

Nome:

Cartão:

Turma:

Regras a observar:

- Seja sucinto porém completo.
- Justifique todo procedimento usado.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente a sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Não é permitido destacar folhas. Se precisar de folhas adicionais, solicite ao professor.
- É permitido o uso de calculadoras científicas sem recursos gráficos, de computação simbólica (ex. resolução de integrais) ou armazenamento de textos.

Questão 1 (3.0) Considere a função $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < 5 \\ 7 - t, & 5 \leq t < 7 \\ 1 & t \geq 7 \end{cases}$$

- a) (1.5) Represente a função $f(t)$ em termos de funções de Heaviside. Calcule sua derivada $g(t) = f'(t)$. Esboce os gráficos de $f(t)$ e $g(t)$ indicando valores notáveis.
- b) (1.5) Calcule as transformadas de Laplace $F(s)$ e $G(s)$.

Questão 2 (2.5) Dada a equação do oscilador harmônico simples:

$$-ky(t) - \beta y'(t) + f_{ext} = my''(t).$$

Calcule a resposta $y(t)$ deste oscilador sujeito a forças externas e condições iniciais. Considere $m = 1$, $k = 2$, $\beta = 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e a força externa é dada por

$$f_{ext} = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ e^{-t}, & t > 2 \end{cases}$$

Usando a técnica da Transformada de Laplace, obtenha a solução $y(t)$.

Questão 3 (2.0) Use o método da Transformada de Laplace para encontrar a solução da seguinte equação diferencial:

$$ty'(t) = 5y(t).$$

sujeita à condição inicial $y(0) = 1$.

Questão 4 (2.5) Seja $F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2(1 - e^{-3s})} (1 - e^{-s})^2$. Calcule a transformada inversa de $F(s)$ e trace seu gráfico.