

# Cálculo Numérico

Um Livro Colaborativo

Versão com Scilab

6 de novembro de 2016



# Organizadores

Dagoberto Adriano Rizzotto Justo - UFRGS

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Leonardo Fernandes Guidi - UFRGS

Matheus Correia dos Santos - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Nota dos organizadores

Estamos escrevendo este livro de forma colaborativa desde 2011 e, recentemente, decidimos por abrir à colaborações externas. Nosso objetivo é de produzir um material didático em nível de graduação de excelente qualidade e de acesso livre pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados na análise, estudo e aplicação de métodos numéricos nos mais diversos ramos da ciência e da tecnologia.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Edite você mesmo o livro, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a

colaboração é bem vinda. Saiba mais visitando o site oficial do projeto:

<http://www.ufrgs.br/numerico>

Nós preparamos uma série de ações para ajudá-lo a participar. Em primeiro lugar, o acesso irrestrito ao livro pode se dar através do [site oficial do projeto](#). Disponibilizamos o livro na versão original em [PDF](#) e versões adaptadas em [HTML](#), [EPUB](#) e [Slides](#). Além disso, o livro está escrito em código  $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  disponível em [repositório GitHub público](#).

Nada disso estaria completo sem uma licença apropriada à colaboração. Por isso, escolhemos disponibilizar o material do livro sob licença [Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada \(CC-BY-SA 3.0\)](#). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a [licença](#) para maiores informações.

Lhe desejamos ótimas colaborações!

# Prefácio

Este livro busca abordar os tópicos de um curso de introdução ao cálculo numérico moderno oferecido a estudantes de matemática, física, engenharias e outros. A ênfase é colocada na formulação de problemas, implementação em computador da resolução e interpretação de resultados. Pressupõe-se que o estudante domine conhecimentos e habilidades típicas desenvolvidas em cursos de graduação de cálculo, álgebra linear e equações diferenciais. Conhecimentos prévios em linguagem de computadores é fortemente recomendável, embora apenas técnicas elementares de programação sejam real-

mente necessárias.

Nesta versão do livro, fazemos ênfase na utilização do **software** livre **Scilab** para a implementação dos métodos numéricos abordados. Recomendamos ao leitor ter à sua disposição um computador com o **Scilab** instalado. Não é necessário estar familiarizado com esta linguagem, mas recomendamos a leitura do Apêndice ??, no qual apresentamos uma rápida introdução a este pacote computacional. Alternativamente, existem algumas soluções em nuvem que fornecem acesso ao **Scilab** via internet. Por exemplo, a plataforma virtual rollApp (<https://www.rollapp.com/app/scilab>) ou o Scilab on Cloud (<http://cloud.scilab.in/>).

# Sumário

Capa	i
Organizadores	ii
Licença	iii
Nota dos organizadores	iv
Prefácio	vi



<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>8</b>
	<b>Colaboradores</b>	<b>9</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>11</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Cálculo numérico é a disciplina que estuda as técnicas para a solução aproximada de problemas matemáticos. Estas técnicas são de natureza analítica e computacional. As principais preocupações normalmente envolvem exatidão e performance.

Aliado ao aumento contínuo da capacidade de computação dispo-

nível, o desenvolvimento de métodos numéricos tornou a simulação computacional de modelos matemáticos uma prática usual nas mais diversas áreas científicas e tecnológicas. As então chamadas simulações numéricas são constituídas de um arranjo de vários esquemas numéricos dedicados a resolver problemas específicos como, por exemplo: resolver equações algébricas, resolver sistemas lineares, interpolar e ajustar pontos, calcular derivadas e integrais, resolver equações diferenciais ordinárias, etc.. Neste livro, abordamos o desenvolvimento, a implementação, utilização e aspectos teóricos de métodos numéricos para a resolução desses problemas.

Os problemas que discutiremos não formam apenas um conjunto de métodos fundamentais, mas são, também, problemas de interesse na engenharia, na física e na matemática aplicada. A necessidade de aplicar aproximações numéricas decorre do fato de que esses problemas podem se mostrar intratáveis se dispomos apenas de meios puramente analíticos, como aqueles estudados nos cursos de cálculo e álgebra linear. Por exemplo, o teorema de Abel-Ruffini nos garante que não existe uma fórmula algébrica, isto é, envolvendo

apenas operações aritméticas e radicais, para calcular as raízes de uma equação polinomial de qualquer grau, mas apenas casos particulares:

- Simplesmente isolar a incógnita para encontrar a raiz de uma equação do primeiro grau;
- Fórmula de Bhaskara para encontrar raízes de uma equação do segundo grau;
- Fórmula de Cardano para encontrar raízes de uma equação do terceiro grau;
- Existe expressão para equações de quarto grau;
- Casos simplificados de equações de grau maior que 4 onde alguns coeficientes são nulos também podem ser resolvidos.

Equações não polinomiais podem ser ainda mais complicadas de resolver exatamente, por exemplo:

$$\cos(x) = x \quad \text{e} \quad xe^x = 10$$

Para resolver o problema de valor inicial

$$y' + xy = x,$$

$$y(0) = 2,$$

podemos usar o método de fator integrante e obtemos  $y = 1 + e^{-x^2/2}$ . Já o cálculo da solução exata para o problema

$$y' + xy = e^{-y},$$

$$y(0) = 2,$$

não é possível.

Da mesma forma, resolvemos a integral

$$\int_1^2 x e^{-x^2} dx$$

pelo método da substituição e obtemos  $\frac{1}{2}(e^{-1} - e^{-2})$ . Porém a integral

$$\int_1^2 e^{-x^2} dx$$

não pode ser resolvida analiticamente.

A maioria dos modelos de fenômenos reais chegam em problemas matemáticos onde a solução analítica é difícil (ou impossível) de ser encontrada, mesmo quando provamos que ela existe. Nesse curso propomos calcular aproximações numéricas para esses problemas, que apesar de, em geral, serem diferentes da solução exata, mostraremos que elas podem ser bem próximas.

Para entender a construção de aproximações é necessário estudar um pouco como funciona a aritmética de computador e erros de arredondamento. Como computadores, em geral, usam uma base binária para representar números, começaremos falando em mudança de base.

# Referências Bibliográficas

- [1] Cecill and free software. <http://www.cecill.info>. Acessado em 30 de julho de 2015.
- [2] M. Baudin. Introduction to scilab. <http://forge.scilab.org/index.php/p/docintrotoscilab/>. Acessado em 30 de julho de 2015.
- [3] R.L. Burden and J.D. Faires. *Análise Numérica*. Cengage Learning, 8 edition, 2013.

- [4] J. P. Demailly. *Analyse Numérique et Équations Différentielles*. EDP Sciences, Grenoble, nouvelle Édition edition, 2006.
- [5] W Gautschi. Numerical analysis: An introduction birkhauser. *Barton, Mass, USA*, 1997.
- [6] Walter Gautschi and Gabriele Inglese. Lower bounds for the condition number of vandermonde matrices. *Numerische Mathematik*, 52(3):241–250, 1987/1988.
- [7] L.F. Guidi. Notas da disciplina cálculo numérico. [http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/calculo\\_numerico.pdf](http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/calculo_numerico.pdf). Acessado em julho de 2016.
- [8] E. Isaacson and H.B. Keller. *Analysis of numerical methods*. Dover, Ontário, 1994.
- [9] R. Rannacher. Einführung in die numerische mathematik (numerik 0). <http://numerik.uni-hd.de/~lehre/notes/num0/numerik0.pdf>. Acessado em 10.08.2014.



- [10] Todos os Colaboradores. Cálculo nuérico - um livro colaborativo - versão com scilab. disponível em <https://www.ufrgs.br/numerico/livro/main.html>, Novembro 2016.

# Colaboradores

Aqui você encontra a lista de colaboradores do livro. Esta lista contém somente aqueles que explicitamente se manifestaram a favor de terem seus nomes registrados aqui. A lista completa de colaborações pode ser obtida no repositório GitHub do livro:

<https://github.com/livroscolaborativos/CalculoNumerico>

Além das colaborações via GitHub, o livro também recebe colaborações via discussões, sugestões e avisos deixados em nossa lista de emails:

[livro\\_colaborativo@googlegroups.com](mailto:livro_colaborativo@googlegroups.com)

Estas colaborações não estão listadas aqui, mas podem ser vistas no site do grupo de emails.

Caso encontre algum equívoco ou veja seu nome listado aqui por engano, por favor, entre em contato conosco por email:

[livroscolaborativos@gmail.com](mailto:livroscolaborativos@gmail.com)

ou via o repositório GitHub.

Tabela 1: Lista de colaboradores

Nome	Afiliação	E-Mail	1ª Contribuição
Debora Lidia Gisch	-x-	-x-	#63

# Índice Remissivo

simulação

computacional, [2](#)

numérica, [2](#)