

1-6	7	8	Total

Nome: _____ Cartão: _____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Tabela do operador $\vec{\nabla}$:

$f = f(x, y, z)$ e $g = g(x, y, z)$ são funções escalares;

$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ e $\vec{G} = \vec{G}(x, y, z)$ são funções vetoriais.

1.	$\vec{\nabla}(f + g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$
2.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{\nabla} \cdot \vec{G}$
3.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} + \vec{G}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} + \vec{\nabla} \times \vec{G}$
4.	$\vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$
5.	$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{F}) = (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{F} + f(\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$
6.	$\vec{\nabla} \times (f\vec{F}) = \vec{\nabla}f \times \vec{F} + f\vec{\nabla} \times \vec{F}$
7.	$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f = \vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$ onde $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o operador laplaciano
8.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}f) = 0$
9.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
10.	$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F}$
11.	$\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$
12.	$\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} - \vec{G}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) -$ $-(\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} + \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
13.	$\vec{\nabla}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{G} \cdot \vec{\nabla})\vec{F} + (\vec{F} \cdot \vec{\nabla})\vec{G} +$ $+\vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$

Curvatura, torção e aceleração:

Nome	Definição
Curvatura	$\kappa = \left\ \frac{d\vec{T}}{ds} \right\ = \left\ \frac{\frac{d\vec{T}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\ = \frac{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ }{\ \vec{r}'(t)\ ^3}$
Torção	$\tau = -\frac{d\vec{B}}{ds} \cdot \vec{N} = \frac{(\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) \cdot \vec{r}'''(t)}{\ \vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)\ ^2}$
Módulo da Torção	$ \tau = \left\ \frac{d\vec{B}}{ds} \right\ = \left\ \frac{\frac{d\vec{B}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \right\ $
Aceleração normal	$a_N = \frac{\ \vec{a} \times \vec{v}\ }{v} = \frac{v^2}{\rho} = \kappa v^2$
Aceleração tangencial	$a_T = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v} = \frac{dv}{dt}$

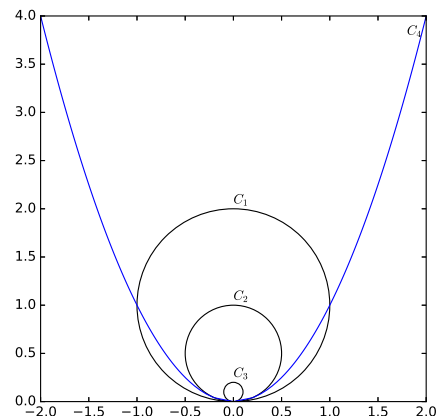
Equações de Frenet-Serret:

$\frac{d\vec{T}}{ds}$	=	$\kappa\vec{N}$
$\frac{d\vec{N}}{ds}$	=	$-\kappa\vec{T} \quad +\tau\vec{B}$
$\frac{d\vec{B}}{ds}$	=	$-\tau\vec{N}$

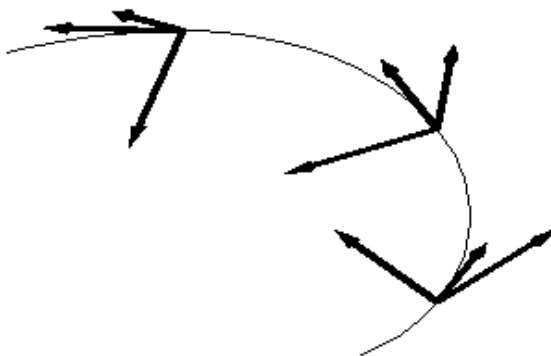
• **Questão 1** (1.0 ponto) Considere as curvas C_1 , C_2 , C_3 e C_4 , com curvaturas κ_1 , κ_2 , κ_3 e κ_4 , respectivamente. Sabe-se que a curva C_2 e C_4 possuem o mesmo raio de curvatura no ponto $(0,0)$. Na primeira coluna, marque o item que apresenta todas as curvas com curvatura constante e, na segunda, a magnitude das curvaturas no ponto de encontro entre todas as curvas.

Curvas com curvatura constante Curvatura no ponto de encontro de todas as curvas

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Somente C_2 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_1 > \kappa_2 > \kappa_3 > \kappa_4$. |
| <input type="checkbox"/> Somente C_2 e C_3 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \kappa_4$. |
| <input type="checkbox"/> Somente C_2 e C_1 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_4 < \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3$. |
| <input type="checkbox"/> Somente C_2 , C_3 e C_1 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_1 < \kappa_2 = \kappa_4 < \kappa_3$. |
| <input type="checkbox"/> Somente C_4 , C_2 e C_1 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_3 < \kappa_2 = \kappa_4 < \kappa_1$. |
| <input type="checkbox"/> C_4 , C_3 , C_2 e C_1 . | <input type="checkbox"/> $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4$. |



• **Questão 2** (1.0 ponto) Considere três pontos sobre a curva ao lado, nomeados de P_1 , P_2 e P_3 , dispostos respectivamente no sentido positivo da curva, e em cada ponto o esboço do triedro de Frenet-Serret. Considere uma partícula se deslocando sobre a curva no sentido positivo com velocidade escalar estritamente decrescente. Marque na primeira coluna o correto item sobre a aceleração da partícula e, na segunda, a correta afirmação sobre o sinal da torção em cada pedaço da curva.



Aceleração

- ☐ A componente normal da aceleração é negativa.
- ☐ A componente tangencial da aceleração é negativa.
- ☐ A componente tangencial da aceleração é positiva.
- ☐ A norma do vetor aceleração é constante em todos os pontos.
- ☐ A norma do vetor aceleração tem derivada zero em todos os pontos.

Torção

- ☐ A torção é sempre positiva.
- ☐ A torção é sempre negativa.
- ☐ A torção é positiva entre P_1 e P_2 e negativa entre P_2 e P_3 .
- ☐ A torção é negativa entre P_1 e P_2 e positiva entre P_2 e P_3 .
- ☐ A torção é zero nos pontos P_1 , P_2 e P_3 .

• **Questão 3** (1.0 ponto) Seja $\vec{F} = (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$ um campo vetorial e $f = x^2 + y^2 + z^2$ um campo escalar. Considere $\vec{G} = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Marque na primeira coluna uma expressão para $\iint_S \vec{G} \cdot \vec{n} dS$ e, na segunda, o valor de $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde S é a esfera unitária centrada na origem orientada para fora e C é a circunferência unitária no plano xy centrada na origem orientada no sentido horário.

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 0 |
| <input type="checkbox"/> 2π | <input type="checkbox"/> 1 |
| <input type="checkbox"/> 4π | <input type="checkbox"/> -1 |
| <input type="checkbox"/> 8π | <input type="checkbox"/> 2 |
| <input type="checkbox"/> 16π | <input type="checkbox"/> -2 |

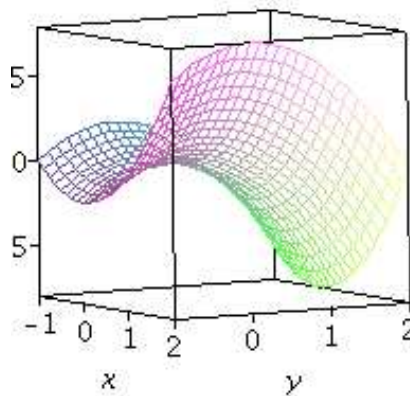
• **Questão 4** (1.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, limitada pela curva C . A superfície S é dada por uma função $z = f(x, y)$, tem simetria axial em relação ao eixo z e o domínio de f é $[-1, 2] \times [-1, 2]$. A superfície S está orientada no sentido de \vec{k} e a curva C está positivamente orientada com respeito a S . Considere o campo $\vec{F} = (x+1)\vec{j} - 10\vec{k}$ e as seguintes integrais:

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e

$$B = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Marque na primeira coluna o correto sinal de A e, na segunda, o correto sinal de B .



Sinal de A

- ☐ $A > 0$.
☐ $A = 0$.
☐ $A < 0$.
☐ Embora $A \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
☐ Não há informações suficientes para estimar A .

Sinal de B

- ☐ $B > 0$.
☐ $B = 0$.
☐ $B < 0$.
☐ Embora $B \neq 0$, não é possível saber seu sinal.
☐ Não há informações suficientes para estimar B .

• **Questão 5** (1.0 ponto) Dado o campo conservativo $\vec{F} = (y^2z^3 + 3y^2x^2z)\vec{i} + (2xyz^3 + 2x^3yz)\vec{j} + (3y^2xz^2 + x^3y^2)\vec{k}$, marque na primeira coluna o potencial $\phi(x, y, z)$ e, na segunda, o valor $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde C é a curva $\vec{r} = t\vec{i} + \vec{j} + t^2\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

- | | |
|---|--------------------------|
| <input type="radio"/> $xy^2z^3 + x^3y^2z$. | <input type="radio"/> 0. |
| <input type="radio"/> $x^2y^2z^2$. | <input type="radio"/> 1. |
| <input type="radio"/> $x^3y^3z^3$. | <input type="radio"/> 2. |
| <input type="radio"/> $3x^2y^2z^2$. | <input type="radio"/> 3. |
| <input type="radio"/> $2xy^2z^3 + 2x^3y^2z$. | <input type="radio"/> 4. |

• **Questão 6** (1.0 ponto) Considere o campo vetorial $\vec{F} = \vec{i} + y\vec{j} - \vec{k}$ e a superfície S formada pelas seis faces do cubo de lado 2 ($x = \pm 1$, $y = \pm 1$ e $z = \pm 1$), orientada para fora. Chamamos de S_1 apenas a face $z = -1$ do cubo, orientado no sentido de $-\vec{k}$. Na primeira coluna marque o item que corresponde $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ e, na segunda, $\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| <input type="radio"/> 0 | <input type="radio"/> 0 |
| <input type="radio"/> -4 | <input type="radio"/> 2 |
| <input type="radio"/> 4 | <input type="radio"/> 4 |
| <input type="radio"/> -8 | <input type="radio"/> 8 |
| <input type="radio"/> 8 | <input type="radio"/> 16 |

• **Questão 7** (2.0 ponto) Considere a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$.

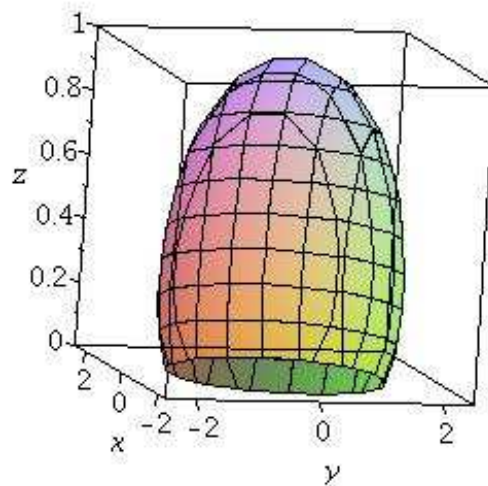
- a) Calcule o ponto onde a curvatura é zero.
- b) Discuta a existência dos vetores \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} no ponto do item a).
- c) Encontre o círculo de curvatura referente ao ponto $(1, -7)$ (indique o centro e o raio).

• **Questão 8** (2.0 ponto) Considere a superfície S aberta dada na figura ao lado, orientada no sentido de \vec{k} . Seja C a curva no plano $z = 0$ que limita S . A equação da superfície é dada por

$$z^2 + 3z^3 + e^{-7z} = 4 - x^2 - y^2.$$

Considere o campo $\vec{F} = -(y + z^2)\vec{i} + x\vec{j} + z^2yx\vec{k}$. Calcule

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$



Dica: Use o teorema de Stokes.