UFRGS - INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma C - 2017/2
Prova da área I

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert \frac{d\vec{T}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert = \frac{\Vert \vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert \frac{d\vec{B}}{ds} \right\Vert = \left\Vert \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \frac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

Equações de Frenet-Serret:

$$\begin{aligned}
\frac{d\vec{T}}{ds} &= \kappa\vec{N} \\
\frac{d\vec{N}}{ds} &= -\kappa\vec{T} + \tau\vec{B} \\
\frac{d\vec{B}}{ds} &= -\tau\vec{N}
\end{aligned}$$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere que uma partícula descreva a trajetória dada por

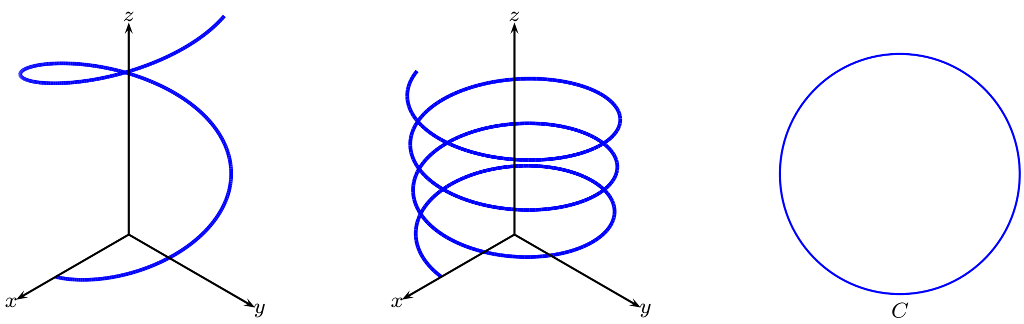
$$x(t) = t, \quad y(t) = 2e^{t-1}, \quad z(t) = t^2, \ t \geq 0$$

Assinale as alternativas que indicam respectivamente o módulo da velocidade e a curvatura da curva descrita pela trajetória no instante $t = 1$.

( ) 1
( ) 2
(x) 3
( ) 4
( ) 5

(x) $\frac{2\sqrt{2}}{27}$
( ) $\frac{\sqrt{2}}{27}$
( ) $\frac{2}{27}$
( ) $\frac{3\sqrt{2}}{27}$
( ) $\frac{1}{27}$

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere as três curvas, sendo duas hélices circulares, H_1 e H_2, e uma circunferência C. Para as curvas H_1 e H_2, suponha que as escalas dos eixo cartesianos são as mesmas. Denotamos aqui τ_1, τ_2 e τ_3 as torções κ_1, κ_2 e κ_3 as curvaturas das curvas H_1, H_2, e C, respectivamente. Assinale na primeira coluna o correto sinal de cada torção e na segunda as correta relações entre as curvaturas.



H_1 H_2

( ) $\tau_1 < 0$, $\tau_2 > 0$ e $\tau_3 = 0$
( ) $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ e $\tau_3 = 0$
( ) $\tau_1 < 0$, $\tau_2 < 0$ e $\tau_3 > 0$
( ) $\tau_1 < 0$, $\tau_2 > 0$ e $\tau_3 > 0$
( ) $\tau_1 > 0$, $\tau_2 < 0$ e $\tau_3 > 0$
(x) $\tau_1 > 0$, $\tau_2 < 0$ e $\tau_3 = 0$

( ) $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3$
(x) $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$
( ) $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$
( ) $\kappa_1 = \kappa_2 > \kappa_3 = 0$
( ) $\kappa_3 < \kappa_2 < \kappa_1$

• **Questão 3** (1.0 ponto) Considere os campos dados por

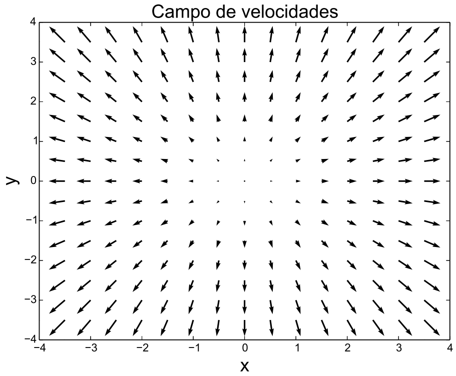
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \ln(1+x^2) + e^y \\ g(x,y,z) &= x + y + z \\ \vec{F}(x,y,z) &= (x+y+z)\vec{i} + (x+y-z)\vec{j} + (x-y-z)\vec{k} \end{aligned}$$

Assinale as alternativas que apresentam expressões para $\vec{\nabla} g \cdot \left(\vec{\nabla} \times \left(\vec{F} + \vec{\nabla} f\right)\right)$ e $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$, respectivamente.

( ) 3
(x) 0
( ) $x + y + z$
( ) $(x+y+z)(\ln(1+x^2) + e^y)$
( ) $(x+y+z)\left(\frac{2x}{1+x^2} + e^y\right)$

( ) $2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$
( ) $2\frac{x}{(1+x^2)} + e^y$
( ) $2\frac{x}{(1+x^2)}$
(x) $2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} + e^y$
( ) $\frac{1}{(1+x^2)} + 2e^y$

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo central $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ dado no gráfico ao lado. Em cada coluna assinale uma alternativa correta.



( ) O divergente é nulo no ponto $(1,1)$.

( ) O divergente não existe no ponto $(-3,-3)$.

( ) O divergente é nulo em todos os pontos.

(x) O divergente é não-negativo em todos os pontos.

( ) O divergente é não-positivo em todos os pontos.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

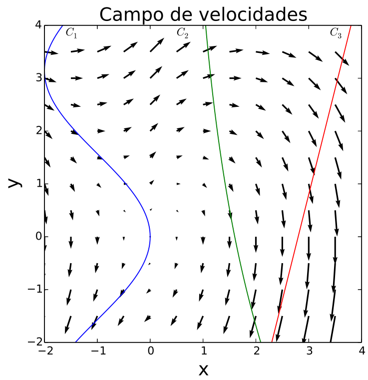
( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} < 0$ em todos os pontos, exceto na origem.

(x) O campo é irrotacional.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ somente no ponto $(0,0)$.

( ) $\vec{k}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{F} > 0$ somente na região $x < 0$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) Considere o campo de velocidades e as três curvas, C_1, C_2 e C_3, orientadas no sentido negativo de y. Definimos



$$I_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \quad I_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{e} \quad I_3 = \int_{C_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Em cada coluna assinale uma alternativa correta.

(x) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $|I_1| \geq |I_3| \geq |I_2|$.

( ) $|I_2| \geq |I_3| \geq |I_1|$.

( ) $|I_1| \geq |I_2| \geq |I_3|$.

(x) $|I_3| \geq |I_2| \geq |I_1|$.

( ) $|I_2| \geq |I_1| \geq |I_3|$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Sejam $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ e as três superfícies $S_1 : y = -1$, $S_2 : y = 1$ e $S_3 : y = 3$, todas com domínio a região $x^2 + z^2 \leq 1$ e orientações no sentido positivo do eixo y. Definimos

$$I_1 = \iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS, \quad I_2 = \iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS \quad \text{e} \quad I_3 = \iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$$

Em cada coluna assinale uma alternativa correta.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 < 0$.

(x) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 < 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 > 0$, e $I_3 > 0$.

( ) $I_1 < 0$, $I_2 < 0$, e $I_3 > 0$.

(x) $|I_1| = |I_2| \leq |I_3|$.

( ) $|I_1| \geq |I_2| \geq |I_3|$.

( ) $|I_1| = |I_2| \geq |I_3|$.

( ) $|I_1| \geq |I_2| = |I_3|$.

(x) $|I_1| \leq |I_2| \leq |I_3|$.

Como $I_1 = I_2 = \pi$ e $I_3 = 9\pi$, há duas alternativas corretas.

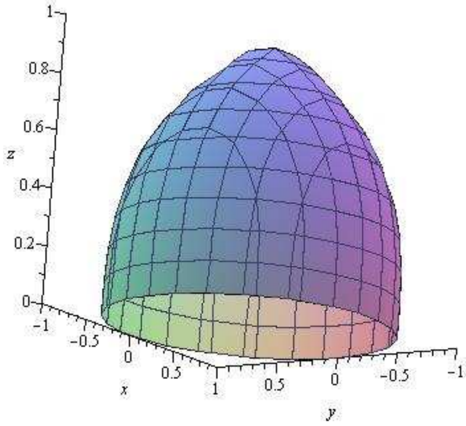
• **Questão 7** (2.0) Considere a região V limitada superiormente pela superfície S_1 de equação

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 - z^3, \quad 0 \leq z \leq 1$$

e inferiormente pelo plano $z = 0$ e o campo $\vec{F} = (x + \cos(y))\vec{i} + \cos(z)\vec{j} + (z+1)\vec{z}$.

(a) Use o teorema da divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície S que limita V orientada para fora.

(b) Calcule o valor de $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$. Dica: use o resultado do item a.



Representação da superfície S_1.

Resposta do item a) Primeiro calculamos

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Pelo teorema da divergência, o fluxo é dado por:

$$\Phi = \oiint \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = 2 \iiint dV$$

Parametrizando em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2 \iiint dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-z^3} \rho d\rho dz d\theta = 4\pi \int_0^1 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{1-z^3} dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(1 - z^3\right)^2 dz = 2\pi \int_0^1 \left(1 - 2z^3 + z^6\right) dz = \\
&= 2\pi \left. \left(z - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{7}z^7\right) \right|_0^1 = 2\pi \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) = \frac{9\pi}{7}
\end{aligned}$$

Alternativamente, poderíamos ter parametrizado conforme a seguir:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 2 \iiint dV = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{1-\rho}} \rho dz d\rho d\theta = 4\pi \int_0^1 \rho \sqrt[3]{1-\rho} d\rho \\
&= 4\pi \left(- \int_1^0 (1-u) \sqrt[3]{u} du \right) \\
&= 4\pi \int_0^1 (u^{1/3} - u^{4/3}) = 4\pi \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{7} \right) = \frac{9\pi}{7}
\end{aligned}$$

Resposta do item b) Sabemos que

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

onde

$$\Phi_1 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$$

e

$$\Phi_2 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS$$

Podemos facilmente obter Φ_2:

$$\begin{aligned}
\Phi_2 &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\eta} dS = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) dS \\
&= - \iint_{S_2} dS = \iint_{S_2} dS = -\pi
\end{aligned}$$

Assim:

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_2 = \frac{9\pi}{7} + \pi = \frac{16\pi}{7}$$

• **Questão 8** (2.0 pontos) Considere o campo dado por

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

a) Seja C uma circunferência sobre o plano $z=0$ centrada na origem de raio $a>0$ orientada no sentido anti-horário, calcule o valor da circulação

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

usando parametrização direta.

b) Use o teorema de Stokes para mostrar que se C é um caminho qualquer simples, fechado e suave que não passa nem circunda a origem no plano xy, então:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0.$$

Resposta do item a) Defina o caminho dado pela parametrização:

$$\vec{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + \operatorname{sen}(t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

de forma que:

$$\vec{r}'(t) = -\operatorname{sen}(t)\vec{i} + \cos(t)\vec{j}$$

Assim temos:

$$\begin{aligned}
W &= \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\cdot\vec{r}'(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}(t)\frac{y}{x^2+y^2} + \cos(t)\frac{x}{x^2+y^2}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\operatorname{sen}(t)\frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)} + \cos(t)\frac{\cos(t)}{\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t)}\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi
\end{aligned}$$

Resposta do item b) Observe que

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}\right)\vec{k} = \vec{0}$$

Como a única singulariade do campo acontece na origem, podemos aplicar o teorema de Stokes em C para obter:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_C \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot k dS = 0$$