UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2022/1
Prova da área IIB

1 - 3	4	5	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w - w_0) + \frac{1}{2}F(w + w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} (A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \quad (m>0,\ n>0) \\ 0, & n>m \end{cases}$	6. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função

$$f(t) = -2\cos^2(t) + \mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(4t).$$

e sua expansão em série de Fourier em que w_1 é a frequência fundamental. Sobre a função $f(t)$ e os coefientes da sua série de Fourier, responda:

Frequência fundamental

( ) $w_1 = 1/2$

( ) $w_1 = 1$

(x) $w_1 = 2$

( ) $w_1 = 3$

( ) $w_1 = 4$

Fase de C_2

( ) $\phi_2 = \frac{3\pi}{4}$

( ) $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$

( ) $\phi_2 = \frac{\pi}{4}$

( ) $\phi_2 = -\frac{3\pi}{4}$

(X) $\phi_2 = -\frac{\pi}{2}$

Módulo de C_2

( ) $|C_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(X) $|C_2| = \frac{1}{2}$

( ) $|C_2| = 1$

( ) $|C_2| = \sqrt{2}$

( ) $|C_2| = 2$

Potência Média $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $\bar{P}_f = 1/2$

( ) $\bar{P}_f = 1$

( ) $\bar{P}_f = 3/2$

( ) $\bar{P}_f = 2$

(X) $\bar{P}_f = 5/2$

Solução:

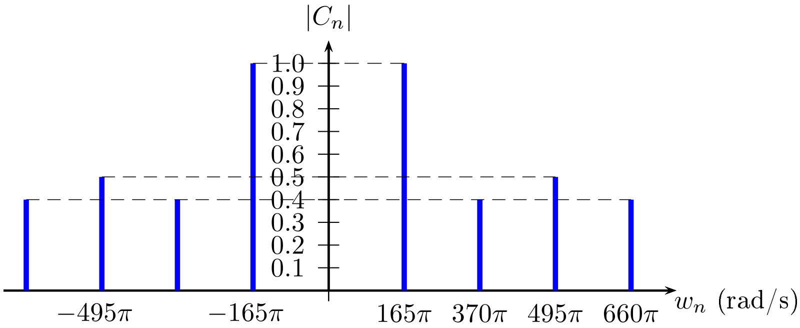
$$\begin{aligned} f(t) &= -2\cos^2(t) + \mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(4t) \\ &= -(1 + \cos(2t)) + \mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(4t) \\ &= -1 - \cos(2t) + \mathrm{sen}(2t) + \mathrm{sen}(4t) \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = \frac{-1-i}{2}, \quad |C_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \phi_1 = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = \frac{0-i}{2}, \quad |C_2| = \frac{1}{2}, \quad \phi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\bar{P}_f = |C_0|^2 + 2|C_1|^2 + 2|C_2|^2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota Mi 2 ($82,5\,\text{Hz}$) dada pelo sinal $f(t)$.



O diagrama de espectro de fase do sinal $f(t)$ é zero para todas as frequências. Responda os itens corretamente:

Nota produzida por $g(t) = f(1,5t)$

( ) Lá 1

( ) Lá 2

(X) Si 2

( ) Mi 3

( ) Si 3

Série de Fourier trigonométrica de $f(t)$

(X) $f(t) = 2\cos(165\pi t) + 0,8\cos(370\pi t) + \cos(495\pi t) + 0,8\cos(660\pi t)$

( ) $f(t) = \cos(165\pi t) + 0,4\cos(370\pi t) + 0,5\cos(495\pi t) + 0,4\cos(660\pi t)$

( ) $f(t) = 2\,\text{sen}(165\pi t) + 0,8\,\text{sen}(370\pi t) + \text{sen}(495\pi t) + 0,8\,\text{sen}(660\pi t)$

( ) $f(t) = 1 + \text{sen}(165\pi t) + 0,4\,\text{sen}(370\pi t) + 0,5\,\text{sen}(495\pi t) + 0,4\,\text{sen}(660\pi t)$

( ) $f(t) = \dfrac{1}{2} + \cos(165\pi t) + 0,4\,\text{sen}(370\pi t) + 0,5\cos(495\pi t) + 0,4\,\text{sen}(660\pi t)$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Seja $f(t) = e^{-3|t|}$, $g(t) := \mathcal{F}^{-1}\{iwF(w)\}$, $h(t) := \mathcal{F}^{-1}\left\{G(w)e^{-5iw}\right\}$ e $p(t) = f(t)e^{2t}$, onde $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$ e $P(w) = \mathcal{F}\{p(t)\}$. Responda corretamente.

$g(2)$

(X) $g(2) = -3e^{-6}$

( ) $g(2) = -3e^{6}$

( ) $g(2) = e^{6}$

( ) $g(2) = e^{-6}$

( ) $g(2) = e^{-2}$

$F(w)$

( ) $F(w) = \dfrac{2}{w^2+9}$

( ) $F(w) = \dfrac{2}{w^2+3}$

(X) $F(w) = \dfrac{6}{w^2+9}$

( ) $F(w) = \dfrac{1}{w^2+9}$

( ) $F(w) = \dfrac{1}{w^2+3}$

$h(11)$

( ) $h(11) = -3e^{-11}$

(X) $h(11) = -3e^{-18}$

( ) $h(11) = -3e^{-33}$

( ) $h(11) = e^{-18}$

( ) $h(11) = e^{-33}$

$P(w)$

( ) $P(w) = \dfrac{2}{(w-2i)^2+9}$

( ) $P(w) = \dfrac{2}{(w+2i)^2+3}$

( ) $P(w) = \dfrac{6}{(w+2)^2+9}$

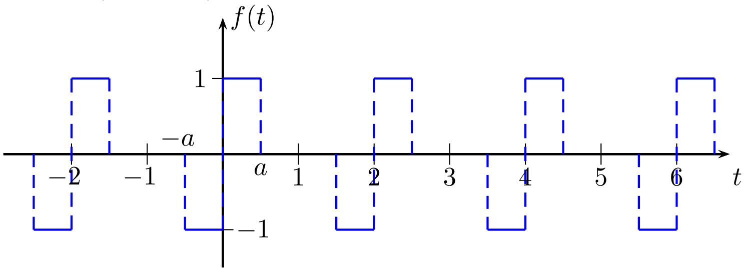
( ) $P(w) = \dfrac{1}{(w-2)^2+9}$

(X) $P(w) = \dfrac{6}{(w+2i)^2+9}$

Solução:

$$\begin{aligned}
g(t) &= f'(t)\\
h(t) &= f(t+5)\\
F(w) &= 2\int_0^\infty e^{-3t}\cos(wt)dt = \frac{6}{w^2+9}\\
P(w) &= F(w+2i)
\end{aligned}$$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Considere a função periódica de período $T = 2$ cujo gráfico é esboçado abaixo:



Aqui a é uma constante positiva menor que 1. Escreva esta funçaõ em séries de Fourier na seguinte forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(\pi n t) + b_n \operatorname{sen}(\pi n t)\right],$$

Trace o diagrama de amplitudes e o de fase quando $a = 1/2$ com pelo menos duas rais positivas e duas negativas. Indique eixos e valores notáveis.

Solução:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt, \quad w_n = \frac{2\pi n}{T} \\
&= \int_{-a}^{a} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = 2\int_0^a \operatorname{sen}(w_n t)dt \\
&= -2\left.\frac{\cos(w_n t)}{w_n}\right|_0^a = -2\left.\frac{\cos(a w_n) - 1}{w_n}\right|_0^a \\
&= 2\frac{1-\cos(a\pi n)}{\pi n}
\end{aligned}$$

Assim:

$$f(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(a\pi n)}{\pi n}\operatorname{sen}(\pi n t).$$

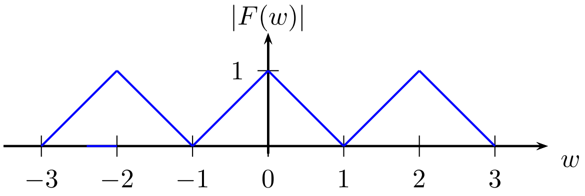
Agora substituímos $a = 1/2$:

$$C_n = \frac{a_n - i b_n}{2} \quad = \quad -i\frac{\cos(\pi n/2) - 1}{\pi n}$$

Portanto:

$$C_n \quad = \quad \begin{cases} 0, & n = 4k, \\ \dfrac{i}{\pi n}, & n = 4k+1, \\ \dfrac{2i}{\pi n}, & n = 4k+2, \\ \dfrac{i}{\pi n}, & n = 4k+3. \end{cases}$$

• **Questão 5** (2.0 pontos) Seja $f(t)$ uma função que possui transformada de Fourier $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce o diagrama de magnitudes de $g(t) = f'(t)\cos(4t)$ e $h(t) = \dfrac{d}{dt}\left(f(t)\cos(4t)\right)$. Indique eixos e valores notáveis.

Vemos que $\mathcal{F}\left\{f'(t)\right\} = iwF(w)$ e $\mathcal{F}\left\{f'(t)\cos(4t)\right\} = \dfrac{i(w-4)F(w-4)+i(w+4)F(w+4)}{2}$.

Para o outro item, temos $\mathcal{F}\left\{f(t)\cos(4t)\right\} = \dfrac{F(w-4)+F(w+4)}{2}$ e $\mathcal{F}\left\{\dfrac{d}{dt}\left[f(t)\cos(4t)\right]\right\} = iw\dfrac{F(w-4)+F(w+4)}{2}$.