UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma D - 2022/2
Prova da área IIB

1 - 5	6	7	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\|a\|}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|F(w)\|^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \|f(t)\|^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|C_n\|^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\text{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt$, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\text{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\text{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt}$, onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\text{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\text{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$, onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \qquad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \qquad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \qquad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \qquad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \qquad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)\cos(nx)dx = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \quad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \qquad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\mathrm{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \lvert m\rvert\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}^2(ax)\,\mathrm{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{sen}(mx)\,\mathrm{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \qquad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\,\mathrm{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$

Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\,\mathrm{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\mathrm{sen}(x)\cos(y) = \frac{\mathrm{sen}(x+y)+\mathrm{sen}(x-y)}{2}$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x-1)+C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda}-\frac{2x}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^3}\right)+C$
$\int x^ne^{\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}x^ne^{\lambda x}-\frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}\mathrm{d}x+C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x)+\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\mathrm{sen}(\lambda x)-\lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2}+C$
$\int x^2\cos(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\cos(\lambda x)+(\lambda^2x^2-2)\,\mathrm{sen}(\lambda x)}{\lambda^3}+C$
$\int x^2\,\mathrm{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{2\lambda x\,\mathrm{sen}(\lambda x)+(2-\lambda^2x^2)\cos(\lambda x)}{\lambda^3}+C$

• **Questão 1** (2.0 pontos) Considere a função dada por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}\text{sen}(n\pi t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi t}.$$

Responda:

Período fundamental

( ) $T_f = 1$

(X) $T_f = 2$

( ) $T_f = \pi$

( ) $T_f = 2\pi$

( ) N.D.A

Valor médio $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$

( ) -2

( ) -1

(X) 0

( ) 1

( ) N.D.A

Módulo de C_2

(X) $|C_2| = \frac{e^{-2}}{2}$

( ) $|C_2| = \frac{\sqrt{2}e^{-2}}{2}$

( ) $|C_2| = e^{-2}$

( ) $|C_2| = 2e^{-2}$

( ) N.D.A

Potência média $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt$

( ) $\bar{P}_f = 1 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{e^2-1}$

( ) $\bar{P}_f = 2 + \frac{1}{2}\frac{e^2}{e^2-1}$

(X) $\bar{P}_f = \frac{1}{2}\frac{1}{e^2-1}$

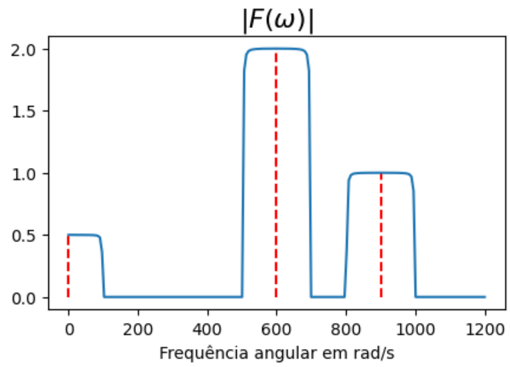
( ) $\bar{P}_f = \frac{1}{2}\frac{1}{e-1}$

( ) N.D.A

Solução da d:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{-n}}{2}\right|^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} = \frac{1}{2}\frac{e^{-2}}{1-e^{-2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^2-1}
\end{aligned}$$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere os diagramas de espectro de magnitudites das função $f(t)$ dada. Sabendo que $f(t)$ representa uma função real, sabendo que $\bar{f} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ e $E := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$, assinale as alternativas que melhor aproximam os valores de $|\bar{f}|$ e E:



$|\bar{f}|$

( ) 0

( ) 0.25

(X) 0.5

( ) 0.75

( ) 1.0

E

( ) 215

( ) 165

( ) 231

(X) 326

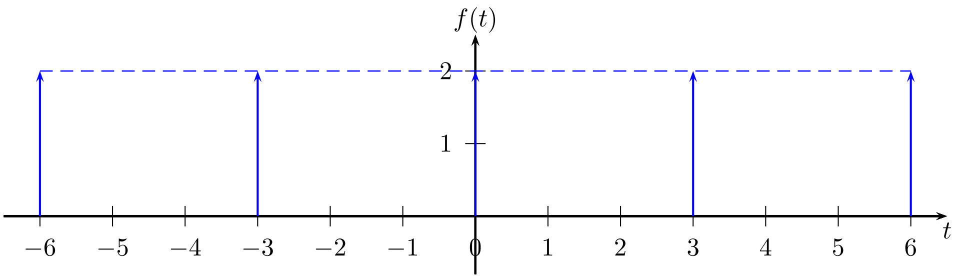
( ) 541

Solução:

$$\bar{f} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) \Longrightarrow |\bar{f}| = |F(0)| = 0.5$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{\pi}\left[0.5^2 \times 100 + 2^2 \times 200 + 1^2 \times 200\right] \\ &= \frac{1025}{\pi} \approx 326. \end{aligned}$$

• **Questão 3** (1.0 pontos) Considere a função periódica dada pelo gráfico abaixo:



Seja a expansão em série de Fourier dada por: $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(w_n t) + b_n \operatorname{sen}(w_n t)\right)$

Indique os valores de a_n e b_n.

( ) $a_n = \frac{8}{3}$

(X) $a_n = \frac{4}{3}$

( ) $a_n = \frac{8}{3n}$

( ) $a_n = \frac{4}{3n}$

( ) $a_n = 0$

( ) $b_n = \frac{8}{3}$

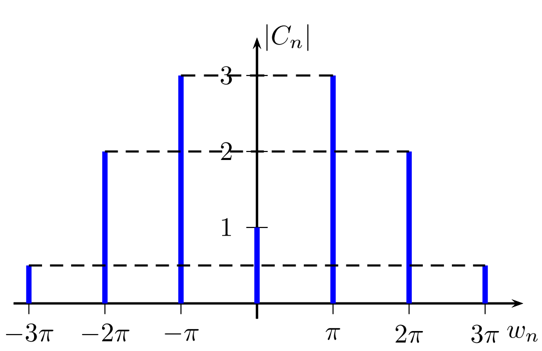
( ) $b_n = \frac{4}{3}$

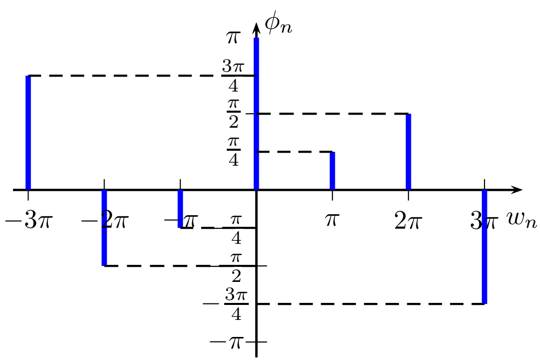
( ) $b_n = \frac{8}{3n}$

( ) $b_n = \frac{4}{3n}$

(X) $b_n = 0$

• **Questão 4** (1.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de amplitude e fase de um sinal $f(t)$ dados nos gráficos abaixo.





A forma exponencial do sinal é dada por

$$f(t) = C_{-3}e^{-3\pi t} + C_{-2}e^{-2\pi t} + C_{-1}e^{-\pi t} + C_0 + C_1 e^{\pi t} + C_2 e^{2\pi t} + C_3 e^{3\pi t}$$

e a forma trigonométrica é dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\pi t) + b_1 \operatorname{sen}(\pi t) + a_2 \cos(2\pi t) + b_2 \operatorname{sen}(2\pi t) + a_3 \cos(3\pi t) + b_3 \operatorname{sen}(3\pi t)$$

Assinale as alternativas corretas.

(X) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = 2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = -1$

( ) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = -2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = 1$

(X) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = 2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = -1$

( ) $C_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{4}$, $C_2 = -2i$, $C_1 = \frac{3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}}{2}$ e $C_0 = 1$

( ) n.d.a.

( ) $a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = -2$

( ) $a_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = 1$, $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = -2$

( ) $a_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $b_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $a_2 = 0$, $b_2 = -1$, $a_1 = 3\sqrt{2}$, $b_1 = 3\sqrt{2}$ e $a_0 = 2$

(X) n.d.a.

• **Questão 5** (1.0 pontos) Considere as funções dadas por:

$$\begin{aligned} f(t) &= te^{-t^2} \\ g(t) &= t\cos(2t)e^{-t^2} \end{aligned}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$.

$F(w)$

( ) $\frac{-\sqrt{\pi}w}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

( ) $\frac{\sqrt{\pi}w}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

(X) $\frac{-\sqrt{\pi}iw}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

( ) $\frac{\sqrt{\pi}iw}{2}e^{-\frac{w^2}{4}}$

( ) n.d.a.

$G(w)$

( ) $\frac{-\sqrt{\pi}(w+2)}{4}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{-\sqrt{\pi}(w-2)}{4}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

( ) $\frac{\sqrt{\pi}(w+2)}{4}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}(w-2)}{4}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

( ) $\frac{-\sqrt{\pi}i(w+2)}{2}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{-\sqrt{\pi}i(w-2)}{2}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

( ) $\frac{\sqrt{\pi}i(w+2)}{2}e^{-\frac{(w+2)^2}{4}} + \frac{\sqrt{\pi}i(w-2)}{2}e^{-\frac{(w-2)^2}{4}}$

(X) n.d.a.

• **Questão 6** (2.0 pontos) Um fluido se desloca em um tubo com perdas de calor e com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x,t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t + vu_x - u_{xx} + u = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x,0) = 300\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 1m/s$.

Resposta resumida

$$\frac{d}{dt}U(k,t) + ivkU(k,t) + k^2U(k,t) + U(k,t) = 0$$
$$\frac{d}{dt}U(k,t) = -\left(ivk + k^2 + 1\right)U(k,t) = 0$$

$$\begin{aligned} U(k,t) &= U(k,0)e^{-\left(ivk+k^2+1\right)t} \\ &= 300e^{-\left(1+ivk+k^2\right)t} \\ &= e^{-t}e^{-ivk}300e^{-k^2t} \end{aligned}$$

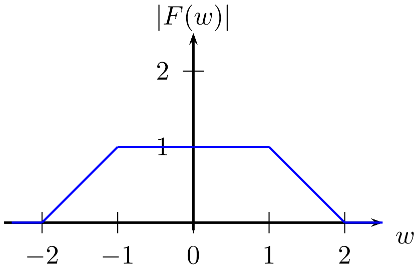
Calculamos a transformada inversa de $300e^{-k^2t}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{300e^{-k^2t}\right\} &= \frac{150}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t}e^{ikx}dx \\ &= \frac{300}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k^2t}\cos(kx)dx \\ &= \frac{300}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{150}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Usando a propriedade do deslocamento, temos a solução:

$$u(x,t) = \frac{150}{\sqrt{\pi t}}e^{-t}e^{-\frac{(x-vt)^2}{4t}}$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Sejam $f(t)$ uma função cuja transformada de Fourier é dada por $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$. O gráfico abaixo apresenta o diagrama de espectro de magnitudes de $F(w)$.



Esboce a diagrama de espectro de magnititudes da transformada de Fourier da função $g(t) = f''(t) + \cos(3t)$

Resposta resumida

$$|F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w+2, & -2 \leq w < -1, \\ 1, & -1 \leq w < 1, \\ 2-w & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

A transformada de $f''(w)$ é $(iw)^2 F(w)$, assim:

$$|w^2 F(w)| = \begin{cases} 0, & w < -2, \\ w^2(w+2), & -2 \leq w < -1, \\ w^2, & -1 \leq w < 1, \\ w^2(2-w) & 1 \leq w < 2, \\ 0, & w > 2. \end{cases}$$

Além disso, sabemos que $\mathcal{F}\{\cos(3t)\} = \pi\delta(w-3) + \pi\delta(w+3)$