UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2015/1
Prova da área IB

1	2	3	4	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha a caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$
Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
Transformada da integral	Se $F(0)=0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(w)\rvert^2dw$
Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\ge 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \qquad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\le n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\le m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\ge 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

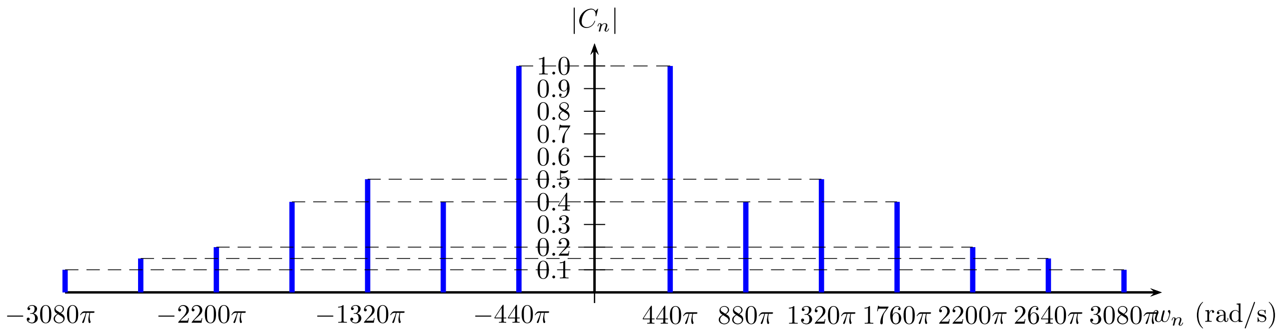
Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$

• **Questão 1** (3.0 pontos) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota Lá (220 Hz) tocada por um piano:



a) (0.6) Observe que existe uma infinidade de funções $f(t)$ cujo diagrama de espectro de magnitudes é da forma apresentada. Explique por quê?

Para cada forma de onda dada nos itens b) a e), indique se ela é uma possível representação do som dado no diagrama de magnitudes acima e justifique sua resposta. Resposta sem justificativa receberá grau nulo.

b) (0.6)A função $f(t)$ da forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(440\pi t) + 0.4\,\text{sen}(880\pi t) + 0.5\cos(1320\pi t) + \\ &+ 0.4\,\text{sen}(1760\pi t) + 0.2\cos(2200\pi t) + 0.15\,\text{sen}(2640\pi t) + 0.1\cos(3080\pi t) \end{aligned}$$

c) (0.6) A função $f(t)$ da forma

$$\begin{aligned} f(t) &= K\cos(440\pi t) + 0.4K\,\text{sen}(880\pi t) + 0.5K\cos(1320\pi t) + \\ &+ 0.4K\,\text{sen}(1760\pi t) + 0.2K\cos(2200\pi t) + 0.15K\,\text{sen}(2640\pi t) + 0.1K\cos(3080\pi t) \end{aligned}$$

para alguma constante $K > 0$ e satisfaz

$$\int_0^{\frac{1}{220}} |f(t)|^2 dt = 1.$$

d) (0.6)A função $f(t)$ da forma

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\cos\left(440\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.8\cos\left(880\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1.0\cos\left(1320\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \\ &+ 0.8\cos\left(1760\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) + 0.4\cos\left(2200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 0.3\cos\left(2640\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 0.2\,\text{sen}\left(3080\pi t + \pi\right) \end{aligned}$$

e) (0.6)A função $f(t)$ da forma

$$f(t) = \sum_{n=-7}^{7} C_n e^{440 n\pi i t},$$

onde $\sum_{n=-7}^{7} |C_n| = 3.825$ e $C_0 = e^{i\pi}$.

Solução:

a) Porque C_n só pode ser conhecido quando sabemos o módulo $|C_n|$ e a fase θ_n ($C_n = |C_n|e^{i\theta_n}$). Como o gráfico da fase não é dado, podemos construir uma infinidade de sinais $f(t)$ com o mesmo módulo e variando as fases.

b) Não. Observe que $a_1 = 1$, $b_1 = 0$ e $C_1 = \dfrac{a_1 - ib_1}{2} = 0.5$, diferente do valor de C_1 do gráfico.

c) Não. Pelo teorema de Parseval, $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$. Usando $T = \dfrac{2\pi}{440\pi} = \dfrac{1}{220}$, temos

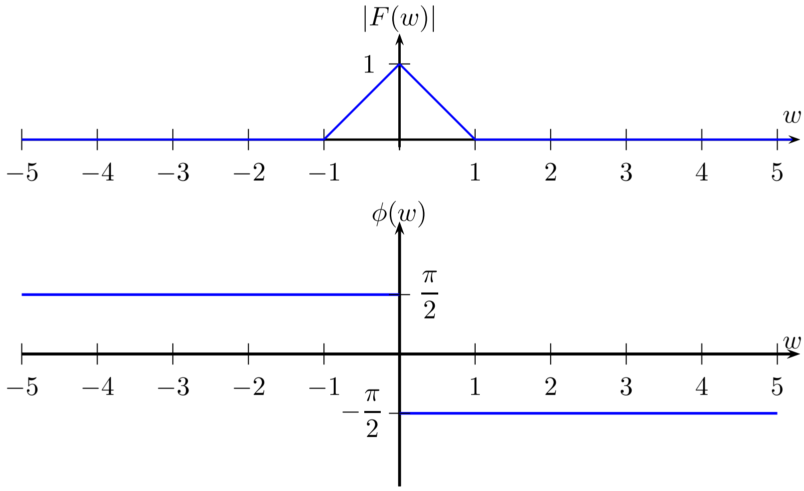
$$220\int_0^{\frac{1}{220}} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \sum_{n=-7}^{7} |C_n|^2.$$

Pelo gráfico, observe $\sum_{n=-7}^{7} |C_n|^2 \neq 220$.

d) Sim. Olhando apenas a magnitude, temos $a_1 = 2$ e $b_1 = 0$, ou seja, $C_1 = \dfrac{a_1 + ib_1}{2} = 1$ e $|C_1| = |C_{-1}| = 1$. A mesma conta para C_2, C_3, C_4, ...

e) Não. $C_0 = e^{i\pi} = -1$ implica em $|C_0| = 1$, diferente do valor dado no gráfico.

• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere uma função $f(t)$ e sua transformada $F(w)$ de Fourier representada pelos diagramas de espectro abaixo:



a) (1.0) Escreva uma expressão para $F(w)$ usando os diagramas de espectro. [Dica: a função $F(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}$ pode ser uma função definida por partes]

b) (0.5) Classifique as partes real e imaginária da função $F(w)$ calculada no item a) como par, ímpar ou nem par nem ímpar.

c) (1.0) Calcule $f(t)$ usando $F(w)$ do item a).

Solução:

a)

$$F(w) = \begin{cases} 0, & w < -1 \\ (w+1)e^{i\frac{\pi}{2}}, & -1 \leq w \leq 0 \\ (-w+1)e^{-i\frac{\pi}{2}}, & 0 < w \leq 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases}$$

ou, simplesmente,

$$F(w) = \begin{cases} 0, & w < -1 \\ i(w+1), & -1 \leq w \leq 0 \\ -i(-w+1), & 0 < w \leq 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases}$$

b) Parte real nula e parte imaginária ímpar, ou seja, $F(w) = 0 + iG(w)$, onde

$$G(w) = \begin{cases} 0, & w < -1 \\ (w+1), & -1 \leq w \leq 0 \\ -(-w+1), & 0 < w \leq 1 \\ 0, & w > 1 \end{cases}$$

Observe que, se $0 < w \leq 1$, então $G(w) = -(-w+1)$ e $G(-w) = (-w+1)$, ou seja, $G(w) = -G(-w)$. Também, se $w > 1$, então $G(-w) = 0 = -G(w)$.

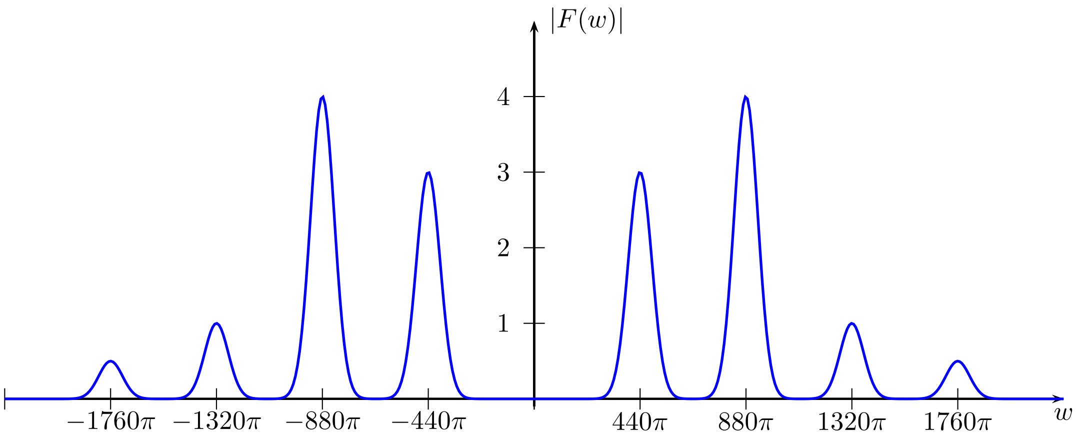
c) (1.0) Como a função $F(w)$ é imaginária pura e tem parte imaginária ímpar, então

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cos(wt)dw + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\,\mathrm{sen}(wt)dw \\ &= \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(w)\,\mathrm{sen}(wt)dw \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{i}{\pi}\left[\int_0^1 F(w)\,\mathrm{sen}(wt)dw + \int_1^\infty F(w)\,\mathrm{sen}(wt)dw\right] \\
&= \frac{i}{\pi}\int_0^1 (-i(-w+1))\,\mathrm{sen}(wt)dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 (-w+1)\,\mathrm{sen}(wt)dw \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t}(-w+1)(-\cos(wt))\Big|_0^1 - \frac{1}{t}\int_0^1 (-1)(-\cos(wt))dw\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{sen}(wt)\Big|_0^1\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\,\mathrm{sen}(t)\right].
\end{aligned}$$

• **Questão 3** (2.0 pontos) O gráfico abaixo apresenta o diagrama de magnitudes do registro do som de um instrumento musical.



Assinale a alternativa correta.

a) (1.0) A energia total do sinal dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

i) é menor que 5 J.

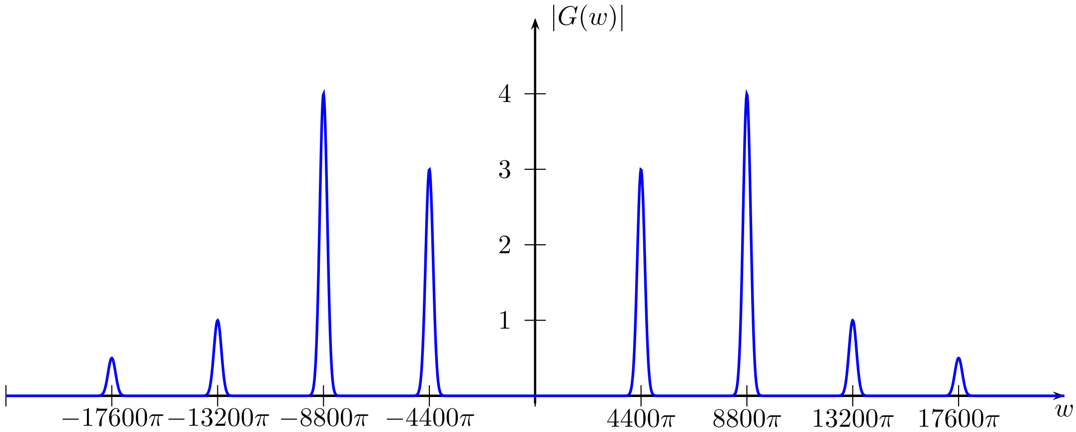
ii) está entre 5 J e 500 J.

iii) está entre 500 J e 50000 J.

iv) está entre 50000 J e 5000000 J.

v) é maior que 5000000 J.

b) (1.0) O gráfico abaixo apresenta o espectro de magnitude da transforma de Fourier de uma função $g(t)$.



É correto afirmar que

i) $g(t) = \frac{1}{10} f(10t)$

ii) $g(t) = \frac{1}{10} f\left(\frac{t}{10}\right)$

iii) $g(t) = 10 f\left(\frac{t}{10}\right)$

iv) $g(t) = 10 f(10t)$

v) nenhuma das alternativas anteriores

Solução:

a) O item correto é o iii), pois pelo teorema de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw.$$

Portanto, estimamos grosseiramente a área abaixo da curva aproximando por retângulos e triângulos: Os picos de $|F(w)|^2$ serão 9, 16, 1 e 0.25. As bases são aproximadamente $\frac{2}{3}440\pi$. Aproximando por retângulos temos:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \approx \frac{1}{2\pi}(16 + 9 + 1 + 0.25) \times 2 \times \frac{2}{3}440\pi \approx 9 \times 880 = 7920.$$

Por triângulos, temos a metade do valor acima.

b) O item correto é o v)

• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere uma viga infinita repousada sobre um suporte elástico e $y(x)$ seu deslocamento vertical em cada ponto x. Suponha que o suporte exerce uma força de reação proporcional ao deslocamento $y(x)$ e que a viga é carregada em $x = 0$ por um força concentrada $\delta(x)$. A equação que modela o fenômeno é dada por:

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \delta(x) - 4y(x), \qquad -\infty < x < \infty,$$

Calcule o deslocamento $y(x)$ da viga usando a técnica de transformada de Fourier.
Solução: Aplicamos a transformada de Fourier na equação

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d^4y}{dx^4}\right\} = \mathcal{F}\left\{\delta(x)\right\} - 4\mathcal{F}\left\{y(x)\right\}.$$

Usando a notação $\mathcal{F}\{y(x)\} = Y(k)$ e usando a propriedade da derivada, temos

$$k^4Y(k) = 1 - 4Y(k),$$

pois $\mathcal{F}\left\{\delta(x)\right\} = 1$. Logo

$$Y(k) = \frac{1}{4+k^4}.$$

A transformada inversa é dada por

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+k^4}e^{ikx}dk.$$

Usando o fato que $Y(k)$ é par, temos

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{4+k^4}\cos(kx)dk.$$

O item 12 da tabela de integrais fornece o valor da integral:

$$y(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{8}e^{-x}(\cos(x) + \text{sen}(x)) = \frac{e^{-x}}{8}(\cos(x) + \text{sen}(x)).$$