

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente!

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1. Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{F}\{f(t)\} + \beta \mathcal{F}\{g(t)\}$
2. Transformada da derivada	Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw \mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2 \mathcal{F}\{f(t)\}$
3. Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at} f(t)\} = F(w + ia)$
4. Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t - a)\} = e^{-iaw} F(w)$
5. Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6. Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t) \cos(w_0 t)\} = \frac{1}{2} F(w - w_0) + \frac{1}{2} F(w + w_0)$
7. Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$ $(F * G)(w) = 2\pi \mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8. Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9. Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10. Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{F(t)\}$
11. Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12. Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) ^2 dw$
13. Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T} \int_0^T f(t) ^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n ^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$ <p>onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$</p> $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt,$ $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(w_n t) dt,$ $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(w_n t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(w_n t) dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i w_n t},$ <p>onde $C_n = \frac{a_n - i b_n}{2}$</p>
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} (A(w) \cos(wt) + B(w) \sin(wt)) dw, \text{ para } f(t) \text{ real},$ <p>onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(wt) dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(wt) dt$</p>	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{i w t} dw,$ <p>onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i w t} dt$</p>

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{m}{a^2 + m^2} \quad (a > 0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma} \quad (a > 0, m \geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma} \quad (a \geq 0, m > 0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \cos(nx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n < m \\ \frac{\pi}{4}, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases} \quad \begin{matrix} (m > 0, \\ n > 0) \end{matrix}$	6. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m > 0 \\ 0, & m = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m < 0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r > 0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2 x^2} \cos(mx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$
9. $\int_0^\infty x e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2am}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin(mx) \cos(nx) dx = \frac{m(a^2 + m^2 - n^2)}{(a^2 + (m - n)^2)(a^2 + (m + n)^2)} \quad (a > 0)$
11. $\int_0^\infty x e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{a^2 - m^2}{(a^2 + m^2)^2} \quad (a > 0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4 + 4a^4} dx = \frac{\pi}{8a^3} e^{-ma} (\sin(ma) + \cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(mx)}{x^2} dx = m \frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\sin^2(ax) \sin(mx)}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0 < m < 2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0 < 2a = m) \\ 0, & (0 < 2a < m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\sin(mx) \sin(nx)}{x^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0 < m \leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0 < n \leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \sin(mx) dx = \frac{2m(3a^2 - m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$	18. $\int_0^\infty x^2 e^{-ax} \cos(mx) dx = \frac{2a(a^2 - 3m^2)}{(a^2 + m^2)^3} \quad (a > 0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a^3} (1 + ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	20. $\int_0^\infty \frac{x \sin(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi m}{4a} e^{-ma} \quad (a > 0, m > 0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos(mx)}{(a^2 + x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4a} (1 - ma) e^{-ma} \quad \begin{matrix} (a > 0, \\ m \geq 0) \end{matrix}$	22. $\int_0^\infty x e^{-a^2 x^2} \sin(mx) dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3} e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a > 0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó #	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré #	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá #	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol #	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá #	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

Identidades Trigonômétricas:

$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$
$\sin(x) \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
$\sin(x) \cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

- **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as funções dadas por:

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 1, & t = 2, \end{cases} \\ f(t+2) &= f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \\ g(t) &= f(t-1) - 1 \end{aligned}$$

Considere as representações em séries de Fourier dadas por:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{i w_n t}, \\ g(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n e^{i w_n t}. \end{aligned}$$

onde w_n é a frequência fundamental destas funções.

Assinale as alternativas corretas.

Os valores de F_0 e G_0 são:

- () 0 e 1
(X) 1 e 0
() 1/2 e 0
() 1/2 e -1/2
() 0 e -1

O valor de G_1

- () $-\frac{5i}{\pi}$
() $-\frac{4i}{\pi}$
() $-\frac{3i}{\pi}$
() $-\frac{2i}{\pi}$
(X) $-\frac{i}{\pi}$

- **Questão 2** (1.0 pontos) Considere a função dada por $f(t) = \cos^4(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(w_n t) + b_n \sin(w_n t)]$, onde w_1 é a frequência fundamental. Assinale as alternativas que indicam a_n e b_n .

- a_n
() $a_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$
() $a_0 = -\frac{3}{4}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{8}, a_n = 0, \quad n > 2.$
(X) $a_0 = \frac{3}{4}, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{8}, a_n = 0, \quad n > 2.$
() $a_0 = -\frac{3}{4}, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{8}, a_n = 0, \quad n > 2.$
() $a_0 = \frac{3}{4}, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{8}, a_n = 0, \quad n > 2.$

- b_n
(X) $b_n = 0, \quad \forall n \geq 0.$
() $b_0 = \frac{3}{4}, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{8}, b_n = 0, \quad n > 2.$
() $b_0 = -\frac{3}{4}, b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}, b_n = 0, \quad n > 2.$
() $b_0 = -\frac{3}{4}, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{8}, b_n = 0, \quad n > 2.$
() $b_0 = \frac{3}{4}, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{8}, b_n = 0, \quad n > 2.$

- **Questão 3** (1.0 ponto) Seja $f(t) = e^{-|t|}$ e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $g(t) := \mathcal{F}^{-1}\{i w F(w) e^{-i w}\}$. Assinale corretamente a alternativa que indica corretamente os valores de $g(2)$ e de $E := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$.

- $g(2)$
(X) $-e^{-1}$
() e^{-1}
() e
() $-e$
() e^{-2}
() $-e^{-2}$

- E
() 0
(X) 1
() 2
() 3
() 4

• **Questão 4** (2.0 pontos) Considere as funções dadas por:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{-|t|} \\ g(t) &= te^{-|t|} \\ h(t) &= \cos(t)e^{-|t|} \\ l(t) &= t \cos(t)e^{-|t|} \end{aligned}$$

Assinale as alternativas que indicam $F(w)$, $G(w)$, $H(w)$ e $L(w)$

$F(w)$

- () $\frac{1}{(w^2 + 1)^2}$
 () $\frac{1}{w^2 + 1}$
 () $\frac{w}{w^2 + 1}$
 () $\frac{2w}{(w^2 + 1)^2}$
 () $\frac{2}{(w^2 + 1)^2}$
 (X) $\frac{2}{w^2 + 1}$

$H(w)$

- (X) $\frac{1}{(w+1)^2 + 1} + \frac{1}{(w-1)^2 + 1}$
 () $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(w+1)^2 + 1} + \frac{1}{(w-1)^2 + 1} \right]$
 () $\frac{1}{2} \left[\frac{w+1}{(w+1)^2 + 1} + \frac{w+1}{(w-1)^2 + 1} \right]$
 () $\frac{w-1}{((w+1)^2 + 1)^2} + \frac{w-1}{((w-1)^2 + 1)^2}$
 () $\frac{1}{((w+1)^2 + 1)^2} + \frac{1}{((w-1)^2 + 1)^2}$
 () $\frac{1}{2} \left[\frac{1}{((w+1)^2 + 1)^2} + \frac{1}{((w-1)^2 + 1)^2} \right]$

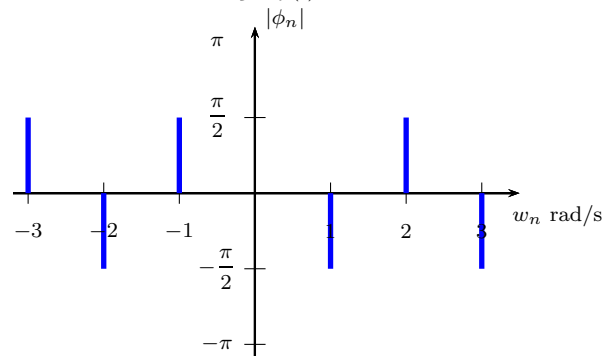
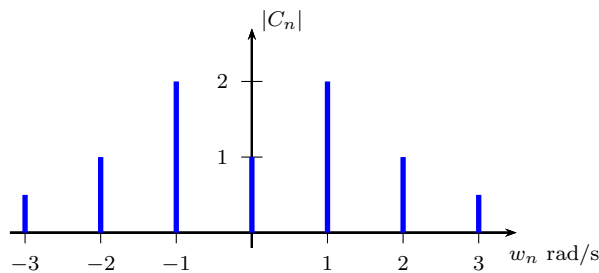
$G(w)$

- () $\frac{4iw}{(w^2 + 1)}$
 () $\frac{4iw}{(w^2 + 1)^2}$
 () $\frac{4w}{(w^2 + 1)}$
 (X) $\frac{-4iw}{(w^2 + 1)^2}$
 () $\frac{-2iw}{(w^2 + 1)^2}$
 () $\frac{2w}{(w^2 + 1)}$

$L(w)$

- () $\frac{2i(w+1)}{((w+1)^2 + 1)} + \frac{2i(w-1)}{((w-1)^2 + 1)}$
 () $\frac{2i(w+1)}{((w+1)^2 + 1)^2} + \frac{2i(w-1)}{((w-1)^2 + 1)^2}$
 () $\frac{2(w+1)}{((w+1)^2 + 1)} + \frac{2(w-1)}{((w-1)^2 + 1)}$
 () $-\frac{i(w+1)}{((w+1)^2 + 1)^2} - \frac{i(w-1)}{((w-1)^2 + 1)^2}$
 (X) $-\frac{2i(w+1)}{((w+1)^2 + 1)^2} - \frac{2i(w-1)}{((w-1)^2 + 1)^2}$
 () $\frac{w+1}{((w+1)^2 + 1)} + \frac{w-1}{((w-1)^2 + 1)}$

• **Questão 5** (1.0 pontos) Considere os diagramas de espectro de amplitude e fase de uma função $f(t)$.



Marque as alternativas que indicam, respectivamente, C_1 , C_2 e C_3 e o sinal $f(t)$.
 C_1 , C_2 e C_3

- () $C_1 = -2$, $C_2 = 1$ e $C_3 = -\frac{1}{2}$.
 () $C_1 = 2i$, $C_2 = -i$ e $C_3 = \frac{i}{2}$.
 (X) $C_1 = -2i$, $C_2 = i$ e $C_3 = -\frac{i}{2}$.
 () $C_1 = -2$, $C_2 = -i$ e $C_3 = -\frac{1}{2}$.
 () $C_1 = -2i$, $C_2 = -i$ e $C_3 = \frac{i}{2}$.

$f(t)$

- () $f(t) = 1 + 4 \cos(t) - 2 \cos(2t) + \cos(3t)$.
 () $f(t) = -1 + 4 \cos(t) - 2 \cos(2t) + \cos(3t)$.
 () $f(t) = -1 + 4 \sin(t) + 2 \sin(2t) + \sin(3t)$.
 (X) $f(t) = 1 + 4 \sin(t) - 2 \sin(2t) + \sin(3t)$.
 () $f(t) = 4 \sin(t) - 2 \sin(2t) + \sin(3t)$.

• **Questão 6** (2.0 pontos) Um fluido se desloca em um tubo termicamente isolado com velocidade constante v de forma que a evolução da temperatura $u(x, t)$ como uma função da coordenada x e do tempo é descrita pelo seguinte modelo simplificado:

$$u_t - vu_x - u_{xx} = 0.$$

Sabendo que no instante $t = 0$, a temperatura foi bruscamente aquecida em uma região muito pequena, de forma que podemos considerar

$$u(x, 0) = 500\delta(x).$$

Use a técnica das transformadas de Fourier para obter a solução desta equação diferencial quando $v = 1m/s$.

Solução: Aplicamos a transformada de Fourier na variável x , obtemos a seguinte expressão para a equação transformada

$$U_t(k, t) - v(ik)U(k, t) - (ik)^2U(k, t) = 0$$

onde foi usada a propriedade da derivada. A condição inicial se torna:

$$U(k, 0) = 500 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx} = 500$$

Portanto temos o seguinte problema de valor inicial:

$$U_t(k, t) = (-k^2 + ivk)U(k, t)$$

$$U(k, 0) = 500$$

cujas solução é

$$U(k, t) = 500e^{(-k^2 + ivk)t} = 500e^{ivkt}e^{-k^2t}$$

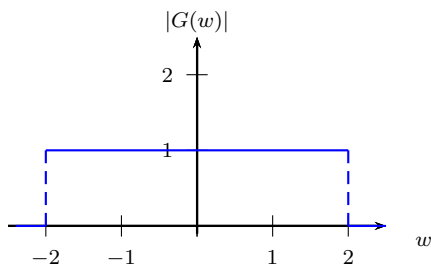
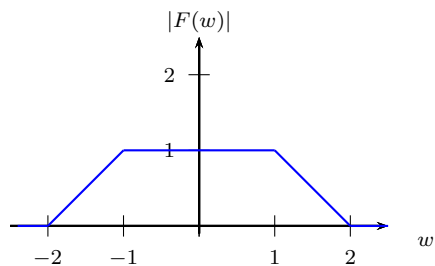
A multiplicação por e^{ivtk} indica um deslocamento no eixo x . Logo precisamos calcular:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^{-1} \left\{ e^{-k^2t} \right\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t} e^{ikx} dk = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-k^2t} \cos(ikx) dk \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \end{aligned}$$

Portanto

$$u(x, t) = \frac{250}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+vt)^2}{4t}} = \frac{250}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+t)^2}{4t}}$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções que possuem transformadas de Fourier e $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ e $G(w) = \mathcal{F}\{g(t)\}$. Os gráficos abaixo apresentam os seus diagramas de espectro de magnitudes.



Esboce o diagrama de magnitudes de $h(t) = f(t) \cos^2(3t)$ e $l(t) = h(t) * g(t)$.

Solução: Primeiro observamos que $h(t) = f(t) \frac{1 + \cos(6t)}{2} = \frac{1}{2}f(t) + \frac{\cos(6t)}{2}$. Assim, $H(w) = \frac{F(w)}{2} + \frac{F(w+6) + F(w-6)}{4}$. Também, $L(w) = H(w)G(w)$.

