

1 - 5	6	7	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$, onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}d\hat{s}$

Séries:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n, \quad -1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x \sin(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x \sin(\lambda x) dx = \frac{\sin(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \sin(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \sin(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \sin(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\sin(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \sin(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\sin(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}, \quad (a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\sin(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \sin(at) \sinh(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^2)}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh(at) - \sin(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2 + w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2 - a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \sin(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \sin(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\mathcal{L}\{\ln(t)\}$ e $\mathcal{L}\{\ln(t)e^{-t}\}$

☐ $\gamma - \frac{\ln(s)}{s},$ ☐ $-\gamma - \frac{\ln(s-1)}{s-1},$

☐ $-\gamma - \frac{\ln(s)}{s},$ ☐ $\gamma - \frac{\ln(s+1)}{s+1},$

☐ $\frac{-\gamma - \ln(s)}{s},$ ☐ $\frac{\gamma - \ln(s-1)}{s-1},$

☐ $\frac{\gamma - \ln(s)}{s},$ ☐ $\frac{-\gamma - \ln(s+1)}{s+1},$

☐ n.d.a. ☐ n.d.a.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a função $f(t)$ definida como

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2, \\ 4-t, & t > 2. \end{cases}$$

Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, uma representação para $f(t)$ e $\mathcal{L}\{f(t)\}$:

☐ $f(t) = tu(t) + (4-2t)u(t-2)$ ☐ $\frac{1}{s^3} - \frac{2}{s^3}e^{-2s}$

☐ $f(t) = tu(t) + (4-t)u(t-2)$ ☐ $\frac{1}{s^2} + \frac{4}{s}e^{-2s} - \frac{2}{s^2}e^{-2s}$

☐ $f(t) = t[u(t) - u(t-1)] + (4-2t)u(t-2)$ ☐ $\frac{1}{s^3} + \frac{4}{s^2}e^{-2s} - \frac{4}{s^3}e^{-2s}$

☐ $f(t) = tu(t) + (4-2t)u(t-4)$ ☐ $\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-2s}$

☐ n.d.a. ☐ n.d.a.

• **Questão 3** (1.0) Assinale as alternativas que indicam, respectivamente, $\mathcal{L}\{J_0(at) * J_0(at)\}$ e $\mathcal{L}\{tJ_0(at)\}$

☐ $\frac{1}{s^2 + a^2},$ ☐ $\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

☐ $\frac{s}{s^2 + a^2},$ ☐ $-\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

☐ $\frac{a}{s^2 + a^2},$ ☐ $\frac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

☐ $\frac{1}{(s^2 + a^2)^{3/2}},$ ☐ $-\frac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}}$

☐ $\frac{s}{(s^2 + a^2)^{3/2}},$ ☐ $\frac{as}{(s^2 + a^2)}$

☐ $\frac{a}{(s^2 + a^2)^{3/2}},$ ☐ $-\frac{a}{(s^2 + a^2)}$

☐ n.d.a. ☐ n.d.a.

• **Questão 4** (1.0) Considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}x'(t) &= -x(t) + \alpha y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t)\end{aligned}$$

Com $x(0) = 0$ e $y(0) = 1$ e onde α é uma constante real.

a) (0.5) Assinale a alternativa que indica uma expressão para $X(s)$, isto é, $\mathcal{L}\{x(t)\}$:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2 - \alpha}$ | <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3 - \alpha}$ |
| <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2 + \alpha}$ | <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 3 + \alpha}$ |
| <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{\alpha}{s^2 + 3s + 2 - \alpha}$ | <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{\alpha}{s^2 + 2s + 3 - \alpha}$ |
| <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{\alpha}{s^2 + 3s + 2 + \alpha}$ | <input type="checkbox"/> $X(s) = \frac{\alpha}{s^2 + 2s + 3 + \alpha}$ |
| | <input type="checkbox"/> n.d.a. |

b) (0.5) Assinale a alternativa que indica o tipo de amortecimento do sistema dado para os valores de α dados respectivamente por -2 , -1 , 0 e 1 :

- ☐ Sem amortecimento, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.
- ☐ Subamortecido, subamortecido, criticamente amortecido e superamortecido.
- ☐ Subamortecido, criticamente amortecido, superamortecido e superamortecido.
- ☐ Superamortecido, superamortecido, criticamente amortecido e subamortecido.
- ☐ Superamortecido, criticamente amortecido, subamortecido e subamortecido.
- ☐ Subamortecido, subamortecido, superamortecido e superamortecido.
- ☐ n.d.a.

• **Questão 5** (1.0) Considere o seguinte problema de valor de contorno:

$$\begin{aligned}u''(x) - \alpha^2 u(x) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \\ u(1) &= 10,\end{aligned}$$

onde α é uma constante positiva.

a) Assinale a alternativa que indica uma expressão para $u(x)$.

- ☐ $C \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2},$
- ☐ $C \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2},$
- ☐ $C e^{\alpha^2 x},$
- ☐ $C e^{-\alpha^2 x},$
- ☐ $C \sin(\alpha x),$
- ☐ $C \cos(\alpha x).$

b) Assinale a alternativa que indica o valor da constante C (a mesma do item anterior) quando $\alpha = \ln(2)$.

- ☐ 1,
- ☐ 3,
- ☐ 5,
- ☐ 6,
- ☐ 8,
- ☐ 12,
- ☐ n.d.a.

Onde C é uma constante que depende de $u(1)$.

- **Questão 6** (2.5) Considere a seguinte equação integral:

$$y(t) = x(t) + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau$$

onde $x(t)$ é um termo forçante conhecido.

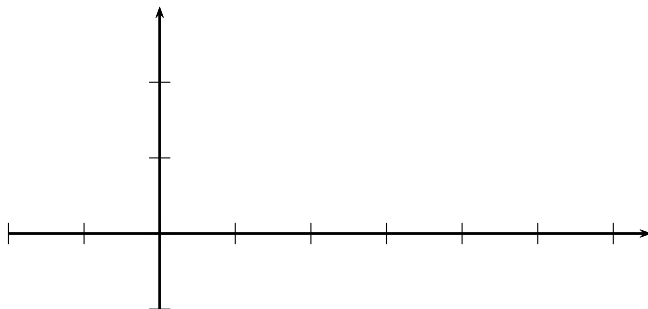
- a) (1.0 ponto) Calcule a transformada de Laplace da equação integral e escreva $Y(s) = H(s)X(s)$, onde $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $H(s)$ é uma função a ser determinada. Reproduza sua resposta final abaixo:

$Y(s) =$

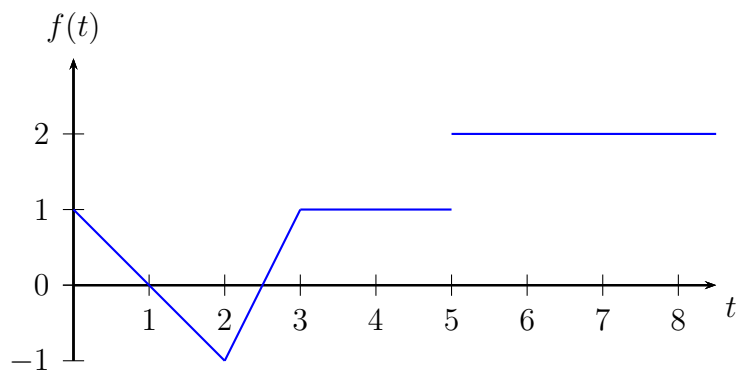
- b) (1.0 ponto) Supondo $x(t) = t \sin(t)$, encontre $y(t)$. Reproduza sua resposta final abaixo:

$y(t) =$

- c) (0.5 ponto) Esboce o gráfico da solução $y(t)$ encontrada no item b) indicando eixos e valores notáveis.



- **Questão 7** (2.5) Considere a função $f(t)$ cujo gráfico é dado abaixo.



- a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico de $f'(t)$ indicando eixos e valores notáveis.
- a) (1.0 ponto) Escreva $f(t)$ e $f'(t)$ usando a função de Heaviside e Delta de Dirac. Reproduza sua resposta final abaixo:

$f(t)=$

$f'(t)=$

- b) (1.0 ponto) Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e $\mathcal{L}\{f'(t)\}$. Reproduza sua resposta final abaixo:

$\mathcal{L}\{f(t)\}=$

$\mathcal{L}\{f'(t)\}=$

