

| 1-4 | 5 | 6 | Total |
|-----|---|---|-------|
|     |   |   |       |

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador  $\vec{\nabla}$ :

$f = f(x, y, z)$  e  $g = g(x, y, z)$  são funções escalares;

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  e  $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$  são funções vetoriais.

|     |   |
|-----|---|
| 1.  | $\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$   |
| 2.  | $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$  |
| 3.  | $\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$   |
| 4.  | $\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$  |
| 5.  | $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$   |
| 6.  | $\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$  |
| 7.  | $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$<br>onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano |
| 8.  | $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$   |
| 9.  | $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$  |
| 10. | $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$   |
| 11. | $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$   |
| 12. | $\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$<br>$-(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$  |
| 13. | $\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$<br>$+\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$   |
| 14. | $\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$   |

Curvatura, torção e aceleração:

| Nome                  | Fórmula  |
|-----------------------|--|
| Vetor normal          | $\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$  |
| Vetor binormal        | $\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$  |
| Curvatura             | $\kappa = \left\  \frac{d\vec{T}}{ds} \right\  = \left\  \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\  = \frac{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }{\ \vec{r}'(t)\ ^3}$ |
| Torção                | $\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ ^2}$                            |
| Módulo da Torção      | $ \tau  = \left\  \frac{d\vec{B}}{ds} \right\  = \left\  \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\ $   |
| Aceleração normal     | $a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$   |
| Aceleração tangencial | $a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$  |

Equações de Frenet-Serret:

|                       |   |                                     |
|-----------------------|---|-------------------------------------|
| $\frac{d\vec{T}}{ds}$ | = | $\kappa\vec{N}$                     |
| $\frac{d\vec{N}}{ds}$ | = | $-\kappa\vec{T} \quad +\tau\vec{B}$ |
| $\frac{d\vec{B}}{ds}$ | = | $-\tau\vec{N}$                      |

- **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \pi^2 \ln(t)\vec{k}, \quad t > 0.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Tangente unitário em  $t = \pi$ :

- ( X )  $\vec{T}(\pi) = \frac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{T}(\pi) = \frac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{T}(\pi) = \frac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{T}(\pi) = \frac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{T}(\pi) = \frac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$

Binormal unitário em  $t = \pi$ :

- ( )  $\vec{B}(\pi) = \frac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{B}(\pi) = \frac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{B}(\pi) = \frac{\pi\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$   
 ( )  $\vec{B}(\pi) = \frac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( X )  $\vec{B}(\pi) = \frac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2 + \pi^2}}$

Curvatura em  $t = \pi$ :

- ( )  $\kappa(\pi) = \frac{2 + \pi^2}{\pi}$   
 ( )  $\kappa(\pi) = \frac{\sqrt{2 + \pi^2}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( X )  $\kappa(\pi) = \frac{\sqrt{2 + \pi^2}}{\sqrt{(1 + \pi^2)^3}}$   
 ( )  $\kappa(\pi) = \frac{1}{\pi}$   
 ( )  $\kappa(\pi) = \frac{2 + \pi^2}{1 + \pi^2}$

Torção em  $t = \pi$ :

- ( )  $\tau(\pi) = \frac{2 + \pi^2}{\pi}$   
 ( )  $\tau(\pi) = \frac{\sqrt{2 + \pi^2}}{\sqrt{1 + \pi^2}}$   
 ( )  $\tau(\pi) = \frac{\sqrt{2 + \pi^2}}{\sqrt{(1 + \pi^2)^3}}$   
 ( X )  $\tau(\pi) = \frac{1}{\pi}$   
 ( )  $\tau(\pi) = \frac{2 + \pi^2}{1 + \pi^2}$

**Solução:**

Começamos pelas derivadas:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + \pi^2 \ln(t)\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + \frac{\pi^2}{t}\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} - \frac{\pi^2}{t^2}\vec{k} \\ \vec{r}'''(t) &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + \frac{2\pi^2}{t^3}\vec{k}\end{aligned}$$

Substituímos em  $t = \pi$ , temos:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(\pi) &= -\vec{j} + \pi\vec{k} \\ \vec{r}''(\pi) &= \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{r}'''(\pi) &= \vec{j} + \frac{2}{\pi}\vec{k}\end{aligned}$$

**Obs:** Substituir os valores torna o processo de calcular produtos e normas muito mais simples. Por que as substituições só podem ser feitas depois das derivadas?

$$\|\vec{r}'(\pi)\| = \sqrt{1 + \pi^2},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & \pi \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1 - 0)\vec{i} + (\pi - 0)\vec{j} + (0 - (-1))\vec{k} \\ &= \vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)\| = \sqrt{1^2 + \pi^2 + 1^2} = \sqrt{2 + \pi^2}$$

$$\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \cdot \vec{r}'''(\pi) = \pi + \frac{2}{\pi}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \times \vec{r}'(\pi) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \pi & 1 \\ 0 & -1 & \pi \end{vmatrix} = (\pi^2 - (-1))\vec{i} + (0 - \pi)\vec{j} + (-1 + 0)\vec{k} \\ &= (\pi^2 + 1)\vec{i} - \pi\vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\kappa(\pi) &= \frac{\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)\|}{\|\vec{r}'(\pi)\|^3} = \frac{\sqrt{2+\pi^2}}{\sqrt{(1+\pi^2)^3}}, \\
\tau(\pi) &= \frac{\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \cdot \vec{r}'''(\pi)}{\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)\|^2} = \frac{\pi + \frac{2}{\pi}}{\sqrt{(2+\pi^2)^2}} = \frac{\pi + \frac{2}{\pi}}{2+\pi^2} = \frac{\pi^2+2}{\pi(2+\pi^2)} = \frac{1}{\pi}, \\
\vec{T}(\pi) &= \frac{\vec{r}'(\pi)}{\|\vec{r}'(\pi)\|} = \frac{-\vec{j} + \pi\vec{k}}{\sqrt{1+\pi^2}}, \\
\vec{B}(\pi) &= \frac{\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)}{\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi)\|} = \frac{\vec{i} + \pi\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2+\pi^2}}.
\end{aligned}$$

**Adicional:** Embora não tenha sido pedido no problema, o vetor normal unitário é dado por:

$$\vec{N}(\pi) = \frac{\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \times \vec{r}'(\pi)}{\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \times \vec{r}'(\pi)\|} = \frac{(\pi^2+1)\vec{i} - \pi\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{\pi^4+3\pi^2+2}}.$$

Em que se usou:

$$\|\vec{r}'(\pi) \times \vec{r}''(\pi) \times \vec{r}'(\pi)\| = \sqrt{1^2 + \frac{2^2}{\pi^2} + 1^2} = \sqrt{(\pi^2+1)^2 + \pi^2 + 1} = \sqrt{\pi^4+3\pi^2+2}.$$

Verifique agora que o trio é, de fato, ortonormal, isto é, cada um dos três vetores tem normal 1 e  $\vec{T} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{T} = 0$ .

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma mosca viaja sobre uma trajetória  $\vec{r}(t)$  com velocidade  $\vec{v}(t)$  e aceleração  $\vec{a}(t) = 2 \cos(t)\vec{i} + 2 \sin(t)\vec{j}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Sabendo que a velocidade da abelha no ponto  $t = 0$  é  $\vec{v}(0) = -\vec{j}$ , marque a resposta correta para cada coluna.

Componente tangencial da aceleração:  $a_T$

( )  $a_T = \frac{4 - 2 \cos(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( )  $a_T = \frac{4 - 2 \cos(t)}{\sqrt{(5 - 4 \cos(t))^3}}$

( )  $a_T = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{(5 - 4 \cos(t))^3}}$

( )  $a_T = \frac{8 + 2 \sin(t) + 2 \cos(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( X )  $a_T = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( )  $a_T = 0$   
**Solução:**

Componente normal da aceleração:  $a_N$

( X )  $a_N = \frac{4 - 2 \cos(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( )  $a_N = \frac{4 - 2 \cos(t)}{\sqrt{(5 - 4 \cos(t))^3}}$

( )  $a_N = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{(5 - 4 \cos(t))^3}}$

( )  $a_N = \frac{8 + 2 \sin(t) + 2 \cos(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( )  $a_N = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$

( )  $a_N = 0$

$$\vec{a}(t) = 2 \cos(t)\vec{i} + 2 \sin(t)\vec{j}$$

$$\vec{v}(t) = (2 \sin(t) + C_1)\vec{i} + (-2 \cos(t) + C_2)\vec{j} + C_3\vec{k}$$

Como  $\vec{v}(0) = -\vec{j}$ , temos

$$\vec{v}(t) = 2 \sin(t)\vec{i} + (1 - 2 \cos(t))\vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) \times \vec{v}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 \cos(t) & 2 \sin(t) & 0 \\ 2 \sin(t) & 1 - 2 \cos(t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0 - 0)\vec{i} + (0 - 0)\vec{j} + (2 \cos(t)(1 - 2 \cos(t)) - 4 \sin^2(t))\vec{k} \\ &= (2 \cos(t) - 4)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\|\vec{a}(t) \times \vec{v}(t)\| = 4 - 2 \cos(t)$$

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{4 \sin^2(t) + (1 - 2 \cos(t))^2} = \sqrt{4 \sin^2(t) + 1 - 4 \cos(t) + 4 \cos^2(t)} = \sqrt{5 - 4 \cos(t)}$$

$$\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 4 \sin(t) \cos(t) + 2 \sin(t)(1 - 2 \cos(t)) = 2 \sin(t)$$

$$a_N = \frac{4 - 2 \cos(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$$

$$a_T = \frac{2 \sin(t)}{\sqrt{5 - 4 \cos(t)}}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a linha poligonal fechada  $C$  no plano  $xy$  formada pelos pontos  $P_0(1, 0, 1)$ ,  $P_1(3, 0, 1)$  e  $P_2(2, 1, 1)$ , no sentido  $P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_0$ , e o campo  $\vec{F} = -(z^3 + 1)y\vec{i} + (z^2 + 1)x\vec{j} + xy e^z \vec{k}$ .

Integral de linha

Rotacional

- ( )  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z + 1)\vec{j} + (z^3 + z^2 + 2)\vec{k}$   
 ( )  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx + e^z)\vec{i} - (3z^2y - ye^z + e^z)\vec{j} + (z^3 + z^2)\vec{k}$   
 (X)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (xe^z - 2zx)\vec{i} - (3z^2y + ye^z)\vec{j} + (z^3 + z^2 + 2)\vec{k}$   
 ( )  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = xe^z\vec{i} - 3zy\vec{j} + (z^3 + z^2)\vec{k}$   
 ( )  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = xe^z\vec{i} - 3e^z\vec{j} + 4\vec{k}$

( )  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 1$

( )  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2$

(X)  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4$

( )  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 8$

( )  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 16$

**Solução do item b:**

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{k} dS \\ &= \iint_S (z^3 + z^2 + 2) dS \\ &= \iint_S 4 dS = 4 \end{aligned}$$

A região é um triângulo isóceles de base com comprimento 2 e altura 1, logo tem área 1.

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte  $z = 0$  de um campo  $\vec{F}(x, y) = F_2(x, y)\vec{j}$  e as seguintes quatro curvas orientadas:  $C_1$  é um círculo,  $C_2$  é um segmento de reta,  $C_3$  é uma elipse e  $C_4$  é a união de dois segmentos de reta. Considere também

- o plano  $S_1$  dado por  $x = 0$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 2$ , orientado no sentido de  $\vec{i}$ .
- o plano  $S_2$  dado por  $y = 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 2$ , orientado no sentido de  $-\vec{j}$ .
- o plano  $S_3$  dado por  $z = 0$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ , orientado no sentido de  $-\vec{k}$ .

Marque a resposta correta para cada coluna.

Integral de linha:

- ( )  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$   
 ( )  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$   
 ( )  $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$   
 (X)  $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$   
 ( )  $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

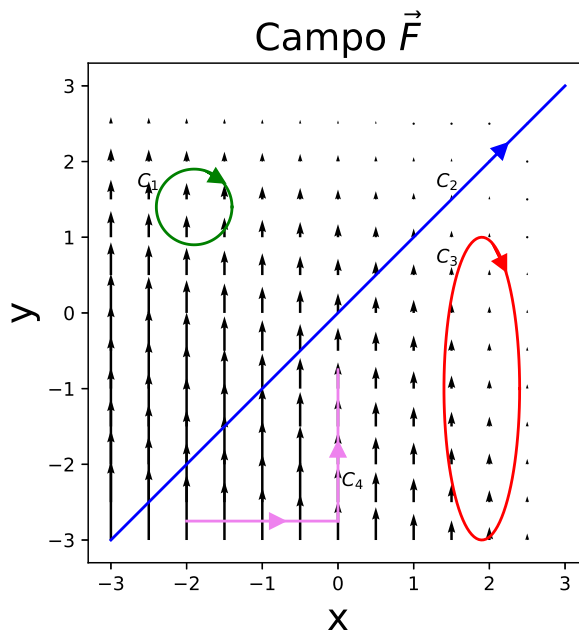
- ( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$   
 ( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$   
 ( )  $\iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$   
 (X)  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$   
 ( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

Curvatura:

- ( ) A curva  $C_3$  possui somente dois valores para a curvatura.  
 ( ) A curvatura é zero sobre  $C_1$  e  $C_2$ .  
 ( ) A curvatura não é constante para  $C_1$  e  $C_3$   
 ( ) A curva  $C_4$  tem dois valores para curvatura e um ponto onde a curvatura não está bem definida.  
 (X) A curvatura é zero sobre  $C_2$  e sobre  $C_4$ , com exceção de um ponto sobre  $C_4$ .

Divergente:

- ( )  $\nabla \cdot \vec{F} > 0$  em todos os pontos.  
 ( )  $\nabla \cdot \vec{F} > 0$  somente no primeiro quadrante.  
 ( )  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  somente no primeiro quadrante.  
 (X)  $\nabla \cdot \vec{F} < 0$  em todos os pontos.  
 ( )  $\nabla \cdot \vec{F} < 0$  no primeiro quadrante e  $\nabla \cdot \vec{F} \geq 0$  no terceiro quadrante.



- **Questão 5** (1.0 ponto) Seja a curva no plano  $xy$  dada pela gráfico de uma função suficientemente diferenciável  $f(x)$ :

$$y = f(x).$$

Mostre que curvatura como função de  $x$  é dada pela expressão:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Empregue essa fórmula à função  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  e interprete geometricamente.

**Solução da primeira parte:** Primeiro parametrização a curva com  $x(t) = t$  e  $y(t) = f(x(t)) = f(t)$ :

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + f(t)\vec{j}.$$

Depois calcumos as derivadas:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \vec{i} + f'(t)\vec{j} \\ \vec{r}''(t) &= f''(t)\vec{j}\end{aligned}$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}\|\vec{r}'(t) \times \vec{r}'(t)\| &= \left\| \left( \vec{i} + f'(t)\vec{j} \right) \times f''(t)\vec{j} \right\| \\ &= \left\| f''(t)\vec{k} \right\| \\ &= |f''(t)|\end{aligned}$$

além disso:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \left\| \vec{i} + f'(t)\vec{j} \right\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$$

Assim, basta substituir na fórmula para obter:

$$\kappa(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}$$

Retornando à variável original, temos:

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}$$

**Solução da segunda parte:**

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 - x^2)^{1/2} \\ f'(x) &= -x(1 - x^2)^{-1/2} = -\frac{x}{(1 - x^2)^{1/2}} \\ f''(x) &= -(1 - x^2)^{-1/2} + x^2(1 - x^2)^{-3/2} = -\frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Agora obtemos:

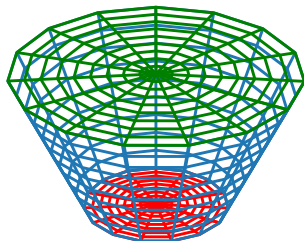
$$(1 + f'(x)^2)^{3/2} = \left( 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} \right)^{3/2} = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} = (1 - x^2)^{-3/2}$$

substituindo, temos  $\kappa(x) = 1$ . A interpretação geométrica é que a curva descrita é uma semicircunferência de raio 1.

• **Questão 6** (3.0 pontos) Considere a região  $V$  limitada lateralmente por  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , inferiormente por  $z = 1$  e superiormente por  $z = 2$ . Sejam  $S$  a superfície que limita  $V$  orientada para fora e  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$

- a) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via parametrização direta da superfície. (sem usar o teorema da divergência)  
 b) (1.5 ponto) Calcule o fluxo via teorema da divergência.

**Intepretação:**



A região é um tronco de cone. A superfície, é então formada de três porções:

1. Inferiormente pelo círculo de raio 1 ( $S_b$ ) com normal  $\vec{n} = -\vec{k}$  e área  $\pi$ .
2. Superiormente pelo círculo de raio 2 ( $S_t$ ) com normal  $\vec{n} = \vec{k}$  e área  $4\pi$ .
3. Lateralmente pela superfície cônica ( $S_l$ ) com  $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ .

**Solução do item a:**

$$G(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{\nabla} G(x, y, z) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G(x, y, z) &= -\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 \\ &= -\frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z^2 = -\sqrt{x^2 + y^2} + \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{na superfície}} = -\rho + \rho^2 \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} \Phi_l &= \iint_{S_l} \vec{F} \cdot d\vec{S} = -\iint_A \vec{F} \cdot \vec{\nabla} G dA = \iint_A (\rho - \rho^2) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 (\rho - \rho^2) \rho d\rho d\theta = 2\pi \int_1^2 (\rho^2 - \rho^3) d\rho = -\frac{17}{6}\pi \end{aligned}$$

$$\Phi_t = \iint_{S_t} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_A \vec{F} \cdot \vec{k} dS = \iint_A z^2 dS = 4 \iint_A dS = 16\pi$$

$$\Phi_b = \iint_{S_b} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_A \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dS = -\iint_A z^2 dS = -\iint_A dS = -\pi$$

Somando os três termos, temos:

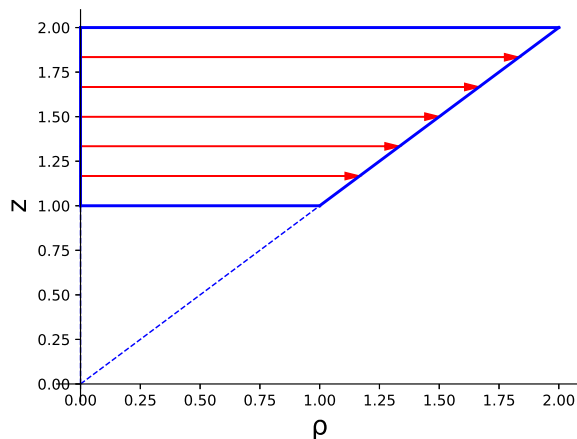
$$\Phi = -\frac{17}{6}\pi + 16\pi - \pi = \frac{73}{6}\pi$$

**Solução do item b:** Calculamos o divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2 + 2z$$

E realizamos a integral de volume:

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_0^z (2 + 2z) \rho d\rho dz d\phi \\ &= 2\pi \int_1^2 (1 + z) \rho^2 \Big|_0^z dz = 2\pi \int_1^2 (1 + z) z^2 dz = \frac{73}{6}\pi \end{aligned}$$



**Observação:** A integral poderia ter sido feita (de forma mais trabalhosa) conforme a seguinte parametrização:

$$\begin{aligned}
\Phi &= \oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^2 (2+2z) \rho dz d\rho d\phi + \int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_\rho^2 (2+2z) \rho dz d\rho d\phi \\
&= 2\pi \int_0^1 (2z+z^2) \Big|_1^2 \rho d\rho + 2\pi \int_1^2 (2z+z^2) \Big|_\rho^2 \rho d\rho \\
&= 10\pi \int_0^1 \rho d\rho + 2\pi \int_1^2 (8-2\rho-\rho^2) \rho d\rho \\
&= 5\pi + 2\pi \left( 12 - \frac{14}{3} - \frac{15}{4} \right) = \frac{73}{6} \pi
\end{aligned}$$

