UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - Turma A - 2015/2
Prova da área IB

1 - 6	7	8	Total

Nome: ______________________________ **Cartão:** ______________

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Propriedades das transformadas de Fourier: considere a notação $F(w) = \mathcal{F}\{f(t)\}$.

1.	Linearidade	$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha\mathcal{F}\{f(t)\} + \beta\mathcal{F}\{g(t)\}$
2.	Transformada da derivada	Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f'(t)\} = iw\mathcal{F}\{f(t)\}$ Se $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = \lim_{t\to\pm\infty} f'(t) = 0$, então $\mathcal{F}\{f''(t)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(t)\}$
3.	Deslocamento no eixo w	$\mathcal{F}\{e^{at}f(t)\} = F(w+ia)$
4.	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-iaw}F(w)$
5.	Transformada da integral	Se $F(0) = 0$, então $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$
6.	Teorema da modulação	$\mathcal{F}\{f(t)\cos(w_0t)\} = \frac{1}{2}F(w-w_0) + \frac{1}{2}F(w+w_0)$
7.	Teorema da Convolução	$\mathcal{F}\{(f*g)(t)\} = F(w)G(w)$, onde $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ $(F*G)(w) = 2\pi\mathcal{F}\{f(t)g(t)\}$
8.	Conjugação	$\overline{F(w)} = F(-w)$
9.	Inversão temporal	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = F(-w)$
10.	Simetria ou dualidade	$f(-w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{F(t)\}$
11.	Mudança de escala	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}F\left(\frac{w}{a}\right)$, $a \neq 0$
12.	Teorema da Parseval	$\int_{-\infty}^{\infty} \lvert f(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert F(w)\rvert^2dw$
13.	Teorema da Parseval para Série de Fourier	$\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert C_n\rvert^2$

Séries e transformadas de Fourier:

	Forma trigonométrica	Forma exponencial
Série de Fourier	$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}[a_n\cos(w_nt) + b_n\,\mathrm{sen}(w_nt)]$ onde $w_n = \frac{2\pi n}{T}$, T é o período de $f(t)$ $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt,$ $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(w_nt)dt,$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{sen}(w_nt)dt$	$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_ne^{iw_nt},$ onde $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$
Transformada de Fourier	$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(w)\cos(wt) + B(w)\,\mathrm{sen}(wt))\,dw$, para $f(t)$ real, onde $A(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)dt$ e $B(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{sen}(wt)dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw,$ onde $F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$

Tabela de integrais definidas:

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a}{a^2+m^2} \quad (a>0)$	2. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m}{a^2+m^2} \quad (a>0)$
3. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	4. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma} \quad (a\geq 0,\ m>0)$
5. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n<m \\ \frac{\pi}{4}, & n=m, \\ 0, & n>m \end{cases} \quad (m>0,\ n>0)$	6. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & m>0 \\ 0, & m=0 \\ -\frac{\pi}{2}, & m<0 \end{cases}$
7. $\int_0^\infty e^{-r^2x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2r} \quad (r>0)$	8. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(mx)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$
9. $\int_0^\infty xe^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2am}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	10. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)\cos(nx)dx = = \frac{m(a^2+m^2-n^2)}{(a^2+(m-n)^2)(a^2+(m+n)^2)} \quad (a>0)$
11. $\int_0^\infty xe^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{a^2-m^2}{(a^2+m^2)^2} \quad (a>0)$	12. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^4+4a^4}dx = \frac{\pi}{8a^3}e^{-ma}(\operatorname{sen}(ma)+\cos(ma))$
13. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(mx)}{x^2}dx = \|m\|\frac{\pi}{2}$	14. $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz$
15. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2(ax)\operatorname{sen}(mx)}{x}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & (0<m<2a) \\ \frac{\pi}{8}, & (0<2a=m) \\ 0, & (0<2a<m) \end{cases}$	16. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(mx)\operatorname{sen}(nx)}{x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi m}{2}, & (0<m\leq n) \\ \frac{\pi n}{2}, & (0<n\leq m) \end{cases}$
17. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{2m(3a^2-m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$	18. $\int_0^\infty x^2e^{-ax}\cos(mx)dx = \frac{2a(a^2-3m^2)}{(a^2+m^2)^3} \quad (a>0)$
19. $\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}(1+ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	20. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen}(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}e^{-ma} \quad (a>0,\ m>0)$
21. $\int_0^\infty \frac{x^2\cos(mx)}{(a^2+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{4a}(1-ma)e^{-ma} \quad (a>0,\ m\geq 0)$	22. $\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\operatorname{sen}(mx)dx = \frac{m\sqrt{\pi}}{4a^3}e^{-\frac{m^2}{4a^2}} \quad (a>0)$

Frequências das notas musicais em Hertz:

Nota \ Escala	1	2	3	4	5	6
Dó	65,41	130,8	261,6	523,3	1047	2093
Dó ♯	69,30	138,6	277,2	554,4	1109	2217
Ré	73,42	146,8	293,7	587,3	1175	2349
Ré ♯	77,78	155,6	311,1	622,3	1245	2489
Mi	82,41	164,8	329,6	659,3	1319	2637
Fá	87,31	174,6	349,2	698,5	1397	2794
Fá ♯	92,50	185,0	370,0	740,0	1480	2960
Sol	98,00	196,0	392,0	784,0	1568	3136
Sol ♯	103,8	207,7	415,3	830,6	1661	3322
Lá	110,0	220,0	440,0	880,0	1760	3520
Lá ♯	116,5	233,1	466,2	932,3	1865	3729
Si	123,5	246,9	493,9	987,8	1976	3951

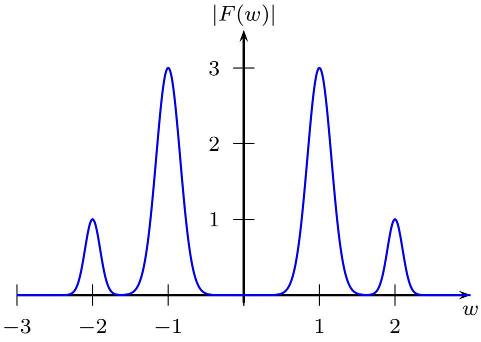
Identidades Trigonométricas:

$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$
$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)}{2}$

Integrais:

$\int xe^{\lambda x}\,dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2e^{\lambda x}\,dx = e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda}\int x^{n-1}e^{\lambda x}dx + C$
$\int x\cos(\lambda x)\,dx = \frac{\cos(\lambda x) + \lambda x\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\operatorname{sen}(\lambda x)\,dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x) - \lambda x\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$

• **Questão 1** (1.0 pontos) O diagrama de magnitudes da transformada de Fourier de uma função $f(t)$, denotada por $F(w)$, é apresentado abaixo:

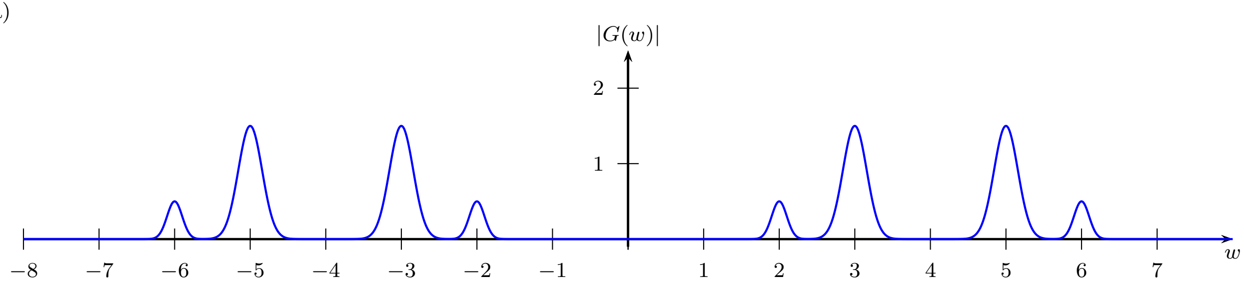


Os diagramas de magnitudes das transformadas de Fourier das funções

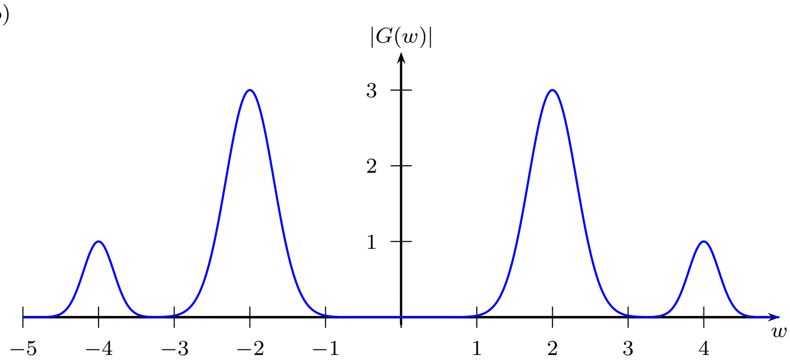
$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= 2f(2t), \\
g_2(t) &= f(t)\cos(4t) \\
g_3(t) &= \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}t\right).
\end{aligned}
$$

são os seguintes:

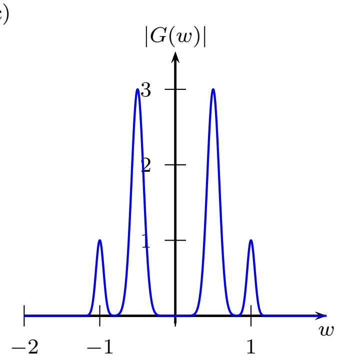
a)



b)



c)



Marque a resposta que associa cada um dos itens a) b) e c) à representação correta do diagrama de magnitudes de cada uma das funções g_1, g_2 e g_3:

( ) a) - $g_1(t)$, b) - $g_2(t)$ e c) - $g_3(t)$.

( ) a) - $g_1(t)$, b) - $g_3(t)$ e c) - $g_2(t)$.

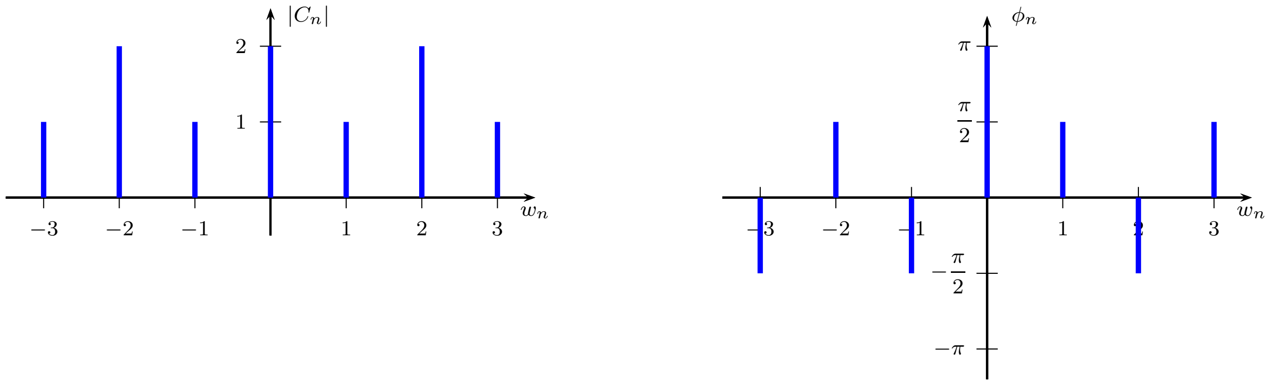
(X) a) - $g_2(t)$, b) - $g_1(t)$ e c) - $g_3(t)$.

( ) a) - $g_2(t)$, b) - $g_3(t)$ e c) - $g_1(t)$.

( ) a) - $g_3(t)$, b) - $g_1(t)$ e c) - $g_2(t)$.

( ) a) - $g_3(t)$, b) - $g_2(t)$ e c) - $g_1(t)$.

• **Questão 2** (1.0 pontos) Considere o diagrama de espectro de amplitude e fase da série de Fourier de uma função periódica $f(t)$.



É correto afirmar que:

( ) $f(t) = -2 + ie^{t} - 2ie^{2t} + ie^{3t}$

(X) $f(t) = -2 - 2\,\text{sen}(t) + 4\,\text{sen}(2t) - 2\,\text{sen}(3t)$

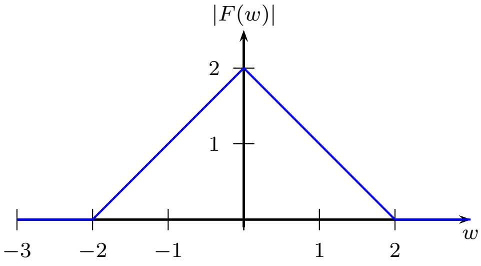
( ) $f(t) = -2 - \text{sen}(t) + 2\,\text{sen}(2t) - \text{sen}(3t)$

( ) $f(t) = -1 - \text{sen}(t) + 2\,\text{sen}(2t) - \text{sen}(3t)$

( ) $f(t) = -i\frac{\pi}{2}e^{-3t} + i\pi e^{-2t} - i\frac{\pi}{2}e^{-t} + 2i\pi + i\frac{\pi}{2}e^{t} - i\pi e^{2t} + i\frac{\pi}{2}e^{3t}$

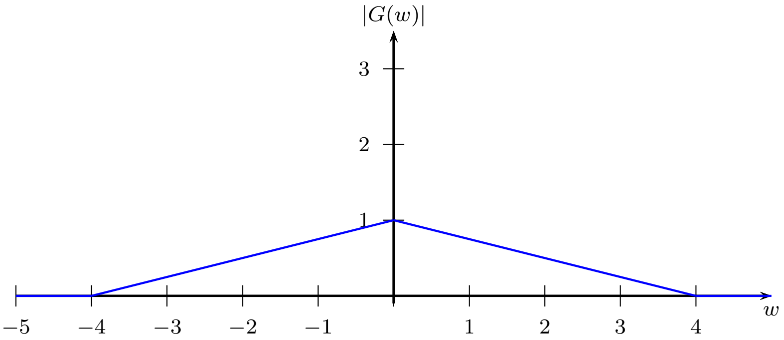
( ) $f(t) = -2 - \frac{i}{2}e^{-3t} + ie^{-2t} - \frac{i}{2}e^{-t} + \frac{i}{2}e^{t} - ie^{2t} + \frac{i}{2}e^{3t}$

• **Questão 3** (1.0 pontos) O diagrama de magnitudes da transformada de Fourier de uma função $f(t)$, denotada por $F(w)$, é apresentado abaixo:

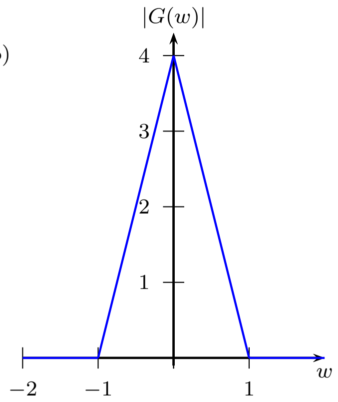


Marque o gráfico que representa o diagrama de espectro de magnitudes da função $g(t) = f'(2t)$:

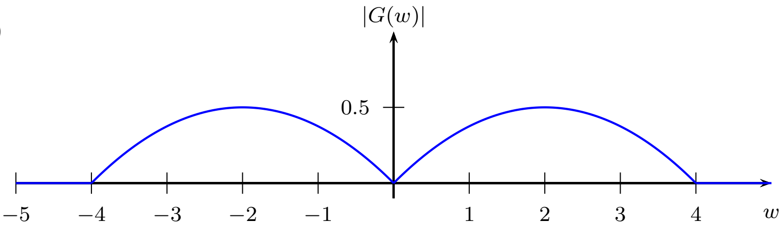
a)



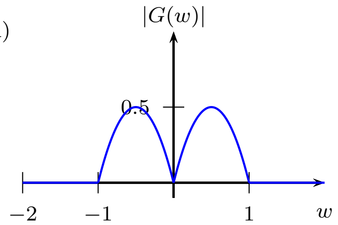
b)



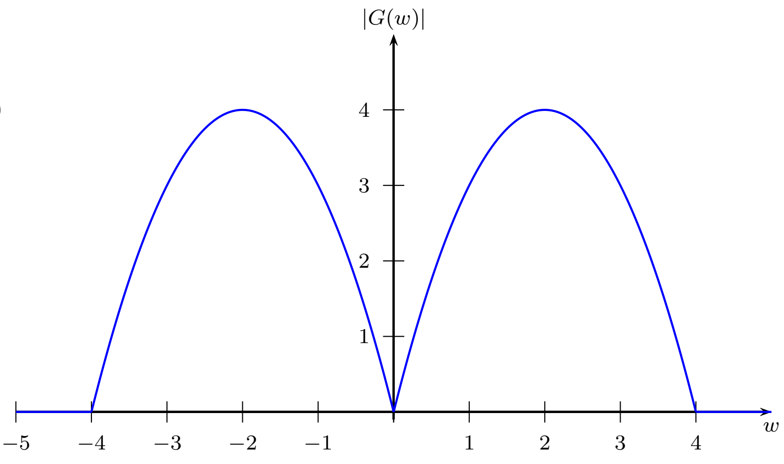
c)



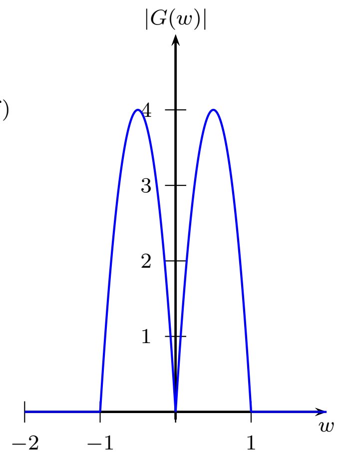
d)



e)



f)



Solução: Observe que, pela regra da cadeia, $\frac{d}{dt}f(2t) = 2f'(2t)$. Logo,

$$\mathcal{F}\{f'(2t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}f(2t)\right\} = \frac{iw}{2}\mathcal{F}\{f(2t)\}$$

Portanto,

$$G(w) = \frac{iw}{4}F\left(\frac{w}{2}\right).$$

Analogamente,

$$G(w) = \frac{1}{2}H\left(\frac{w}{2}\right),$$

onde $H(w) = \mathcal{F}\{f'(t)\} = iwF(w)$. Logo,

$$G(w) = \frac{iw}{4}F\left(\frac{w}{2}\right).$$

- **Questão 4** (1.0 pontos) A transformada inversa de Fourier da funçao $G(w) = e^{-w^2}e^{-2iw}$ é:

( ) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(t-2)e^{-\frac{t^2}{4}}$

( ) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\delta(t-2)e^{-\frac{(t-2)^2}{4}}$

(X) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(t-2)^2}{4}}$

( ) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}$

( ) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}e^{-2it}$

( ) $g(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(t+2)^2}{4}}$

Solução: Observamos questão

$$\mathcal{F}\{\delta(t-2)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-2)e^{-iwt}dt = e^{-2iw}.$$

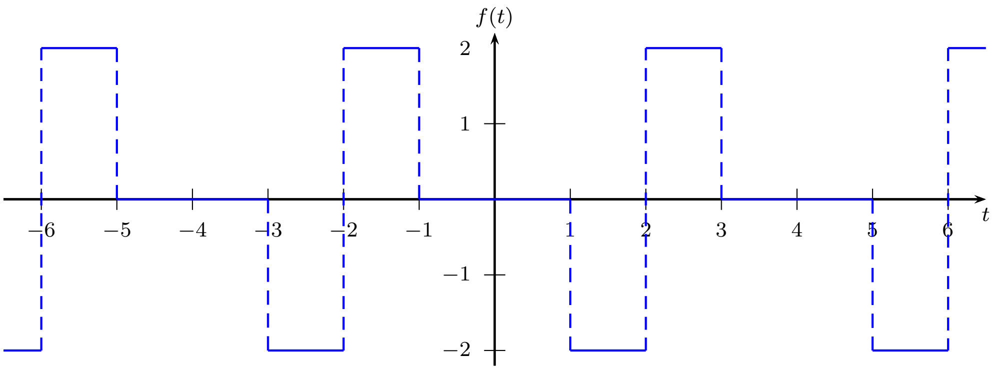
Também, temos que a transformada inversa de Fourier da função e^{-w^2} é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{e^{-w^2}\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2}e^{iwt}dw \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-w^2}\cos(wt)dw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4}}
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o teorema da convolução, temos:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-2)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(\tau-t)^2}{4}}d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(t-2)^2}{4}}$$

• **Questão 5** (1.0 pontos) Considere a função periódica definida pelo gráfico abaixo:



Considere T o período fundamental da função. É correto afirmar que:

( ) $T = 2$ e $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = 0$

( ) $T = 2$ e $\int_0^2 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = \frac{4}{\pi}$

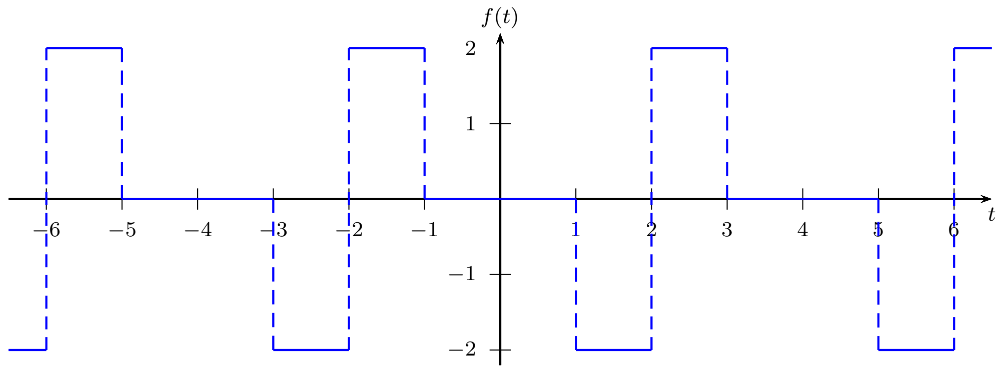
( ) $T = 3$ e $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = 0$

( ) $T = 3$ e $\int_0^3 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = \frac{6}{\pi}$

( ) $T = 4$ e $\int_0^4 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = 0$

(X) $T = 4$ e $\int_0^4 f(t)\,\mathrm{sen}(\pi t)dt = \frac{8}{\pi}$

• **Questão 6** (1.0 pontos) Considere a função periódica definida pelo gráfico abaixo:



É correto afirmar que:

( ) $a_0 = b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$

( ) $f(t) = -\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) - \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}\left(5\frac{\pi}{2}t\right) + \cdots$

( ) $f(t) = -\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t) + \frac{4}{\pi}\operatorname{sen}(2\pi t) - \frac{4}{3\pi}\operatorname{sen}(3\pi t) - \frac{4}{5\pi}\operatorname{sen}(5\pi t) + \cdots$

( ) $f(t) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \frac{4}{\pi}\cos(\pi t) - \frac{4}{3\pi}\cos\left(3\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{4}{5\pi}\cos\left(5\frac{\pi}{2}t\right) + \cdots$

( ) $b_8 \neq 0$

( ) Devido as suas infinitas descontinuidades, esta função não possui série de Fourier.

Solução:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_{-2}^{-1} 2dt + \frac{2}{4}\int_{-2}^{-1}(-2)dt = 0$$

$$a_n = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{4}\int_{-2}^{2} f(t)\operatorname{sen}(w_n t)dt \\
&= \int_{1}^{2} 2\operatorname{sen}(w_n t)dt \\
&= \left[2\frac{\cos(w_n t)}{w_n}\right]_1^2 \\
&= 2\frac{\cos(2w_n) - \cos(w_n)}{w_n} \\
&= 4\frac{\cos(\pi n) - \cos(\frac{\pi}{2}n)}{n\pi}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{4}{\pi} \\
b_2 &= \frac{4}{\pi} \\
b_3 &= -\frac{4}{3\pi} \\
b_4 &= 0 \\
b_5 &= -\frac{4}{5\pi}
\end{aligned}$$

• **Questão 7** (2.0 pontos) Marque verdadeiro, falso ou não sei. Observação: item respondido corretamente vale 0.2, item respondido incorretamente vale -0.2 e item marcado como não sei vale 0.0.

i) É possível reconstruir uma função usando apenas o diagrama de espectro de magnitudes.

ii) Conhecendo apenas o diagrama de magnitudes é possível calcular a energia total do sinal dada por $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$.

iii) A transformada de Fourier de uma função real é uma função real.

iv) Para toda função $f(t)$ que possui transformada de Fourier, $\int_{-\infty}^{\infty} F(w)dw = 0$.

v) O diagrama de espectro de magnitudes da transformada de Fourier de uma função real possui simetria par.

vi) Para toda função $f(t)$ que possui transformada de Fourier, $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0)$.

vii) O diagrama de espectro de fases da transformada de Fourier de uma função real possui simetria par.

viii) Para toda função T-periódica $f(t)$ que possui série de Fourier, $\int_{0}^{T} |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2$.

ix) A função $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$ não possui série de Fourier, pois não é periódica.

x) Toda função real pode ser escrita como a soma de uma função par e outra função ímpar.

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
i)		X	
ii)	X		
iii)		X	
iv)		X	
v)	X		

	Verdadeiro	Falso	Não Sei
vi)	X		
vii)		X	
viii)	X		
ix)		X	
x)	X		

• **Questão 8** (2.0 pontos) Resolva a seguinte equação diferencial parcial usando a técnica das Transformadas de Fourier:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) + u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 2\delta(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Solução: Aplicamos a transformada de Fourier para obter o problema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(k,t) + (1+k^2)U(k,t) = 0, \\ U(k,0) = 2, \end{cases}$$

onde $U(k,t) = \mathcal{F}_x\{u(x,t)\}$. Usamos o método de separação de variáveis para calcular a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial t}(k,t) + (1+k^2)U(k,t) &= 0 \\
&\Downarrow \\
\frac{\partial U}{\partial t}(k,t) &= -(1+k^2)U(k,t) \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial t} &= -(1+k^2) \\
&\Downarrow \\
\int_0^t \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial \tau} d\tau &= -\int_0^t (1+k^2) d\tau \\
&\Downarrow \\
\int_{U(k,0)}^{U(k,t)} \frac{1}{U} dU &= -(1+k^2)t \\
&\Downarrow \\
\ln(|U(k,t)|) - \ln(2) &= -(1+k^2)t \\
&\Downarrow \\
U(k,t) &= e^{\ln(2)+(k^2-1)t} = 2e^{-(1+k^2)t}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos calcular a transformada inversa:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(k,t)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-(1+k^2)t}e^{ikx}dk \\
&= \frac{e^{-t}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t}e^{ikx}dk \\
&= \frac{2e^{-t}}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-k^2 t}\cos(kx)dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-t}e^{-\frac{x^2}{4t}}
\end{aligned}$$