

1 - 3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____ Turma: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolação	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}d\hat{s}$

Séries:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + \frac{\lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda^2} - \frac{\lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \sin(w x) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \sin(w x) - w \cos(w x))}{\lambda^2 + w^2}$

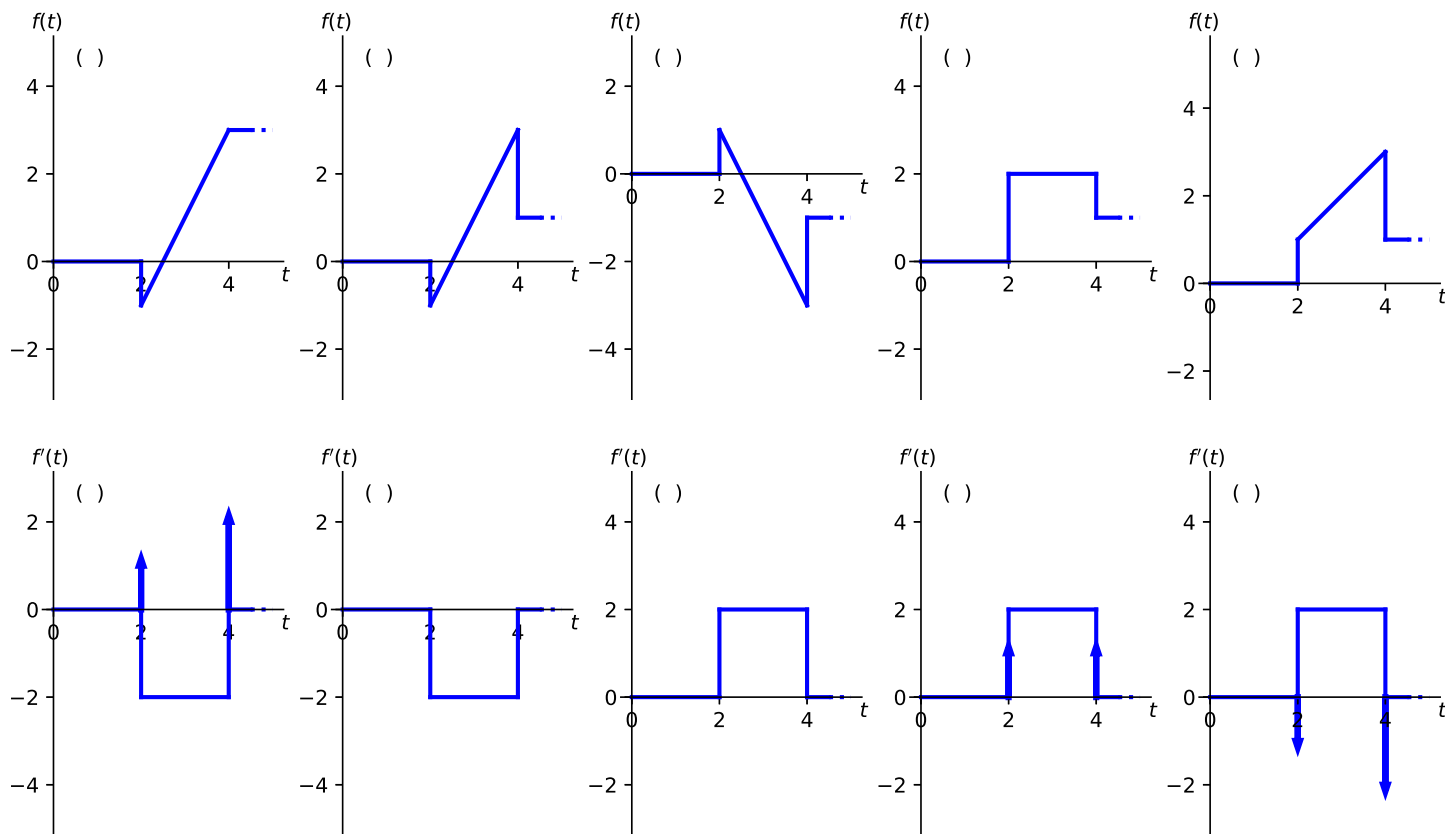
Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \sin(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \sin(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \sin(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\sin(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \sin(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\sin(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\sin(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \sin(at) \sinh(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh(at) - \sin(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \sin(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \sin(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada na expressão abaixo. Na primeira linha de gráficos, marque a opção que apresenta um esboço de $f(t)$. Na segunda linha, marque a alternativa que apresenta o esboço do gráfico de $f'(t)$. Na primeira coluna abaixo dos gráficos, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $f(t)$. E, na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $f'(t)$.

$$f(t) = (2t - 5)u(t - 2) + (6 - 2t)u(t - 4).$$



$\mathcal{L}\{f(t)\}$:

() $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^3}$.

() $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^2}$.

() $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s^2}$.

() $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(2-5s)e^{-2s} + (6s-2)e^{-4s}}{s^2}$.

() $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(2-5s)e^{-2s} + (6s-2)e^{-4s}}{s^3}$.

$\mathcal{L}\{f'(t)\}$:

() $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{2e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s}$.

() $\mathcal{L}\{f'(t)\} = 2e^{-2s} - 2e^{-4s}$.

() $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(2-s)e^{-2s} - (2-s)e^{-4s}}{s}$.

() $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s}$.

() $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(2+s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^2}$.

- **Questão 2** (0.5 ponto por item) A velocidade de um bloco de massa m é modelada por:

$$m\dot{v}(t) + \gamma v(t) = 20\delta(t - 3) - 8\delta(t - 5).$$

onde $m = 2$ e o coeficiente de atrito é $\gamma = 3$. A velocidade inicial é nula. A força é devida a dois impactos muito rápidos que aconteceram em $t = 3$ e $t = 5$. Encontre a solução do sistema via transformada de Laplace e indique, repectivamente, a transformada $V(s)$ da solução, o valor de $v(4)$, o valor de $v(7)$ e o limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(t)$.

- | | | | |
|--|---|---|-------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\frac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{s(3s + 2)}$ | | | |
| <input type="checkbox"/> $\frac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{3s + 2}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-6}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-3}$ | <input type="checkbox"/> -2 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{s(2s + 3)}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-2/3}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-2}$ | <input type="checkbox"/> -1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{2s + 3}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-6} - 4e^{-8}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-7/2} - 4e^{-9/2}$ | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{20e^{-3s} - 8se^{-5s}}{s^2(2s + 3)}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-2/3} - 4e^{-8/3}$ | <input type="checkbox"/> $10e^{-6} - 4e^{-3}$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> 2 |

- **Questão 3** (0.5 ponto por item) Considere as seguintes funções:

i) $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 - 9s + 20} \right\}$	iii) $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{25s^2 + 20s + 4} \right\}$
ii) $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s^2 + 4s + 13} \right\}$	iv) $i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{125s}{25s^2 + 20s + 4} \right\}$

Assinale as alternativas corretas:

- | | | | |
|--|---|--|---|
| <input type="checkbox"/> $f(\ln(2)) = 64$ | <input type="checkbox"/> $g(\pi/2) = -e^{-\pi/2}$ | <input type="checkbox"/> $h(5) = \frac{e^{-2}}{5}$ | <input type="checkbox"/> $i(5/2) = -e^{-1}$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\ln(2)) = 96$ | <input type="checkbox"/> $g(\pi/2) = e^{-\pi/2}$ | <input type="checkbox"/> $h(5) = e^{-2}$ | <input type="checkbox"/> $i(5/2) = e^{-1}$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\ln(2)) = 112$ | <input type="checkbox"/> $g(\pi/2) = -e^{-\pi}$ | <input type="checkbox"/> $h(5) = e^{-2/5}$ | <input type="checkbox"/> $i(5/2) = 0$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\ln(2)) = 256$ | <input type="checkbox"/> $g(\pi/2) = e^{-\pi}$ | <input type="checkbox"/> $h(5) = \frac{e^{-2/5}}{5}$ | <input type="checkbox"/> $i(5/2) = e$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\ln(2)) = 272$ | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> $i(5/2) = -e$ |

• **Questão 4** (4.0 pontos) A temperatura em um refrigerador evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda(u(t) - u_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida, u_{amb} é temperatura ambiente, $q(t)$ é uma função negativa e é a potência do sistema e λ é uma constante relacionada às trocas de calor. Suponha também que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que procura ajustar a potência $q(t)$ de forma que a temperatura medida se aproxime da temperatura de ajuste. O sistema de controle automático é regido pela seguinte equação:

$$q(t) = K_p [u_a - u(t)] + K_i \int_0^t [u_a - u(\tau)] d\tau + K_d \frac{du(t)}{dt} \tag{2}$$

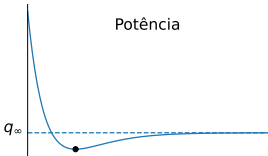
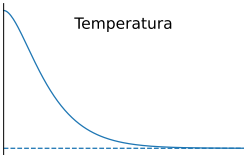
onde u_a é a temperatura de ajuste e K_p e K_i são constantes positivas. Considere $\lambda = 1$, $K_p = 1$, $K_d = 1/2$, $u(0) = 10$, $u_{amb} = 20$, $u_a = 0$. O sistema resultante é criticamente amortecido.

- a) (1.0) Transforme o sistema em uma única equação integro-diferencial para $u(t)$ da forma

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) + b \int_0^t u(\tau) d\tau = f(t)$$

e obtenha o valor de K_i para que o sistema satisfaça a condição de amortecimento dada.

- b) (0.5) Encontre uma expressão para $U(s)$.
- c) (1.0) Encontre expressões para $u(t)$ e $q(t)$. Não é necessário encontrar $Q(s)$.
- d) (0.5) Calcule $q(0)$ e $q_\infty := \lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$.
- e) (1.0) A potência $q(t)$ admite um único ponto estacionário t_* , isto é, $q'(t_*) = 0$. Calcule t_* e verifique que $t_* > 0$ e que se trata de um ponto de mínimo. Calcule o mínimo da potência, isto é, $q(t_*)$. Dica: Use o item anterior.



Obs: Aqui $u(t)$ é a temperatura, não é a função Heaviside. Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento será avaliado.

Equação:			$K_i =$
$U(s) =$		$u(t) =$	
		$q(t) =$	
$q(0) =$	$q_\infty =$	$t_* =$	$q_{min} =$