

1 - 4	5	6	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau) d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real},$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad (m > 0, n > 0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em hertz:

Nota \ Escala	2	3	4	5	6	7
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Questão 1.(0.8pt) Sobre os coeficientes da Série de Fourier $f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)$

onde f , representada ao lado, tem menor período $T = 2$,
é correto:

☐ $a_0 = \frac{a+b}{2}$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

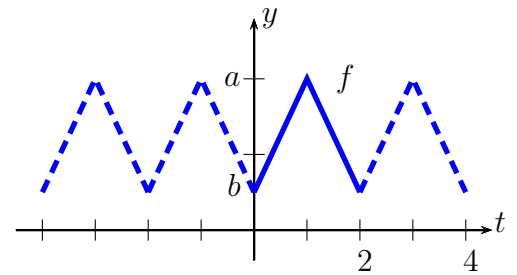
☐ $a_0 = \frac{a-b}{2}$, $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$

☐ $a_0 = a+b$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

☐ $a_0 = a-b$, $b_n = 0$ para todo $n \geq 1$

☐ $a_0 = 0$, $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$

☐ nenhuma das anteriores é correta



Questão 2.(3.2pt) Considere $f(t) = -2 \cos^2(t) + \sin(2t) + \sin(4t)$ e sua expansão em Série de Fourier (forma exponencial) $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t}$ em que w_1 é a frequência fundamental, $i^2 = -1$, é correto:

Frequência fundamental

☐ $w_1 = 1/2$

☐ $w_1 = 1$

☐ $w_1 = 2$

☐ $w_1 = 3$

☐ $w_1 = 4$

☐ nenhuma das anteriores está correta

Módulo de C_2

☐ $|C_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

☐ $|C_2| = 1/2$

☐ $|C_2| = 1$

☐ $|C_2| = \sqrt{2}$

☐ $|C_2| = 2$

☐ nenhuma das anteriores está correta

Fase (argumento) de C_2

☐ $\phi_2 = 3\pi/4$

☐ $\phi_2 = \pi/2$

☐ $\phi_2 = \pi/4$

☐ $\phi_2 = -3\pi/4$

☐ $\phi_2 = -\pi/2$

☐ nenhuma das anteriores está correta

Potência média $\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$

☐ $\bar{P}_f = 1$

☐ $\bar{P}_f = 1/2$

☐ $\bar{P}_f = 3/2$

☐ $\bar{P}_f = 5/2$

☐ $\bar{P}_f = 2$

☐ nenhuma das anteriores está correta

Questão 3. (0.8pt) Considere $f(t) = te^{-|t|}$. Sobre a transformada de Fourier $F(w)$ de $f(t)$, é correto:

☐ $F(w) = \frac{-4iw}{1+w^2}$

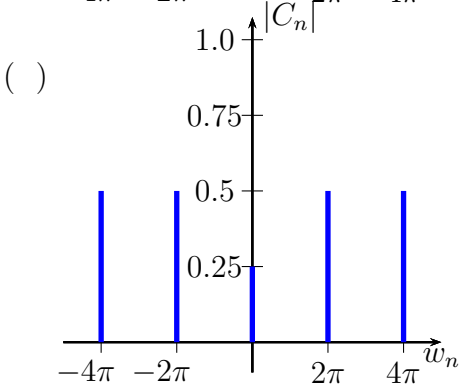
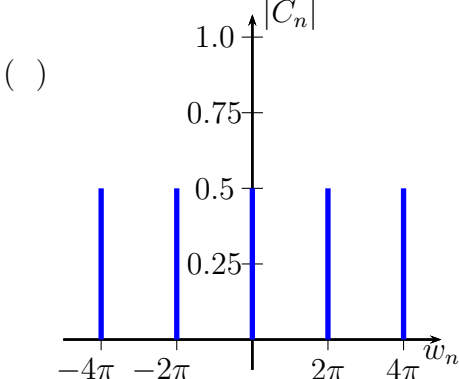
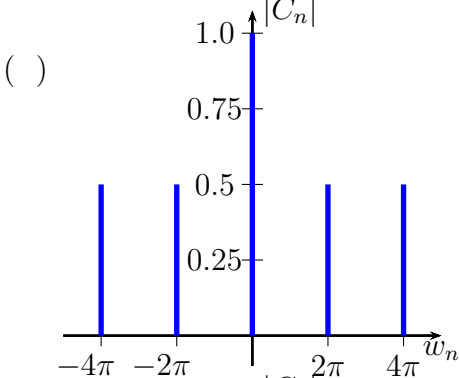
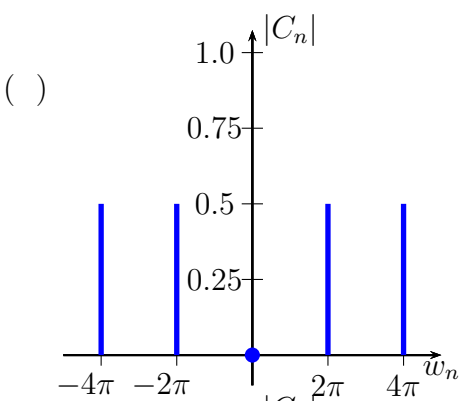
☐ $F(w) = \frac{-2iw}{1+w^2}$

☐ $F(w) = \frac{-2w}{(1+w^2)^2}$

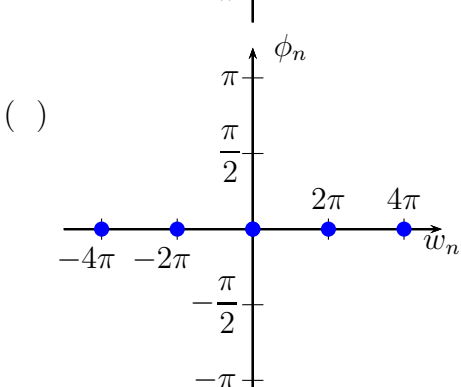
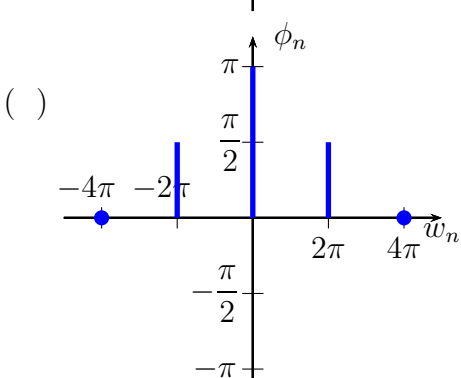
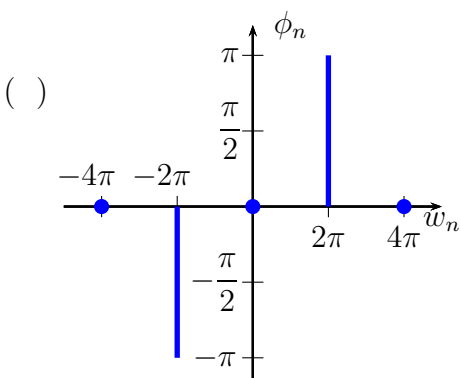
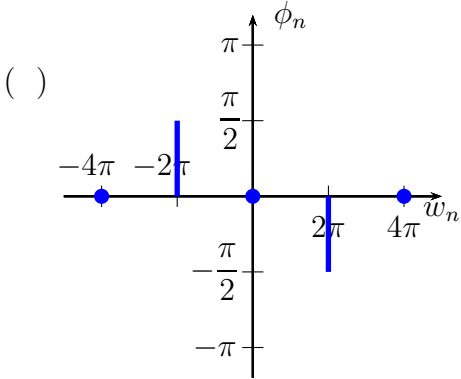
☐ $F(w) = \frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}$

☐ nenhuma das alternativas anteriores

Questão 4. (1.2pt) Considere a função $f(t) = \cos(4\pi t) + 2\sin^2(\pi t)$. Sobre o diagrama de espectro de módulo (primeira coluna) e diagrama de espectro de fase, estão corretos:



() nenhuma das alternativas anteriores



() nenhuma das alternativas anteriores

Questão 5 Considere o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

5A.(0.8pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = \frac{1}{4+x^2}, x \in \mathbb{R}$

5B.(0.6pt) Obtenha e resolva equação diferencial ordinária em t satisfeita pela transformada de Fourier $U(\cdot, t)$ da solução $u(x, t)$, juntamente com sua condição inicial em $t = 0$ para qualquer f .

5C.(0.6pt) Obtenha a solução $u(x, t)$ do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **5A**.

[illegible]

Questão 6 Considere o problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -u, \text{ para todos } x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6A.(0.4pt) Obtenha a transformada de Fourier $F(\cdot)$ de $f(x) = 3\delta(x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$, onde $\delta(\cdot)$ é a Delta de Dirac.

6B.(0.6pt) Obtenha a transformada de Fourier $G(\cdot)$ de $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$ usando (e indicando) as propriedades da tabela de transformadas de Fourier no verso da primeira folha.

6C.(0.6pt) Obtenha e resolva a equação diferencial ordinária satisfeita pela transformada de Fourier $U(\cdot, t)$ da solução $u(x, t)$, juntamente com sua condição inicial em $t = 0$, para qualquer f .

6D.(0.4pt) Obtenha a solução $u(x, t)$ do problema do enunciado para $f(x)$ conforme definida em **6A**.

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Bom Trabalho.