

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = 1 - 2\cos(2t) - 2\sin(2t) + \cos(3t) - 3\sin(3t)$$

e sua expansão em série de Fourier em que w_1 é a frequência fundamental. Sobre a função $f(t)$ e os coeficientes da sua série de Fourier, responda:

Frequência fundamental

☐ $w_1 = 1/2$

☒ $w_1 = 1$

☐ $w_1 = 2$

☐ $w_1 = 3$

☐ $w_1 = 4$

Fase de C_2

☐ $\phi_2 = \frac{\pi}{4}$

☐ $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$

☒ $\phi_2 = \frac{3\pi}{4}$

☐ $\phi_2 = \tan^{-1}(3)$

☐ $\phi_2 = \tan^{-1}(3) + \pi$

Solução:

Módulo de C_2

☐ $|C_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $|C_2| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

☒ $|C_2| = \sqrt{2}$

☐ $|C_2| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

☐ $|C_2| = 2$

Potência Média $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$

☐ $\bar{P}_f = 3$

☐ $\bar{P}_f = 6$

☐ $\bar{P}_f = 9$

☒ $\bar{P}_f = 10$

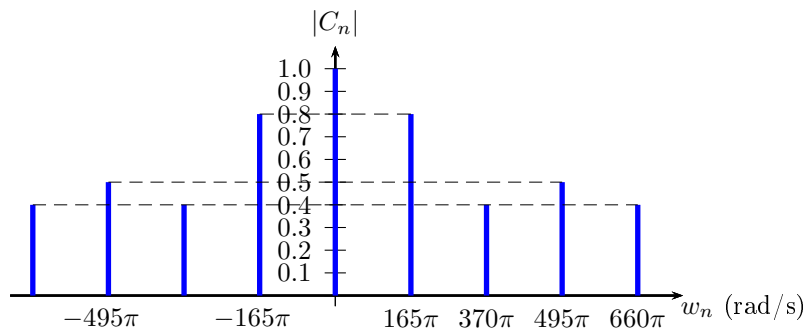
☐ $\bar{P}_f = 15$

$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i, \quad |C_2| = \sqrt{2}, \quad \phi_2 = \frac{3\pi}{4}.$$

$$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = \frac{1 + 3i}{2}, \quad |C_3| = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\bar{P}_f = |C_0|^2 + 2|C_2|^2 + 2|C_3|^2 = 1 + 4 + 5 = 10$$

• **Questão 2** (1.0 pontos) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota Mi 2 (82,5 Hz) dada pelo sinal real $f(t)$.



O diagrama de espectro de fase do sinal $f(t)$ é zero para frequência $w_0 = 0$ e $-\frac{\pi}{2}$ para todas as frequências positivas. Responda os itens corretamente:

Nota produzida por $g(t) = f(3t)$

- () Lá 2
() Lá 3
() Mi 4
(X) Si 3
() Si 5

Série de Fourier trigonométrica de $f(t)$

- () $f(t) = 1 + 0,8 \cos(165\pi t) + 0,4 \cos(370\pi t) + 0,5 \cos(495\pi t) + 0,4 \cos(660\pi t)$
() $f(t) = 1 + 0,8 \sin(165\pi t) + 0,4 \sin(370\pi t) + 0,5 \sin(495\pi t) + 0,4 \sin(660\pi t)$
() $f(t) = \frac{1}{2} + 0,8 \sin(165\pi t) + 0,4 \sin(370\pi t) + 0,5 \sin(495\pi t) + 0,4 \sin(660\pi t)$
() $f(t) = 1 + 1,6 \cos(165\pi t) + 0,8 \cos(370\pi t) + \cos(495\pi t) + 0,8 \cos(660\pi t)$
(X) $f(t) = 1 + 1,6 \sin(165\pi t) + 0,8 \sin(370\pi t) + \sin(495\pi t) + 0,8 \sin(660\pi t)$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Seja $f(t) = e^{-t^2}$, $g(t) := \mathcal{F}^{-1}\{F(w+2) + F(w-2)\}$, $h(t) := \mathcal{F}^{-1}\left\{G\left(\frac{w}{2}\right)\right\}$ e $p(t) = f(t)e^{3t}$, onde $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ e $P(w) = \mathcal{F}\{p(t)\}$. Responda corretamente.

$g(2)$

☐ $g(2) = e^{-4}$

☐ $g(2) = e^{-4} \cos(2)$

☐ $g(2) = e^{-2} \cos(2)$

☒ $g(2) = 2e^{-4} \cos(4)$

☐ $g(2) = 2e^{-4}$
 $F(w)$

☐ $F(w) = \pi e^{-w^2/2}$

☐ $F(w) = e^{-w^2}$

☐ $F(w) = e^{-w^2/4}$

☐ $F(w) = \sqrt{\pi} e^{-w^2}$

☒ $F(w) = \sqrt{\pi} e^{-w^2/4}$

Solução:

$h(3)$

☐ $h(3) = 2e^{-9} \cos(6)$

☒ $h(3) = 4e^{-36} \cos(12)$

☐ $h(3) = 4e^{-36} \cos(6)$

☐ $h(3) = e^{-9} \cos(6)$

☐ $h(3) = 2e^{-18} \cos(12)$
 $P(w)$

☐ $P(w) = \sqrt{\pi} e^{-(w+3)^2/4}$

☒ $P(w) = \sqrt{\pi} e^{-(w+3i)^2/4}$

☐ $P(w) = e^{-(w+3)^2/2}$

☐ $P(w) = e^{-(w-3i)^2/4}$

☐ $P(w) = \sqrt{\pi} e^{-(w-3i)^2/4}$

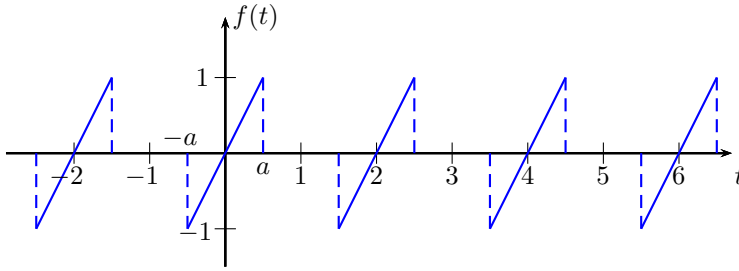
$$g(t) = 2f(t) \cos(2t) = 2e^{-|t|^2} \cos(2t)$$

$$h(t) = 2g(2t) = 4e^{-|2t|^2} \cos(4t)$$

$$F(w) = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(wt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-w^2/4}$$

$$P(w) = F(w + 3i)$$

- **Questão 4** (3.0 ponto) Considere a função periódica de período $T = 2$ cujo gráfico é esboçado abaixo:



Aqui a é uma constante positiva menor que 1. Escreva esta função em séries de Fourier na seguinte forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\pi n t) + b_n \sin(\pi n t)],$$

Trace o diagrama de amplitudes e o de fase quando $a = 1/2$ com pelo menos duas raízes positivas e duas negativas.

Solução:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt, \quad w_n = \frac{2\pi n}{T} \\ &= \int_{-a}^a f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{a} \int_0^a t \sin(w_n t) dt \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin(w_n t) - w_n t \cos(w_n t)}{w_n^2} \right) \Big|_0^a \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin(w_n a) - w_n a \cos(w_n a)}{w_n^2} \right) \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin(\pi n a) - \pi n a \cos(\pi n a)}{\pi^2 n^2} \right) \end{aligned}$$

Assim:

$$f(t) = \frac{2}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(\pi n a) - \pi n a \cos(\pi n a)}{n^2} \right) \sin(\pi n t).$$

Assim para $a = 1/2$

$$C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} = i \frac{\pi n \cos(\pi n/2) - 2 \sin(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$$

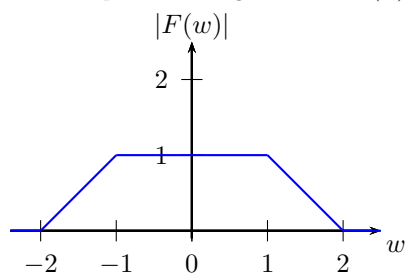
Portanto:

$$C_n = \begin{cases} \frac{i}{\pi n}, & n = 4k, \quad n \neq 0 \\ \frac{-2i}{\pi^2 n^2}, & n = 4k + 1 \\ \frac{-i}{\pi n}, & n = 4k + 2 \\ \frac{2i}{\pi^2 n^2}, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

Decompondo da forma amplitude e fase temos:

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{\pi n} e^{i\pi/2}, & n = 4k, \quad n \neq 0 \\ \frac{2}{\pi^2 n^2} e^{-i\pi/2}, & n = 4k + 1 \\ \frac{1}{\pi n} e^{-i\pi/2}, & n = 4k + 2 \\ \frac{2}{\pi^2 n^2} e^{i\pi/2}, & n = 4k + 3 \end{cases}$$

- **Questão 7** (2.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função que possui transformada de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce o diagrama de magnitudes de $g(t) = f\left(\frac{t}{2}\right) \cos(2t)$ e $h(t) = f'\left(\frac{t}{2}\right)$.

Vemos que $\mathcal{F}\{f(t/2)\} = 2F(2w)$ e $\mathcal{F}\{f(t/2) \cos(2t)\} = F(2w - 4) + F(2w + 4)$

Além disso, $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iwF(w)$ e $\mathcal{F}\{f'(t/2)\} = 2iwF(2w)$