• **Questão 6** (2.0 pontos) Um fluido se desloca em um tubo com perdas de calor e com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x,t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t - vu_x - u_{xx} + u = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x,0) = 300\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 1m/s$.

Resposta resumida

$$\frac{d}{dt}U(k,t) + ivkU(k,t) + k^2U(k,t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}U(k,t) = -\left(ivk + k^2\right)U(k,t) = 0$$

$$\begin{aligned} U(k,t) &= U(k,0)e^{-\left(ivk+k^2\right)t} \\ &= 300e^{-\left(ivk+k^2\right)t} \\ &= e^{-ivk}300e^{-k^2t} \end{aligned}$$

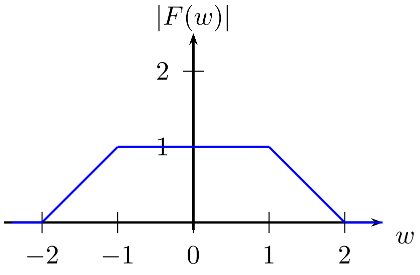
Calculamos a transformada inversa de $300e^{-k^2t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{300e^{-k^2t}\right\} &= \frac{150}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}e^{ikx}dx \\ &= \frac{300}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k^2t}\cos(kx)dx \\ &= \frac{300}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{150}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Usando a propriedade do deslocamento, temos a solução:

$$u(x,t) = \frac{150}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-vt)^2}{4t}}$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Sejam $f(t)$ uma função cuja transformada de Fourier é dada por $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce a diagrama de espectro de magnititudes da transformada de Fourier da função $g(t) = f''(t) + \cos(3t)$

Resposta resumida

$$|F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w+2, & -2 \leq w < -1, \\ 1, & -1 \leq w < 1, \\ 2-w & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

A transformada de $f''(w)$ é $(iw)^2 F(w)$, assim:

$$|w^2 F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w^2(w+2), & -2 \leq w < -1, \\ w^2, & -1 \leq w < 1, \\ w^2(2-w) & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

Além disso, sabemos que $\mathcal{F}\{\cos(3t)\} = \pi\delta(w-3) + \pi\delta(w+3)$