

1 - 6	7	8	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real},$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad \begin{matrix} (m > 0, \\ n > 0) \end{matrix}$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

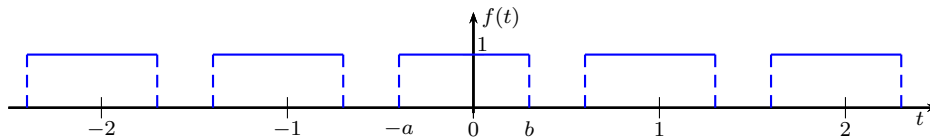
Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

- **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a função periódica de período $T = 1$ cujo gráfico é esboçado abaixo:

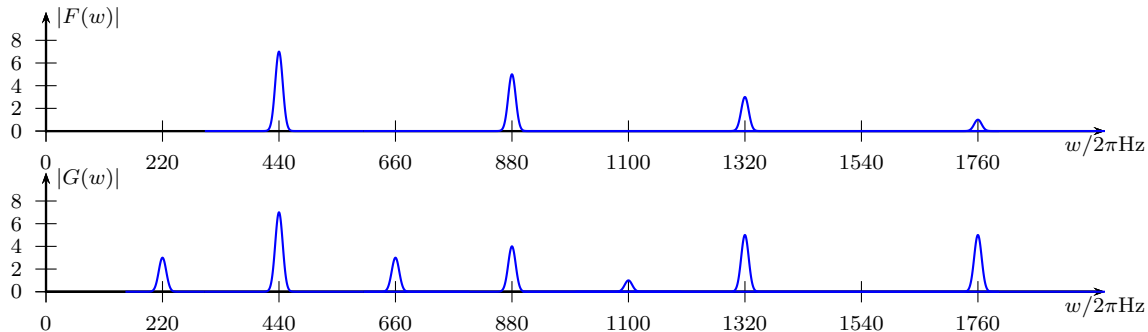


Onde a e b são constantes positivas e menores que $1/2$. Quando escrita em séries de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)],$$

podemos afirmar que:

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $\frac{a_0}{2} = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = -b$ e $n \geq 1$. | <input type="checkbox"/> $a_n = \frac{\sin(2\pi n a) - \sin(2\pi n b)}{\pi n}$ |
| <input type="checkbox"/> $a_0 = a + b$ e $a_n = 0$ quando $a = -b$ e $n \geq 1$. | <input type="checkbox"/> $a_n = \frac{\cos(2\pi n a) - \cos(2\pi n b)}{\pi n}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $\frac{a_0}{2} = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = b$ e $n \geq 1$. | <input type="checkbox"/> $a_n = \frac{\cos(2\pi n a) + \cos(2\pi n b)}{\pi n}$ |
| <input type="checkbox"/> $a_0 = a + b$ e $b_n = 0$ quando $a = b$ e $n \geq 1$. | <input checked="" type="checkbox"/> $a_n = \frac{\sin(2\pi n a) + \sin(2\pi n b)}{\pi n}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{a_0}{2} = a$ e $a_n = 0$ quando $b = 0$ e $n \geq 1$. | <input type="checkbox"/> Nenhuma das anteriores. |
| <input type="checkbox"/> Nenhuma das anteriores. | |
- **Questão 2** (1.0 pontos) As funções $f(t)$ e $g(t)$ modelam sinais de áudio e seus diagramas de espectro de amplitudes são dados abaixo.



Sabendo que

$$h(t) = f(3t), \quad E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt, \quad E_h = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt,$$

assinale as alternativas corretas.

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 3. | |
| <input type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 4. | <input checked="" type="checkbox"/> $E_h = E_f/3$. |
| <input type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Ré e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 6. | <input type="checkbox"/> $E_h = 3E_f$. |
| <input checked="" type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 3. | <input type="checkbox"/> $E_h = E_f$. |
| <input type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 4. | <input type="checkbox"/> Nenhuma das anteriores. |
| <input type="checkbox"/> $h(t)$ modela um Mi e $f(x) + g(x)$ modela um Lá 6. | |

Solução do segundo item:

Vemos que $H(w) = \frac{1}{3}F(w/3)$

$$\begin{aligned} E_h &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w/3)/3|^2 dw \\ &= \frac{1}{6\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du \\ &= \frac{1}{3} E_f. \end{aligned}$$

Onde se substituiu $u = w/3$.

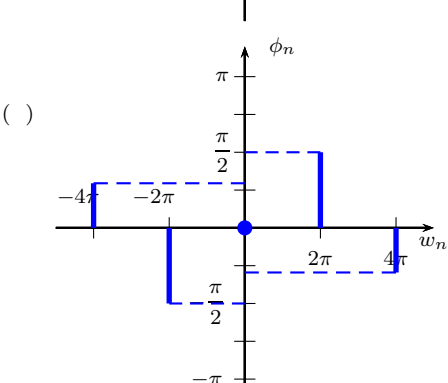
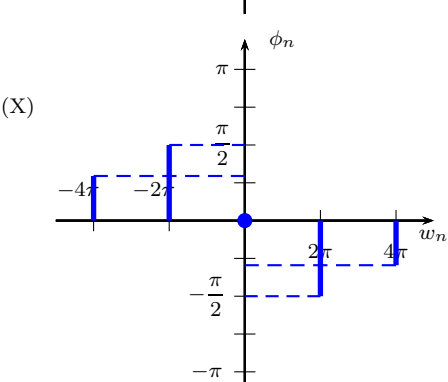
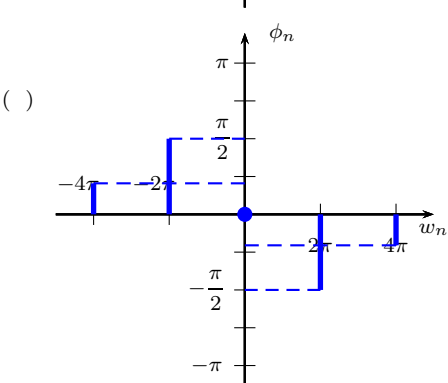
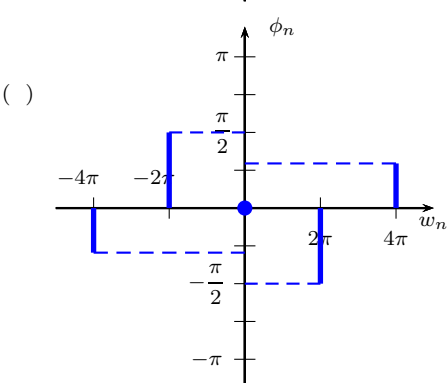
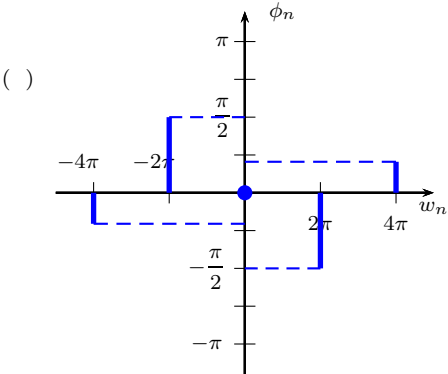
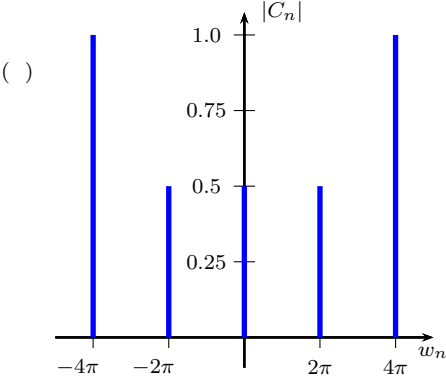
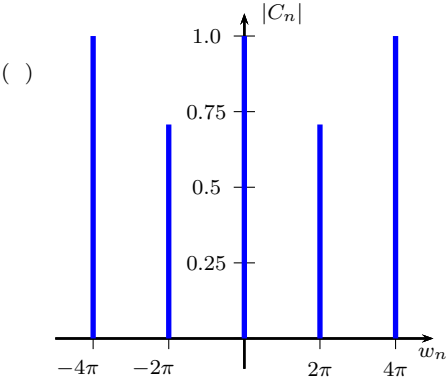
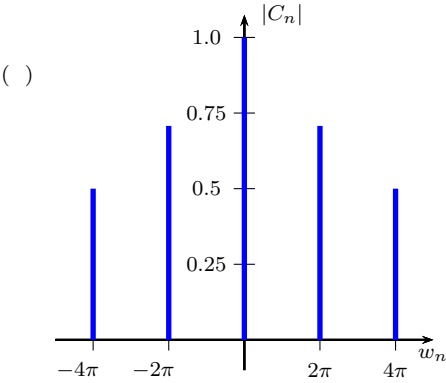
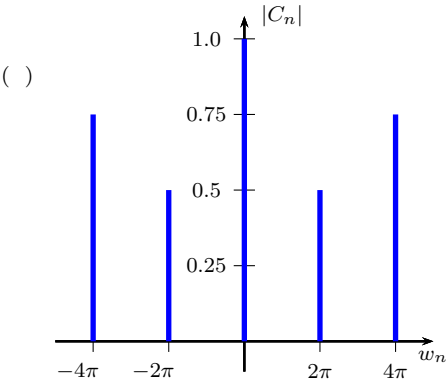
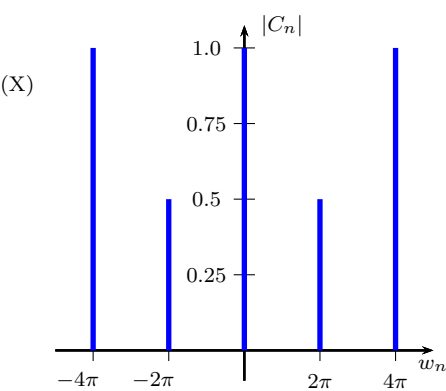
- **Questão 3** (1.0 ponto) Considere

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

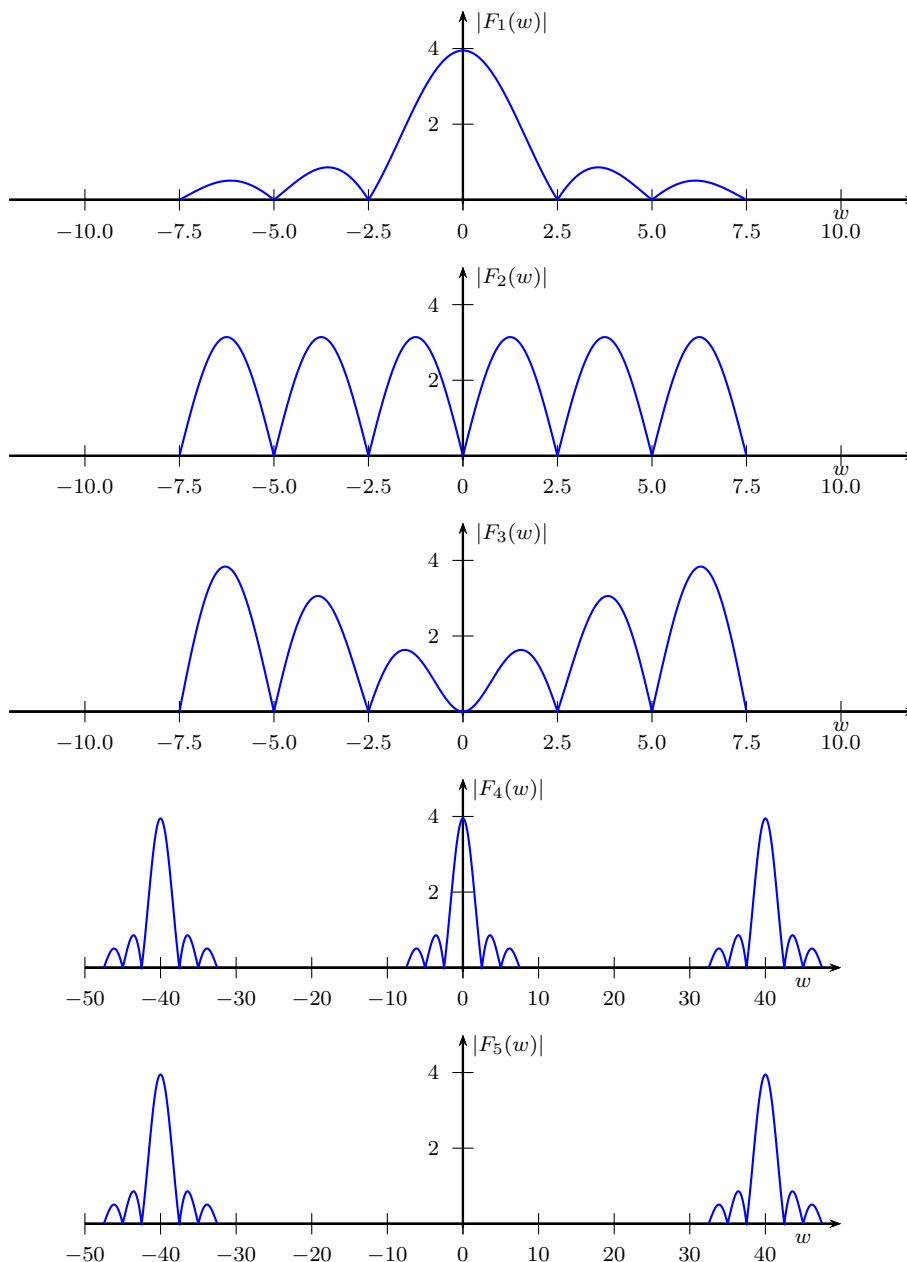
Assinale na primeira coluna $\mathcal{F}\{f(t) + f(-t)\}$ e, na segunda, $\mathcal{F}\{f(t) - f(-t)\}$.

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{1+iw}{1+w^2}$ | <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{2}{1+w^2}$ |
| <input checked="" type="checkbox"/> $F(w) = \frac{2}{1+w^2}$ | <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{1+iw}{1+w^2}$ |
| <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{1-iw}{1+w^2}$ | <input checked="" type="checkbox"/> $F(w) = -\frac{2iw}{1+w^2}$ |
| <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{-2iw}{1+w^2}$ | <input type="checkbox"/> $F(w) = \frac{1-iw}{1+w^2}$ |
| <input type="checkbox"/> Nenhuma das anteriores. | <input type="checkbox"/> Nenhuma das anteriores. |

• **Questão 4** (1.0 pontos) Considere a função $f(t) = 1 + \sin(2\pi t) + \frac{8}{5} \sin(4\pi t) + \frac{6}{5} \cos(4\pi t)$. Assinale na primeira coluna o diagrama de espectro do módulo e, na segunda, o diagrama de espectro da fase.



• **Questão 5** (2.0 pontos) Considere os diagrama de espectro de magnitudes das Transformadas de Fourier das funções $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ e $f_4(t)$ dados nos gráficos abaixo.



• **Questão 5a** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indiquem relações compatíveis com os diagramas dados.

- ☐ $f'_1(t) = f_3(t)$ (X) $f_4(t) = f_1(t)(1 + 2\cos(40t))$
☒ $f'_1(t) = f_2(t)$ () $f_4(t) = f_1(t)(1 + \cos(40t))$
☐ $f'_2(t) = f_1(t)$ () $f_4(t) = 2f_1(t)\cos(40t)^2$
☐ $f'_3(t) = f_1(t)$ () $f_4(t) = 2f_1(t)\cos(20t)^2$

• **Questão 5b** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indiquem relações compatíveis com os diagramas dados.

- (X) $f_1(t) * f_5(t) = 0$
() $f_1(t) * f_1(t) = f_2(t)$
() $f_1(t) * f_2(t) = f_3(t)$
() $f_4(t) * f_5(t) = f_1(t)$
() Nenhuma das anteriores.
- () $f_4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)f(kT_a), \quad T_a = 15/\pi$
() $f_5 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)f(kT_a), \quad T_a = 15/\pi$
() $f_4 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)f(kT_a), \quad T_a = \pi/15$
() $f_5 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_a)f(kT_a), \quad T_a = \pi/15$
(X) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 6** (1.0 pontos) Resolva o seguinte problema de difusão de calor e trace um gráfico esboçando a evolução do perfil de temperatura $u(x, t)$ com o tempo.

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - 2u_{xx}(x, t) - u_x(x, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= 1000\delta(x + 1).\end{aligned}$$

Solução: Aplicamos a transformada de Fourier na variável x , obtemos a seguinte expressão para a equação transformada

$$U_t(k, t) - (ik)U(k, t) - 2(ik)^2U(k, t) = 0$$

onde foi usada a propriedade da derivada. A condição inicial se torna:

$$U(k, 0) = 1000 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x + 1)e^{-ikx} dx = 1000e^{ik}$$

Portanto temos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}U_t(k, t) &= (-2k^2 + ik)U(k, t) \\ U(k, 0) &= 1000e^{ik}\end{aligned}$$

cuja solução é

$$U(k, t) = 1000e^{ik}e^{(-2k^2 + ik)t} = 1000e^{ik(t+1)}e^{-2k^2t}$$

A multiplicação por $e^{ik(t+1)}$ indica um deslocamento no eixo x . Logo precisamos calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_x^{-1}\{e^{-2k^2t}\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2k^2t} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-2k^2t} \cos(kx) dk \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{8t}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{8t}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, t) = \frac{500}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x+t+1)^2}{8t}}$$

• **Questão 7** (3.0 pontos) Considere a função $h(t) = \cos(w_0 t)e^{-at^2}$ onde a é uma constante positiva.

a) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Fourier $F(w)$ quando $f(t) = e^{-at^2}$ onde a é uma constante positiva.

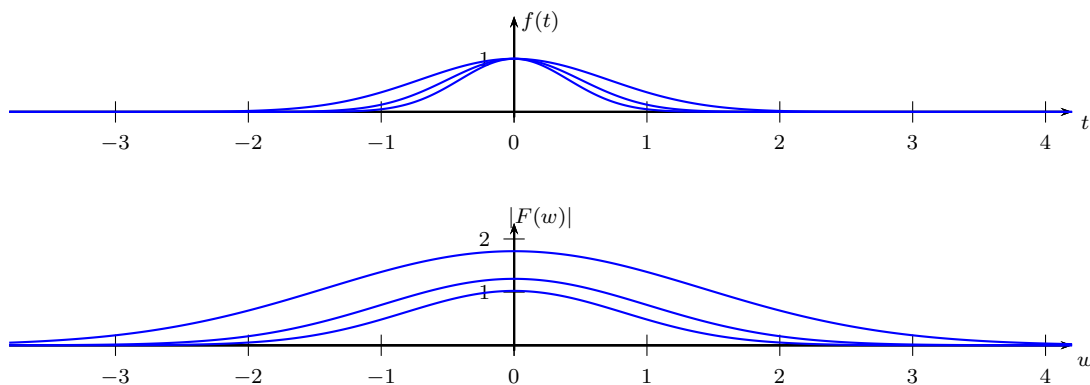
b) (1.0 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$ e $|F(w)|$ para $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.

c) (1.0 ponto) Calcule $H(w)$ e esboce os gráficos de $h(t)$ e $|H(w)|$ para $a = 1$ e $w_0 = 10$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-iwt} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cos(wt) dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}.\end{aligned}$$

Solução: b)



Solução: c)

$$H(w) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(w-10)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(w+10)^2}{4}}$$

