

1 - 3	4	Total

Nome: _____ Cartão: _____ Turma: A

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \operatorname{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau}f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})d\hat{s}$

Séries:

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1, m \neq 0, 1, 2, \dots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

$\int x e^{\lambda x} dx = \frac{e^{\lambda x}}{\lambda^2} (\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x} dx = e^{\lambda x} \left(\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \frac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} dx + C$
$\int x \cos(\lambda x) dx = \frac{\cos(\lambda x)}{\lambda^2} + \lambda x \operatorname{sen}(\lambda x) + C$
$\int x \operatorname{sen}(\lambda x) dx = \frac{\operatorname{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} - \lambda x \cos(\lambda x) + C$
$\int e^{\lambda x} \operatorname{sen}(wx) dx = \frac{e^{\lambda x} (\lambda \operatorname{sen}(wx) - w \cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1} e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (e^{at} - e^{bt})$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a \neq b)$	$\frac{1}{a-b} (ae^{at} - be^{bt})$
13	$\frac{1}{s^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} \sin(wt)$
14	$\frac{s}{s^2 + w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{1}{a} \sinh(at)$
16	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2 + w^2}$	$\frac{1}{w} e^{at} \sin(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2}$	$e^{at} \cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^2} (1 - \cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2 + w^2)}$	$\frac{1}{w^3} (wt - \sin(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3} (\sin(wt) - wt \cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{t}{2w} \sin(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2 + w^2)^2}$	$\frac{1}{2w} (\sin(wt) + wt \cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)},$ $(a^2 \neq b^2)$	$\frac{1}{b^2 - a^2} (\cos(at) - \cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3} [\sin(at) \cosh(at) - \cos(at) \sinh(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4 + 4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} \sin(at) \sinh(at)$
27	$\frac{1}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh(at) - \sin(at))$
28	$\frac{s}{(s^4 - a^4)}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh(at) - \cos(at))$

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
29	$\sqrt{s-a} - \sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}} (e^{bt} - e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}} I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{at} (1 + 2at)$
33	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^k}, \quad (k > 0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}} I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k > 0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sinh(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k > 0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s} \ln(s)$	$-\ln(t) - \gamma, \quad (\gamma \approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t} (e^{bt} - e^{at})$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t} (1 - \cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t} \sin(wt)$
43	$\frac{1}{s} \cot^{-1}(s)$	$\text{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda quadrada</p> $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < a \\ -1, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
45	$\frac{1}{as^2} \tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	<p>Onda triangular</p> $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & 0 < t < a \\ -\frac{t}{a} + 2, & a < t < 2a \end{cases}$ $f(t+2a) = f(t), \quad t > 0$
46	$\frac{w}{(s^2 + w^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	<p>Retificador de meia onda</p> $f(t) = \begin{cases} \sin(wt), & 0 < t < \frac{\pi}{w} \\ 0, & \frac{\pi}{w} < t < \frac{2\pi}{w} \end{cases}$ $f\left(t + \frac{2\pi}{w}\right) = f(t), \quad t > 0$
47	$\frac{w}{s^2 + w^2} \coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	<p>Retificador de onda completa</p> $f(t) = \sin(wt) $
48	$\frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	<p>Onda dente de serra</p> $f(t) = \frac{t}{a}, \quad 0 < t < a$ $f(t) = f(t-a), \quad t > a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada na expressão abaixo. Na primeira coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão equivalente para $f(t)$ em termos de Heavisides. Na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta uma expressão para $f'(t)$ em termos de Heavisides e Deltas e Dirac. Na terceira, marque a transformada de Laplace de $f(t)$. E, na quarta, marque a transformada de Laplace de $f'(t)$.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ -2t + 3, & 1 < t < 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$

$f(t)$:

- () $f(t) = (-2t + 3)u(t) + (4 - 2t)u(t - 1)$.
 () $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + u(t - 3)$.
 () $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) - (3 - 2t)u(t - 3)$.
 () $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + (2t - 2)u(t - 3)$.
 () $f(t) = (-2t + 3)u(t - 1) + (3 - 2t)u(t - 3)$.

$\mathcal{L}\{f(t)\}$:

- () $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(s - 2)e^{-s} + (4s - 2)e^{-3s}}{s^2}$.
 () $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{(s - 2)e^{-s} + (4s + 2)e^{-3s}}{s^3}$.
 () $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{-2e^{-s} + 3e^{-3s}}{s^2}$.
 () $\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{-2e^{-s} + 4e^{-3s}}{s^3}$.
 () N.D.A

$f'(t)$:

- () $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3) + \delta(t - 1) + \delta(t - 3)$.
 () $f'(t) = -2(u(t - 1) - u(t - 3))$.
 () $f'(t) = -2(u(t - 1) - u(t - 3)) + \delta(t - 1) + 4\delta(t - 3)$.
 () $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3)$.
 () $f'(t) = -2u(t - 1) + 3u(t - 3) + \delta(t)$.

$\mathcal{L}\{f'(t)\}$:

- () $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(s - 2)e^{-s} + (4s - 2)e^{-3s}}{s^2}$.
 () $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{(s - 2)e^{-s} + (4s + 2)e^{-3s}}{s}$.
 () $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{-2e^{-s} + 3e^{-3s}}{s^2}$.
 () $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \frac{-2e^{-s} + 4e^{-3s}}{s}$.
 () N.D.A.

- **Questão 2** (0.5 ponto por item) A posição de um bloco de massa m é modelada por:

$$m\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = 12\delta(t - 2) - 6\delta(t - 4).$$

onde $m = 2$ e o coeficiente de atrito é $\gamma = 3$. A posição inicial e a velocidade iniciais são nulas. A força é devida a dois impactos muito rápidos que aconteceram em $t = 2$ e $t = 4$. Encontre a solução do sistema via transformada de Laplace e indique, respectivamente, a transformada $X(s)$ da solução, o valor de $x(3)$, o valor de $x(5)$ e o limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

Assinale as alternativas corretas:

- | | | | |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $\frac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{(s^2 + 3s)}$ | <input type="checkbox"/> $2(1 - e^{-\frac{3}{2}})$ | <input type="checkbox"/> $2(1 - e^{-\frac{3}{2}} - 2e^{-\frac{9}{2}})$ | <input type="checkbox"/> -2 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{12e^{-2s} - 6e^{-4s}}{(2s^2 + 3s)}$ | <input type="checkbox"/> $2(e^{-3} - 1)$ | <input type="checkbox"/> $-2(1 - e^{-\frac{3}{2}})$ | <input type="checkbox"/> -1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{12e^{-2s} - 6e^{-4s}}{2s(s + 3)}$ | <input type="checkbox"/> $4(1 - e^{-\frac{3}{2}})$ | <input type="checkbox"/> $2(1 - e^{-\frac{3}{2}})$ | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{2s(s + 3)}$ | <input type="checkbox"/> $4(e^{-3} - 1)$ | <input type="checkbox"/> $2(e^{-\frac{3}{2}} + 2e^{-\frac{9}{2}} - 1)$ | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> $\frac{6e^{-2s} - 3e^{-4s}}{2s(s + 3)}$ | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> 2 |

- **Questão 3** (0.5 ponto por item) Considere as seguintes funções:

i) $f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s}{2s^2 + 2s + 5} \right\}$	iii) $h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 8s + 16} \right\}$
ii) $g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{s^2 - 15s + 50} \right\}$	iv) $i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-2s} + e^{-4s}}{s^2 + 8s + 16} \right\}$

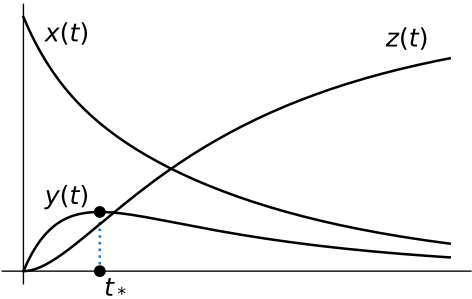
Assinale as alternativas corretas:

- | | | | |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> $f(\pi) = e^{-\pi/2}$ | <input type="checkbox"/> $g(\ln(2)) = -257$ | <input type="checkbox"/> $h(2) = 2e^{-10}$ | <input type="checkbox"/> $i(3) = e^{-4}$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\pi) = e^{\pi/2}$ | <input type="checkbox"/> $g(\ln(2)) = 257$ | <input type="checkbox"/> $h(2) = 2e^8$ | <input type="checkbox"/> $i(3) = e^{-5}$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\pi) = e^{\pi} \cos(3\pi/2)$ | <input type="checkbox"/> $g(\ln(2)) = 992$ | <input type="checkbox"/> $h(2) = 2e^{10}$ | <input type="checkbox"/> $i(3) = (e^4 + e^5)$ |
| <input type="checkbox"/> $f(\pi) = e^{-\pi} \cos(3\pi/2)$ | <input type="checkbox"/> $g(\ln(2)) = -992$ | <input type="checkbox"/> $h(2) = 2e^{-8}$ | <input type="checkbox"/> $i(3) = (e^{-4} + e^{-5})$ |
| <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A | <input type="checkbox"/> N.D.A |

• **Questão 4** (4.0 pontos) As concentrações de três reagentes A , B e C são dadas por $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$, respectivamente. Considere a reação do tipo $A \longleftrightarrow B \longleftrightarrow C$ modelada por:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + 2y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) - 5y(t) \\ z'(t) &= 3y(t) \end{aligned}$$

com $x(0) = 5$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0$.



- a) (1.5) Calcule a transformada de Laplace do sistema, isole $X(s) := \mathcal{L}\{x(t)\}$ e $Y(s) := \mathcal{L}\{y(t)\}$, encontrando expressões essas funções.
- b) (1.5) Encontre $x(t)$ e $y(t)$.
- c) (0.5) Obtenha $z(t)$. Dica: Use a própria equação diferencial.
- d) (0.5) A função $y(t)$ admite um único ponto estacionário t_* , isto é $y'(t_*) = 0$. Calcule t_* e verifique que $t_* > 0$ e que se trata de um ponto de máximo. Não é necessário calcular $y(t_*)$. Dica: Estude $y(0)$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Obs: Aqui $u(t)$ é a temperatura, não é a função Heaviside. Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento será avaliado.

$X(s) =$	$Y(s) =$
$x(t) =$	$y(t) =$
$z(t) =$	$t_* =$