UFRGS – INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01168 - 2022/1 - Turmas D e D2
Prova da área IIA

1 - 3	4	Total

Nome: ______________________ **Cartão:** ____________ **Turma:**____

Regras Gerais:

- Não é permitido o uso de calculadoras, telefones ou qualquer outro recurso computacional ou de comunicação.
- Trabalhe individualmente e sem uso de material de consulta além do fornecido.
- Devolva o caderno de questões preenchido ao final da prova.

Regras para as questões abertas:

- Seja sucinto, completo e claro.
- Justifique todo procedimento usado.
- Indique identidades matemáticas usadas, em especial, itens da tabela.
- Use notação matemática consistente.

Identidades:

$\text{sen}(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$	$\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\text{senh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$
$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j, \quad \binom{n}{j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$	
$\text{sen}(x+y) = \text{sen}(x)\cos(y) + \text{sen}(y)\cos(x)$	
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\,\text{sen}(y)$	

Propriedades:

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
3	Deslocamento no eixo s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$
4	Deslocamento no eixo t	$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \dfrac{e^{-as}}{s}$
5	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
6	Filtragem da Delta de Dirac	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = f(a)$
7	Transformada da Delta de Dirac	$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$
8	Teorema da Convolução	$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s),$ onde $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
9	Transformada de funções periódicas	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)d\tau$
10	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\dfrac{dF(s)}{ds}$
11	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(\hat{s})\hat{s}$

Séries:

$\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \cdots, \quad -1 < x < 1$
$\dfrac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots, \quad -1 < x < 1$
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1$
$\text{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\text{senh}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n,$ $-1 < x < 1,\ m \neq 0, 1, 2, \ldots$

Funções especiais:

Função Gamma	$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx$
Propriedade da Função Gamma	$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 0$ $\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$
Função de Bessel modificada de ordem ν	$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{m!\Gamma(m+\nu+1)} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m+\nu}$
Função de Bessel de ordem 0	$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m}{m!^2} \left(\dfrac{x}{2}\right)^{2m}$
Integral seno	$\text{Si}\,(t) = \int_0^t \dfrac{\text{sen}(x)}{x} dx$

Integrais:

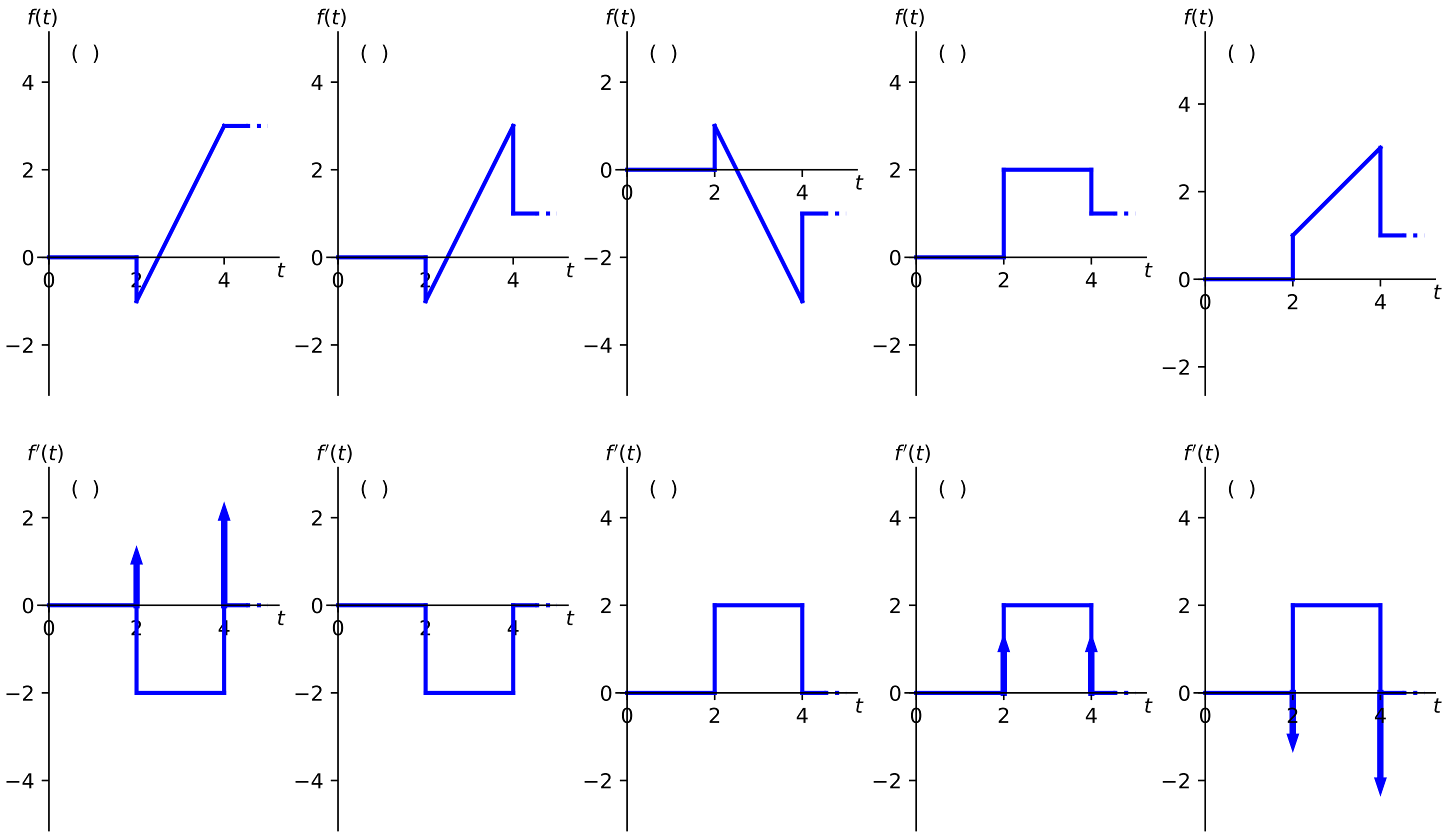
$\int x e^{\lambda x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda^2}(\lambda x - 1) + C$
$\int x^2 e^{\lambda x}\, \mathrm{d}x = e^{\lambda x}\left(\dfrac{x^2}{\lambda} - \dfrac{2x}{\lambda^2} + \dfrac{2}{\lambda^3}\right) + C$
$\int x^n e^{\lambda x}\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{\lambda} x^n e^{\lambda x} - \dfrac{n}{\lambda} \int x^{n-1} e^{\lambda x} \mathrm{d}x + C$
$\int x \cos(\lambda x)\, dx = \dfrac{\cos(\lambda x) + \lambda x\, \text{sen}(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int x\, \text{sen}(\lambda x)\, dx = \dfrac{\text{sen}(\lambda x) - \lambda x \cos(\lambda x)}{\lambda^2} + C$
$\int e^{\lambda x}\, \text{sen}(w x)\, dx = \dfrac{e^{\lambda x}(\lambda\, \text{sen}(wx) - w\cos(wx))}{\lambda^2 + w^2}$

Tabela de transformadas de Laplace:

	$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s^n}, \quad (n=1,2,3,...)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
4	$\frac{1}{\sqrt{s}},$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
5	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}},$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
6	$\frac{1}{s^k}, \quad (k>0)$	$\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$
7	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\frac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\frac{1}{(s-a)^n}, \quad (n=1,2,3...)$	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{at}$
10	$\frac{1}{(s-a)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{1}{\Gamma(k)}t^{k-1}e^{at}$
11	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$
12	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}, \quad (a\neq b)$	$\frac{1}{a-b}\left(ae^{at}-be^{bt}\right)$
13	$\frac{1}{s^2+w^2}$	$\frac{1}{w}\operatorname{sen}(wt)$
14	$\frac{s}{s^2+w^2}$	$\cos(wt)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
17	$\frac{1}{(s-a)^2+w^2}$	$\frac{1}{w}e^{at}\operatorname{sen}(wt)$
18	$\frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}$	$e^{at}\cos(wt)$
19	$\frac{1}{s(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^2}(1-\cos(wt))$
20	$\frac{1}{s^2(s^2+w^2)}$	$\frac{1}{w^3}(wt-\operatorname{sen}(wt))$
21	$\frac{1}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w^3}(\operatorname{sen}(wt)-wt\cos(wt))$
22	$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{t}{2w}\operatorname{sen}(wt)$
23	$\frac{s^2}{(s^2+w^2)^2}$	$\frac{1}{2w}(\operatorname{sen}(wt)+wt\cos(wt))$
24	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)},$ $(a^2\neq b^2)$	$\frac{1}{b^2-a^2}(\cos(at)-\cos(bt))$
25	$\frac{1}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{4a^3}[\operatorname{sen}(at)\cosh(at)-$ $-\cos(at)\operatorname{senh}(at)]$
26	$\frac{s}{(s^4+4a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}\operatorname{sen}(at)\operatorname{senh}(at))$
27	$\frac{1}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^3}(\operatorname{senh}(at)-\operatorname{sen}(at))$
28	$\frac{s}{(s^4-a^4)}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh(at)-\cos(at))$
29	$\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$
30	$\frac{1}{\sqrt{s+a}\sqrt{s+b}}$	$e^{\frac{-(a+b)t}{2}}I_0\left(\frac{a-b}{2}t\right)$
31	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
32	$\frac{s}{(s-a)^{\frac{3}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$
33	$\frac{1}{(s^2-a^2)^k}, \quad (k>0)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(k)}\left(\frac{t}{2a}\right)^{k-\frac{1}{2}}I_{k-\frac{1}{2}}(at)$
34	$\frac{1}{s}e^{-\frac{k}{s}}, \quad (k>0)$	$J_0(2\sqrt{kt})$
35	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos(2\sqrt{kt})$
36	$\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}e^{\frac{k}{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{senh}(2\sqrt{kt})$
37	$e^{-k\sqrt{s}}, \quad (k>0)$	$\frac{k}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{k^2}{4t}}$
38	$\frac{1}{s}\ln(s)$	$-\ln(t)-\gamma, \quad (\gamma\approx 0,5772)$
39	$\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$	$\frac{1}{t}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$
40	$\ln\left(\frac{s^2+w^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cos(wt))$
41	$\ln\left(\frac{s^2-a^2}{s^2}\right)$	$\frac{2}{t}(1-\cosh(at))$
42	$\tan^{-1}\left(\frac{w}{s}\right)$	$\frac{1}{t}\operatorname{sen}(wt)$
43	$\frac{1}{s}\cot^{-1}(s)$	$\operatorname{Si}(t)$
44	$\frac{1}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda quadrada $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a\\ -1, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
45	$\frac{1}{as^2}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)$	Onda triangular $f(t)=\begin{cases}\frac{t}{a}, & 0<t<a\\ -\frac{t}{a}+2, & a<t<2a\end{cases}$ $f(t+2a)=f(t), \quad t>0$
46	$\frac{w}{(s^2+w^2)\left(1-e^{-\frac{\pi}{w}s}\right)}$	Retificador de meia onda $f(t)=\begin{cases}\operatorname{sen}(wt), & 0<t<\frac{\pi}{w}\\ 0, & \frac{\pi}{w}<t<\frac{2\pi}{w}\end{cases}$ $f\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)=f(t), \quad t>0$
47	$\frac{w}{s^2+w^2}\coth\left(\frac{\pi s}{2w}\right)$	Retificador de onda completa $f(t)=\lvert\operatorname{sen}(wt)\rvert$
48	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Onda dente de serra $f(t)=\frac{t}{a}, \quad 0<t<a$ $f(t)=f(t-a), \quad t>a$

• **Questão 1** (0.5 cada item) Considere a função $f(t)$ dada na expressão abaixo. Na primeira linha de gráficos, marque a opção que apresenta um esboço de $f(t)$. Na segunda linha, marque a alternativa que apresenta o esboço do gráfico de $f'(t)$. Na primeira coluna abaixo dos gráficos, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $f(t)$. E, na segunda coluna, marque a alternativa que apresenta a transformada de Laplace de $f'(t)$.

$$f(t) = (2t-5)u(t-2) + (6-2t)u(t-4).$$



$\mathcal{L}\{f(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^3}$.

(x) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{2e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(2-5s)e^{-2s} + (6s-2)e^{-4s}}{s^2}$.

( ) $\mathcal{L}\{f(t)\} = \dfrac{(2-5s)e^{-2s} + (6s-2)e^{-4s}}{s^3}$.

$\mathcal{L}\{f'(t)\}$:

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{2e^{-2s} - 2e^{-4s}}{s}$.

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = 2e^{-2s} - 2e^{-4s}$.

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{(2-s)e^{-2s} - (2-s)e^{-4s}}{s}$.

(x) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{(2-s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s}$.

( ) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \dfrac{(2+s)e^{-2s} - (2+2s)e^{-4s}}{s^2}$.

Os gráficos são o segundo e o último, respectivamente.

- **Questão 2** (0.5 ponto por item) A velocidade de um bloco de massa m é modelada por:

$$m\dot{v}(t) + \gamma v(t) = 20\delta(t-3) - 8\delta(t-5).$$

onde $m = 2$ e o coeficiente de atrito é $\gamma = 3$. A velocidade inicial é nula. A força é devida a dois impactos muito rápidos que aconteceram em $t = 3$ e $t = 5$. Encontre a solução do sistema via transformada de Laplace e indique, repectivamente, a transformada $V(s)$ da solução, o valor de $v(4)$, o valor de $v(7)$ e o limite $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)$.

( ) $\dfrac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{s(3s+2)}$

( ) $\dfrac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{3s+2}$

( ) $\dfrac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{s(2s+3)}$

(x) $\dfrac{20e^{-3s} - 8e^{-5s}}{2s+3}$

( ) $\dfrac{20e^{-3s} - 8se^{-5s}}{s^2(2s+3)}$

( ) $10e^{-6}$

( ) $10e^{-2/3}$

( ) $10e^{-6} - 4e^{-8}$

( ) $10e^{-2/3} - 4e^{-8/3}$

(x) N.D.A

( ) $10e^{-3}$

( ) $10e^{-2}$

( ) $10e^{-7/2} - 4e^{-9/2}$

(x) $10e^{-6} - 4e^{-3}$

( ) N.D.A

( ) -2

( ) -1

(x) 0

( ) 1

( ) 2

- **Questão 3** (0.5 ponto por item) Considere as seguintes funções:

i) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^2 - 9s + 20}\right\}$

ii) $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s^2 + 4s + 13}\right\}$

iii) $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{25s^2 + 20s + 4}\right\}$

iv) $i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{125s}{25s^2 + 20s + 4}\right\}$

Assinale as alternativas corretas:

( ) $f(\ln(2)) = 64$

( ) $f(\ln(2)) = 96$

(x) $f(\ln(2)) = 112$

( ) $f\ln(2)) = 256$

( ) $f\ln(2)) = 272$

( ) $g(\pi/2) = -e^{-\pi/2}$

( ) $g(\pi/2) = e^{-\pi/2}$

(x) $g(\pi/2) = -e^{-\pi}$

( ) $g(\pi/2) = e^{-\pi}$

( ) N.D.A

( ) $h(5) = \dfrac{e^{-2}}{5}$

(x) $h(5) = e^{-2}$

( ) $h(5) = e^{-2/5}$

( ) $h(5) = \dfrac{e^{-2/5}}{5}$

( ) N.D.A

( ) $i(5/2) = -e^{-1}$

( ) $i(5/2) = e^{-1}$

(x) $i(5/2) = 0$

( ) $i(5/2) = e$

( ) $i(5/2) = -e$

• **Questão 4** (4.0 pontos) A temperatura em um refrigerador evolui no tempo conforme o seguinte modelo simplificado:

$$\frac{du(t)}{dt} = -\lambda(u(t) - u_{amb}) + q(t) \tag{1}$$

onde $u(t)$ representa a temperatura medida, u_{amb} é temperatura ambiente, $q(t)$ é uma função negativa e é a potência do sistema e λ é uma constante relacionada às trocas de calor. Suponha também que a temperatura é regulada por um sistema de controle automático que procura ajustar a potência $q(t)$ de forma que a temperatura medida se aproxime da temperatura de ajuste. O sistema de controle automático é regido pela seguinte equação:

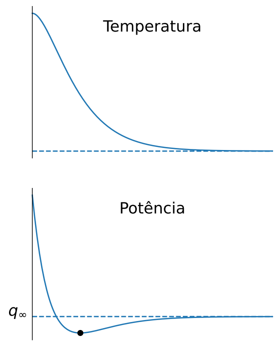
$$q(t) = K_p\left[u_a - u(t)\right] + K_i \int_0^t \left[u_a - u(\tau)\right] d\tau + K_d \frac{du(t)}{dt} \tag{2}$$

onde u_a é a temperatura de ajuste e K_p e K_i são constantes positivas. Considere $\lambda = 1$, $K_p = 1$, $K_d = 1/2$, $u(0) = 10$, $u_{amb} = 20$, $u_a = 0$. O sistema resultante é criticamente amortecido.

a) (1.0) Transforme o sistema em uma única equação integro-diferencial para $u(t)$ da forma

$$\frac{du(t)}{dt} + au(t) + b\int_0^t u(\tau)d\tau = f(t)$$

e obtenha o valor de K_i para que o sistema satisfaça a condição de amortecimento dada.



b) (0.5) Encontre uma expressão para $U(s)$.

c) (1.0) Encontre expressões para $u(t)$ e $q(t)$. Não é necessário encontrar $Q(s)$.

d) (0.5) Calcule $q(0)$ e $q_\infty := \lim_{t\to\infty} q(t)$.

e) (1.0) A potência $q(t)$ admite um único ponto estacionário t_*, isto é, $q'(t_*) = 0$. Calcule t_* e verifique que $t_* > 0$ e que se trata de um ponto de mínimo. Calcule o mínimo da potência, isto é, $q(t_*)$. Dica: Use o item anterior.

Obs: Aqui $u(t)$ é a temperatura, não é a função Heaviside. Copie suas respostas finais abaixo. O desenvolvimento será avaliado.

Equação:

$K_i =$

$U(s) =$

$u(t) =$

$q(t) =$

$q(0) =$

$q_\infty =$

$t_* =$

$q_{min} =$

Solução:

$$(1-K_d)\,\frac{du(t)}{dt} \quad = \quad -\lambda(u(t)-u_{amb})-K_pu(t)-K_i\int_0^t u(\tau)d\tau$$

$$(1-K_d)\,\frac{du(t)}{dt}+(\lambda+K_p)\,u(t)+K_i\int_0^t u(\tau)d\tau \quad = \quad \lambda u_{amb}$$

Substituindo, temos:

$$\frac{1}{2}\frac{du(t)}{dt}+2u(t)+K_i\int_0^t u(\tau)d\tau \quad = \quad 20.$$

O sistema é criticamente amortecido quando $\Delta := 4-2K_i=0$, isto é, $K_i=2$. Assim:

$$\frac{du(t)}{dt}+4u(t)+4\int_0^t u(\tau)d\tau \quad = \quad 40.$$

Tomando a transformada de Laplace, temos:

$$sU(s)-10+4U(s)+\frac{4}{s}U(s) \quad = \quad \frac{40}{s}.$$

$$(s^2+4s+4)U(s) \quad = \quad 40+10s.$$

Portanto:

$$U(s)=\frac{10s+40}{(s+2)^2}=\frac{20}{(s+2)^2}+\frac{10}{s+2} \implies u(t)=10(2t+1)e^{-2t}.$$

A função $q(t)$ pode ser obtida da equação da temperatura:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{du(t)}{dt}+(u(t)-20) \\ &= -20(2t+1)e^{-2t}+20e^{-2t}+10(2t+1)e^{-2t}-20 \\ &= (-20t+10)\,e^{-2t}-20 \end{aligned}$$

De onde é fácil ver que $q(0)=-10$ e $q_\infty=-20$. O ponto estacionário acontece quando $q'(t)=0$, isto é:

$$-20e^{-2t}-2\,(-20t+10)\,e^{-2t}=(40t-40)\,e^{-2t}=0 \iff t=1.$$

Assim $t_*=1$ e $q(t_*)=-10e^{-2}-20$. Trata-se de um ponto de mínimo global porque é o único ponto estacionário de uma função diferenciável e o valor de $q(t_*)$ é inferior a $q(0)$ e q_∞.