

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Ponto extra: () Wikipédia () Apresentação () Nenhum

Tópico: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}d\hat{s}$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1}e^{-x}dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx$

$\int xe^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x} \operatorname{sen}(wx) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \cos(wx) + w \operatorname{sen}(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

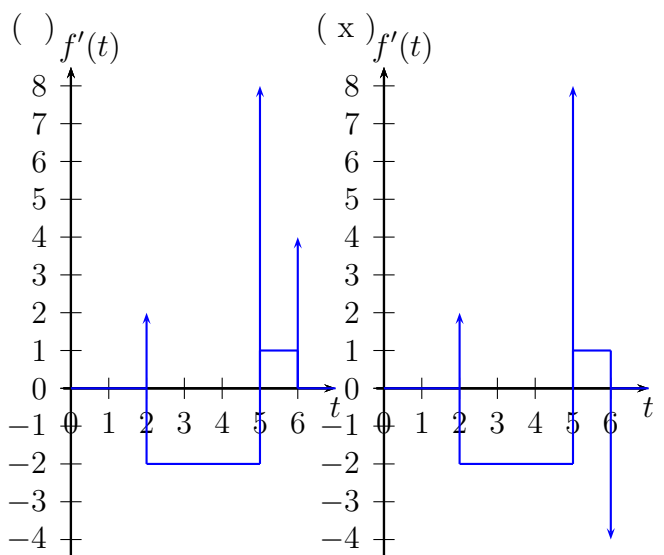
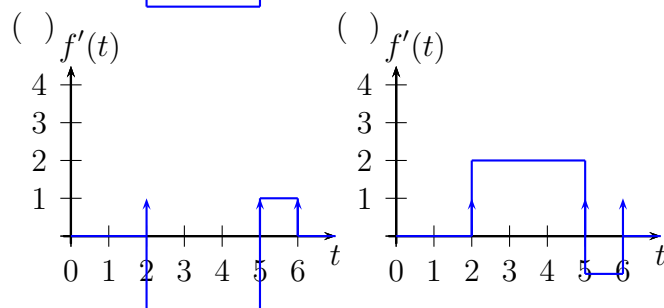
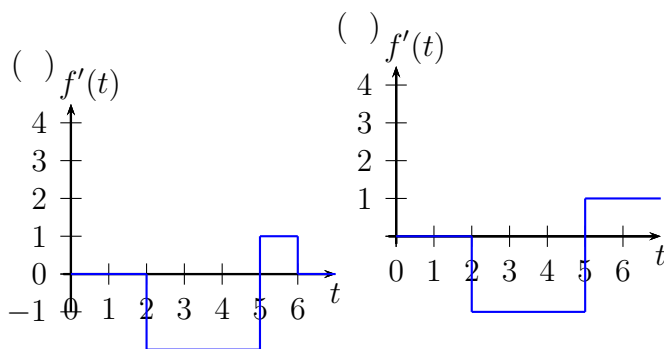
	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \sin(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \sin(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \sin(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\sin(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \sin(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\sin(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\sin(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \sin(at) \sinh(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh(at) - \sin(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \sin(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \sin(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ 6 - 2t, & 2 < t < 5 \\ t - 1, & 5 < t < 6 \\ 1, & t > 6. \end{cases}$$

Assinale na primeira coluna a alternativa que representa o gráfico de $f'(t)$ e, na segunda, a expressão para $\mathcal{L}\{f'(t)\}$.



Assinale a expressão para $\mathcal{L}\{f'(t)\}$

- () $\frac{-2e^{-2s} + 3e^{-5s} - e^{-6s}}{s}$
- () $\frac{-2e^{-2s} + 3e^{-5s} - e^{-6s} + se^{-2s} + se^{-5s} + se^{-6s}}{s}$
- () $\frac{-2e^{-2s} + 3e^{-5s} - e^{-6s} - 2se^{-2s} + 8se^{-5s} + 4se^{-6s}}{s}$
- (x) $\frac{-2e^{-2s} + 3e^{-5s} - e^{-6s} + 2se^{-2s} + 8se^{-5s} - 4se^{-6s}}{s}$
- () $\frac{-2e^{-2s} + 3e^{-5s}}{s}$
- () $\frac{e^{-2s} - e^{-5s}}{s}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Seja

$$F(s) = \frac{-s^2 + 4s - 11}{(s^2 - 2s + 5)(s - 1)}$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente uma expressão equivalente para $F(s)$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

() $F(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4} - \frac{2}{s - 1}$

(x) $F(s) = \frac{s + 1}{(s - 1)^2 + 4} - \frac{2}{s - 1}$

() $F(s) = \frac{s + 1}{(s - 1)^2 + 4} + \frac{2}{s - 1}$

() $F(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4} + \frac{2}{s - 1}$

() $F(s) = \frac{2s}{(s - 1)^2 + 4} + \frac{2}{s - 1}$

() $f(t) = e^t(\cos(2t) - 2)$

() $f(t) = e^t(\cos(2t) + \sin(2t) + 2)$

() $f(t) = e^t(\cos(2t) + 2)$

() $f(t) = e^t(2\cos(2t) + \sin(2t) + 2)$

(x) $f(t) = e^t(\cos(2t) + \sin(2t) - 2)$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Um forno encontra-se inicialmente a uma temperatura ambiente de 20°C ($v(0) = 20$). No instante $t = 1$ h, um pulso de calor muito intenso e rápido eleva instantaneamente a temperatura do forno até 100°C . Depois o forno resfria a uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre o forno o ambiente, com constante de proporcionalidade 2 h^{-1} . Assinale as alternativas que indicam respectivamente um modelo para a temperatura do forno ($v(t)$) e a solução $v(t)$.

() $v'(t) + 2(20 - v(t)) = 80\delta(t - 1)$

() $v(t) = 20 + 80u(t - 1)e^{-2t}$

(x) $v'(t) + 2(v(t) - 20) = 80\delta(t - 1)$

() $v(t) = 20 + 100u(t - 1)e^{-2t+2}$

() $v'(t) + 2(v(t) - 100) = 100\delta(t - 1)$

(x) $v(t) = 20 + 80u(t - 1)e^{-2t+2}$

() $v'(t) + 2(20 - v(t)) = 100\delta(t - 1)$

() $v(t) = 20 + 100u(t - 1)e^{-2t}$

() Nenhuma das anteriores

() Nenhuma das anteriores

• **Questão 4** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam as transformadas inversas das funções $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 16)^2}$ e $G(s) = \frac{s}{((s + 3)^2 + 16)^2}$ respectivamente.

() $\frac{t}{2}\sin(4t)$ (x) $e^{3t}\left(\frac{t}{8}\sin(4t) - \frac{3}{128}\sin(4t) - \frac{3t}{32}\cos(4t)\right)$

() $\frac{t}{2}\cos(4t)$ () $e^{3t}\left(\frac{t}{8}\sin(4t)\right)$

() $\frac{t}{4}(\sin(4t) + 2\cos(4t))$ () $e^{3t}\left(\frac{t}{8}\sin(4t) + \frac{3}{128}\sin(4t)\right)$

(x) $\frac{t}{8}\sin(4t)$ () $e^{3t}\left(\frac{t}{8}\sin(4t) - \frac{3}{128}\sin(4t)\right)$

() $\frac{t}{8}\cos(4t)$ () $e^{3t}\left(\frac{t}{8}\sin(4t) - \frac{t}{32}\cos(4t)\right)$

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dada a equação $tf(t) = 2 \int_0^t f(\tau)d\tau$, com $f(1) = 2$, assinale as alternativas que indicam respectivamente $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ e $f(t)$.

☐ $F(s) = \frac{2}{s}$

☐ $F(s) = \frac{2}{s^2 + 1}$

☒ $F(s) = \frac{2}{s^2}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s + 1}$

☐ $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

☐ $f(t) = 2e^{1-t}$

☐ $f(t) = 2 \cos(t) - 2 \cos(1) + 2$

☐ $f(t) = 2 \sin(t - 1) + 2$

☒ $f(t) = 2t$

☐ $f(t) = 2$

• **Questão 6** (2.5 ponto) Considere o oscilador harmônico não amortecido com termo forçante descrito pelo problema de valor inicial dado por:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y(t) = F_0 \sin(w_0 t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

Realize o que se pede mostrando os passos do desenvolvimento **claramente**

- a) (0.5) Calcule o valor de w_0 para que a frequência do termo forçante fique exatamente igual a frequência do oscilador (Ressonância).
- b) (1.0) Para o caso não onde o fenômeno de ressonância aparece, calcule $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

$$Y(s) =$$

$$y(t) =$$

- c) (1.0) Para o caso não onde o fenômeno de ressonância não aparece, calcule $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ e $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ e preencha os retângulos abaixo:

$$Y(s) =$$

$$y(t) =$$

Item a: Tomamos a transformada de Laplace da equação e obtemos:

$$s^2 Y(s) + 4Y(s) = \frac{F_0 w_0}{s^2 + w_0^2}$$

isto é:

$$(s^2 + 2^2)Y(s) = \frac{F_0 w_0}{s^2 + w_0^2}$$

Assim a ressonância acontece quando $w_0 = 2$.

Item b:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2^2} \frac{F_0 w_0}{s^2 + w_0^2} = \frac{F_0 w_0}{(s^2 + 2^2)^2}$$

Do item 21, temos:

$$y(t) = \frac{1}{16}(\sin(2t) - 2t \cos(2t))$$

Item c:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2^2} \frac{F_0 w_0}{s^2 + w_0^2}$$

Do item 24, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = \frac{1}{b^2 - a^2}(\cos(at) - \cos(bt))$$

E, usando a propriedade da integral, temos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}\right\} = \frac{1}{ab(b^2 - a^2)}(a \sin(bt) - b \sin(at))$$

Assim

$$y(t) = \frac{F_0}{2(w_0^2 - 4)}(2 \sin(w_0 t) - w_0 \sin(2t))$$

• **Questão 7** (2.5 pontos) Resolva os seguintes itens mostrando os passos do desenvolvimento **claramente**:

a) (0.8 ponto) Use a definição de transformada de Laplace para mostrar que $\mathcal{L}\{e^{zt}\} = \frac{1}{s-z}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) (0.8 ponto) Use a fórmula do item a) para concluir que

$$\mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} = \frac{s-a+ib}{(s-a)^2+b^2} \quad (2)$$

c) (0.9 ponto) Use a fórmula de Euler e o item b) para concluir que

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad (3)$$

e

$$\mathcal{L}\{e^{at} \sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad (4)$$

Obs: Este é o exercício 14 do capítulo 3.

item a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{zt}\} &= \int_0^\infty e^{zt} e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty e^{(z-s)t} dt \\ &= \left. \frac{e^{(z-s)t}}{z-s} \right|_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{z-s} = \frac{1}{s-z} \end{aligned}$$

item b:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{(a+ib)t}\} &= \frac{1}{s-z} = \frac{1}{s-a-ib} \\ &= \frac{1}{s-a-ib} \cdot \frac{s-a+ib}{s-a+ib} \\ &= \frac{s-a+ib}{(s-a)^2-b^2} \end{aligned}$$

item c: Use as expressões $\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ e $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$