

1 - 3	4	5	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades

$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo $s$	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo $t$	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolação	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem $\nu$	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left( \frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + \frac{\lambda x \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} - \frac{\lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \operatorname{sen}(wx) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \operatorname{sen}(wx) - w \cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	$t$
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	$e^{at}$
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$te^{at}$
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \text{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \text{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \text{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \text{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\text{sen}(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \text{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\text{sen}(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\text{sen}(at) \cosh(at) - \cos(at) \text{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \text{sen}(at) \text{senh}(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\text{senh}(at) - \text{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \text{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \text{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \text{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) =  \text{sen}(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função  $f(t)$  dada por:

$$f(t) = u(t) + tu(t-1) + g(t)u(t-2)$$

Sabe-se que  $f(t)$  é dada por partes como:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & 0 < t < 1, \\ f_2(t), & 1 < t < 2, \\ 2, & t > 2. \end{cases}$$

Em que  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  são funções definidas nos respectivos intervalos e  $g(t)$  está definida para  $t \geq 0$ . Marque as alternativas que apresentam expressões para  $f_2(t)$ ,  $g(t)$ ,  $I := \int_0^3 f(t)^2 dt$  e  $F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}$ .

- |   |   |                                     |  |
|---|---|-------------------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> $f_2(t) = t$     | <input type="checkbox"/> $g(t) = 1$     | <input type="checkbox"/> $I = 46/3$ | <input type="checkbox"/> $F(s) = \frac{s + e^{-s} - e^{-2s}}{s}$               |
| <input type="checkbox"/> $f_2(t) = t - 1$ | <input type="checkbox"/> $g(t) = 2$     | <input type="checkbox"/> $I = 34/3$ | <input type="checkbox"/> $F(s) = \frac{s^2 + (1+s)e^{-s} - (1+s)e^{-2s}}{s^3}$ |
| <input type="checkbox"/> $f_2(t) = t + 1$ | <input type="checkbox"/> $g(t) = t - 1$ | <input type="checkbox"/> $I = 19/3$ | <input type="checkbox"/> $F(s) = \frac{s + (1+s)e^{-s} - (1+s)e^{-2s}}{s^2}$   |
| <input type="checkbox"/> $f_2(t) = 1 - t$ | <input type="checkbox"/> $g(t) = t + 1$ | <input type="checkbox"/> $I = 5/3$  | <input type="checkbox"/> $F(s) = \frac{s + e^{-s} - e^{-2s}}{s^2}$             |
| <input type="checkbox"/> N.D.A.           | <input type="checkbox"/> $g(t) = 1 - t$ | <input type="checkbox"/> $I = 1/3$  | <input type="checkbox"/> $F(s) = \frac{s + e^{-s} + (s-1)e^{-2s}}{s^2}$        |
|   |   | <input type="checkbox"/> N.D.A.     |  |

- **Questão 2** (0.5 cada item) Seja  $\alpha = \ln(2)$ ,  $f(t) = u(t - \alpha) - u(t - 3\alpha)$  e  $x(t)$  satisfaz o problema:

$$ax(t) + \int_0^t x(\tau) d\tau = af(t)$$

Assinale as alternativas que apresentam o valor de  $x(2\alpha)$  e a valor do salto dado por  $\lim_{t \rightarrow 3\alpha+} x(t) - \lim_{t \rightarrow 3\alpha-} x(t)$  para  $t \geq 3$ , respectivamente.

$x(2\alpha)$

$$\lim_{t \rightarrow 3\alpha+} x(t) - \lim_{t \rightarrow 3\alpha-} x(t)$$

( )  $2^{-2a}$

( ) 2

( )  $2^{-a}$

( ) 1

( ) 1

( ) -1

( )  $2^a$

( ) -2

( )  $2^{2a}$

( ) -3

• **Questão 3** (0.5 cada item) Considere a função  $f(t)$  dada pela expressão:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

Assinale abaixo expressões em termos das funções Delta de Dirac e Heavisides para  $f(t)$  e  $g(t) = f'(t)$  e expressões para as transformadas de Laplace  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  e  $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$ .

$f(t)$  ☐  $(1 - t^2)u(t - 1) + (1 + t^2)u(t - 3)$

$g(t) = f'(t)$  ☐  $\delta(t) - tu(t) + tu(t - 1) + \delta(t - 3)$

☐  $(1 - t^2)u(t) + 2u(t - 3)$

☐  $\delta(t) + 2tu(t) - 2tu(t - 1)$

☐  $(1 - t^2)u(t) + (t^2 - 1)u(t - 1) + 2u(t - 3)$

☐  $\delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t - 1)$

☐  $(1 - t^2)u(t) - (t^2 - 1)u(t - 1) + 2u(t - 3)$

☐  $\delta(t) - 2tu(t) + 2tu(t - 1) + 2\delta(t - 3)$

☐  $(1 - t^2)u(t - 1) + (t^2 - 1)u(t - 3)$

☐  $\delta(t) - 2tu(t) + 2\delta(t - 3)$

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$

$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f'(t)\}$ :

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^2}$

☐  $\frac{s - 2 + 2(1 + s)e^{-s} - 2s^2e^{-3s}}{s^3}$

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s}$

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^3}$

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^3}$

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s}$

☐  $\frac{s - 2 + 2(1 + s)e^{-s} - 2s^2e^{-3s}}{s^2}$

☐  $\frac{s - 2 + 2(1 + s)e^{-s} - 2s^2e^{-3s}}{s^2}$

☐  $\frac{s - 2 + 2(1 + s)e^{-s} - 2s^2e^{-3s}}{s^3}$

☐  $\frac{s^2 - 2 + 2(1 + s)e^{-s} + 2s^2e^{-3s}}{s^2}$

• **Questão 4** (0.5 cada item + 1.0 pelos gráficos e tabela, todo desenvolvimento é avaliado.) Considere o problema:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln(3)}y'(t) + y(t) &= 1 + u(t - 1), \quad 0 \leq t \leq 2 \\ y(0) &= y_0, \quad y(2) = 2. \end{aligned}$$

Assinale as alternativas corretas, complete a tabela e trace os gráficos de  $y(t)$  e  $y'(t)$ , indicando eixos e valores notáveis. Use  $\sqrt{3} \approx 1,7$ .

- ☐  $y(1/2) + y(3/2) = 3 + \sqrt{3}$ 
☐  $y_0 = 1$

☐  $y(1/2) + y(3/2) = 3 - \sqrt{3}$ 
☐  $y_0 = 2$

☐  $y(1/2) + y(3/2) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ 
☐  $y_0 = 3$

☐  $y(1/2) + y(3/2) = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$ 
☐  $y_0 = 4$

☐ N.D.A.
☐ N.D.A.

$t$	$y(t)$	$y'(t)$
1/2		
$\lim_{t \rightarrow 1-}$		
$\lim_{t \rightarrow 1+}$		
3/2		

• **Questão 5** (3.0 pontos) A temperatura numa sala climatizada evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\lambda(v(t) - v_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde  $v(t)$  representa a temperatura medida,  $v_{amb}$  é temperatura ambiente,  $q(t)$  é a potência de um aquecedor e  $\lambda$  é uma constante relacionada às trocas de calor. Suponha também que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que procura ajustar a potência  $q(t)$  de forma que a temperatura medida se mantenha próxima de zero grau Celcius. O sistema de controle automático é regido pela seguinte equação:

$$q(t) = -\epsilon \frac{dq(t)}{dt} - K_p v(t) - K_d \frac{dv(t)}{dt} \tag{2}$$

Considere  $\epsilon = 1/2$ ,  $K_p = 4$ ,  $K_d = 2$ ,  $\lambda = 2$ ,  $v_{amb} = -10$ ,  $v(0) = 0$ ,  $q(0) = -1$

- a) (1.0) Encontre  $V(s) := \mathcal{L}\{v(t)\}$ . Expresse como uma função racional cujo demoninador é um polinômio cúbico
- b) (1.0) Encontre  $v(t)$ .
- c) (1.0) Calcule  $v_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$  e  $q_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$ .

**Obs:** Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento também será avaliado.

$V(s) =$	
$v(t) =$	
$v_\infty =$	$q_\infty =$