UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2023/1
Prova da área I

1-4	5	6	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{G}\right) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla} g + g\vec{\nabla} f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla} f\right) \cdot \vec{F} + f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla} \times \left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \vec{G} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) - \vec{F} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} \times \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F} \cdot \vec{G}\right) = \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{G}\right) + \vec{G} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right)$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \times \vec{r}\,'(t) \rVert}$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert}$
Curvatura	$\kappa = \left\lVert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert = \frac{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert}{\lVert \vec{r}\,'(t) \rVert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)) \cdot \vec{r}\,'''(t)}{\lVert \vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t) \rVert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\lVert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\rVert = \left\lVert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\rVert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\lVert \vec{a} \times \vec{v} \rVert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}
$$

• **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \text{sen}(t)\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Normal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Binormal unitário em $t = 0$:

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

( ) $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6}\left(-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\right)$

Curvatura em $t = 0$:

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\kappa(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\kappa(0) = \frac{1}{3}$

Torção em $t = 0$:

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( ) $\tau(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( ) $\tau(0) = \frac{2}{3}$

( ) $\tau(0) = \frac{1}{3}$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma abelha viaja sobre uma trajetória $\vec{r}(t)$ com velocidade $\vec{r}\,'(t) = \vec{v}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$. Sabendo que a abelha passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ em $t = 0$, marque a resposta correta para cada coluna.

Posição da abelha $\vec{r}(t)$

( ) $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + (t + 1)\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + t\vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \vec{k}$

( ) $\vec{r}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

Componente tangencial da aceleração a_T

( ) $a_T = \frac{1 + t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$

( ) $a_T = \frac{t + 2t^2}{\sqrt{t^3 + t^2 + t}}$

( ) $a_T = \frac{1 + t^2}{\sqrt{t^4 + t^2 + t}}$

( ) $a_T = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

( ) $a_T = \frac{1 + 2t}{\sqrt{t^2 + t + 1}}$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a superfície fechada limitada pelos plano $x = \pm 2$, $y = \pm 2$ e $z = \pm 2$, orientada para fora, e o campo $\vec{F} = -2(z^2 + 1)xy\vec{i} + (z^2 + 1)y^2\vec{j} + xyz^2\vec{k}$.

Divergente

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)xy + (z^2 + 1)y^2 + xyz^2$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)x + xyz^2$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)x + xyz$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -(z^2 + 1)y + 2xyz$

( ) $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2xyz$

Integral de superfície

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = 0$

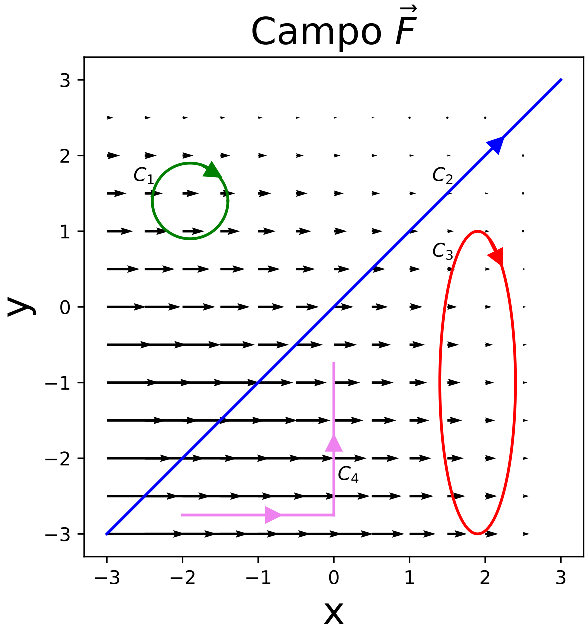
( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = 4$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = 8$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = 16$

( ) $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}dS = 24$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte $z = 0$ de um campo $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i}$ e as seguintes quatro curvas orientadas: C_1 é um círculo, C_2 é um segmento de reta, C_3 é uma elipse e C_4 é a união de dois segmentos de reta. Considere também a esfera S_1 centrada na origem, raio 2 e orientada para fora e o plano S_2 dado por $x = 0$, $-2 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, orientado no sentido de $\vec{i}$.
Marque a resposta correta para cada coluna.



Integral de linha:

- ( ) $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$
- ( ) $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- ( ) $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$
- ( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$
- ( ) $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

- ( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$
- ( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$
- ( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$
- ( ) $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$
- ( ) $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

Curvatura:

- ( ) A curvatura é uma constante para cada curva.
- ( ) A curvatura é zero para C_1 e C_2.
- ( ) A curvatura não é constante para C_1 e C_3
- ( ) Os pontos de maior e menor curvatura estão sobre a curva C_3
- ( ) A curvatura sobre C_2 cresce da esquerda para direita.

Rotacional:

- ( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} > 0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} < 0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} = 0$ em todos os pontos.
- ( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{i} > 0$ em todos os pontos
- ( ) $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{j} > 0$ em todos os pontos

• **Questão 5** (1.0 ponto) Sejam a_N e a_T indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente. Prove algebricamente a expressão dada por:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde $\vec{a}$ é o vetor aceleração. Faça uma interpretação geométrica.

- **Questão 6** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \dfrac{y^2}{2}\vec{k}$, a superfície S_1 formada pelo parabolóide $z = 1 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$ e a superfície S_2 formada pelo cone $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 1$, ambas orientada no sentido positivo do eixo z.

  a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

  $$\iint_{S_1} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS$$

  e

  $$\iint_{S_2} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

  convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar o teoremas de Stokes).

  b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a).

  c) (0.5) Usando o resultado do item a) e o teorema do Stokes, é possível calcular o valor da integral

  $$\iint_{D} \left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{n} dS.$$

  onde D é disco unitário no plano xy dado por $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$?