UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - \vec{F}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\times\vec{r}\,'(t)\Vert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}$
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\frac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \frac{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}\,'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))\cdot\vec{r}\,'''(t)}{\Vert\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\frac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

(X) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Binormal unitário em $t = 0$:

(X) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Curvatura em $t = 0$:

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(X) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\kappa(0) = \frac{1}{3}$

Torção em $t = 0$:

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(X) $\tau(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\tau(0) = \frac{1}{3}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,'(t) &= -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \operatorname{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\
\vec{r}\,'''(t) &= \operatorname{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k}
\end{aligned}$$

Subsituímos em $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(0) &= \vec{j} + \vec{k} \\
\vec{r}\,''(0) &= -\vec{i} + \vec{k} \\
\vec{r}\,'''(0) &= -\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}$$

$$\left\|\vec{r}\,'(0)\right\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left\|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0)\right\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \cdot \vec{r}\,'''(0) = 0 + 1 + 1 = 2$$

$$\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \times \vec{r}\,'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{r}\,'(0) \times \vec{r}\,''(0) \times \vec{r}\,'(0)\right\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Portanto:

$$
\begin{aligned}
\kappa(0) &= \frac{\|\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\|}{\|\vec r\,'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{6}}{4},\\
\tau(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\cdot \vec r\,'''(0)}{\|\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\|^2} = \frac{2}{\sqrt{3}^2} = \frac{2}{3},\\
\vec T(0) &= \frac{\vec r\,'(0)}{\|\vec r\,'(0)\|} = \frac{\vec j+\vec k}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec j+\vec k\right),\\
\vec N(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\times \vec r\,'(0)}{\|\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\times \vec r\,'(0)\|} = \frac{-2\vec i-\vec j+\vec k}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec i-\vec j+\vec k\right)\\
\vec B(0) &= \frac{\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)}{\|\vec r\,'(0)\times \vec r\,''(0)\|} = \frac{\vec i-\vec j+\vec k}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec i-\vec j+\vec k\right)
\end{aligned}
$$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma abelha viaja sobre uma trajetória $\vec r(t)$ com velocidade $\vec r\,'(t) = \vec v(t) = t\vec i + t^2\vec j + \vec k$, $0 \le t \le 1$. Sabendo que a abelha passa pelo ponto $(1,1,1)$ em $t = 0$, marque a resposta correta para cada coluna.

Posição da abelha $\vec r(t)$

( ) $\vec r(t) = \frac{t^2}{2}\vec i + \frac{t^3}{3}\vec j + t\vec k$

(X) $\vec r(t) = \left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i + \left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j + (t+1)\,\vec k$

( ) $\vec r(t) = \left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i + \left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j + t\vec k$

( ) $\vec r(t) = \frac{t^2}{2}\vec i + \frac{t^3}{3}\vec j + \vec k$

( ) $\vec r(t) = \vec i + 2t\vec j$

Componente tangencial da aceleração a_T

( ) $a_T = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

( ) $a_T = \frac{t+2t^2}{\sqrt{t^3+t^2+t}}$

( ) $a_T = \frac{1+t^2}{\sqrt{t^4+t^2+t}}$

(X) $a_T = \frac{t+2t^3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

( ) $a_T = \frac{1+2t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

Solução:

$$\vec v(t) = t\vec i + t^2\vec j + \vec k$$

$$\vec r(t) = \left(\frac{t^2}{2}+C_1\right)\vec i + \left(\frac{t^3}{3}+C_2\right)\vec j + (t+C_3)\,\vec k$$

Como em $t=0$, $\vec r(0) = (1,1,1)$, temos:

$$\vec r(t) = \left(\frac{t^2}{2}+1\right)\vec i + \left(\frac{t^3}{3}+1\right)\vec j + (t+1)\,\vec k$$

$$\vec a(t) = \vec i + 2t\vec j$$

$$v(t) = \|\vec v(t)\| = \sqrt{t^2+t^4+1}$$

$$a_T = v'(t) = \frac{1}{2}\left(t^2+t^4+1\right)^{-1/2}(2t+4t^3) = \frac{t+2t^3}{\sqrt{t^2+t^4+1}}$$

$$
\begin{aligned}
\vec v(t)\times \vec a(t) &= \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ t & t^2 & 1 \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix}\\
&= (0-2t)\vec i + (1-0)\vec j + (2t^2-t^2)\vec k\\
&= -2t\vec i + \vec j + t^2\vec k
\end{aligned}
$$

$$\|\vec v(t)\times \vec a(t)\| = \sqrt{4t^2+1+t^4}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{4t^2+1+t^4}}{\sqrt{(t^2+t^4+1)^3}}$$

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{(t^4+4t^2+1)^{1/2}}{(t^4+t^2+1)^{1/2}}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a superfície fechada limitada pelos plano $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ e $z = \pm 2$, orientada para fora, e o campo $\vec F = -2(z^2+1)xy\vec i + (z^2+1)y^2\vec j + xyz^2\vec k$.

Divergente

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F = -2(z^2+1)xy + (z^2+1)y^2 + xyz^2$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F = -2(z^2+1)x + xyz^2$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F = -2(z^2+1)x + xyz$

( ) $\vec\nabla\cdot\vec F = -(z^2+1)y + 2xyz$

(X) $\vec\nabla\cdot\vec F = 2xyz$

Integral de superfície

(X) $\iint_S \vec F\cdot\vec n dS = 0$

( ) $\iint_S \vec F\cdot\vec n dS = 4$

( ) $\iint_S \vec F\cdot\vec n dS = 8$

( ) $\iint_S \vec F\cdot\vec n dS = 16$

( ) $\iint_S \vec F\cdot\vec n dS = 24$

Solução: O divergente:

$$\vec\nabla\cdot\vec F=\frac{\partial(-2(z^2+1)xy)}{\partial x}+\frac{\partial((z^2+1)y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(xyz^2)}{\partial z}=-2(z^2+1)y+2y(z^2+1)+2xyz=2xyz.$$

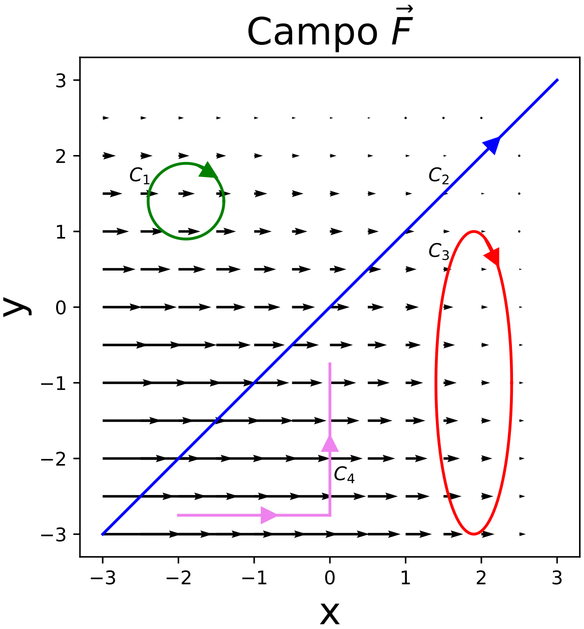
Como o campo é suave e a superfície é fechada e orientada para fora, usamos o Teorema da Divergência para calcular:

$$\iint_S \vec F\cdot\vec n dS=\iiint_V 2xyzdV,$$

onde V é o cubo de lado 4. Temos:

$$\iint_S \vec F\cdot\vec n dS=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}2xyzdzdydx=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}xy\left[z^2\right]_{-2}^{2}dydx=\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}xy\left[2^2-(-2)^2\right]dydx=0.$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z=0$ de um campo $\vec F(x,y)=F_1(x,y)\vec i$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também a esfera S_1 centrada na origem, raio 2 e orientada para fora e o plano S_2 dado por $x=0$, $-2\le y\le 2$, $-2\le z\le 2$, orientado no sentido de $\vec i$.
Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

- ( ) $\int_{C_1}\vec F\cdot d\vec r>0$
- ( ) $\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r=0$
- ( ) $\int_{C_4}\vec F\cdot d\vec r=0$
- (X) $\int_{C_3}\vec F\cdot d\vec r<0$
- ( ) $\int_{C_3}\vec F\cdot d\vec r>\int_{C_2}\vec F\cdot d\vec r$

Integral de Superfície:

- ( ) $\iint_{S_1}\vec F\cdot\vec n dS=\iint_{S_2}\vec F\cdot\vec n dS=0$
- ( ) $\iint_{S_1}\vec F\cdot\vec n dS>\iint_{S_2}\vec F\cdot\vec n dS>0$
- (X) $\iint_{S_1}\vec F\cdot\vec n dS<0$
- ( ) $\iint_{S_2}\vec F\cdot\vec n dS<0$
- ( ) $\iint_{S_1}\vec F\cdot\vec n dS>\iint_{S_2}\vec F\cdot\vec n dS=0$

Curvatura:

- ( ) A curvatura é uma constante para cada curva.
- ( ) A curvatura é zero para C_1 e C_2.
- ( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3
- (X) Os pontos de maior curvatura estão sobre a curva C_3
- ( ) A curvatura sobre C_2 cresce da esquerda para direita.

Rotacional:

- (X) $\nabla\times\vec F\cdot\vec k>0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla\times\vec F\cdot\vec k<0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla\times\vec F\cdot\vec k=0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla\times\vec F\cdot\vec i>0$ em todos os pontos
- ( ) $\nabla\times\vec F\cdot\vec j>0$ em todos os pontos

• **Questão 5** (1.0 ponto) Sejam a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente. Prove algebricamente a expressão dada por:

$$\|\vec a\|^2=a_N^2+a_T^2$$

onde $\vec a$ é o vetor aceleração. Faça uma interpretação geométrica.

Solução:

$$\begin{aligned}\|\vec a\|^2&=\vec a\cdot\vec a\\&=(a_T\vec T+a_N\vec N)\cdot(a_T\vec T+a_N\vec N)\\&=a_T\vec T\cdot a_T\vec T+a_T\vec T\cdot a_N\vec N+a_N\vec N\cdot a_T\vec T+a_N\vec N\cdot a_N\vec N\\&=a_T^2\|\vec T\|^2+a_N^2\|\vec N\|^2\\&=a_T^2+a_N^2\end{aligned}$$

A interpretação geométrica se dá pelo teorema de Pitágoras, sendo $\vec a$ um vetor no plano formado por $\vec T$ e $\vec N$, a_T e a_N são as medidas dos catetos e $\|\vec a\|$ a medida da hipotenusa.

• **Questão 6** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec F=xz\vec i+x\vec j+\frac{y^2}{2}\vec k$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z=1-x^2-y^2$, $z\ge 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$, ambas orientada no sentido positivo do eixo z.

a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

$$\iint_{S_1}\left(\vec\nabla\times\vec F\right)\cdot\vec n dS$$

e

$$\iint_{S_2}\left(\vec\nabla\times\vec F\right)\cdot\vec n dS.$$

convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar o teoremas de Stokes).

b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a).

c) (0.5) Usando o resultado do item a) e o teorema do Stokes, é possível calcular o valor da integral

$$\iint_D\left(\vec\nabla\times\vec F\right)\cdot\vec n dS.$$

onde D é disco unitário no plano xy dado por $z=0$, $x^2+y^2\le 1$?

Solução: a) Primeiro vamos calcular o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \dfrac{y^2}{2} \end{vmatrix} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, calculamos o vetor normal a cada superfície fazendo $G_1 = z + x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $G_2 = z + \sqrt{x^2+y^2} - 1$. Temos

$$\vec{\nabla} G_1 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Logo, sendo C o círculo unitário no plano xy, temos:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C (y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) dA \\
&= \iint_C (4xy + 1) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4\rho\cos(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\theta) + 1)\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2\rho^3 \,\mathrm{sen}(2\theta) + \rho\right) d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{4} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{8} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C \left(\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right) dA \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 1)\, \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho\,\mathrm{sen}(2\theta) + \rho)\, d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2} + \frac{1}{2}\right) d\theta \\
&= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi.
\end{aligned}$$

b) Observe que o círculo unitário C limita as duas superfícies, S_1 e S_2. O teorema de Stokes nos dá

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Logo,

$$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

c) A superfície D é limitada por C. Portanto,

$$\iint_{S_3} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS = \pi.$$