

1-4	5	6	Total

Nome: \_\_\_\_\_ Cartão: \_\_\_\_\_

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador  $\vec{\nabla}$ :

$f = f(x, y, z)$  e  $g = g(x, y, z)$  são funções escalares;

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  e  $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$  são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $-(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
14.	$\vec{\nabla}\varphi(r) = \varphi'(r)\hat{r}$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Fórmula
Vetor normal	$\vec{N} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t) \times \vec{r}'(t)\ }$
Vetor binormal	$\vec{B} = \frac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }$
Curvatura	$\kappa = \left\  \frac{d\vec{T}}{ds} \right\  = \left\  \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\  = \frac{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }{\ \vec{r}'(t)\ ^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ ^2}$
Módulo da Torção	$ \tau  = \left\  \frac{d\vec{B}}{ds} \right\  = \left\  \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\ $
Aceleração normal	$a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$\frac{d\vec{T}}{ds}$	=	$\kappa\vec{N}$
$\frac{d\vec{N}}{ds}$	=	$-\kappa\vec{T} \quad +\tau\vec{B}$
$\frac{d\vec{B}}{ds}$	=	$-\tau\vec{N}$

- **Questão 1** (0.5 ponto cada item) Considere a hélice circular não uniforme dada por:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Marque a resposta correta para cada coluna.

Normal unitário em  $t = 0$ :

( )  $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

( )  $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

( )  $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4} (-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$

( )  $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

(X)  $\vec{N}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6} (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

Binormal unitário em  $t = 0$ :

(X)  $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

( )  $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

( )  $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{4} (-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k})$

( )  $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{3}}{3} (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

( )  $\vec{B}(0) = \frac{\sqrt{6}}{6} (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$

Curvatura em  $t = 0$ :

( )  $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

(X)  $\kappa(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( )  $\kappa(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

( )  $\kappa(0) = \frac{2}{3}$

( )  $\kappa(0) = \frac{1}{3}$

**Solução:**

Torção em  $t = 0$ :

( )  $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{2}$

( )  $\tau(0) = \frac{\sqrt{6}}{4}$

( )  $\tau(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(X)  $\tau(0) = \frac{2}{3}$

( )  $\tau(0) = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \cos(t)\vec{i} + \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\ \vec{r}'(t) &= -\sin(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\ \vec{r}''(t) &= -\cos(t)\vec{i} - \sin(t)\vec{j} + e^t\vec{k} \\ \vec{r}'''(t) &= \sin(t)\vec{i} - \cos(t)\vec{j} + e^t\vec{k}\end{aligned}$$

Substituímos em  $t = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}\vec{r}'(0) &= \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{r}''(0) &= -\vec{i} + \vec{k} \\ \vec{r}'''(0) &= -\vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\|\vec{r}'(0)\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{i} + (-1-0)\vec{j} + (0+1)\vec{k} \\ &= \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0) = 0+1+1=2$$

$$\begin{aligned}\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \times \vec{r}'''(0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (1-0)\vec{k} \\ &= -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\end{aligned}$$

$$\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \times \vec{r}'''(0)\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
 \kappa(0) &= \frac{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|}{\|\vec{r}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{6}}{4}, \\
 \tau(0) &= \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \cdot \vec{r}'''(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|^2} = \frac{2}{\sqrt{3}^2} = \frac{2}{3}, \\
 \vec{T}(0) &= \frac{\vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0)\|} = \frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{j} + \vec{k}), \\
 \vec{N}(0) &= \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \times \vec{r}'(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0) \times \vec{r}'(0)\|} = \frac{-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6} (-2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\
 \vec{B}(0) &= \frac{\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)}{\|\vec{r}'(0) \times \vec{r}''(0)\|} = \frac{\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})
 \end{aligned}$$

• **Questão 2** (0.5 ponto cada item) Uma abelha viaja sobre uma trajetória  $\vec{r}(t)$  com velocidade  $\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Sabendo que a abelha passa pelo ponto  $(1, 1, 1)$  em  $t = 0$ , marque a resposta correta para cada coluna.

Posição da abelha  $\vec{r}(t)$

( )  $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + t\vec{k}$

(X)  $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + (t + 1)\vec{k}$

( )  $\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + t\vec{k}$

( )  $\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} + \vec{k}$

( )  $\vec{r}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$

**Solução:**

Componente tangencial da aceleração  $a_T$

( )  $a_T = \frac{1+t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

( )  $a_T = \frac{t+2t^2}{\sqrt{t^3+t^2+t}}$

( )  $a_T = \frac{1+t^2}{\sqrt{t^4+t^2+t}}$

(X)  $a_T = \frac{t+2t^3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$

( )  $a_T = \frac{1+2t}{\sqrt{t^2+t+1}}$

$$\vec{v}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + C_2\right)\vec{j} + (t + C_3)\vec{k}$$

Como em  $t = 0$ ,  $\vec{r}(0) = (1, 1, 1)$ , temos:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^2}{2} + 1\right)\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3} + 1\right)\vec{j} + (t + 1)\vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j}$$

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{t^2 + t^4 + 1}$$

$$a_T = v'(t) = \frac{1}{2} (t^2 + t^4 + 1)^{-1/2} (2t + 4t^3) = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{t^2 + t^4 + 1}}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}(t) \times \vec{a}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ t & t^2 & 1 \\ 1 & 2t & 0 \end{vmatrix} \\
 &= (0 - 2t)\vec{i} + (1 - 0)\vec{j} + (2t^2 - t^2)\vec{k} \\
 &= -2t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1 + t^4}$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{4t^2 + 1 + t^4}}{\sqrt{(t^2 + t^4 + 1)^3}}$$

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(t^4 + t^2 + 1)^{1/2}}$$

• **Questão 3** (0.5 ponto cada item) Considere a superfície fechada limitada pelos plano  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 2$  e  $z = \pm 2$ , orientada para fora, e o campo  $\vec{F} = -2(z^2 + 1)xy\vec{i} + (z^2 + 1)y^2\vec{j} + xyz^2\vec{k}$ .

Integral de superfície

(X)  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

( )  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 4$

( )  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 8$

( )  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 16$

( )  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 24$

Divergente

( )  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)xy + (z^2 + 1)y^2 + xyz^2$

( )  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)x + xyz^2$

( )  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2(z^2 + 1)x + xyz$

( )  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -(z^2 + 1)y + 2xyz$

(X)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2xyz$

**Solução:** O divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial(-2(z^2+1)xy)}{\partial x} + \frac{\partial((z^2+1)y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(xyz^2)}{\partial z} = -2(z^2+1)y + 2y(z^2+1) + 2xyz = 2xyz.$$

Como o campo é suave e a superfície é fechada e orientada para fora, usamos o Teorema da Divergência para calcular:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V 2xyz dV,$$

onde V é o cubo de lado 4. Temos:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 2xyz dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 xy [z^2]_{-2}^2 dy dx = \int_{-2}^2 \int_{-2}^2 xy [2^2 - (-2)^2] dy dx = 0.$$

• **Questão 4** (0.5 ponto cada item) A figura ao lado apresenta o corte  $z = 0$  de um campo  $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i}$  e as seguintes quatro curvas orientadas:  $C_1$  é um círculo,  $C_2$  é um segmento de reta,  $C_3$  é uma elipse e  $C_4$  é a união de dois segmentos de reta. Considere também a esfera  $S_1$  centrada na origem, raio 2 e orientada para fora e o plano  $S_2$  dado por  $x = 0$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ,  $-2 \leq z \leq 2$ , orientado no sentido de  $\vec{i}$ . Marque a resposta correta para cada coluna.

Integral de linha:

( )  $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} > 0$

( )  $\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

( )  $\int_{C_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

(X)  $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$

( )  $\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} > \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Integral de Superfície:

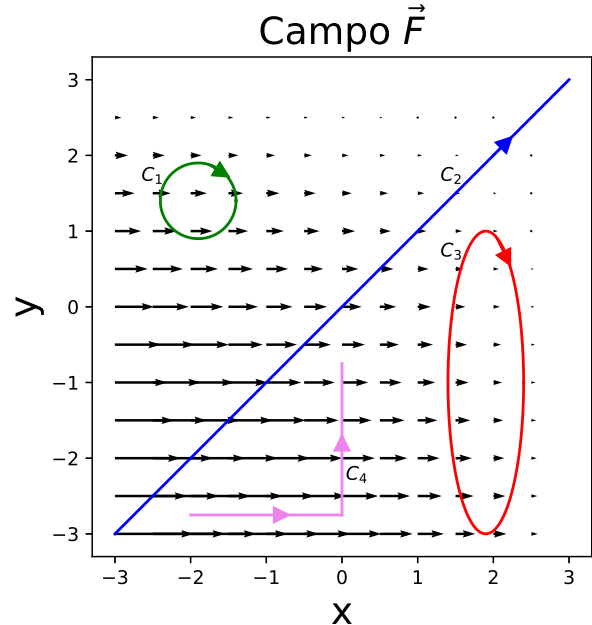
( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$

( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > 0$

(X)  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( )  $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS < 0$

( )  $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS > \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$



Curvatura:

( ) A curvatura é uma constante para cada curva.

( ) A curvatura é zero para  $C_1$  e  $C_2$ .

( ) A curvatura não é constante para  $C_1$  e  $C_3$

(X) Os pontos de maior e menor curvatura estão sobre a curva  $C_3$

( ) A curvatura sobre  $C_2$  cresce da esquerda para direita.

Rotacional:

( )  $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} > 0$  em todos os pontos.

(X)  $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} < 0$  em todos os pontos.

( )  $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} = 0$  em todos os pontos.

( )  $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{i} > 0$  em todos os pontos

( )  $\nabla \times \vec{F} \cdot \vec{j} > 0$  em todos os pontos

• **Questão 5** (1.0 ponto) Sejam  $a_N$  e  $a_T$  indicam as acelerações normal e tangencial, respectivamente. Prove algebricamente a expressão dada por:

$$\|\vec{a}\|^2 = a_N^2 + a_T^2$$

onde  $\vec{a}$  é o vetor aceleração. Faça uma interpretação geométrica.

**Solução:**

$$\begin{aligned} \|\vec{a}\|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} \\ &= (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) \cdot (a_T \vec{T} + a_N \vec{N}) \\ &= a_T \vec{T} \cdot a_T \vec{T} + a_T \vec{T} \cdot a_N \vec{N} + a_N \vec{N} \cdot a_T \vec{T} + a_N \vec{N} \cdot a_N \vec{N} \\ &= a_T^2 \|\vec{T}\|^2 + a_N^2 \|\vec{N}\|^2 \\ &= a_T^2 + a_N^2 \end{aligned}$$

A interpretação geométrica se dá pelo teorema de Pitágoras, sendo  $\vec{a}$  um vetor no plano formado por  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$ ,  $a_T$  e  $a_N$  são as medidas dos catetos e  $\|\vec{a}\|$  a medida da hipotenusa.

• **Questão 6** (3.0 pontos) Considere o campo vetorial  $\vec{F} = xz\vec{i} + x\vec{j} + \frac{y^2}{2}\vec{k}$ , a superfície  $S_1$  formada pelo parabolóide  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,  $z \geq 0$  e a superfície  $S_2$  formada pelo cone  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , ambas orientada no sentido positivo do eixo  $z$ .

a) (1.5) Calcule as seguintes integrais de superfície:

$$\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS$$

e

$$\iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

convertendo-as em integrais duplas iteradas (sem usar o teoremas de Stokes).

b) (1.0) Use o teorema de Stokes para justificar o resultado do item a).

c) (0.5) Usando o resultado do item a) e o teorema do Stokes, é possível calcular o valor da integral

$$\iint_D (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

onde  $D$  é disco unitário no plano  $xy$  dado por  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ ?

**Solução:** a) Primeiro vamos calcular o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & x & \frac{y^2}{2} \end{vmatrix} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}.$$

Agora, calculamos o vetor normal a cada superfície fazendo  $G_1 = z + x^2 + y^2 - 1 = 0$  e  $G_2 = z + \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ . Temos

$$\vec{\nabla} G_1 = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}$$

e

$$\vec{\nabla} G_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{j} + \vec{k}.$$

Logo, sendo  $C$  o círculo unitário no plano  $xy$ , temos:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C (y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}) \cdot (2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}) dA \\ &= \iint_C (4xy + 1) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4\rho \cos(\theta) \rho \sin(\theta) + 1) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\rho^3 \sin(2\theta) + \rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{8} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS &= \iint_C \left( \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 1 \right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 1) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho \sin(2\theta) + \rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(2\theta)}{2} + \frac{1}{2} \right) d\theta \\ &= \left| -\frac{\cos(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = \pi. \end{aligned}$$

b) Observe que o círculo unitário  $C$  limita as duas superfícies,  $S_1$  e  $S_2$ . O teorema de Stokes nos dá

$$\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$\iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Logo,

$$\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS.$$

c) A superfície  $D$  é limitada por  $C$ . Portanto,

$$\iint_{S_3} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} dS = \pi.$$