

1-6	7	8	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

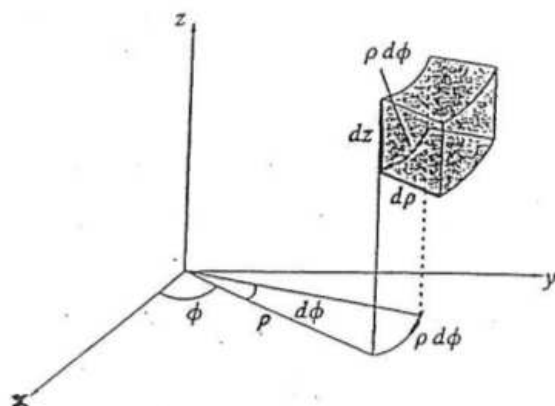
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

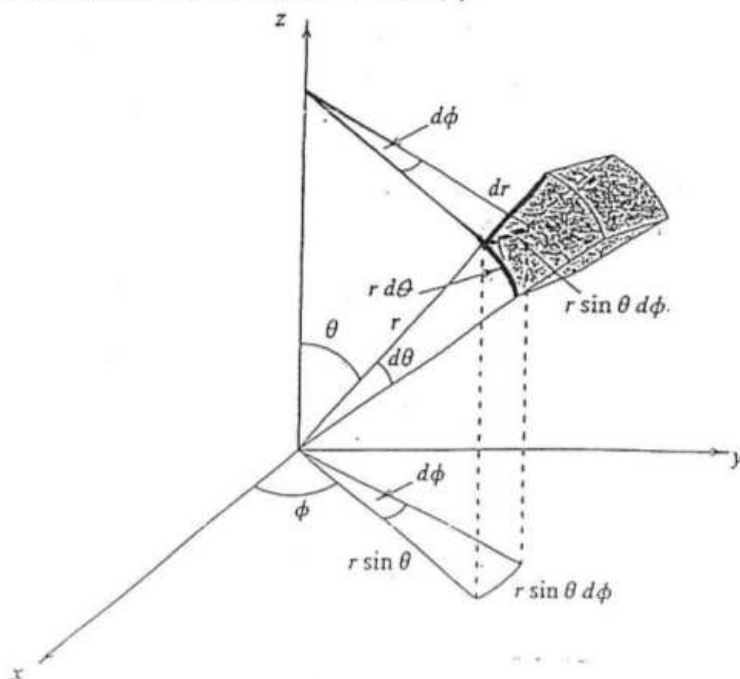
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



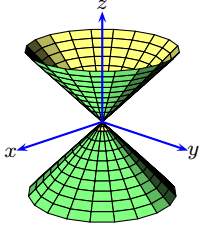
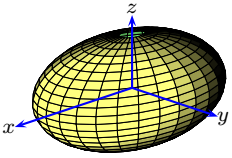
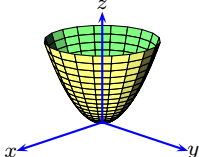
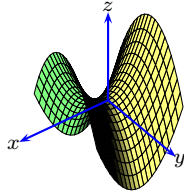
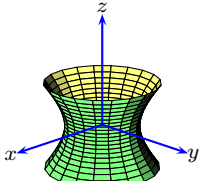
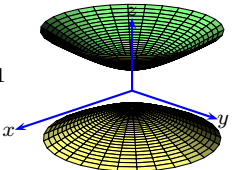
<p>Cone elíptico: $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$</p> 	<p>Elipsóide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 
<p>Parabolóide Elíptico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$</p> 	<p>Parabolóide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$</p> 
<p>Hiperbolóide de uma folha: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 	<p>Hiperbolóide de duas folhas: $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:

$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla} (f + g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla} (fg) = f \vec{\nabla} g + g \vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{F}) = (\vec{\nabla} f) \cdot \vec{F} + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f \vec{F}) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f \vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ <p>onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano</p>
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

• **Questão 1** (1.0 ponto) A vetor normal unitário em um ponto da curva $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é:

- () $\vec{N} = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$.
- () $\vec{N} = -\cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j}$.
- () $\vec{N} = -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$.
- () $\vec{N} = \cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j}$.
- () $\vec{N} = \sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$.
- () $\vec{N} = -\sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}$.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Dado um campo escalar $f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e o campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$, podemos afirmar que

- () $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$
- () $\vec{\nabla}^2 f = f''(r)$.
- () $\vec{\nabla} f = \vec{0}$
- () $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$
- () $\vec{\nabla}^2 \vec{F} = f''(r)\hat{r}$.
- () $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \neq \vec{\nabla}^2 \vec{F}$.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (e^y + ye^x)\vec{i} + (xe^y + e^x)\vec{j} + \vec{k}$, a função potencial é.

☐ $\varphi(x, y, z) = 1 + xe^y + ye^x$.

☐ $\varphi(x, y, z) = z + xe^y + ye^x$.

☐ $\varphi(x, y, z) = xe^y + ye^x$.

☐ $\varphi(x, y, z) = z^2 + xe^y + ye^x$.

☐ $\varphi(x, y, z) = z + e^y + e^x$.

☐ $\varphi(x, y, z) = 1 + e^y + e^x$.

• **Questão 4** (1.0 ponto) O trabalho realizado pelo campo do exercício 3 ao longo da curva $C : \vec{r} = t^3\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$ desde a origem até o ponto $P(1, 1, 1)$ é

☐ $1 + e$.

☐ $1 + 2e$.

☐ $1 + 3e$.

☐ $1 - e$.

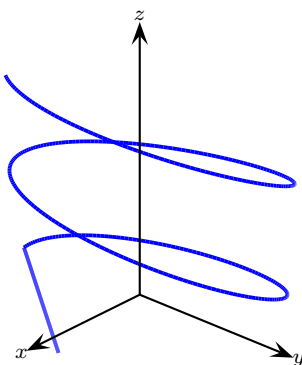
☐ $1 - 2e$.

☐ $1 - 3e$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) O fluxo do campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ através da superfície dada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ orientada no sentido côncavo-convexo é

- ☐ $\frac{\pi}{2}$.
- ☐ $\frac{\pi}{4}$.
- ☐ $\frac{\pi}{6}$.
- ☐ $-\frac{\pi}{6}$.
- ☐ $-\frac{\pi}{4}$.
- ☐ $-\frac{\pi}{2}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Na figura abaixo é dada uma curva representada por um pedaço de uma hélice elíptica conectada a um segmento de reta. É correto afirmar que:



- ☐ A curva é regular, isto é, $\vec{r}'(t)$ está bem definido em todos os pontos.
- ☐ Não é possível saber o sinal da torção em nenhum ponto da curva, pois o sentido positivo não é informado.
- ☐ A curva possui torção negativa e curvatura positiva em todos os pontos.
- ☐ A curva possui torção positiva e curvatura positiva em todos os pontos.
- ☐ A torção é sempre estritamente negativa, exceto em um único ponto.
- ☐ A curvatura é nula em um conjunto infinito de pontos.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial \vec{F} dado na figura 1 e marque verdadeiro, falso ou não sei. Observação: item respondido corretamente vale 0.2, item respondido incorretamente vale -0.2 e item marcado como não sei vale 0.0.

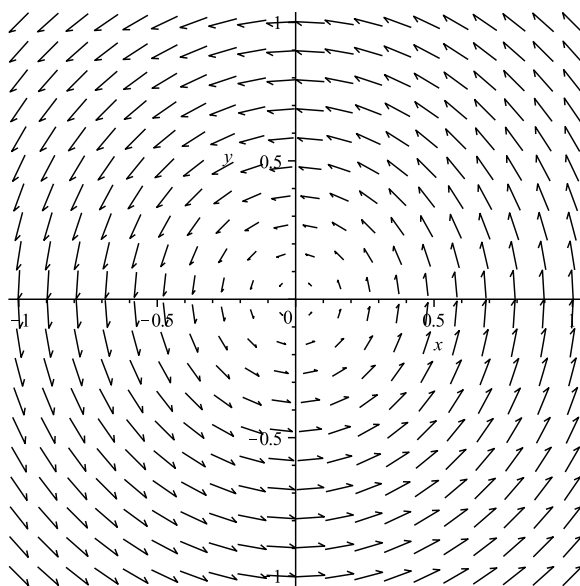


Figure 1: Campo vetorial \vec{F}

- i) Dado que os eixos x , y e z obedecem a regra da mão direita, $(\vec{\nabla} \times \vec{F}(0.1, 0.1)) \cdot \vec{k} > 0$.
- ii) Se C é a reta que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 0)$, então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
- iii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(0.5, 0) > 0$.
- iv) \vec{F} é um campo central da forma $\vec{F} = f(r)\vec{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- v) O campo \vec{F} é da forma $\vec{F} = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j}$, onde $f(x) \geq 0$ e $g(y) \leq 0$.
- vi) Se $y = 0$, então $\vec{F}(x, 0) = f(x)\vec{j}$, onde f é crescente e $f(0) = 0$.
- vii) Seja Q o quadrado no plano $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ e suponha que \vec{F} tenha componente na direção \vec{k} nula. Então $\iint_Q \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.
- viii) Sejam C_1 e C_2 circunferências centradas na origem, orientadas no sentido anti-horário e de raios 0.5 e 1.0, respectivamente. Então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
- ix) $\|\vec{F}(1, 1)\| < \|\vec{F}(-0.1, -0.1)\|$.
- x) A integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é uma curva que liga os pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$, independe de C .

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
i)			
ii)			
iii)			
iv)			
v)			

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
vi)			
vii)			
viii)			
ix)			
x)			

- **Questão 8** (2.0 pontos): Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F} = z^2 \vec{k}$$

e a região V limitada superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Calcule o fluxo de \vec{F} através da superfície S que limita V , orientada para fora, usando o Teorema da Divergência.