

1	2	3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real,}$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Integrais definidas

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{- m a} \quad (a > 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-ma}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2} e^{ma}, & m < 0 \end{cases}$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Identidades Trigonômicas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x + y) + \cos(x - y)}{2}$	$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$	$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x + y) + \sin(x - y)}{2}$
---	---	---

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x^2 \cos(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \cos(\lambda x) + (\lambda^2 x^2 - 2) \sin(\lambda x)}{\lambda^3} + C$
$\int x^2 \sin(\lambda x) dx = \frac{2\lambda x \sin(\lambda x) + (2 - \lambda^2 x^2) \cos(\lambda x)}{\lambda^3} + C$

- **Questão 1** (3.0 pontos) Considere as funções periódicas

$$f(t) = 1 + \sin(2t) + \cos(3t) \quad \text{e} \quad g(t) = 4 \sin^3(t)$$

Responda os itens abaixo:

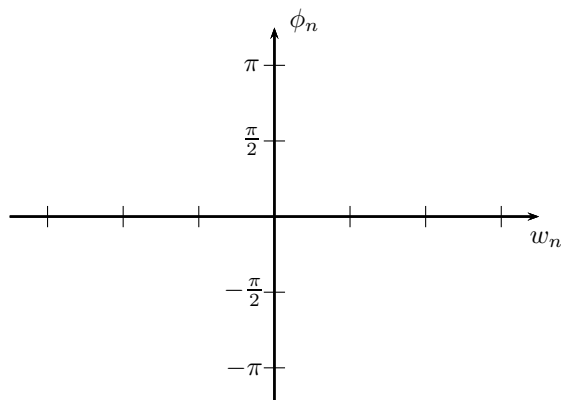
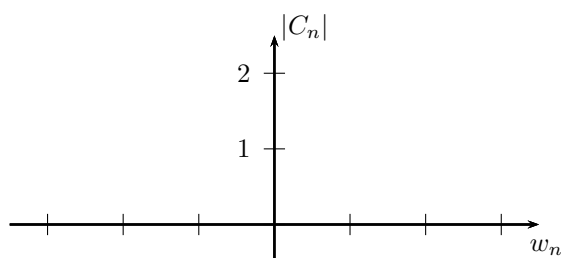
- a) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os períodos fundamentais e as frequências angulares fundamentais das funções $f(t)$ e $g(t)$ e de $f(t) + g(t)$.

	Período	Frequência
$f(t)$		
$g(t)$		
$f(t) + g(t)$		

- b) (1.0) Preencha a tabela abaixo com os coeficientes a_0 , C_0 e a_n , b_n e C_n , $n = 1, 2, 3$, da função $f(t) + g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0			
1			
2			
3			

- c) (1.0) Esboce o diagrama de espectro da função $f(t) + g(t)$ nos espaços abaixo.



Solução:a) Como as frequências que aparecem na função $f(t)$ são 2 e 3, a frequência fundamental é 1, fazendo o período fundamental ser 2π . Para calcular a frequência da função $g(t)$, fazemos a seguinte expansão:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= 4 \sin^3(t) \\
 &= 4 \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^3 \\
 &= \frac{e^{3it} - 3e^{2it}e^{-it} + 3e^{it}e^{-2it} - e^{-3it}}{-2i} \\
 &= \frac{e^{3it} - e^{-3it}}{-2i} + \frac{-3e^{it} + 3e^{-it}}{-2i} \\
 &= -\frac{e^{3it} - e^{-3it}}{2i} + 3\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\
 &= -\sin(3t) + 3\sin(t).
 \end{aligned}$$

Como as frequências que aparecem na função $g(t)$ são 1 e 3, a frequência fundamental é 1, fazendo o período fundamental ser 2π . Observe que

$$f(t) + g(t) = 1 + 3\sin(t) + \sin(2t) + \cos(3t) - \sin(3t)$$

também possui frequência fundamental 1 e período fundamental ser 2π .

	Período	Frequência
$f(t)$	2π	1
$g(t)$	2π	1
$f(t) + g(t)$	2π	1

- b) Podemos coletar os coeficientes de Fourier da expressão de $f(t) + g(t)$.

n	a_n	b_n	C_n
0	2		$C_0 = \frac{a_0}{2} = 1$
1	0	3	$C_1 = \frac{a_1 - ib_1}{2} = -\frac{3i}{2}$
2	0	1	$C_2 = \frac{a_2 - ib_2}{2} = -\frac{i}{2}$
3	1	-1	$C_3 = \frac{a_3 - ib_3}{2} = \frac{1+i}{2}$

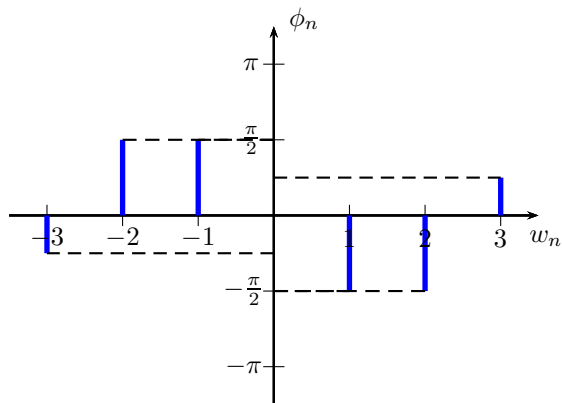
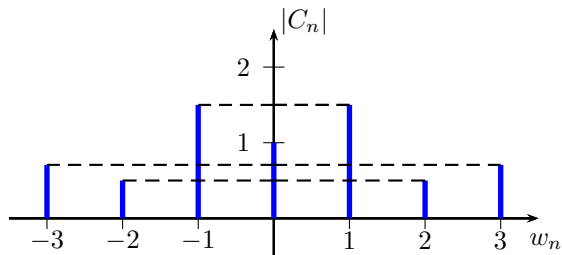
c) Escrevemos $C_n = |C_n|e^{i\phi_n}$ para fazer as diagramas de módulo e fase:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 \\ C_1 &= \frac{3}{2}e^{-i\pi/2} \\ C_2 &= \frac{1}{2}e^{-i\pi/2} \\ C_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4} \end{aligned}$$

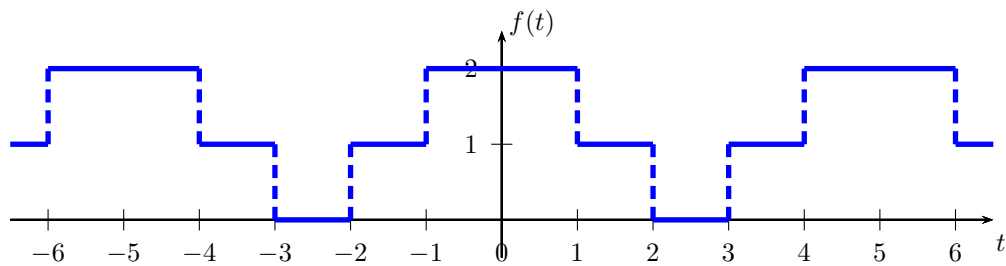
Lembremos que $C_{-n} = \overline{C_n}$, isto é,

$$\begin{aligned} C_{-1} &= \frac{3}{2}e^{i\pi/2} \\ C_{-2} &= \frac{1}{2}e^{i\pi/2} \\ C_{-3} &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\pi/4} \end{aligned}$$

Os gráficos tomam a forma:



- **Questão 2** (2.0 pontos) Calcule a série de Fourier da função periódica dada no gráfico abaixo.



Solução: Como a função é par, $b_n = 0$. Vamos calcular a_n .

Observe que o período é $T = 5$ e $w_n = \frac{2\pi n}{5}$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{5} \int_{-5/2}^{5/2} f(t) dt \\ &= \frac{4}{5} \int_0^{5/2} f(t) dt \\ &= \frac{4}{5} \left(\int_0^1 2 dt + \int_1^2 1 dt \right) \\ &= \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{5} \int_{-5/2}^{5/2} f(t) \cos(w_n t) dt \\ &= \frac{4}{5} \int_0^{5/2} f(t) \cos(w_n t) dt \\ &= \frac{4}{5} \left(\int_0^1 2 \cos\left(\frac{2\pi n t}{5}\right) dt + \int_1^2 \cos\left(\frac{2\pi n t}{5}\right) dt \right) \\ &= \frac{4}{5} \left\{ \left[\frac{10}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{5}\right) \right]_0^1 + \left[\frac{5}{2\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n t}{5}\right) \right]_1^2 \right\} \\ &= \frac{20}{5} \left[\frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \frac{1}{2\pi n} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi n}{5}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right) \right) \right] \\ &= \frac{2}{\pi n} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi n}{5}\right) \right] \end{aligned}$$

• **Questão 3** (2.0 pontos) Resolva os itens abaixo.

a) (1.0 ponto) Use a definição de transformadas de Fourier para calcular $F(w) = \mathcal{F}\{e^{-4t^2}\}$.

b) (1.0 ponto) Escolhe uma estratégia para calcular $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{iw(e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16})\}$.

Solução: a)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{-4t^2}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4t^2} e^{iwt} dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} e^{-4t^2} \cos(wt) dt \\ &= 2 \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-w^2/16} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-w^2/16}.\end{aligned}$$

Solução: b) Pelo item a), sabemos que

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-w^2/16}\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2}$$

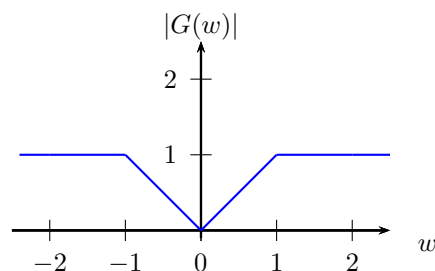
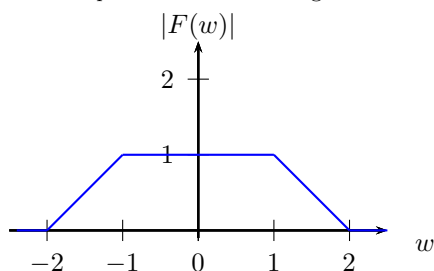
Assim, pela usando a propriedade da modulação, temos:

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16}\} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2} \cos(2t).$$

Agora, pela propriedade da transformada da derivada, temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{iw(e^{-(w-2)^2/16} + e^{-(w+2)^2/16})\} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-4t^2} \cos(2t) \right) \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(-2e^{-4t^2} \sin(2t) - 8te^{-4t^2} \cos(2t) \right) \\ &= -\frac{8e^{-4t^2}}{\sqrt{\pi}} (\sin(2t) + 4t \cos(2t)).\end{aligned}$$

• **Questão 4** (3.0 pontos) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções que possuem transformadas de Fourier e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$. Os gráficos abaixo apresentam os seus diagramas de espectro de magnitudes.



a) (0.5 ponto) Calcule a energia total do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

b) (0.5 ponto) Calcule o módulo do valor médio do sinal $f(t)$ dado pela expressão

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right|.$$

c) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $h(t) = f'(t) \cos(3t)$.

d) (1.0 ponto) Esboce o diagrama de magnitudes de $p(t) = \frac{d}{dt}(f(t) * g(t))$.

Solução:a) Pelo Teorema de Parseval

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^2 |F(w)|^2 dw \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 |F(w)|^2 dw + \int_1^2 |F(w)|^2 dw \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^1 1 dw + \int_1^2 (2-w)^2 dw \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 + \left[-\frac{(2-w)^3}{3} \right]_1^2 \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

b) Pela definição de transformada de Fourier, temos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt.$$

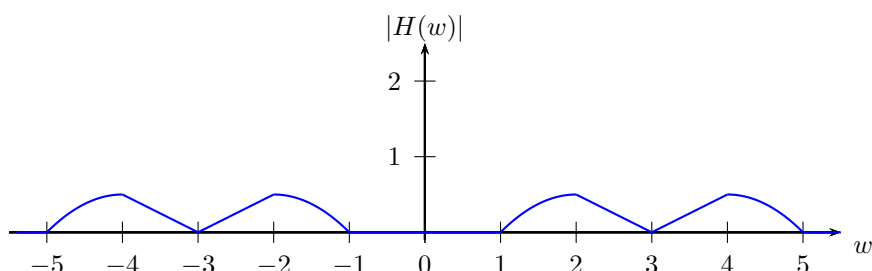
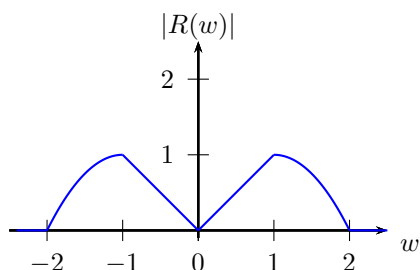
Logo,

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

e

$$|F(0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \right| = 1.$$

c) Definimos $r(t) = f'(t)$ e $h(t) = r(t) \cos(3t)$. Primeiro esboçamos $|R(w)| = |w| |F(w)|$ e depois $|H(w)| = \frac{|R(w+3)| + |R(w-3)|}{2}$, onde usamos as propriedades da derivada e da modulação, além do fato de $R(w-3)$ e $R(w+3)$ não ter sobreposição espectral.



d) Defina $q(t) = (f * g)(t)$ e $p(t) = q'(t)$. Pelas propriedades da convolução e derivada, temos $|Q(w)| = |F(w)||G(w)|$ e $|P(w)| = |w||Q(w)|$.

