UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2016/1
Prova da área II

1-6	7	8	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________

Regras Gerais:

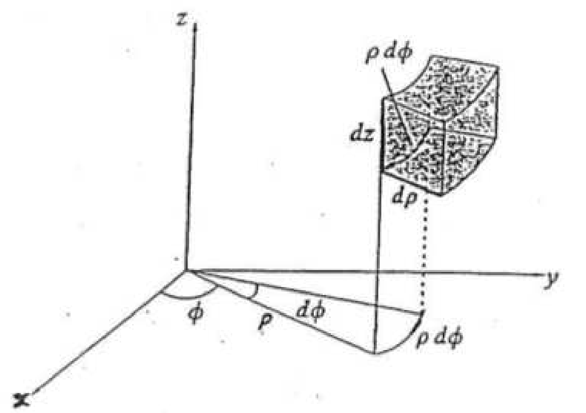
- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

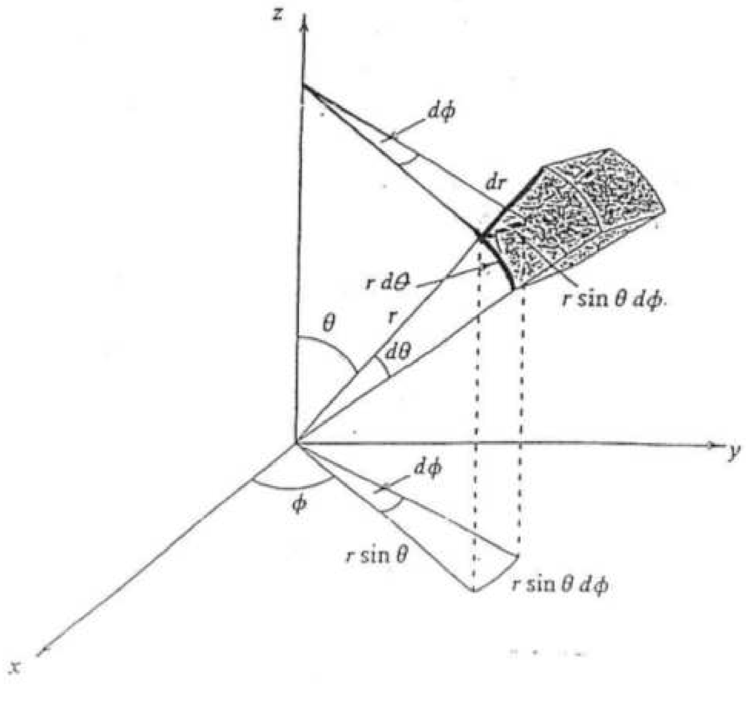
- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

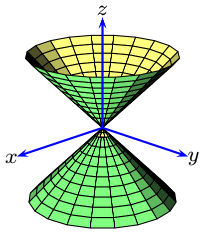
a) Coordenadas cilíndricas : ρ, ϕ, z



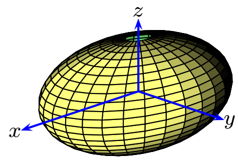
b) Coordenadas esféricas : r, θ, ϕ



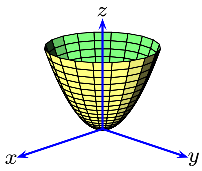
Cone elíptico: $z^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



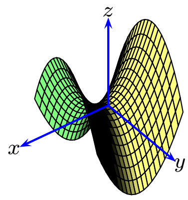
Elipsóide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



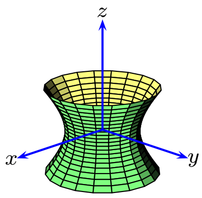
Parabolóide Elíptico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$



Parabolóide Hiperbólico: $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$



Hiperbolóide de uma folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$



Hiperbolóide de duas folhas: $-\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$

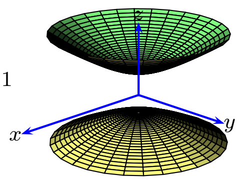


Tabela do operador $\vec{\nabla}$:
$f = f(x,y,z)$ e $g = g(x,y,z)$ são funções escalares;
$\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x,y,z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\cdot\vec{G}$
3.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{F} + \vec{\nabla}\times\vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla}\cdot\left(f\vec{F}\right) = \left(\vec{\nabla}f\right)\cdot\vec{F} + f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)$
6.	$\vec{\nabla}\times\left(f\vec{F}\right) = \vec{\nabla}f\times\vec{F} + f\vec{\nabla}\times\vec{F}$
7.	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, onde $\vec{\nabla}^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right) = 0$
9.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = 0$
10.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{F}$
11.	$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = G\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right) - F\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$
12.	$\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} - \vec{G}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) - \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$
13.	$\vec{\nabla}\left(\vec{F}\cdot\vec{G}\right) = \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{F} + \left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{G} + \vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right) + \vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

Algumas fórmulas:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\Vert\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\dfrac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert = \dfrac{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert}{\Vert\vec{r}'(t)\Vert^3}$
Torção	$\tau = -\dfrac{d\vec{B}}{ds}\cdot\vec{N} = \dfrac{(\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t))\cdot\vec{r}'''(t)}{\Vert\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t)\Vert^2}$
Módulo da Torção	$\lvert\tau\rvert = \left\Vert\dfrac{d\vec{B}}{ds}\right\Vert = \left\Vert\dfrac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}}\right\Vert$
Aceleração normal	$a_N = \dfrac{\Vert\vec{a}\times\vec{v}\Vert}{v} = \dfrac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \dfrac{dv}{dt}$

• **Questão 1** (1.0 ponto) Uma abelha se desloca com velocidade escalar constante ao longo de sua trajetória. Em um determinado instante sua velocidade (em m/s) é dada pelo vetor $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$. Sabendo que a aceleração normal neste instante vale 14 m/s^2, o vetor aceleração tangencial $\vec{a}_T = a_T\vec{T}$ é dado por:

( ) $\vec{a}_T = 6\vec{i} + 9\vec{j} - 18\vec{k}$.

( ) $\vec{a}_T = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 12\vec{k}$.

( ) $\vec{a}_T = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$.

( ) $\vec{a}_T = \vec{0}$.

( ) Não é possível calcular apenas com os dados dados.

( ) Nenhuma das anteriores.

• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere a curva representada no gráfico abaixo. Pode-se afirmar que as componentes do vetor unitário normal (N_1, N_2, N_3) no ponto destacado satisfazem:

( ) $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0$

( ) $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0, N_3 \leq 0$

( ) $N_1 \geq 0, N_2 \leq 0, N_3 \geq 0$

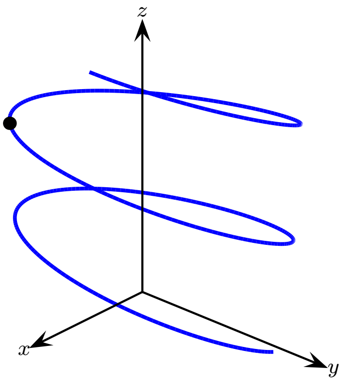
( ) $N_1 \geq 0, N_2 \leq 0, N_3 \leq 0$

( ) $N_1 \leq 0, N_2 \geq 0, N_3 \geq 0$

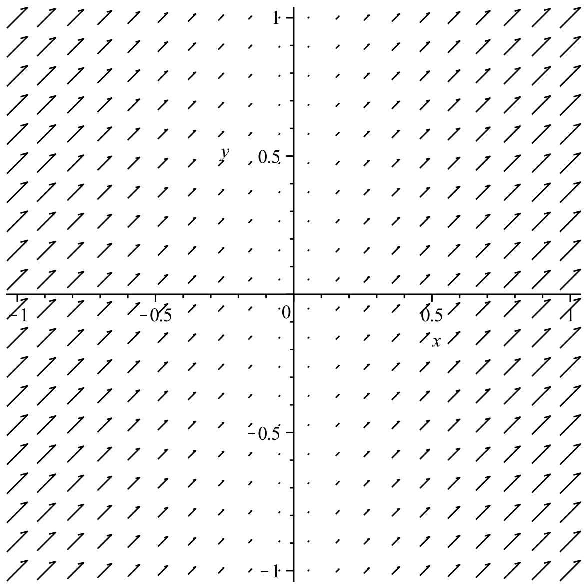
( ) $N_1 \leq 0, N_2 \geq 0, N_3 \leq 0$

( ) $N_1 \leq 0, N_2 \leq 0, N_3 \geq 0$

( ) $N_1 \leq 0, N_2 \leq 0, N_3 \leq 0$



• **Questão 3** (1.0 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}$ dado abaixo.



Pode-se afirmar que

( ) No ponto (0.5,-0.5), $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{k} > 0$.

( ) No ponto (0.5,-0.5), $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{k} < 0$.

( ) Na origem, $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{k} > 0$.

( ) Na origem, $\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{k} < 0$.

( ) O campo $\vec{F}$ é irrotacional.

• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere o campo escalar radial dado pela função suave $f(r)$ e o campo vetorial dado por $\vec{F} = -\vec{\nabla} f(r)$. Assinale a alternativa ***FALSA***:

( ) $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = -4\pi f'(1)$ onde $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ orientada para fora.

( ) $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0$ para todo caminho fechado C.

( ) $\iint_B \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0$ onde $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0.\}$.

( ) $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$

( ) $\vec{\nabla}^2 f = f''(r)$.

• **Questão 5** (1.0 ponto) A curvatura da curva $y = x^3$ no ponto $x = 1$ é

( ) $\frac{3}{\sqrt{10}}$.

( ) $\frac{6}{\sqrt{10}}$.

( ) $\frac{3}{10\sqrt{10}}$.

( ) $\frac{6}{10\sqrt{10}}$.

( ) $\frac{3}{10}$.

( ) $\frac{3}{5}$.

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere as seguintes três superfícies abertas:

$$S_1: \ x^2+y^2+z^2=1, \qquad \text{limitada inferiormente plano } z=0.$$
$$S_2: \ z=1-x^2-y^2, \qquad \text{limitada inferiormente pelo plano } z=0.$$
$$S_3: \ z=1-\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \text{limitada pelo plano } z=0 \text{ e o plano } z=1.$$

e a seguinte curva positivamente orientada em relação às superfícies:

$$C: \ x^2+y^2=1, \qquad \text{contida no plano } z=0.$$

Pode-se afirmar que, para o campo vetorial $\vec{F}=\cos(x+y+z)\vec{i}+ye^x\vec{j}+ze^y\vec{k}$, vale:

( ) $\iint_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_3} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$

( ) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS=0.$

( ) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{S_1} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_{S_2} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS+\iint_{S_3} \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS.$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\iint_{S_3} \vec{F}\cdot\vec{n}dS.$

( ) $\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}dS=\int_C \vec{F}d\vec{r}.$

• **Questão 7** (2.0 ponto) Use o teorema de Stokes para calcular a circulação dada por $\int_C \vec{v}\cdot d\vec{r}$, onde C é quadrado de vértices $V_1=(0,0,0)$, $V_2=(1,0,0)$, $V_3=(1,0,1)$ e $V_4=(0,0,1)$ orientada no sentido $V_1\to V_2\to V_3\to V_4\to V_1$ e $\vec{v}=\vec{i}+z^4\vec{j}+xy^2\vec{k}$.

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere o campo $\vec{F} = x^2\vec{i} + (1-z)\vec{k}$ e S a superfície composta superiormente por $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por $\{(x,y,z);\ x^2+y^2 \leq 1,\ z=0\}$ orientada para fora. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície fechada S usando:

a) Usando uma parametrização direta da superfície, isto é, sem usar o Teorema da Divergência;
b) Usando o Teorema da Divergência.