

1-6	7	8	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

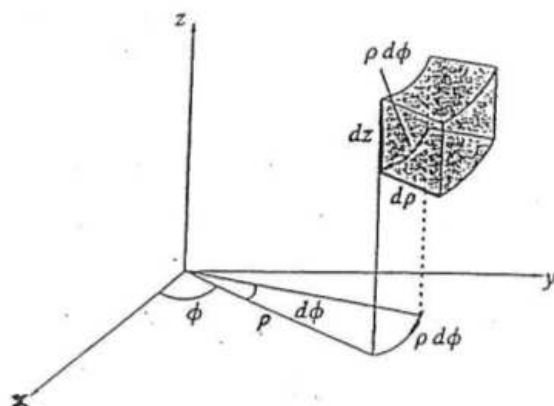
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

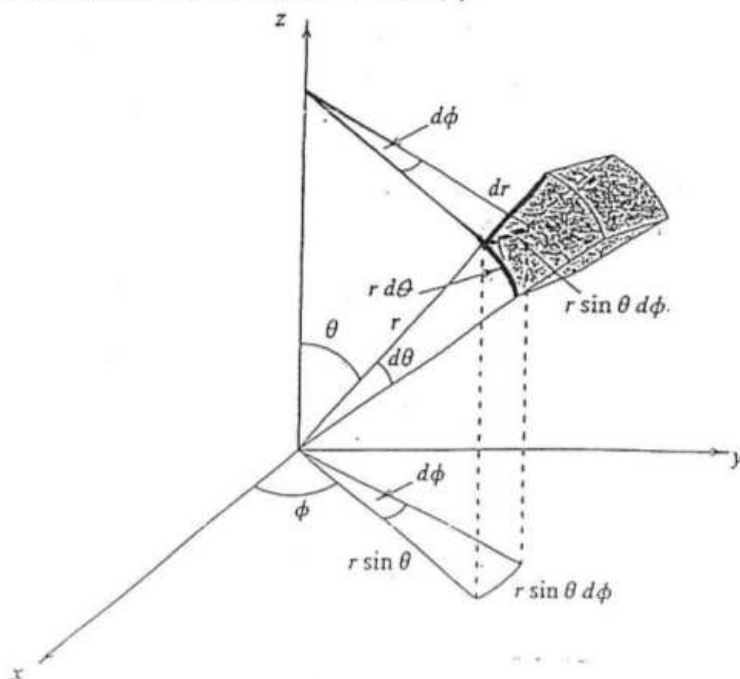
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



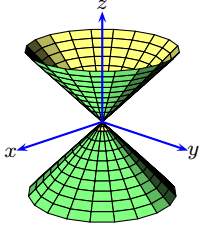
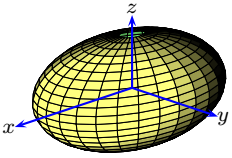
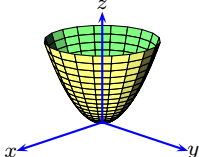
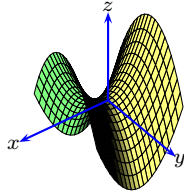
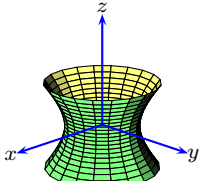
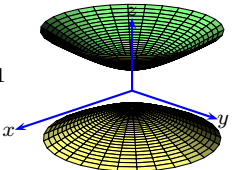
<p>Cone elíptico: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$</p> 	<p>Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 
<p>Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$</p> 	<p>Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$</p> 
<p>Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 	<p>Hiperbolóide de duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:

$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla} (f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla} (fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F} + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ <p>onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano</p>
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

• **Questão 1** (1.0 ponto) A curvatura da curva $y = 2x^2 + 1$ no ponto $(0, 1)$ é:

- ☐ 6.
- ☐ 5.
- ☐ 4.
- ☐ 3.
- ☐ 2.
- ☐ 1.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Dado o campo vetorial \vec{F} e o campo escalar f é correto afirmar que:

- ☐ $\vec{\nabla} f \times \vec{F} = (\vec{F} \times \vec{\nabla})f.$
- ☐ $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{F} \times \vec{\nabla} f + f(\vec{\nabla} \times \vec{F}).$
- ☐ $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0.$
- ☐ $\vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}).$
- ☐ $\vec{\nabla} \times (\vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \times \vec{F} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})\vec{\nabla} \times \vec{F}.$
- ☐ $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \vec{\nabla}^2 \vec{F}.$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = 2xy^3\vec{i} + (1 + 3x^2y^2)\vec{j} + \vec{k}$, a função potencial é:

- ☐ $\varphi(x, y) = z + x^2y^3 + y.$
- ☐ $\varphi(x, y) = 1 + x^2y^3 + y.$
- ☐ $\varphi(x, y) = 1 + x^2y^3 + 1.$
- ☐ $\varphi(x, y) = z + x^3y^2 + y.$
- ☐ $\varphi(x, y) = 1 + x^3y^2 + y.$
- ☐ $\varphi(x, y) = x^2y^3 + y.$

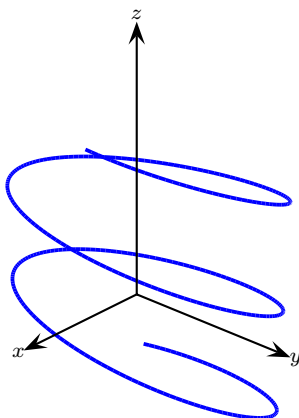
• **Questão 4** (1.0 ponto) O trabalho realizado pelo campo da questão 3 ao longo da reta que liga a origem até o ponto $P(1, 2, -1)$ é:

- ☐ 5.
- ☐ 6.
- ☐ 7.
- ☐ 8.
- ☐ 9.
- ☐ 10

• **Questão 5** (1.0 ponto) O fluxo do campo $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$ através da superfície dada pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$ orientada no sentido côncavo-convexo é

- () $-\frac{\pi}{3}$.
- () $-\frac{\pi}{6}$.
- () $-\frac{\pi}{12}$.
- () $\frac{\pi}{12}$.
- () $\frac{\pi}{6}$.
- () $\frac{\pi}{3}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Na figura abaixo é dada uma curva representada por um pedaço de uma hélice elíptica. É correto afirmar que:



- () A curva possui torção nula e curvatura positiva em todos os pontos.
- () A curva possui torção positiva e curvatura positiva em todos os pontos.
- () A curva possui torção negativa e curvatura positiva em todos os pontos.
- () A curva possui torção nula e curvatura nula em todos os pontos.
- () A curva possui torção positiva e curvatura nula em todos os pontos.
- () A curva possui torção negativa e curvatura nula em todos os pontos.
- () Não é possível saber o sinal da torção, pois a orientação positiva da curva não é informada.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial \vec{F} dado na figura 1 e marque verdadeiro, falso ou não sei. Observação: item respondido corretamente vale 0.2, item respondido incorretamente vale -0.2 e item marcado como não sei vale 0.0.

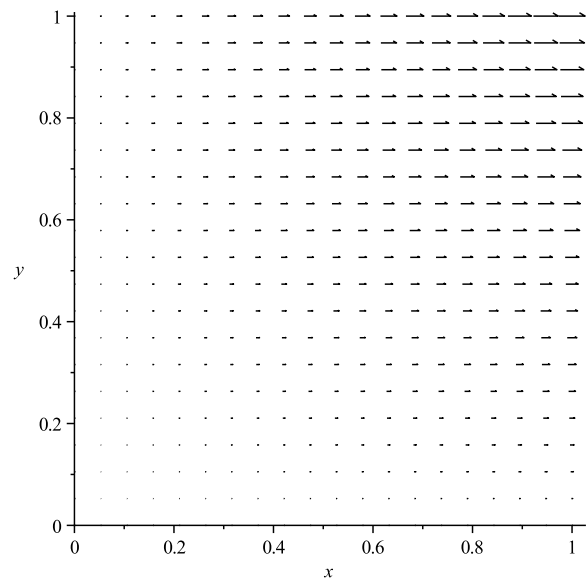


Figura 1: Campo vetorial \vec{F}

- i) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(0.4, 1) = 0$.
- ii) Se C é a reta que liga os pontos $(0.5, 0)$ e $(0.5, 1)$, então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
- iii) \vec{F} é um campo irrotacional.
- iv) \vec{F} é um campo central da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- v) Para $x > 0$ e $y > 0$, \vec{F} é da forma $\vec{F} = f(x, y)\vec{i}$, $f(x, y) \geq 0$.
- vi) Se $y = 0$, então $\vec{F}(x, y) = \vec{j}$.
- vii) Assumindo que os eixos x , y e z obedecem a regra da mão direita, então $\vec{\nabla} \times \vec{F} = g(x, y)\vec{k}$, onde $g \leq 0$.
- viii) O divergente de \vec{F} no ponto $(0, 0.2)$ é certamente nulo, pois $\vec{F} = \vec{0}$.
- ix) $\|\vec{F}(1, 1)\| > \|\vec{F}(0.5, 0.5)\|$.
- x) A integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é uma curva que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, independe de C .

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
i)			
ii)			
iii)			
iv)			
v)			

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
vi)			
vii)			
viii)			
ix)			
x)			

- **Questão 8** (2.0 pontos): Use o Teorema de Stokes para calcular o trabalho realizado pelo campo de força

$$\vec{F} = xz^2 \cos(y)\vec{i} + \cos(y)\vec{j} + \sin(yz)\vec{k}$$

ao deslocar uma partícula ao longo do quadrado contido no plano xz de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 0, 0)$ orientado no sentido anti-horário.