UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/2
Prova da área II

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

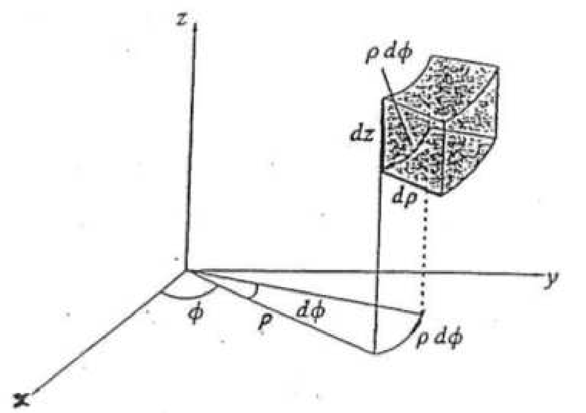
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

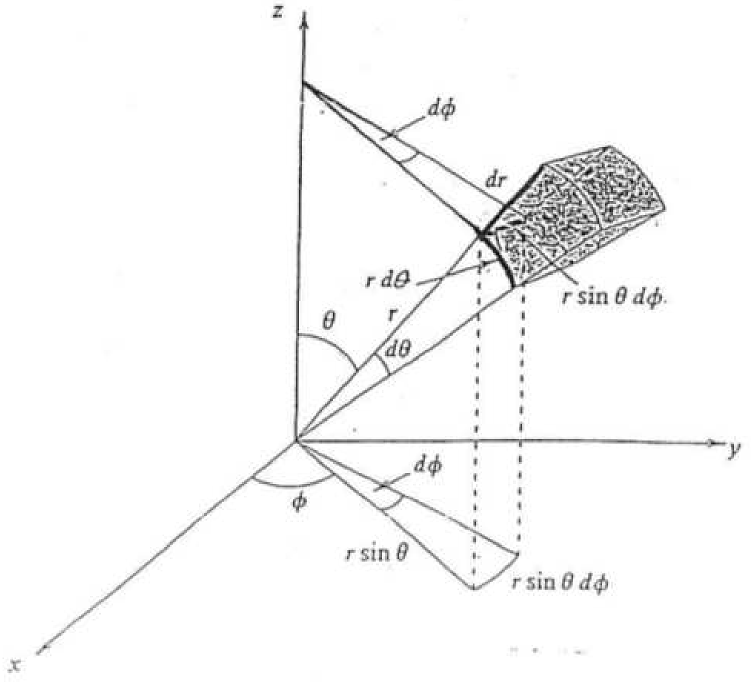
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



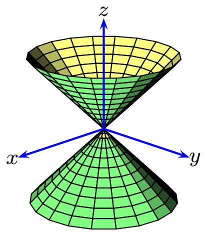
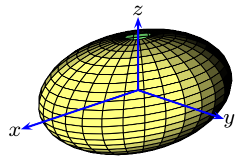
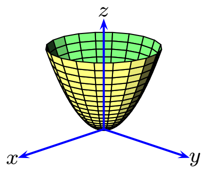
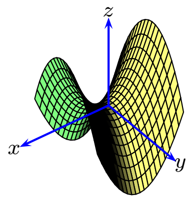
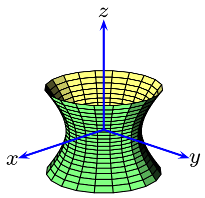
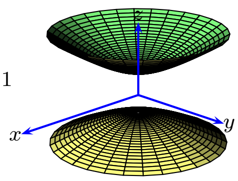
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ 	Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ 
Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 	Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = G \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - F \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$

- **Questão 1** (1.0 ponto) A vetor normal unitário em um ponto da curva $\vec{r} = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é:
  ( ) $\vec{N} = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j}$.
  ( ) $\vec{N} = -\cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j}$..
  (X) $\vec{N} = -\cos(t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j}$..
  ( ) $\vec{N} = \cos(t)\vec{i} - \text{sen}(t)\vec{j}$..
  ( ) $\vec{N} = \text{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$.
  ( ) $\vec{N} = -\text{sen}(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j}$.

- **Questão 2** (1.0 ponto) Dado um campo escalar $f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, e o campo vetorial $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\hat{r}$, podemos afirmar que
  ( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$
  ( ) $\vec{\nabla}^2 f = f''(r)$.
  ( ) $\vec{\nabla} f = \vec{0}$
  (X) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$
  ( ) $\vec{\nabla}^2 \vec{F} = f''(r)\hat{r}$.
  ( ) $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) \neq \vec{\nabla}^2 \vec{F}$.

• **Questão 3** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (e^y + ye^x)\vec{i} + (xe^y + e^x)\vec{j} + \vec{k}$, a função potencial é.

( ) $\varphi(x, y, z) = 1 + xe^y + ye^x$.

(X) $\varphi(x, y, z) = z + xe^y + ye^x$.

( ) $\varphi(x, y, z) = xe^y + ye^x$.

( ) $\varphi(x, y, z) = z^2 + xe^y + ye^x$.

( ) $\varphi(x, y, z) = z + e^y + e^x$.

( ) $\varphi(x, y, z) = 1 + e^y + e^x$.

• **Questão 4** (1.0 ponto)O trabalho realizado pelo campo do exercício 3 ao longo da curva $C : \vec{r} = t^3\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k}$ desde a origem até o ponto $P(1, 1, 1)$ é

( ) $1 + e$.

(X) $1 + 2e$.

( ) $1 + 3e$.

( ) $1 - e$.

( ) $1 - 2e$.

( ) $1 - 3e$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) O fluxo do campo $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ através da superfície dada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ orientada no sentido côncavo-convexo é

(X) $\dfrac{\pi}{2}$.

( ) $\dfrac{\pi}{4}$.

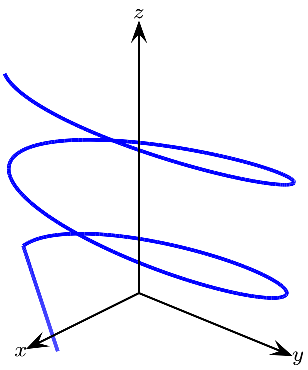
( ) $\dfrac{\pi}{6}$.

( ) $-\dfrac{\pi}{6}$.

( ) $-\dfrac{\pi}{4}$.

( ) $-\dfrac{\pi}{2}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Na figura abaixo é dada uma curva representada por um pedaço de uma hélice elíptica conectada a um segmento de reta. É correto afirmar que:



( ) A curva é regular, isto é, $\vec{r}'(t)$ está bem definido em todos os pontos.

( ) Não é possível saber o sinal da torção em nenhum ponto da curva, pois o sentido positivo não é informado.

( ) A curva possui torção negativa e curvatura positiva em todos os pontos.

( ) A curva possui torção positiva e curvatura positiva em todos os pontos.

( ) A torção é sempre estritamente negativa, exceto em um único ponto.

(X) A curvatura é nula em um conjunto infinito de pontos.

• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}$ dado na figura 1 e marque verdadeiro, falso ou não sei. Observação: item respondido corretamente vale 0.2, item respondido incorretamente vale -0.2 e item marcado como não sei vale 0.0.

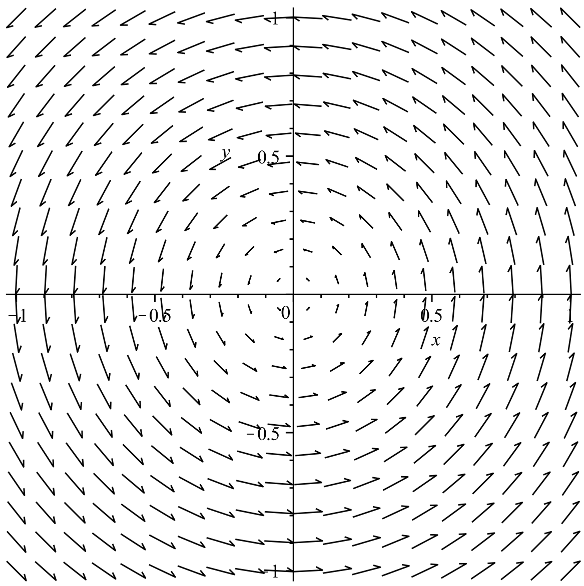


Figure 1: Campo vetorial $\vec{F}$

i) Dado que os eixos x, y e z obedecem a regra da mão direita, $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}(0.1, 0.1)\right) \cdot \vec{k} > 0$.

ii) Se C é a reta que liga os pontos $(0,0)$ e $(1,0)$, então $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

iii) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(0.5, 0) > 0$.

iv) $\vec{F}$ é um campo central da forma $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

v) O campo $\vec{F}$ é da forma $\vec{F} = f(x)\vec{i} + g(y)\vec{j}$, onde $f(x) \geq 0$ e $g(y) \leq 0$.

vi) Se $y = 0$, então $\vec{F}(x, 0) = f(x)\vec{j}$, onde f é crescente e $f(0) = 0$.

vii) Seja Q o quadrado no plano $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$ e suponha que $\vec{F}$ tenha componente na direção $\vec{k}$ nula. Então $\iint_Q \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$.

viii) Sejam C_1 e C_2 circunferências centradas na origem, orientadas no sentido anti-horário e de raios 0.5 e 1.0, respectivamente. Então $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

ix) $\|\vec{F}(1, 1)\| < \|\vec{F}(-0.1, -0.1)\|$.

x) A integral de linha $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é uma curva que liga os pontos $(0,0)$ e $(1,1)$, independe de C.

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
i)	X		
ii)	X		
iii)		X	
iv)		X	
v)		X	

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
vi)	X		
vii)	X		
viii)		X	
ix)		X	
x)		X	

• **Questão 8** (2.0 pontos): Considere o campo vetorial dado por

$$\vec{F} = z^2\vec{k}$$

e a região V limitada superiormente por $z = 1$ e inferiormente por $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V, orientada para fora, usando o Teorema da Divergência.

solução: Primeiro, observamos que $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2z$. Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
\phi &= \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\
&= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 2zr dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[z^2\right]_r^1 r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r - r^3 dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 dz dr d\theta \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$