+1)y + 2y(z^2+1) + 2xyz = 2xyz.$$

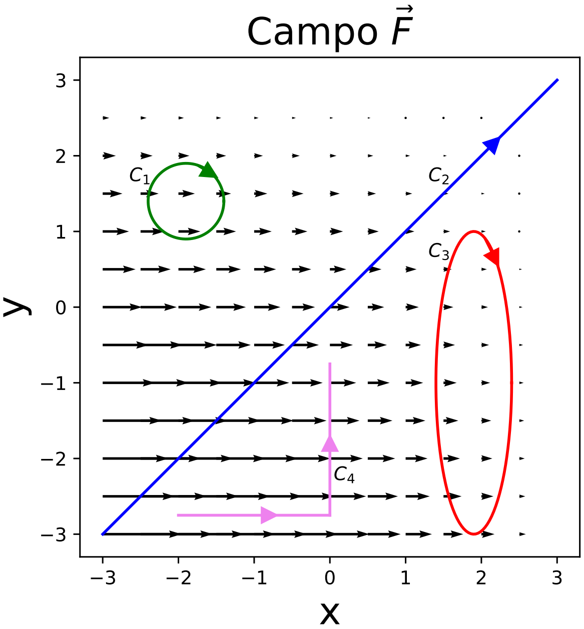
Como o campo é suave e a superfície é fechada e orientada para fora, usamos o Teorema da Divergência para calcular:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iiint_V 2xyzdV,$$

onde V é o cubo de lado 4. Temos:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} 2xyzdzdydx = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} xy\left[z^2\right]_{-2}^{2}dydx = \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} xy\left[2^2-(-2)^2\right]dydx = 0.$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z=0$ de um campo $\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i}$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também a esfera S_1 centrada na origem, raio 2 e orientada para fora e o plano S_2 dado por $x=0$, $-2\le y\le 2$, $-2\le z\le 2$, orientado no sentido de $\vec{i}$.
Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

- ( ) $\int_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} > 0$
- ( ) $\int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
- ( ) $\int_{C_4}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$
- (X) $\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} < 0$
- ( ) $\int_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} > \int_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

- ( ) $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS = 0$
- ( ) $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS > \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS > 0$
- (X) $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS < 0$
- ( ) $\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS < 0$
- ( ) $\iint_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}dS > \iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}dS = 0$

Curvatura:

- ( ) A curvatura é uma constante para cada curva.
- ( ) A curvatura é zero para C_1 e C_2.
- ( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3
- (X) Os pontos de maior curvatura estão sobre a curva C_3
- ( ) A curvatura sobre C_2 cresce da esquerda para direita.

Rotacional:

- ( ) $\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{k} > 0$ em todos os pontos.
- (X) $\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{k} < 0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{k} = 0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{i} > 0$ em todos os pontos
- ( ) $\nabla\times\vec{F}\cdot\vec{j} > 0$ em todos os pontos

• **Questão 5** (1.0 ponto) Sejam a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente. Prove algebricamente a expressão dada por:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração. Faça uma interpretação geométrica.

Solução:

$$\begin{aligned}
\|\vec{a}\|^2 &= \vec{a}\cdot\vec{a}\\
&= (a_T\vec{T}+a_N\vec{N})\cdot(a_T\vec{T}+a_N\vec{N})\\
&= a_T\vec{T}\cdot a_T\vec{T} + a_T\vec{T}\cdot a_N\vec{N} + a_N\vec{N}\cdot a_T\vec{T} + a_N\vec{N}\cdot a_N\vec{N}\\
&= a_T^2\|\vec{T}\|^2 + a_N^2\|\vec{N}\|^2\\
&= a_T^2 + a_N^2
\end{aligned}$$

A interpretação geométrica se dá pelo teorema de Pitágoras, sendo $\vec{a}$ um vetor no plano formado por $\vec{T}$ e $\vec{N}$, a_T e a_N são as medidas dos catetos e $\|\vec{a}\|$ a medida da hipotenusa.

• **Questão 6** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \frac{y^2}{2}\vec{k}$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z = 1-x^2-y^2$, $z\ge 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z = 1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$, ambas orientada no sentido positivo do eixo z.

a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

$$\iint_{S_1}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS$$

e

$$\iint_{S_2}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar o teoremas de Stokes).

b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a).

c) (0.5) Usando o resultado do item a) e o teorema do Stokes, é possível calcular o valor da integral

$$\iint_D\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\cdot\vec{n}dS.$$

onde D é disco unitário no plano xy dado por $z=0$, $x^2+y^2\le 1$?

Solução: a) Primeiro vamos calcular o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, calculamos o vetor normal a cada superfície fazendo $G_1 = z + x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $G_2 = z + \sqrt{x^2+y^2} - 1$. Temos

$$\vec{\nabla} G_1 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Logo, sendo C o círculo unitário no plano xy, temos:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C (y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) dA \\ &= \iint_C (4xy+1) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4\rho\cos(\theta)\rho\operatorname{sen}(\theta) + 1)\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\rho^3 \operatorname{sen}(2\theta) + \rho\right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{4} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{8} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) + 1\right) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho \operatorname{sen}(2\theta) + \rho\right) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\ &= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

b) Observe que o círculo unitário C limita as duas superfícies, S_1 e S_2. O teorema de Stokes nos dá

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Logo,

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

c) A superfície D é limitada por C. Portanto,

$$\iint_{S_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \pi.$$