1 - 5	6	7	Total

UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2016/2
Prova da área IB

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente!

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w + ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right), \quad a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2 dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left[a_n\cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)\right]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_n t)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{iw_n t},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(A(w)\cos(wt) + B(w)\operatorname{sen}(wt)\right)dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\operatorname{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $\displaystyle erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonométricas:

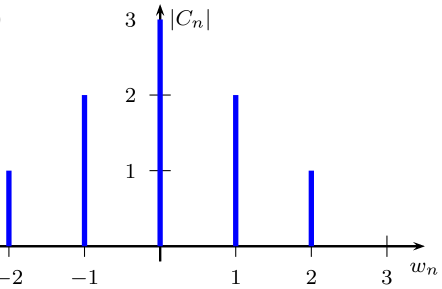
$\cos(x)\cos(y) = \dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \dfrac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Integrais:

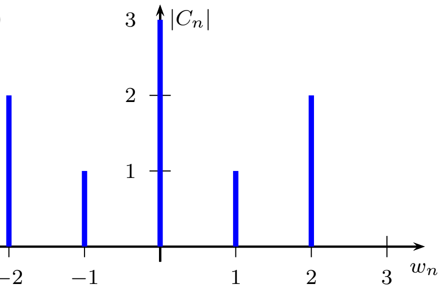
$\displaystyle\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\displaystyle\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\displaystyle\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\displaystyle\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que melhor representam os diagramas de espectro de amplitude e fase da função $f(t) = -3 + 2\cos(t) - 4\,\mathrm{sen}(t)$ (amplitude na primeira coluna e fase na segunda).

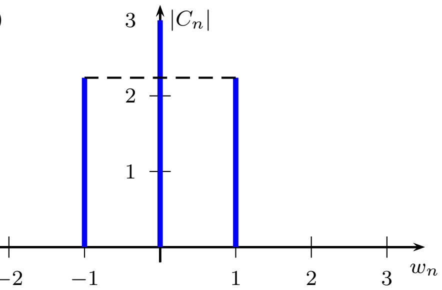
( )



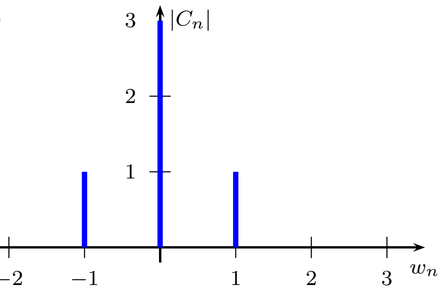
( )



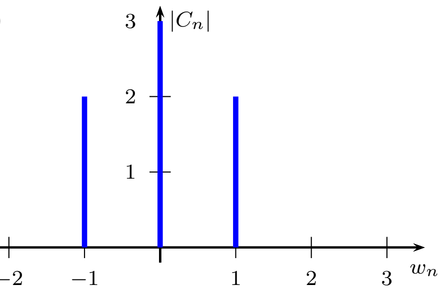
(X)



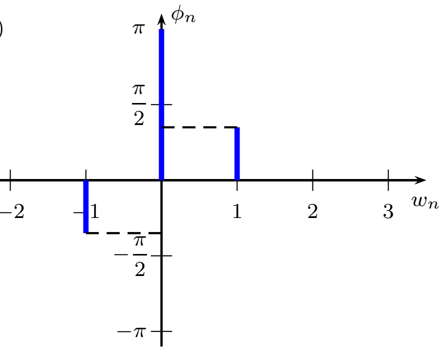
( )



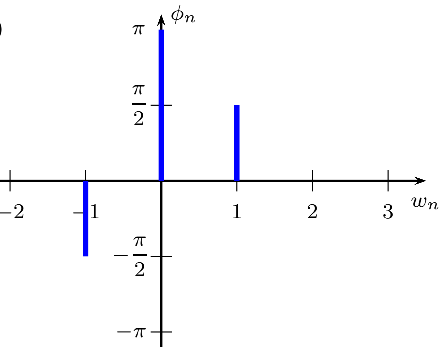
( )



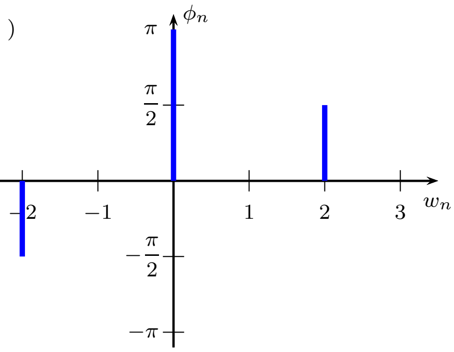
(X)



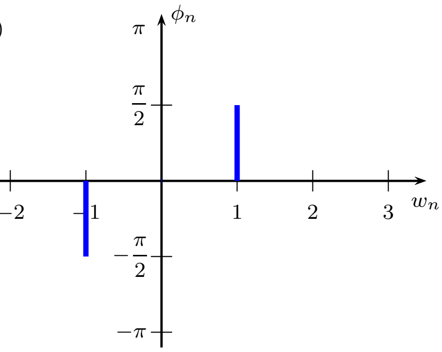
( )



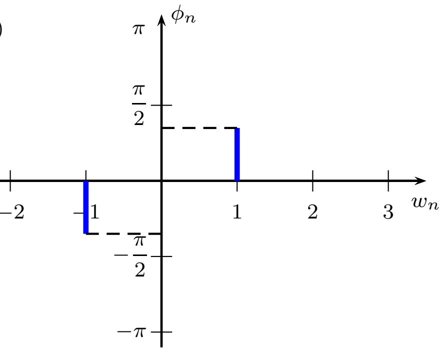
( )



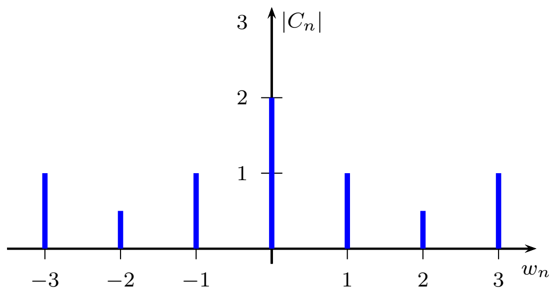
( )



( )



• **Questão 2** (1.0 ponto) Dado o diagrama de espectro de amplitude de uma função periódica $f(t)$, marque as alternativas que representam, respectivamente, o módulo do valor médio e a potência média da função $\left(\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt\right| \quad \text{e} \quad \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)$.



Valor Médio
( ) 0
( ) 0.5
( ) 1
( ) 1.5
(X) 2
( ) 2.5
( ) 3

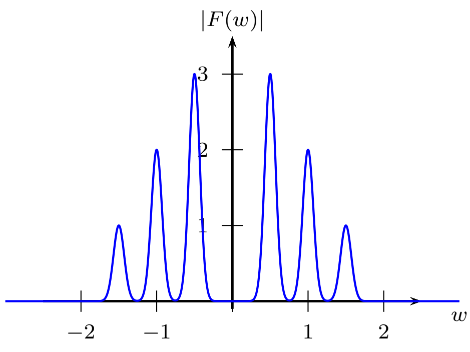
Potência Média
( ) 11.5
( ) 10
(X) 8.5
( ) 6
( ) 4.5
( ) 3
( ) 0.5

• **Questão 3** (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Fourier das funções $f(t) = e^{-2|t|}$ e $g(t) = e^{-2|t|}\cos(3t)$, $a > 0$, respectivamente.

$\mathcal{F}\{f(t)\}$
( ) $\frac{1}{w^2+2}$
( ) $\frac{2}{w^2+2}$
( ) $\frac{2}{w^2+4}$
(X) $\frac{4}{w^2+4}$
( ) $\frac{4}{w^2+\sqrt{2}}$
( ) $\frac{8}{w^2+4}$
( ) $\frac{2}{w^2+1}$

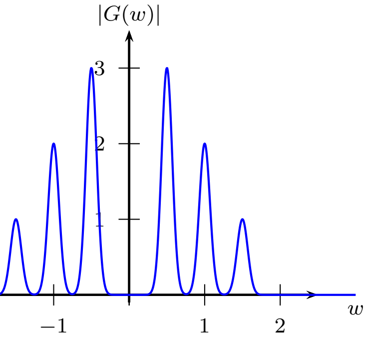
$\mathcal{F}\{g(t)\}$
(X) $\frac{2}{(w-3)^2+4} + \frac{2}{(w+3)^2+4}$
( ) $\frac{2}{(w-3)^2+4}$
( ) $\frac{2}{(w+3)^2+4}$
( ) $\frac{4}{(w-3)^2+4} + \frac{4}{(w+3)^2+4}$
( ) $\frac{2}{(w-3)^2+2} + \frac{2}{(w+3)^2+2}$
( ) $\frac{2}{(w-2)^2+3} + \frac{2}{(w+2)^2+3}$
( ) $\frac{2}{(w-3)^2+\sqrt{2}} + \frac{2}{(w+3)^2+\sqrt{2}}$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o diagrama de espectro de magnitudes de uma função $f(t)$ dado no gráfico abaixo ($\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$). Assinale as alternativas que representam os diagramas de espectro de magnitudes de $g(t) = f(2t)$ e $h(t) = f'(t)$, respectivamente.

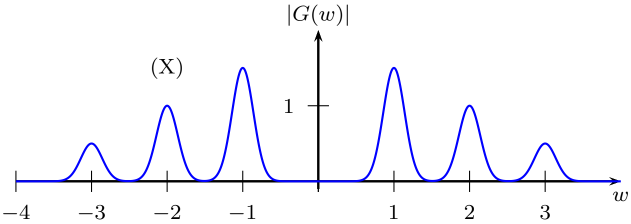


Assinale as respostas da questão 4 nesta página: $G(w)$ na coluna à esquerda e $H(w)$ à direita.

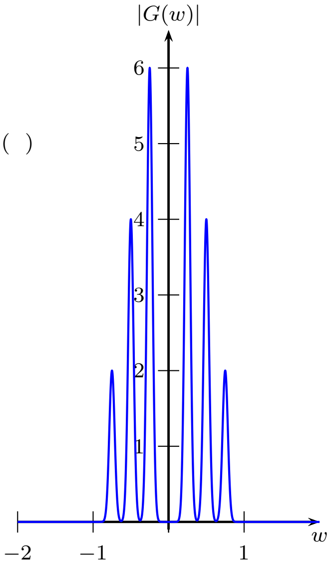
( )



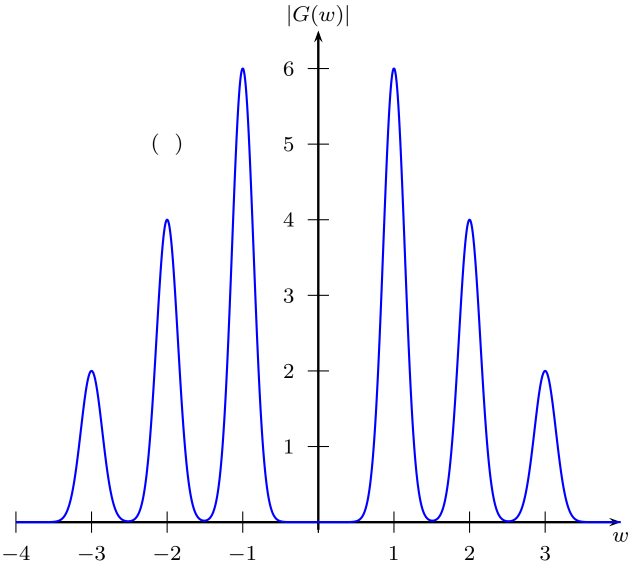
(X)



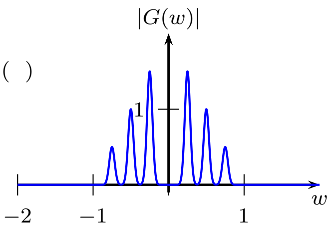
( )



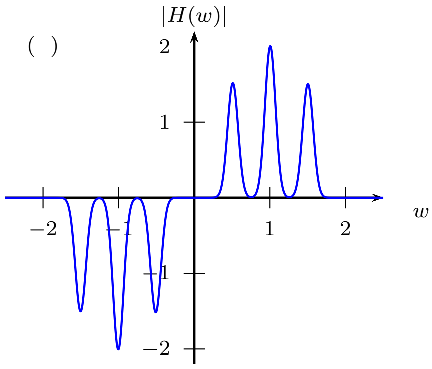
( )



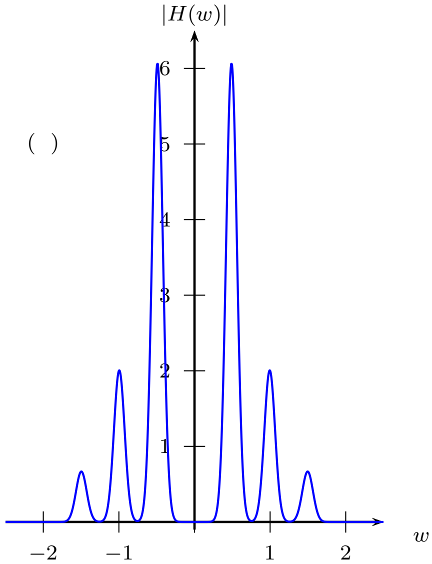
( )



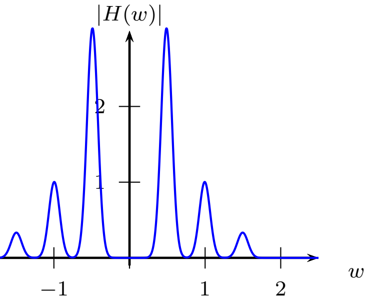
( )



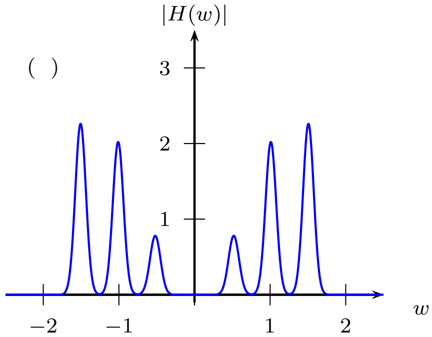
( )



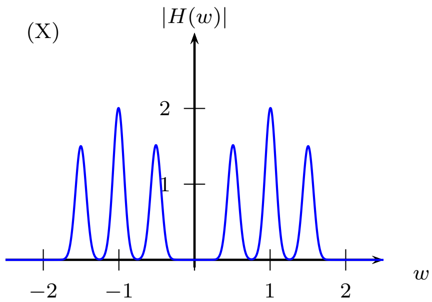
( )



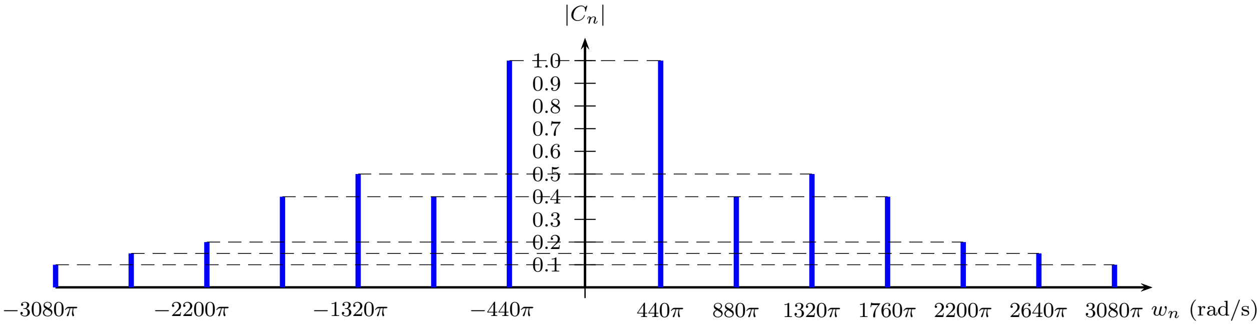
( )



(X)



• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota tocada por um instrumento musical e representado por uma função periódica $f(t)$:



Marque a resposta que indicam as notas que melhor aproximam à do sinal $f(t)$ e à do sinal $f(-3t)$, respectivamente.
[Lembrete: 2π rad/s $= 1\,\text{Hz}$].

Nota tocada por $f(t)$

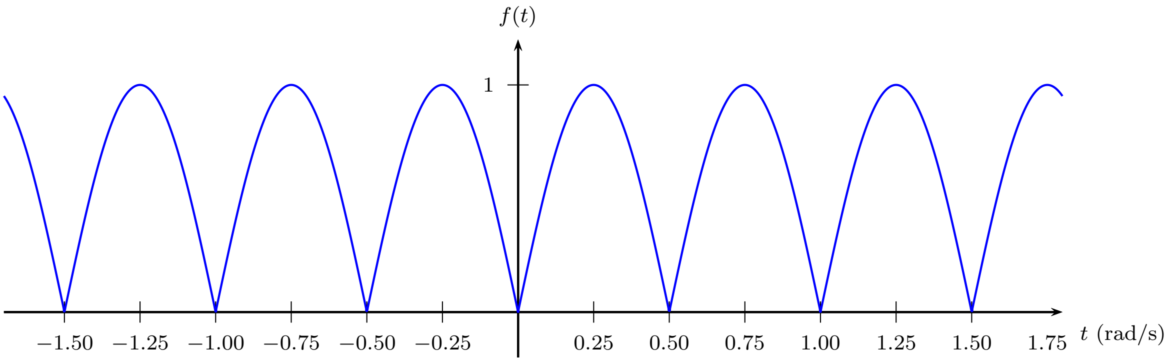
(X) Lá da escala 2
( ) Lá da escala 3
( ) Dó da escala 2
( ) Dó da escala 3
( ) Sol da escala 2
( ) Sol da escala 3

Nota tocada por $f(-3t)$

( ) Dó da escala 2
( ) Ré da escala 1
( ) Si da escala 6
( ) Mi da escala 5
(X) Mi da escala 4
( ) Mi da escala 3

- **Questão 6** (3.0 pontos) Considere a função $f(t) = |\operatorname{sen}(2\pi t)|$ e responda as questões abaixo.
  a) (0.5) Calcule a frequência e o período fundamental de $f(t)$
  b) (1.5) Calcule a forma trigonométrica da série de Fourier de $f(t)$
  c) (1.0) Esboce as primeiras raias dos diagramas de espectro da série de Fourier de $f(t)$.

  Solução: a) Olhando o gráfico abaixo o período e a frequência fundamental ficam claros: $T = \dfrac{1}{2}$ e $w = 4\pi$.



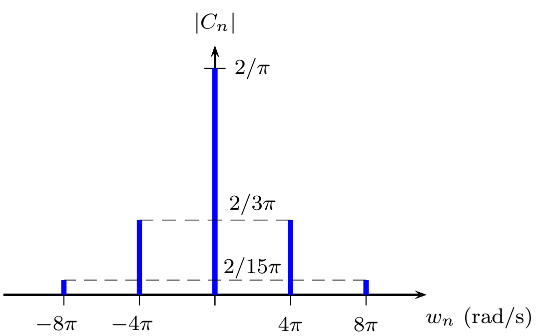
Solução: b) Como $f(t)$ é par, $b_n = 0$. Assim, calculamos abaixo a_0 e a_n.

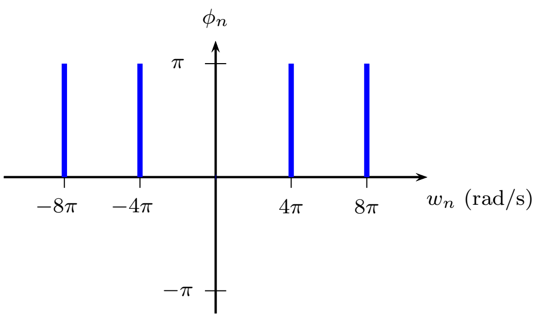
$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T}\int_0^T |\operatorname{sen}(2\pi t)|dt \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi t)dt \\
&= -4\left[\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{4}{2\pi}\left[\cos(\pi) - 1\right] = \frac{4}{\pi}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T |\operatorname{sen}(2\pi t)|\cos(w_n t)dt \\
&= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\pi t)\cos(4\pi n t)dt \\
&= 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\operatorname{sen}(2\pi t + 4\pi n t) + \operatorname{sen}(2\pi t - 4\pi n t)\right) dt \\
&= -2\left[\frac{\cos(2\pi(1+2n)t)}{2\pi(1+2n)} + \frac{\cos(2\pi(1-2n)t)}{2\pi(1-2n)}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= -2\left[\frac{\cos(\pi(1+2n)) - 1}{2\pi(1+2n)} + \frac{\cos(\pi(1-2n)) - 1}{2\pi(1-2n)}\right] \\
&= 4\left[\frac{1}{2\pi(1+2n)} + \frac{1}{2\pi(1-2n)}\right] \\
&= \frac{4}{\pi(1-4n^2)}.
\end{aligned}
$$

Solução: c) Observe que $C_n = \dfrac{a_n}{2}$. Temos

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{2}{\pi}e^{i\cdot 0} && (1)\\
C_1 &= C_{-1} = \frac{2}{3\pi}e^{i\cdot\pi} && (2)\\
C_2 &= C_{-2} = \frac{2}{15\pi}e^{i\cdot\pi} && (3)
\end{aligned}
$$





• **Questão 7** (2.0 pontos) Considere a seguinte equação da onda:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

a) (1.0) Aplique a transformada de Fourier na equação diferencial para concluir que

$$\mathcal{F}\{u(x,t)\} = F(k)\cos(kt),$$

onde $F(k) = \mathcal{F}\{e^{-|x|}\}$.

b) (1.0) Calcule a transformada inversa usando a expressão do item anterior para concluir que a solução da equação diferencial dada é

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(e^{-|x+t|} + e^{-|x-t|}).$$

Solução: a) Aplicamos a transformada de Fourier no problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2}(k,t) = -k^2 U(k,t), \\ U(k,0) = \mathcal{F}\{e^{-|x|}\}, \\ U_t(k,0) = 0, \end{cases}$$

onde $U(k,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\}$. A solução desta equação diferencial ordinária é

$$U(k,t) = A(k)\cos(kt) + B(k)\,\mathrm{sen}(kt).$$

Quando impomos as condições iniciais, temos $U(k,0) = A(k) = F(k)$ e $U_t(k,0) = kB(k) = 0$. Logo

$$U(k,t) = F(k)\cos(kt).$$

Solução: b) Aplicamos a transformada inversa e usamos a propriedade do deslocamento:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\cos(kt)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)e^{ikt}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{F(k)e^{-ikt}\right\}\right) \\ &= \frac{1}{2}(e^{-|x+t|} + e^{-|x-t|}). \end{aligned}$$