UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - 2022/1
Prova da área IIA

1 - 3	4	Total

Nome: ________________________ **Cartão:** ____________ **Turma:**____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\} + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\operatorname{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,dx = \dfrac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\operatorname{sen}(wx)\,dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\operatorname{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \qquad (n = 1, 2, 3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at} - e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \qquad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at} - be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt - \operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt) - wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt) + wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \qquad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at) - \cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at) - \operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at) - \cos(at))$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \qquad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \qquad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \qquad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \qquad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt} - e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t + 2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2)\left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t) = \lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t) = \frac{t}{a}, \qquad 0 < t < a$ $f(t) = f(t - a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada na expressão abaixo. Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão equivalente para $f(t)$ em termos de Heavisides. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $f'(t)$ em termos de Heavisides e Deltas e Dirac. Na terceira, marque a transformada de Laplace de $f(t)$. E, na quarta, marque a transformada de Laplace de $f'(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -2t + 3, & 1 < t < 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

$f(t)$:

( ) $f(t) = (-2t + 3)u(t) + (4 - 2t)u(t - 1)$.

( ) $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + u(t - 3)$.

( ) $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) - (3 - 2t)u(t - 3)$.

(x) $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + (2t - 2)u(t - 3)$.

( ) $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + (3 - 2t)u(t - 3)$.

$f'(t)$:

( ) $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3) + \delta(t - 1) + \delta(t - 3)$.

( ) $f'(t) = -2(u(t - 1) - u(t - 3))$.

(x) $f'(t) = -2(u(t - 1) - u(t - 3)) + \delta(t - 1) + 4\delta(t - 3)$.

( ) $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3)$.

( ) $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3) + \delta(t)$.

$\mathcal{L}\{f(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(s-2)e^{-s} + (4s-2)e^{-3s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(s-2)e^{-s} + (4s+2)e^{-3s}}{s^3}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{-2e^{-s} + 3e^{-3s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{-2e^{-s} + 4e^{-3s}}{s^3}$.

(x) N.D.A

$\mathcal{L}\{f'(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{(s-2)e^{-s} + (4s-2)e^{-3s}}{s^2}$.

(x) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{(s-2)e^{-s} + (4s+2)e^{-3s}}{s}$.

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{-2e^{-s} + 3e^{-3s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{-2e^{-s} + 4e^{-3s}}{s}$.

( ) N.D.A.

• **Questão 2** (0.5 ponto por item) A posição de um bloco de massa m é modelada por:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = 12\delta(t-2) - 6\delta(t-4).$$

onde $m = 2$ e o coeficiente de atrito é $\gamma = 3$. A posição inicial e a velocidade iniciais são nulas. A força é devida a dois impactos muito rápidos que aconteceram em $t = 2$ e $t = 4$. Encontre a solução do sistema via transformada de Laplace e indique, repectivamente, a transformada $X(s)$ da solução, o valor de $x(3)$, o valor de $x(5)$ e o limite $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$.

Assinale as alternativas corretas:

( ) $\dfrac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{(s^2+3s)}$	( ) $2(1-e^{-\frac{3}{2}})$	( ) $2(1-e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{-\frac{9}{2}})$	( ) -2
(x) $\dfrac{12e^{-2s} - 6e^{-4s}}{(2s^2+3s)}$	( ) $2(e^{-3}-1)$	( ) $-2(1-e^{-\frac{3}{2}})$	( ) -1
( ) $\dfrac{12e^{-2s} - 6e^{-4s}}{2s(s+3)}$	(x) $4(1-e^{-\frac{3}{2}})$	( ) $2(1-e^{-\frac{3}{2}})$	( ) 0
( ) $\dfrac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{2s(s+3)}$	( ) $4(e^{-3}-1)$	( ) $2(e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{9}{2}} - 1)$	( ) 1
	( ) N.D.A	(x) N.D.A	(x) 2

Solução: Aplicamos a transformada de Laplace para obter

$$\begin{aligned}
2(s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)) + 3(sX(s) - x(0)) &= 12e^{-2s} - 6e^{-4s} \\
&\Downarrow \\
(2s^2+3s)X(s) &= 12e^{-2s} - 6e^{-4s} \\
&\Downarrow \\
X(s) &= \frac{12e^{-2s} - 6e^{-4s}}{(2s^2+3s)} \\
&\Downarrow \\
X(s) &= \frac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{s(s+\frac{3}{2})}.
\end{aligned}$$

Pelo item 11 da tabela, sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+\frac{3}{2})}\right\} = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-\frac{3t}{2}}\right)$$

Logo, usando a propriedade da translação no eixo t, temos:

$$x(t) = 4u(t-2)\left(1 - e^{-\frac{3(t-2)}{2}}\right) - 2u(t-4)\left(1 - e^{-\frac{3(t-4)}{2}}\right).$$

- **Questão 3** (0.5 ponto por item) Considere as seguintes funções:

i) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6s}{2s^2+2s+5}\right\}$

ii) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2-15s+50}\right\}$

iii) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+8s+16}\right\}$

iv) $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}+e^{-4s}}{s^2+8s+16}\right\}$

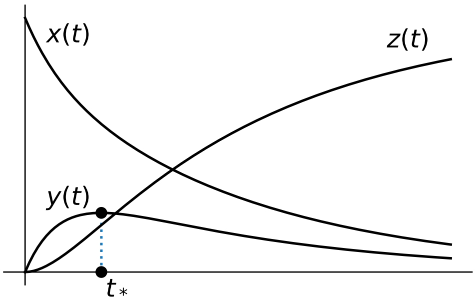
Assinale as alternativas corretas:

(x) $f(\pi) = e^{-\pi/2}$	( ) $g(\ln(2)) = -257$	( ) $h(2) = 2e^{-10}$	(x) $i(3) = e^{-4}$
( ) $f(\pi) = e^{\pi/2}$	( ) $g(\ln(2)) = 257$	( ) $h(2) = 2e^{8}$	( ) $i(3) = e^{-5}$
( ) $f(\pi) = e^{\pi}\cos(3\pi/2)$	(x) $g(\ln(2)) = 992$	( ) $h(2) = 2e^{10}$	( ) $i(3) = (e^{4}+e^{5})$
( ) $f(\pi) = e^{-\pi}\cos(3\pi/2)$	( ) $g(\ln(2)) = -992$	(x) $h(2) = 2e^{-8}$	( ) $i(3) = (e^{-4}+e^{-5})$
( ) N.D.A	( ) N.D.A	( ) N.D.A	( ) N.D.A

• **Questão 4** (4.0 pontos) As concentrações de três reagentes A, B e C são dadas por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Considere a reação do tipo $A \longleftrightarrow B \longleftrightarrow C$ modelada por:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) \\ z'(t) &= 3y(t) \end{aligned}$$

com $x(0) = 5$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



a) (1.5) Calcule a transformada de Laplace do sistema, isole $X(s) := \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$, encontrando expressões essas funções.

b) (1.5) Encontre $x(t)$ e $y(t)$.

c) (0.5) Obtenha $z(t)$. Dica: Use a própria equação diferencial.

d) (0.5) A função $y(t)$ admite um único ponto estacionário t_*, isto é $y'(t_*) = 0$. Calcule t_* e verifique que $t_* > 0$ e que se trata de um ponto de máximo. Não é necessário calcular $y(t_*)$. Dica: Estude $y(0)$ e $\lim_{t\to\infty} y(t)$.

Obs: Aqui $u(t)$ é a temperatura, não é a função Heaviside. Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento será avaliado.

$X(s) =$	$Y(s) =$
$x(t) =$	$y(t) =$
$z(t) =$	$t_* =$

Solução a): Aplicamos a transformada de Laplace às duas primeiras equações do sistema e usamos as propriedades 1 e 2 para obter:

$$\begin{aligned} sX(s) - 5 &= -2X(s) + 2Y(s) \\ sY(s) &= 2X(s) - 5Y(s) \end{aligned}$$

Daqui temos que $Y(s) = \dfrac{2}{s+5}X(s)$, de onde se obtem:

$$\begin{aligned} sX(s) - 5 &= -2X(s) + \frac{4}{s+5}X(s) \\ \left(s + 2 - \frac{4}{s+5}\right)X(s) &= 5 \\ ((s+2)(s+5) - 4)\,X(s) &= 5(s+5) \\ \left(s^2 + 7s + 6\right)X(s) &= 5(s+5) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{5(s+5)}{s^2+7s+6} = \frac{5(s+5)}{(s+1)(s+6)} \\ Y(s) &= \frac{2}{s+5}X(s) = \frac{10}{(s+1)(s+6)} \end{aligned}$$

Assim, $x(t) = 4e^{-t} + e^{-6t}$ e $y(t) = 2(e^{-t} - e^{-6t})$. A incógnita $z(t)$ pode ser obtida de:

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + 3\int_0^t y(\tau)d\tau = \int_0^t \left(6e^{-\tau} - 6e^{-6\tau}\right)d\tau \\ &= \left(-6e^{-\tau} + e^{-6\tau}\right)\Big|_0^t = -6e^{-t} + e^{-6t} + 5. \end{aligned}$$

A função $y(t)$ admite um único ponto estacionário:

$$y'(t) = 0 \Longleftrightarrow 2(-e^{-t} + 6e^{-6t}) = 0 \Longleftrightarrow 6e^{-5t} = 1 \Longleftrightarrow t = t_* := \frac{1}{5}\ln(6).$$

Como $y(0) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ e $y(t) = 2e^{-t}(1 - e^{-5t}) > 0$ para $t > 0$, o ponto estacionário é um ponto de máximo absoluto.