

1	2	3	4	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras a observar:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.
- Mantenha o caderno de questões grampeado.
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação  $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ .

Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$ , então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
Deslocamento no eixo $w$	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
Deslocamento no eixo $t$	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
Transformada da integral	Se $F(0) = 0$ , então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$ , onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$ , $a \neq 0$
Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(w) ^2 dw$
Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T  f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde <math>w_n = \frac{2\pi n}{T}</math>, <math>T</math> é o período de <math>f(t)</math></p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde <math>C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}</math></p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real},$ <p>onde <math>A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt</math> e <math>B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt</math></p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde <math>F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt</math></p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \quad (m > 0, n > 0) \\ 0, & n > m \end{cases}$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx =  m  \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

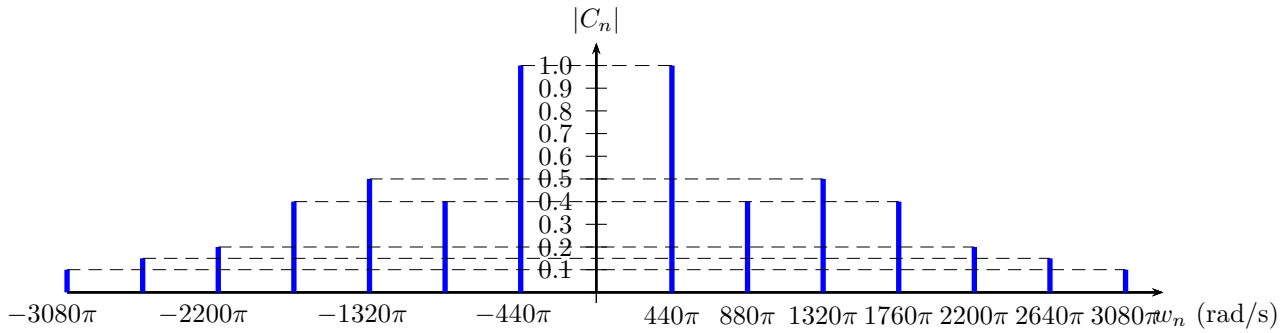
Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left( \frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

- **Questão 1** (3.0 pontos) Considere uma aproximação discreta do diagrama de espectro de uma nota Lá (220 Hz) tocada por um piano:



- a) (0.6) Observe que existe uma infinidade de funções  $f(t)$  cujo diagrama de espectro de magnitudes é da forma apresentada. Explique por quê?

Para cada forma de onda dada nos itens b) a e), indique se ela é uma possível representação do som dado no diagrama de magnitudes acima e justifique sua resposta. Resposta sem justificativa receberá grau nulo.

- b) (0.6) A função  $f(t)$  da forma

$$\begin{aligned} f(t) = & \cos(440\pi t) + 0.4 \sin(880\pi t) + 0.5 \cos(1320\pi t) + \\ & + 0.4 \sin(1760\pi t) + 0.2 \cos(2200\pi t) + 0.15 \sin(2640\pi t) + 0.1 \cos(3080\pi t) \end{aligned}$$

- c) (0.6) A função  $f(t)$  da forma

$$\begin{aligned} f(t) = & K \cos(440\pi t) + 0.4K \sin(880\pi t) + 0.5K \cos(1320\pi t) + \\ & + 0.4K \sin(1760\pi t) + 0.2K \cos(2200\pi t) + 0.15K \sin(2640\pi t) + 0.1K \cos(3080\pi t) \end{aligned}$$

para alguma constante  $K > 0$  e satisfaz

$$\int_0^{\frac{1}{220}} |f(t)|^2 dt = 1.$$

- d) (0.6) A função  $f(t)$  da forma

$$\begin{aligned} f(t) = & 2 \cos\left(440\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + 0.8 \cos\left(880\pi t + \frac{\pi}{4}\right) + 1.0 \cos\left(1320\pi t + \frac{\pi}{3}\right) + \\ & + 0.8 \cos\left(1760\pi t - \frac{3\pi}{2}\right) + 0.4 \cos\left(2200\pi t + \frac{\pi}{6}\right) + 0.3 \cos\left(2640\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 0.2 \sin(3080\pi t + \pi) \end{aligned}$$

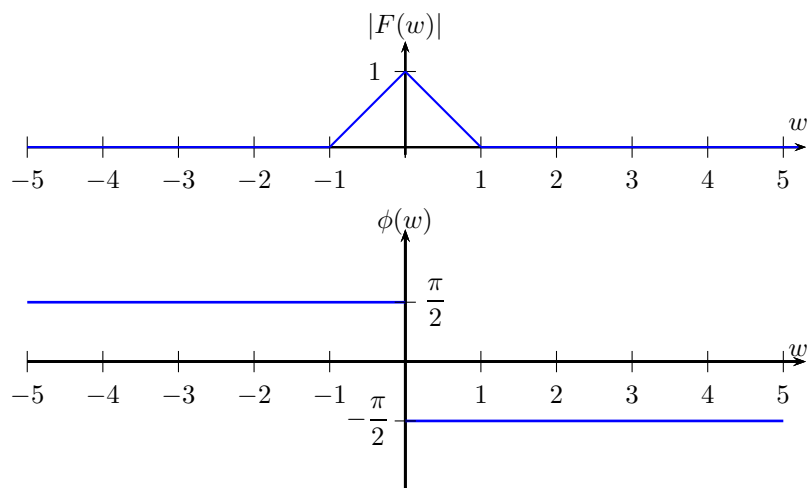
- e) (0.6) A função  $f(t)$  da forma

$$f(t) = \sum_{n=-7}^7 C_n e^{440n\pi i t},$$

onde  $\sum_{n=-7}^7 |C_n| = 3.825$  e  $C_0 = e^{i\pi}$ .



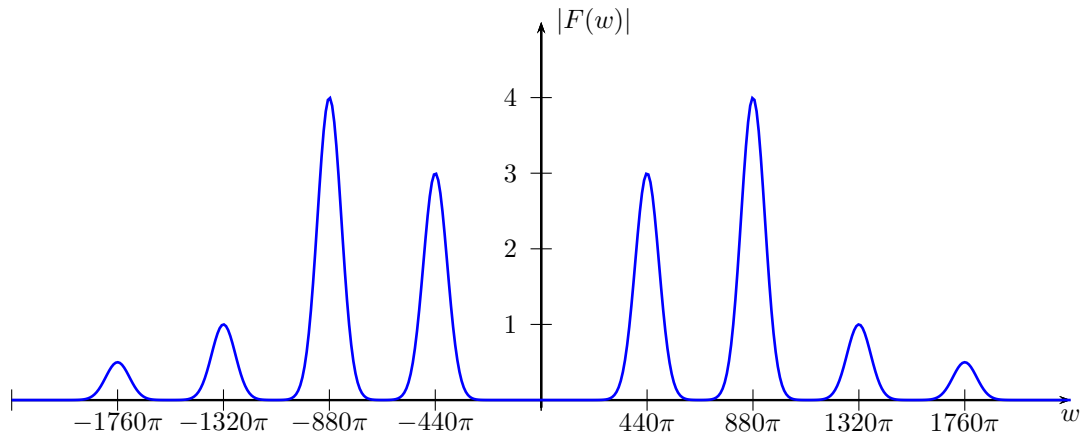
• **Questão 2** (2.5 pontos) Considere uma função  $f(t)$  e sua transformada  $F(w)$  de Fourier representada pelos diagramas de espectro abaixo:



- (1.0) Escreva uma expressão para  $F(w)$  usando os diagramas de espectro. [Dica: a função  $F(w) = |F(w)|e^{i\phi(w)}$  pode ser uma função definida por partes]
- (0.5) Classifique as partes real e imaginária da função  $F(w)$  calculada no item a) como par, ímpar ou nem par nem ímpar.
- (1.0) Calcule  $f(t)$  usando  $F(w)$  do item a).



• **Questão 3** (2.0 pontos) O gráfico abaixo apresenta o diagrama de magnitudes do registro do som de um instrumento musical.



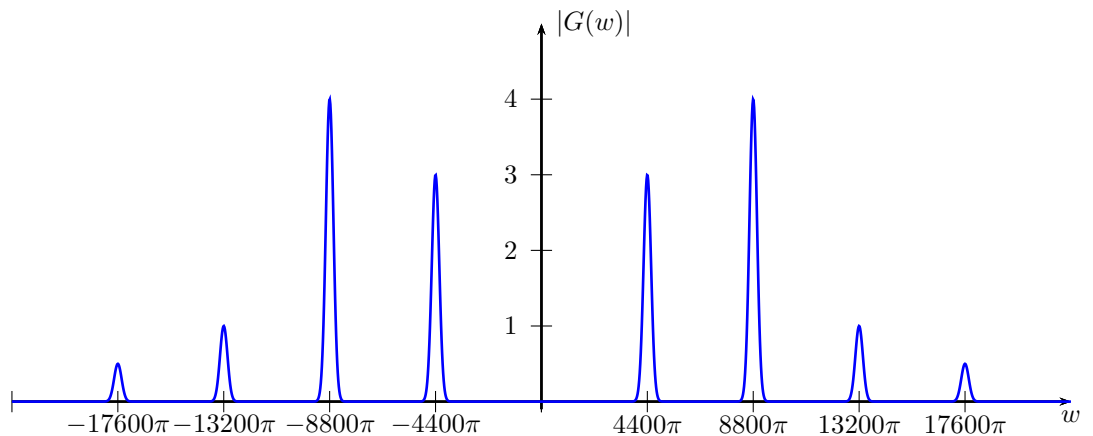
Assinale a alternativa correta.

a) (1.0) A energia total do sinal dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$$

- i) é menor que 5 J.
- ii) está entre 5 J e 500 J.
- iii) está entre 500 J e 50000 J.
- iv) está entre 50000 J e 5000000 J.
- v) é maior que 5000000 J.

b) (1.0) O gráfico abaixo apresenta o espectro de magnitude da transformada de Fourier de uma função  $g(t)$ .



É correto afirmar que

- i)  $g(t) = \frac{1}{10} f(10t)$
- ii)  $g(t) = \frac{1}{10} f\left(\frac{t}{10}\right)$
- iii)  $g(t) = 10f\left(\frac{t}{10}\right)$
- iv)  $g(t) = 10f(10t)$
- v) nenhuma das alternativas anteriores





• **Questão 4** (2.5 pontos) Considere uma viga infinita repousada sobre um suporte elástico e  $y(x)$  seu deslocamento vertical em cada ponto  $x$ . Suponha que o suporte exerce uma força de reação proporcional ao deslocamento  $y(x)$  e que a viga é carregada em  $x = 0$  por uma força concentrada  $\delta(x)$ . A equação que modela o fenômeno é dada por:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \delta(x) - 4y(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

Calcule o deslocamento  $y(x)$  da viga usando a técnica de transformada de Fourier.