

1 - 3	4	5	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação  $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ .

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo $w$	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo $t$	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$ , então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$ , onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$ , $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T  f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde <math>w_n = \frac{2\pi n}{T}</math>, <math>T</math> é o período de <math>f(t)</math></p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde <math>C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}</math></p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde <math>A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt</math> e <math>B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt</math></p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde <math>F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt</math></p>

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{- m a}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{- m a}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx =  m  \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonômétricas:

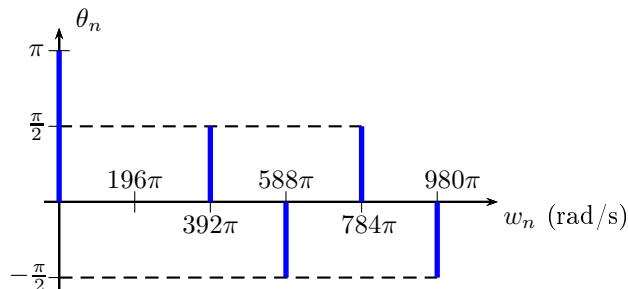
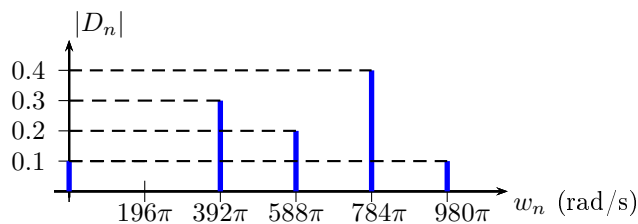
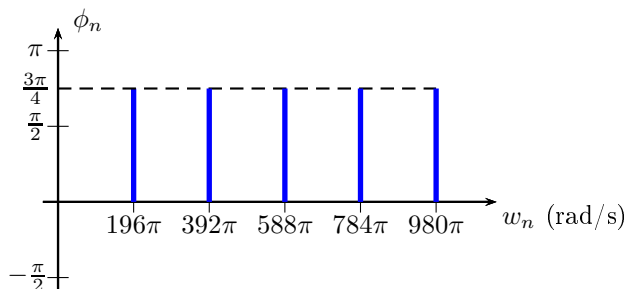
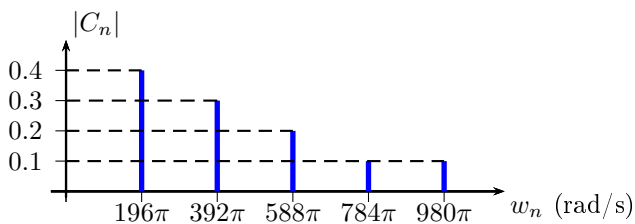
$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left( \frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

• **Questão 1** (0.5 ponto por item) Sejam  $f(t)$  e  $g(t)$  duas funções periódicas cujas séries de Fourier são dadas por  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$  e

$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{i w_n t}$  onde  $w_1$  é a fundamental. Seguem abaixo os diagramas de espectro de amplitudes e fase da duas séries de Fourier:



Quais são as notas musicais que representam os sinais  $f(t)$  e  $g(t)$ , respectivamente?

- ( ) Sol da escala 3 e Sol da escala 2  
( ) Sol da escala 4 e Sol da escala 3  
( ) Sol da escala 5 e Sol da escala 4  
( ) Sol da escala 3 e Sol da escala 3  
(x) Sol da escala 2 e Sol da escala 2

A(s) nota(s) representada(s) pelo sinal  $f(3t) + g(2t)$  soam um:

- ( ) Uma única nota - Sol da escala 3  
( ) Uma única nota - Sol da escala 4  
(x) Duas notas - Sol da escala 3 e Ré da escala 4.  
( ) Uma única nota - Ré da escala 4  
( ) Duas notas - Sol da escala 2 e Ré da escala 3.

Escrevendo  $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)$ , temos:

- (x)  $a_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$  e  $b_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$   
( )  $a_1 = \frac{2\sqrt{2}}{5}$  e  $b_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{5}$   
( )  $a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{5}$  e  $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$   
( )  $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$  e  $b_1 = -\frac{\sqrt{2}}{5}$   
( )  $a_1 = \frac{2}{5}$  e  $b_1 = 0$

Período e coeficientes da série exponencial de  $g(t)$  ( $T$  e  $D_n$ ):

- ( )  $T = \frac{1}{196\pi}$ ,  $D_1 = 0$  e  $D_2 = \frac{3i}{10}$ .  
( )  $T = \frac{1}{196\pi}$ ,  $D_1 = \frac{3i}{10}$  e  $D_2 = -\frac{2i}{10}$ .  
( )  $T = \frac{1}{98}$ ,  $D_1 = 0$  e  $D_2 = -\frac{2i}{10}$ .  
( )  $T = \frac{1}{98}$ ,  $D_1 = \frac{3i}{10}$  e  $D_2 = -\frac{2i}{10}$ .  
(x)  $T = \frac{1}{98}$ ,  $D_1 = 0$  e  $D_2 = \frac{3i}{10}$ .

Potência média do sinal  $f(t)$  dada por  $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$

- ( ) 2,2.  
( ) 1,1.  
(x) 0,62.  
( ) 0,31.  
( ) 0,11.

O valor médio do sinal  $g(t)$  dado por  $\frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt$

- ( ) 0,1  
(x) -0,1  
( ) 0,2  
( ) -0,2  
( ) -0,05

• **Questão 2** (0.5 ponto por item) Sejam os números complexos  $Z_1 = \frac{1+7i}{3-4i}$  e  $Z_2 = (1-i)^{50}$ . Assinale as alternativas que indicam  $Z_1$  e  $Z_2$ :

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> $1+i$             | <input type="radio"/> 2                     |
| <input type="radio"/> $1-i$             | <input type="radio"/> $1-i$                 |
| <input checked="" type="radio"/> $-1+i$ | <input type="radio"/> $1+i$                 |
| <input type="radio"/> $-1-i$            | <input checked="" type="radio"/> $-2^{25}i$ |
| <input type="radio"/> $(1-i)/12$        | <input type="radio"/> $2^{25}i$             |
| <input type="radio"/> $(-i)/12$         | <input type="radio"/> $2^{50}i$             |
| <input type="radio"/> N.D.A.            | <input type="radio"/> N.D.A.                |

$$Z_1 = \frac{(1+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{-25+25i}{25} = -1+i$$

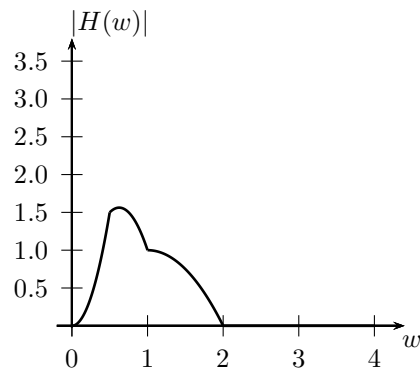
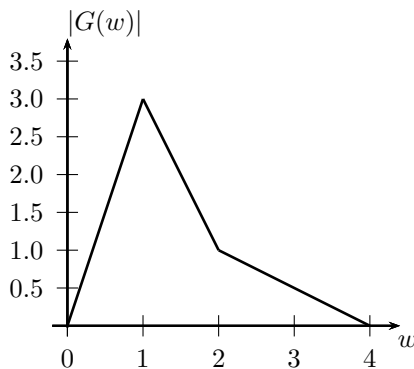
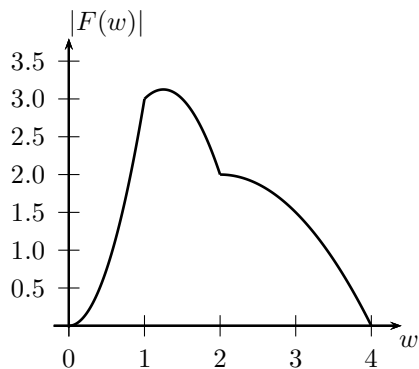
Para calcular  $Z_2$ , escrevemos  $1-i$  na forma complexa:

$$1-i = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \sqrt{2}e^{-\pi/4}$$

Assim:

$$Z_2 = 2^{25}e^{-25\pi/2} = 2^{25}e^{-\pi/2} = 2^{25} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = -2^{25}i$$

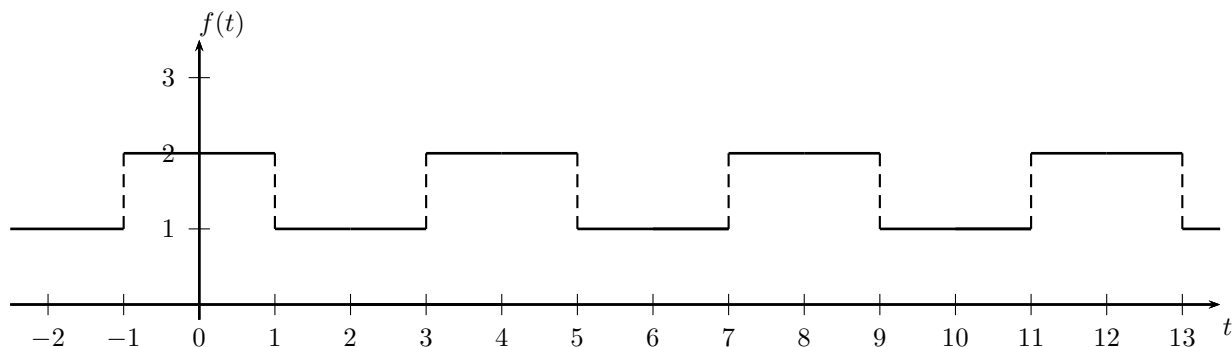
• **Questão 3** (0.5 ponto por item - total de 1.0 pontos) Considere três funções  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  e suas respectivas transformadas de Fourier  $F(w)$ ,  $G(w)$  e  $H(w)$ . Abaixo estão apresentados os diagramas de espectro de magnitudes das três funções.



Assinale em cada coluna o item que é compatível com os gráficos.

- |   |   |
|---|---|
| <input type="radio"/> $h(t) = f(2t)$                      | <input checked="" type="radio"/> $f(t) = g'(t)$ |
| <input type="radio"/> $f(t) = 2h(2t)$                     | <input checked="" type="radio"/> $h(t) = g'(t)$ |
| <input checked="" type="radio"/> $f(t) = 4h(2t)$          | <input type="radio"/> $h(t) = f'(t)$            |
| <input type="radio"/> $h(t) = 2f\left(\frac{t}{2}\right)$ | <input type="radio"/> $f(t) = g'(t)$            |
| <input type="radio"/> $f(t) = 4h\left(\frac{t}{2}\right)$ | <input type="radio"/> $h(t) = g'(2t)$           |

- **Questão 4** (3.0 pontos) Considere a função periódica  $f(t)$  dada no gráfico abaixo.



Considere a Série de Fourier da função  $f(t)$  dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$$

- (0.5 ponto) Calcule o período fundamental e a frequência fundamental,  $w_1$ .
- (0.5 ponto) Calcule a potência média  $\bar{P}_f$
- (1.0 ponto) Calcule os coeficientes  $a_n$  e  $b_n$ .
- (1.0 ponto) Seja  $f_4(t)$  a série truncada de  $f(t)$  dada por:

$$f_4(t) = \sum_{n=-4}^4 C_n e^{i w_n t}$$

Calcule a potência média de  $f_4(t)$ .

Vemos do gráfico que o período fundamental é  $T_f = 4$ , logo a frequência fundamental é  $f_f = \frac{1}{4}$  ou  $w_f = \frac{\pi}{2}$ . A função é par.

A potência média é mais facilmente obtida da definição:

$$\begin{aligned} \bar{P}_f &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_0^2 |f(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} [2^2 + 1^2] = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Aqui se usou que  $|f(t)|$  é uma função par.

Como  $f(t)$  é par, temos que  $b_n = 0$  para todo  $n$ . Calculamos  $a_0$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-2}^2 f(t) dt \\ &= \int_0^2 f(t) dt = 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Para calcular  $a_n$  para  $n \geq 1$ , vemos que:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-2}^2 f(t) \cos(w_n t) dt \\ &= \int_0^2 f(t) \cos(w_n t) dt \\ &= 2 \int_0^1 \cos(w_n t) dt + \int_1^2 \cos(w_n t) dt \\ &= \frac{1}{w_n} [2 \sin(w_n)|_0^1 + \sin(w_n)|_1^2] \end{aligned}$$

Como  $w_n = \frac{2\pi n}{4} = \frac{\pi n}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi n} \left[ 2 \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \Big|_0^1 + \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \Big|_1^2 \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[ 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \sin(n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_1 &= \frac{2}{\pi} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= \frac{2}{3\pi} \\ a_4 &= 0 \end{aligned}$$

A potência média de  $f_4(t)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{P}_{f_4} &= \sum_{n=-4}^4 |C_n|^2 = \sum_{n=-4}^4 \left| \frac{a_n - i b_n}{2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} [a_0^2 + 2a_1^2 + 2a_3^2] = \frac{9}{4} + \frac{20}{9\pi^2} \end{aligned}$$

- **Questão 5** (2.0 pontos) Considere a função  $f(t)$  dada abaixo.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{4 + t^2}$$

- a) (1.0 ponto) Calcule, a partir da definição, a transformada de Fourier da função  $f(t)$ .  
 b) (0.5 ponto) Escreva a função  $F(w)$  na forma  $F(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}$ .  
 c) (0.5 ponto) Calcule a energia total da função.

**Solução:**

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [\cos(wt) - i \sin(wt)] dt \\ &= -2i \int_0^{\infty} f(t) \sin(wt) dt \\ &= -\frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t}{4 + t^2} \sin(wt) dt \end{aligned}$$

Da tabela de integrais, vemos que:

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m < 0 \end{cases}$$

Substituímos  $x \leftarrow t$ ,  $a \leftarrow 2$  e  $m \leftarrow w$ , temos:

$$F(w) = \begin{cases} -ie^{-2|w|}, & w > 0, \\ 0, & w = 0, \\ ie^{-2|w|}, & w < 0. \end{cases}$$

Logo:

$$|F(w)| = e^{-2|w|}.$$

e

$$\phi(w) = \begin{cases} -\pi/2, & w < 0, \\ \pi/2, & w > 0. \end{cases}$$

A energia pode ser calculada via Teorema de Parseval:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4|w|} dw \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-4w} dw \\ &= \frac{1}{4\pi} \end{aligned}$$