

1	2	3	4	Total

Nome: _____

Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolação	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \operatorname{sen}(wx) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \operatorname{sen}(wx) - w \cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

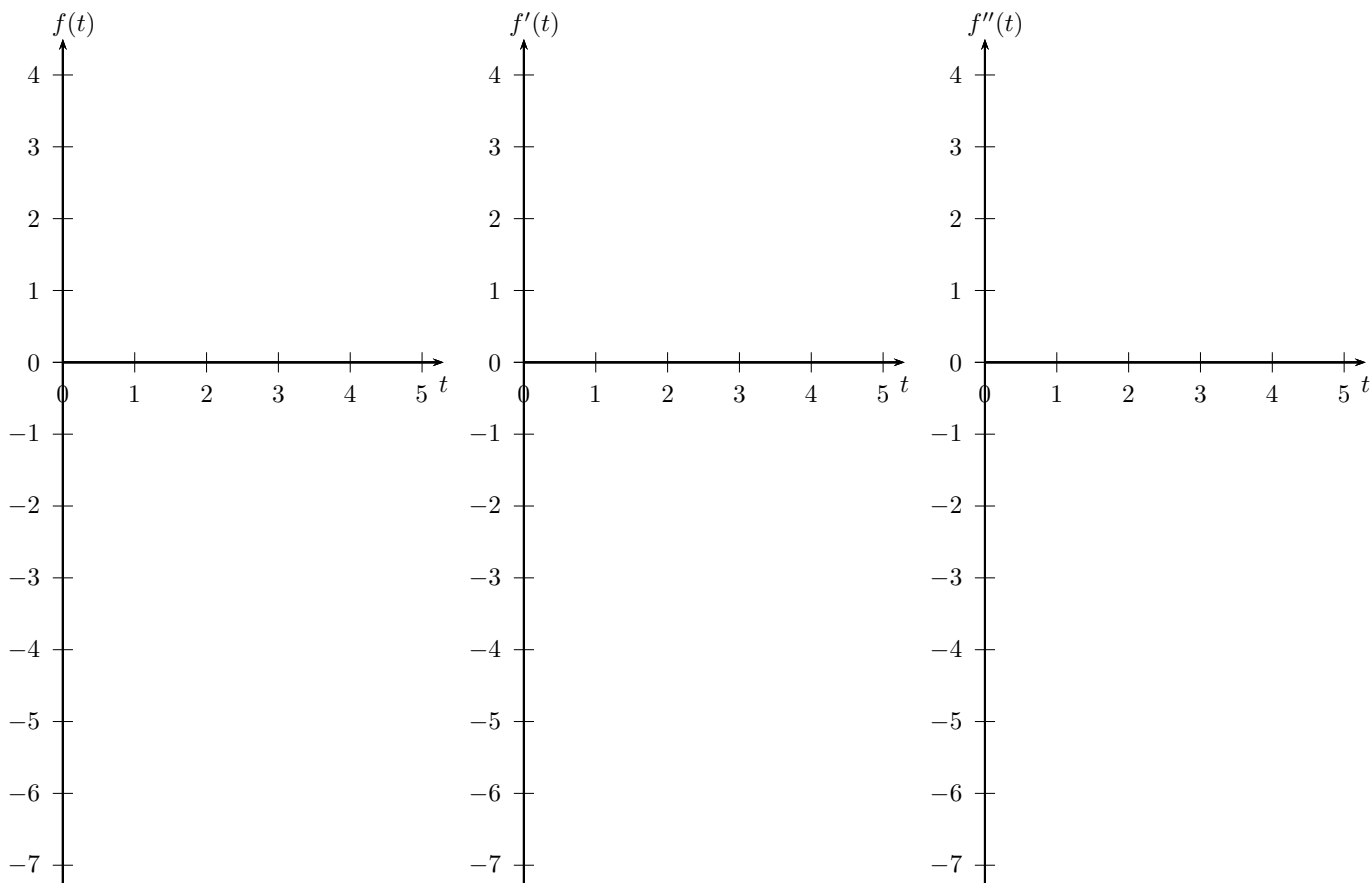
	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \sin(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \sin(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \sin(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\sin(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \sin(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\sin(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\sin(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \sin(at) \sinh(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh(at) - \sin(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \sin(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \sin(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

- **Questão 1** (3.0 pontos) Considere a função contínua

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ at + b, & 2 \leq t \leq 4 \\ -2, & t > 4 \end{cases}$$

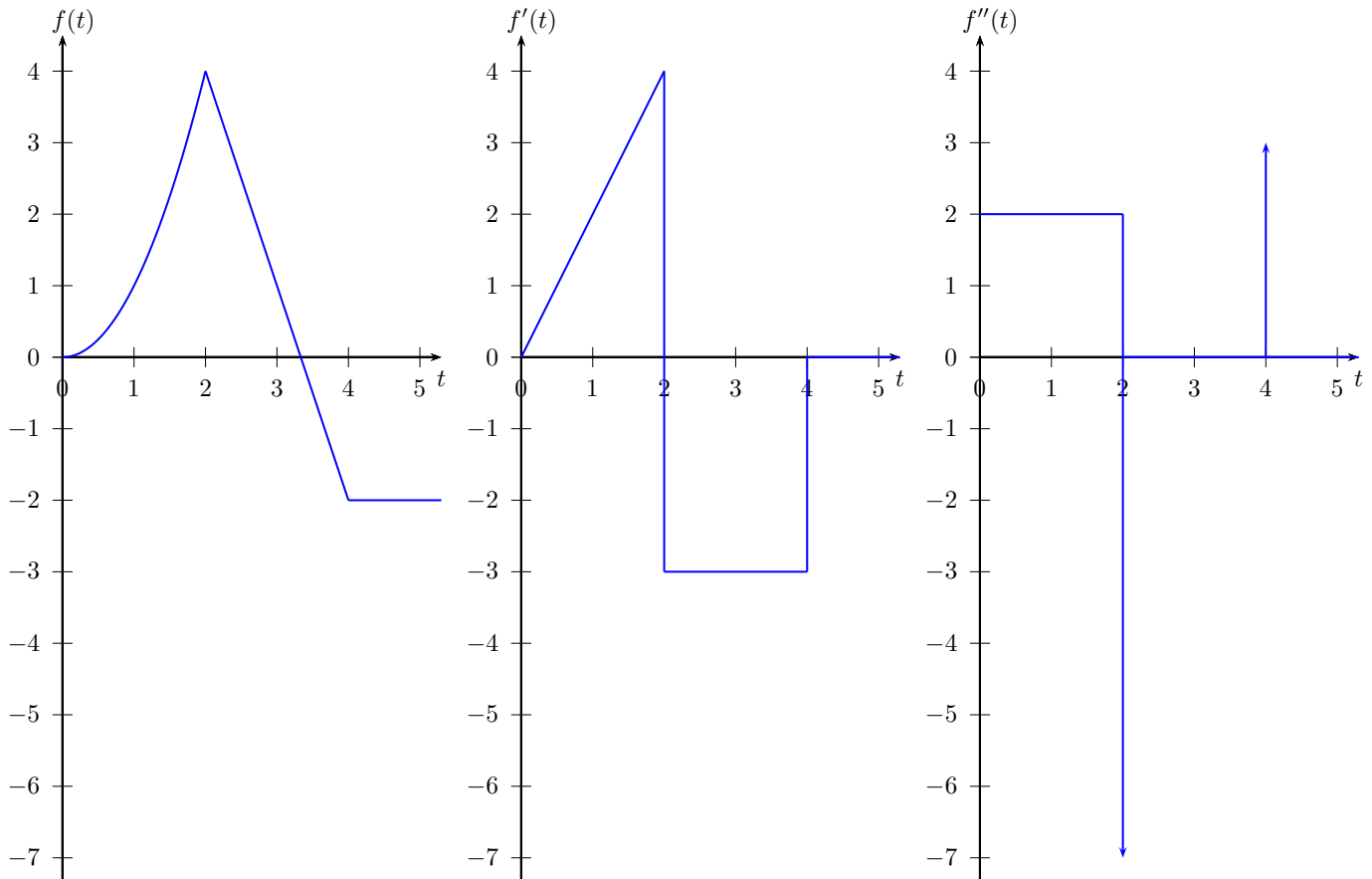
- a) (0.5 ponto) Calcule os valores de a e b .
- b) (0.5 ponto) Esboce os gráficos de $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$ nos espaços abaixo.



- c) (1.0 ponto) Escreva $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$ em termos das funções de Dirac e Heaviside.
- d) (1.0 ponto) Calcule as transformadas de Laplace das funções $f(t)$, $f'(t)$ e $f''(t)$.

Solução:

- a) Em $t = 2$, temos $at + b = t^2$, isto é, $2a + b = 4$. Também, em $t = 4$, temos $at + b = -2$, isto é, $4a + b = -2$. Resolvemos a sistema 2x2 para obter os valores de $a = -3$ e $b = 10$.
- b) Seguem os gráficos



c)

$$\begin{aligned}
 f(t) &= t^2 u(t) + (-3t + 10 - t^2) u(t - 2) + (-2 - 10 + 3t) u(t - 4) \\
 &= t^2 u(t) - (t^2 - 4t + 4 + 7t - 14) u(t - 2) + 3(t - 4) u(t - 4) \\
 &= t^2 u(t) - (t - 2)^2 u(t - 2) - 7(t - 2) u(t - 2) + 3(t - 4) u(t - 4).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= 2tu(t) + (-2t - 3)u(t - 2) + 3u(t - 4) \\
 &= 2tu(t) - (2t - 4 + 7)u(t - 2) + 3u(t - 4) \\
 &= 2tu(t) - 2(t - 2)u(t - 2) - 7u(t - 2) + 3u(t - 4).
 \end{aligned}$$

$$f''(t) = 2u(t) - 2u(t - 2) - 7\delta(t - 2) + 3\delta(t - 4).$$

d) Calculamos as transformadas de Laplace usando a Propriedade da translação no eixo t .

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{2 - 2e^{-2s} - 7se^{-2s} + 3se^{-4s}}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{2 - 2e^{-2s} - 7se^{-2s} + 3se^{-4s}}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = \frac{2 - 2e^{-2s} - 7se^{-2s} + 3se^{-4s}}{s}$$

- **Questão 2** (2.5 pontos) Dado o oscilador harmônico

$$\begin{cases} x''(t) + 7x'(t) + 10x(t) = f(t) \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases},$$

responda:

- a) (0.5 ponto) Marque a resposta correta a respeito do amortecimento
- ☐ Superamortecido
- ☐ Subamortecido
- ☐ Criticamente amortecido
- ☐ Não amortecido
- ☐ Nenhum dos itens anteriores
- b) (1.5 ponto) Suponha $f(t) = \delta(t-2) + \delta(t-4)$ e calcule $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $x(t)$
- c) (0.5 ponto) Escreva $x(1)$, $x(3)$ e $x(5)$.

Solução:

- a) Calculamos $\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 9$, que é positivo. Logo, o oscilador é superamortecido.
- b) Calculamos a transformada de Laplace da equação para obter

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + 7(sX(s) - x(0)) + 10X(s) = e^{-2s} + e^{-4s}.$$

Como as condições iniciais são nulas, temos:

$$X(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 7s + 10} = \frac{e^{-2s} + e^{-4s}}{(s+2)(s+5)}.$$

O item 11 da tabela nos dá

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s+2)(s+5)}\right\} = \frac{1}{-2-(-5)}(e^{-2t} - e^{-5t}) = \frac{e^{-2t} - e^{-5t}}{3}$$

Portanto, usando a propriedade da translação no eixo t , temos:

$$x(t) = \frac{u(t-2)}{3}(e^{-2(t-2)} - e^{-5(t-2)}) + \frac{u(t-4)}{3}(e^{-2(t-4)} - e^{-5(t-4)}).$$

c)

$$x(1) = 0, \quad x(3) = \frac{e^{-2} - e^{-5}}{3} \quad \text{e} \quad x(5) = \frac{e^{-6} - e^{-15}}{3} + \frac{e^{-2} - e^{-5}}{3}$$

• **Questão 3** (2.5 pontos) Resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'(t) + 2 \int_0^t x(t - \tau) \cos(\tau) d\tau = 4e^{-t} + \sin(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: Calculamos a transformada de Laplace para obter

$$sX(s) - x(0) + \frac{2sX(s)}{s^2 + 1} = \frac{4}{s + 1} + \frac{1}{s^2 + 1}$$

Assim, temos:

$$\left(s + \frac{2s}{s^2 + 1}\right) X(s) = \frac{4}{s + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} + 1$$

ou seja,

$$(s^3 + 3s) X(s) = \frac{4(s^2 + 1)}{s + 1} + 1 + (s^2 + 1)$$

resultando em

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{4(s^2 + 1)}{(s + 1)(s^3 + 3s)} + \frac{1}{(s^3 + 3s)} + \frac{(s^2 + 1)}{(s^3 + 3s)} \\ &= \frac{4(s^2 + 1) + s + 1 + (s + 1)(s^2 + 1)}{(s + 1)(s^3 + 3s)} \\ &= \frac{s^3 + 5s^2 + 2s + 6}{s(s + 1)(s^2 + 3)} \end{aligned}$$

Usando a técnica de frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{s^3 + 5s^2 + 2s + 6}{s(s + 1)(s^2 + 3)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{C +Ds}{s^2 + 3} \\ &= \frac{A(s + 1)(s^2 + 3) + Bs(s^2 + 3) + (C +Ds)s(s + 1)}{s(s + 1)(s^2 + 3)} \\ &= \frac{As^3 + 3As + As^2 + 3A + Bs^3 + 3Bs + Cs^2 + Cs + Ds^3 + Ds^2}{s(s + 1)(s^2 + 3)} \\ &= \frac{(A + B + D)s^3 + (A + C + D)s^2 + (3A + 3B + C)s + 3A}{s(s + 1)(s^2 + 3)}. \end{aligned}$$

Chegamos no sistema:

$$\begin{cases} A + B + D = 1 \\ A + C + D = 5 \\ 3A + 3B + C = 2 \\ 3A = 6 \end{cases}$$

Ao encontrar $A = 2$, reduzimos o sistema a

$$\begin{cases} B + D = -1 \\ C + D = 3 \\ 3B + C = -4. \end{cases}$$

Fazemos $D = -1 - B$ para obter o sistema 2x2

$$\begin{cases} C - B = 4 \\ 3B + C = -4. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda, temos $4B = -8$, ou seja, $B = -2$. Assim, $C = 2$ e $D = 1$. Portanto,

$$\frac{s^3 + 5s^2 + 2s + 6}{s(s + 1)(s^2 + 3)} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 1} + \frac{2 + s}{s^2 + 3}.$$

Calculamos a transformada inversa usando a tabela:

$$x(t) = 2 - 2e^{-t} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t) + \cos(\sqrt{3}t)$$

• **Questão 4** (2.0 pontos) Calcule as seguintes transformadas inversas

a) (0.25 ponto) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \right\}$

b) (0.25 ponto) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \right\}$

c) (0.5 ponto) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{((s-1)^2 + 1)^2} \right\}$

d) (1.0 ponto) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{((s-1)^2 + 1)^2(1 - e^{-s})} \right\}$

[Dica: use uma expansão em série de Taylor para $\frac{1}{1 - e^{-s}}$]

Solução:

a) Direto do item 22 da tabela

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{(s^2 + 1)^2} \right\} = t \sin(t)$$

b) Direto do item 21 da tabela

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \right\} = \sin(t) - t \cos(t)$$

c) (0.5 ponto) Pela propriedade da translação no eixo s , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{((s-1)^2 + 1)^2} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2(s-1)}{((s-1)^2 + 1)^2} \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{((s-1)^2 + 1)^2} \right\} \\ &= e^t ((t+1) \sin(t) - t \cos(t)) \end{aligned}$$

c) (1.0 ponto) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{((s-1)^2 + 1)^2(1 - e^{-s})} \right\}$

d) Fazendo a expansão em Série de Taylor, conforme a dica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{((s-1)^2 + 1)^2(1 - e^{-s})} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s}{((s-1)^2 + 1)^2} (1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots) \right\} \\ &= e^t ((t+1) \sin(t) - t \cos(t)) \\ &+ u(t-1)e^{t-1} (t \sin(t-1) - (t-1) \cos(t-1)) \\ &+ u(t-2)e^{t-2} ((t-1) \sin(t-2) - (t-2) \cos(t-2)) + \dots \end{aligned}$$