Cálculo de Funções de Várias Variáveis

Um Livro Colaborativo

31 de janeiro de 2018

Organizadores

#srcPath:/organizadores.tex#

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

Licença

Nota dos organizadores

#srcPath:/nota_organizadores.tex#

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (https://github.com/reamat/Calculo) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamenta da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

#srcPath:/prefacio.tex#

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

https://www.ufrgs.br/reamat/participe.html

Sumário

Capítulo 1

Introdução

`#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex#`
+++emConstrucao+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.1 Exercícios finais

`#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex#`
+++construirExer+++

Capítulo 2

Álgebra vetorial

#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex# O objetivo deste capítulo é revisar conceitos básicos do cálculo e da álgebra linear necessários ao entendimento do cálculo vetorial.

2.1 Vetores e escalares

#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex# Na álgebra linear, vetores são definidos de forma abstrata como os elementos de um espaço vetorial. Os vetores são, então, os elementos de um conjunto em que estão definidas duas operações: a soma de vetores e o produto de vetores por escalares obedecendo as propriedades (2.1). Um escalar é um número real ou complexo. Quando o corpo de escalares é o conjunto dos números reais, então dizemos que o espaço vetorial é real. Quando o corpo de escalares é o conjunto dos números complexos, dizemos que o espaço vetorial é complexo. Usaremos uma letra latina com uma seta para denotar vetores ($\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$). Para que um espaço vetorial esteja bem definido, as seguinte propriedades devem ser satisfeitas:

Observação 2.1.1. O vetor nulo $\vec{0}$ e escalar nulo 0 são entidades matemáticas distintas e não devem ser confundidas.

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \qquad \text{(Comutatividade da soma)} \tag{2.1a}$$
$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{v} + \vec{u}) + \vec{w}, \qquad \text{(Associatividade da soma)} \tag{2.1b}$$
$$(\alpha + \beta)\,\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}, \qquad \text{(Distributividade da multiplicação)} \tag{2.1c}$$
$$\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \qquad \text{(Distributividade da soma)} \tag{2.1d}$$
$$\alpha\,(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\,\vec{u}, \tag{2.1e}$$
$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}, \qquad \text{(Existência do vetor nulo)} \tag{2.1f}$$
$$0\vec{v} = \vec{0}, \tag{2.1g}$$
$$1\vec{v} = \vec{v}. \qquad \text{(Elemento neutro)} \tag{2.1h}$$

Observamos que a propriedade associativa dada por (2.1b) permite que se escreve a soma de três vetores $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ sem risco de ambiguidade. A propriedade (2.1e) é algumas vez chamada de associatividade, no entanto, é cauteloso observar que ela não estabelece a associatividade de uma operação, já que o produto de escalares é uma operação distinta do produto de um escalar por um vetor. A propriedade (2.1f) garante a existência de um vetor nulo que funciona com um elemento neutro da soma vetorial.

A subtração de dois vetores é definida por

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v}. \tag{2.2}$$

O vetor $(-1)\vec{v}$ é também denotado por $-\vec{v}$ e tem a seguinte propriedade:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{v} + (-1)\vec{v} = (1 - 1)\vec{v} = 0\vec{v} = \vec{0}. \tag{2.3}$$

Um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é dito linearmente dependente (LD), se existem escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ com pelo menos um $\alpha_i \neq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

Analogamente, um conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ é dito linearmente independente (LI) se a identidade

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i = \vec{0}$$

implica necessariamente que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Um conjunto de vetores LI $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ é dito uma base para um espaço vetorial V se todo vetor $\vec{v} \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de B:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{e}_i.$$

Um espaço vetorial é dito de dimensão finita se admite uma base composta por um número finito de elementos.

Teorema 2.1.1. *Seja V um espaço vetorial e $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ e $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$ duas bases de V. Então $n = m$. Em outras palavras, todas as bases de espaço linear de dimensão finita têm o mesmo número de elementos.*

A importância deste teorema reside no fato de permitir a definição de dimensão de um espaço vetorial como sendo o número de elementos de uma base. Esta definição está bem posta, uma vez que este número independe da escolha de base.

Outro conceito importante em espaços reais de dimensão finita é o de orientação de uma base. O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de orientação dextrogira e levogira (regra da mão direita e esquerda) no espaço tridimensional. No entanto este conceito pode ser estendido de forma natural para espaços reais de n-dimensões. Formalmente falando duas bases B_1 e B_2 têm a mesma orientação se o determinante da transformação linear que liga B_1 a B_2 é positivo.

O espaço vetorial real de n dimensões é denotado $\mathbb{R}^n$.

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.2 O espaço euclidiano tridimensional

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#`

Nossa principal preocupação neste curso é com o espaço euclidiano de três dimensões, dada sua importância para descrição do espaço na física clássica.

O leitor já tem familiaridade com o sistema de coordenadas cartesianas (xyz) para representar um ponto no espaço euclidiano tridimensional. Neste sistema, também chamado referencial cartesiano, cada ponto é representado por um conjunto de três coordenadas x, y e z. Observamos que existem duas maneiras distintas de orientar tal sistema: usando a regra da mão direita e a regra da mão

Figura 2.1: À esquerda, um sistema dextrogiro (regra da mão direita). À direita, sistema levogiro (regra da mão esquerda).

esquerda, que recebem o nome de dextrogira e levogira, respectivamente. Neste texto, daremos preferência pela orientação dextrogira, que convencionaremos como padrão. Uma vez escolhido um sistema dextrogiro como base, um trio de vetores linearmente independentes $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dito dextrogiro se o determinante

$$\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right) \tag{2.4}$$

é positivo. Reciprocamente, o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dito levogiro se o determinando for negativo. Veja mais detalhes no exemplo (2.2.8).

Um vetor é representado neste sistema como um trio de números reais, denominados componentes do vetor $\vec{v}$ e denotados por:

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle\,. \tag{2.5}$$

É natural neste momento definir os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ como

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \langle 1,0,0 \rangle \\ \vec{j} &= \langle 0,1,0 \rangle \\ \vec{k} &= \langle 0,0,1 \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

de forma que a expressão (2.5) pode ser escrita como

$$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}. \tag{2.7}$$

O vetor nulo é definido como vetor cujas três coordenadas são nulas:

$$\vec{0} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \langle 0,0,0 \rangle\,. \tag{2.8}$$

A soma de dois vetores é dada pela soma componente a componente, ou seja, se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, então

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\,\vec{i} + (u_2 + v_2)\,\vec{j} + (u_3 + v_3)\,\vec{k}. \tag{2.9}$$

O produto de um vetor por um escalar é definido como a multiplicação componente a componente pelo escalar, ou seja, se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, então

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1)\vec{i} + (\alpha u_2)\vec{j} + (\alpha u_3)\vec{k}. \tag{2.10}$$

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

E 2.2.1. Mostre que o espaço vetorial assim definido satisfaz as propriedades (2.1).

Definimos também a norma euclidiana de um vetor $\vec{v}$ como a distância da origem até o ponto que o vetor representa e a denotamos por $\|\vec{v}\|$. Pelo Teorema de Pitágoras, da geometria euclidiana, temos:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}. \tag{2.11}$$

E 2.2.2. Verifique que a norma euclidiana satisfaz as seguintes propriedades:

$$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha|\,\|\vec{u}\|, \qquad \text{(Homogeneidade)} \tag{2.12a}$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \qquad \text{(Desigualdade triangular)} \tag{2.12b}$$
$$\|\vec{u}\| = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}, \qquad \text{(Separação)} \tag{2.12c}$$

Dica: Para mostrar a desigualdade triangular, entenda seu significado geométrico. Uma demonstração puramente algébrica pode ser feita, embora seja mais laboriosa. Veremos mais adiante que o conceito de produto escalar permite simplificar os cálculos.

A fim de simplificar a notação, a norma de um vetor $\vec{v}$ pode ser escrita simplesmente como v, ou seja

$$v = \|\vec{v}\|$$

Um vetor de norma 1 é chamado de vetor unitário. Todo vetor não nulo pode ser escrito na forma

$$\vec{v} = v\hat{v} \tag{2.13}$$

onde v é a norma de $\vec{v}$ e $\hat{v}$ é um vetor unitário dado por

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{v}. \tag{2.14}$$

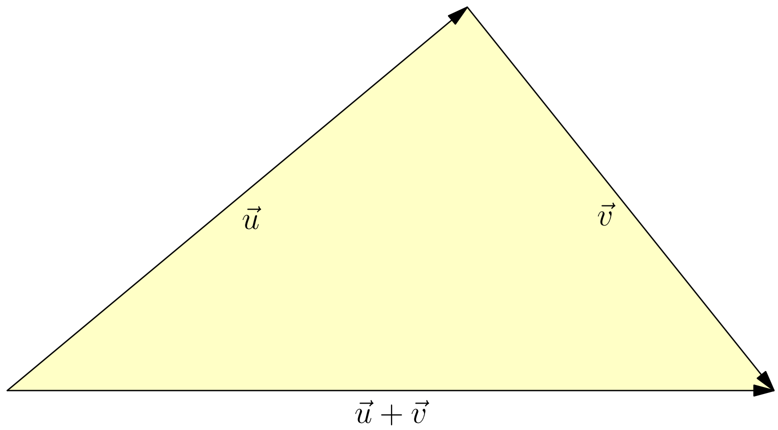

Figura 2.2: Representação gráfica da desigualdade triangular: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$

O vetor $\hat{v}$ é chamado de versor de $\vec{v}$. $\hat{v}$ é um vetor unitário que tem mesmo sentido e direção de $\vec{v}$.

A identidade (2.13) tem uma importante interpretação geométrica: todo vetor não nulo pode ser representado pelo seu módulo e por seu versor, que traz a informação de direção e sentido. Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são exemplos de versores. O vetor nulo é o único vetor ao qual não se pode associar direção e sentido únicos.

E 2.2.3. Mostre que a norma de um versor conforme definido em (2.14) é sempre unitária.

E 2.2.4. Considere os vetores dados por $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ e $\vec{w}=\frac{1}{3}\vec{i}+\frac{1}{2}\vec{j}$. Represente estes vetores em um referencial euclidiano, calcule suas normas, calcule os versores associados $\hat{u}$, $\hat{v}$ e $\hat{w}$ e represente-os no mesmo gráfico.

Resp: $u=\sqrt{2}$, $v=\sqrt{5}$ e $w=\frac{\sqrt{13}}{6}$. $\hat{u}=\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$, $\hat{v}=\frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}$, $\hat{w}=\frac{2\sqrt{13}}{13}\vec{i}+\frac{3\sqrt{13}}{13}\vec{j}$

E 2.2.5. Considere o vetor $\vec{u}=\cos\theta\vec{i}+\operatorname{sen}\varphi\vec{j}$. Mostre que este vetor é unitário e represente-o graficamente quando $\varphi=0$, $\varphi=\frac{\pi}{6}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ e $\varphi=\pi$

E 2.2.6. Considere o vetor $\vec{u}=\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\vec{i}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\vec{j}+\cos\theta\vec{k}$. Verifique que este vetor é unitário e represente-o graficamente quando

a) $\theta=0$

b) $\theta=\frac{\pi}{4}$ e $\varphi=\frac{\pi}{4}$

c) $\theta=\frac{\pi}{2}$ e $\varphi=\frac{\pi}{4}$

d) $\theta = \pi$

E 2.2.7. Seja $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ um vetor não nulo fixo no plano xy e $\vec{v} = v\left(\cos\varphi\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\vec{j}\right)$ um vetor de norma fixa no plano xy. Considere a função $m(\varphi) = \|\vec{u} + \vec{v}\|$ e encontre o valor máximo e mínimo de $m(\varphi)$. Interprete o resultado.

E 2.2.8. Conforme observado no texto, um trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro se

$$\det\left(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}\right) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} > 0.$$

onde $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$, $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ e $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$. Faça o que se pede:

a) Verifique que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro então $\vec{v}$, $\vec{u}$ e $\vec{w}$ é levogiro.

b) Verifique que se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro então $\vec{v}$, $\vec{w}$ e $\vec{u}$ e $\vec{w}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dextrogiros.

c) Verifique que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro quando $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

d) Verifique que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dextrogiro quando $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{i}$. Interprete graficamente.

E 2.2.9. Considere um sistema de coordenadas cartesianas dextrogiro construído da seguinte forma:

- O centro da Terra coincide com a origem do sistema.
- O extremo norte da Terra intercepta o eixo z em valores positivos.
- O observatório de Greenwich está sob plano xz com $x > 0$.

Considere a superfície terrestre com uma esfera de raio $R_\oplus$. Denote a longitude por λ e a latitude por ϕ. Convecione como positivas a longitude leste e a latitude norte. Veja figura 2.3. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ o vetor que representa um ponto sobre a superfície da Terra. Responda:

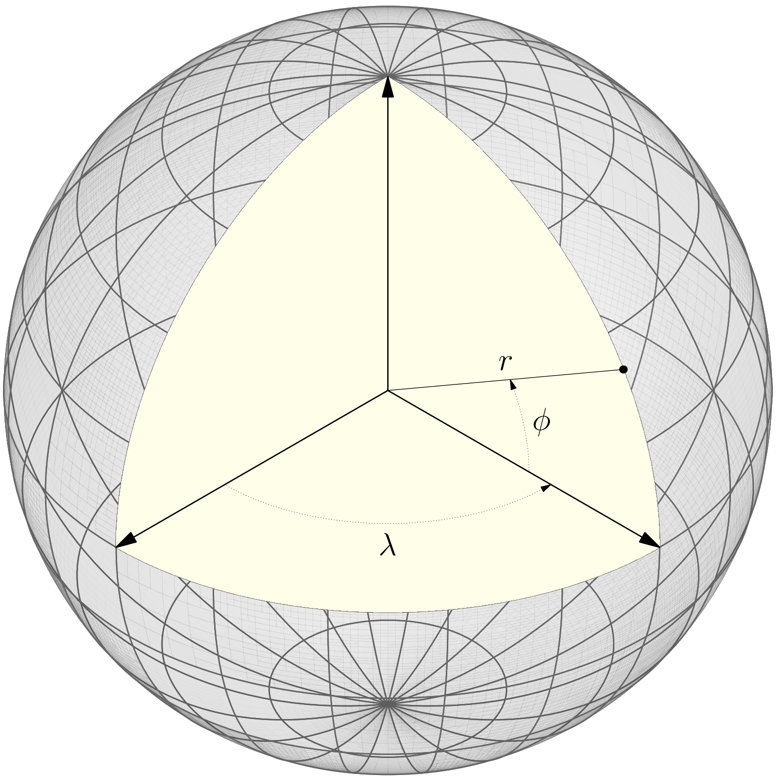

Figura 2.3: Representação gráfica do sistema de coordenadas geográficas.

a) Qual a norma do vetor $\vec{r}$?

b) Qual é o valor da componentes x, y e z de $\vec{r}$ em termos de λ e ϕ?

c) Seja d a distância entre dois pontos sobre a superfície terrestre. Use a lei dos cossenos[1] para mostrar que distância δ sobre a superfície esférica entre esses mesmos dois pontos é dada por

$$\delta = R_\oplus \cos^{-1}\left(1 - \frac{d^2}{2R_\oplus^2}\right)$$

Interprete os casos particulares $d = 0$ e $d = 2R_\oplus$.

d) Considerando $R_\oplus = 6378Km$ e os seguintes valores para as coordenadas geográficas de Porto Alegre, Londres e Tóquio, construa uma tabela com os valores de λ e ϕ e as coordenadas xyz em quilômetros de cada uma dessas cidades.

Localidade	Latitude	Longitude
Porto Alegre	$30°\ 01'\ 58''$S	$51°13'\ 48''$O
Londres	$51°\ 30'\ 28''$N	$0°\ 7'\ 41''$O
Tóquio	$35°\ 41'\ 22''$N	$139°\ 41'\ 30''$L

Tabela 2.1: Coordenadas geográficas de algumas cidades.

e) Contrua uma tabela com as distâncias em linha reta e sobre a superfície da Terra entre cada uma dessas cidades.

f) As seguintes coordenadas indicam locais de grande importância cultural ou turística, identifique-os:

2.3 Ângulo entre vetores e o produto escalar

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#` Na seção anterior, começamos a trabalhar com vetores no espaço euclidiano. No entanto, até o momento não lidamos explicitamente com ângulos entre vetores. Introduziremos primeiramente o conceito de produto escalar ou produto interno entre vetores. O produto escalar é

[1] Seja um triângulo de lados a, b e c e seja θ o ângulo entre os lados de comprimento a e b, então $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. Ver também figura 2.4 na página 13.

Localidade	x	y	z
1	4192,872Km	168Km	4803,175Km
2	1175,603Km	5550,889Km	2912,813Km
3	3996,282Km	-127,418Km	4969,143Km

Tabela 2.2: Coordenadas geográficas de três localidades incógnitas.

uma operação que liga um par de vetores a um escalar. O produto escalar entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é denotado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e é definida no espaço euclidiano tridimensional como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \tag{2.15}$$

Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ relacionados por

$$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}.$$

Este trio de vetores pode ser intepretado como os três lados de um triângulo como na figura 2.4. Da lei dos cossenos, sabemos que a seguinte relação é satisfeita:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos\theta$$

supondo $u \neq 0$ e $v \neq 0$, temos

$$\cos\theta = \frac{w^2 - u^2 - v^2}{2uv}.$$

Usamos agora a definição de norma de um vetor dada em (2.11):

$$\begin{aligned} u^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \\ v^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ w^2 &= w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 \end{aligned}$$

Simplificando, temos:

$$\cos\theta = \frac{w^2 - u^2 - v^2}{2uv} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{uv} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{uv}$$

Esta última expressão nos permite escrever

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = uv \cos(\vec{u}, \vec{v}) = uv \cos\theta \tag{2.16}$$

onde $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ indica o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Resp: a) $r = R_\oplus$ b) $x = R_\oplus \cos\phi \cos\lambda$, $y = R_\oplus \cos\phi \,\mathrm{sen}\,\lambda$ e $z = R_\oplus \,\mathrm{sen}\,\phi$

Localidade	ϕ	λ	x	y	z
Porto Alegre	$-30{,}0328°$	$-51{,}23°$	3457,65	$-4305{,}07$	$-3192{,}16$
Londres	51,5078°	$-0{,}0781°$	3969,71	-5,41	4992,02
Tóquio	35,6894°	139,6917°	3950,26	3351,05	3720,87

Tabela 2.3: Coordenadas geográficas e cartesianas de algumas cidades - solução do item d.

Localidades	Distância em linha reta	Distância sobre a superfície esférica
Porto Alegre-Londres	9260Km	10360Km
Porto Alegre-Tóquio	12700Km	18840Km
Tóquio-Londres	8695Km	9570Km

Tabela 2.4: Distância entre as cidades - solução do item e.

Localidade	λ	ϕ	Identificação
1	$48°51'30''$N	$0°02'24''$L	
2	$27°10'27''$N	$0°58'42''$L	
3	$51°10'44''$N	$0°01'55''$W	

Tabela 2.5: Solução do item f

Observação 2.3.1. Neste momento, o leitor deve observar que a definição que demos originalmente para o produto escalar em (2.15) dependia fortemente do sistema de coordenadas escolhido. No entanto, a identidade (2.16) mostra que o valor do produto escalar depende apenas da norma dos vetores envolvidos e do ângulo entre esses vetores, ou seja, (2.16) pode ser usado como uma definição intrínseca (que não depende da escolha do sistema de coordenadas) de produto escalar.

Observação 2.3.2. O produto escalar do vetor nulo $\vec{0}$ por qualquer vetor é zero.

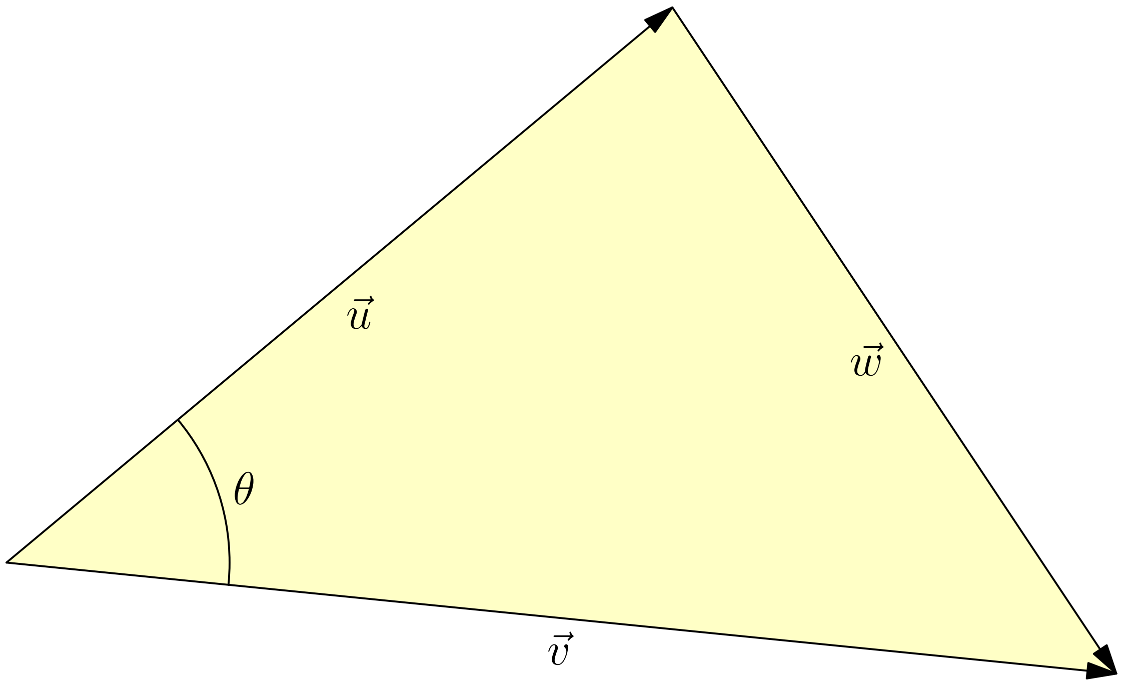

Figura 2.4: Lei dos cossenos: $\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$

O produto escalar satisfaz as seguintes propriedades:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}, \qquad \text{(Comutatividade)} \tag{2.17a}$$

$$\vec{u}\cdot(\alpha\vec{v}+\beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{v})+\beta(\vec{u}\cdot\vec{w}), \qquad \text{(Linearidade)} \tag{2.17b}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u^2, \qquad \text{(Respeito à norma)} \tag{2.17c}$$

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \le uv, \qquad \text{(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)} \tag{2.17d}$$

As propriedades (2.17a), (2.17b) e (2.17c) podem ser trivialmente demonstradas diretamente a partir da definição de produto escalar dada em (2.15).

E 2.3.1. Demonstre essas três propriedades.
Observe que $\alpha(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\alpha\,\vec{u})\cdot\vec{v}$ pelo que podemos escrever $\alpha\,\vec{u}\cdot\vec{v}$ sem risco de ambiguidade.

E 2.3.2. Use (2.17a) e (2.17b) para mostrar a seguinte propriedade:

$$(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot\vec{w} = \alpha(\vec{u}\cdot\vec{w})+\beta(\vec{v}\cdot\vec{w})$$

A desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.17d) pode ser demonstrada a partir de (2.16) uma vez que

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1.$$

No entanto, uma demonstração puramente algébrica pode ser dada a partir das propriedades (2.17a), (2.17b) e (2.17c). Dada a beleza desta demonstração e da possibilidade de generalização, apresentamo-na a seguir:

Consideramos primeiramente os versores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ definidos em (2.14) e calculamos

$$\begin{aligned} \|\hat{u}+\hat{v}\|^2 &= (\hat{u}+\hat{v})\cdot(\hat{u}+\hat{v}) = 2 + 2\hat{u}\cdot\hat{v} \\ \|\hat{u}-\hat{v}\|^2 &= (\hat{u}-\hat{v})\cdot(\hat{u}-\hat{v}) = 2 - 2\hat{u}\cdot\hat{v} \end{aligned}$$

onde usamos que $\hat{u}\cdot\hat{u} = \hat{v}\cdot\hat{v} = 1$ posto que a norma de um versor é sempre 1. Agora observamos que $\|\hat{u}+\hat{v}\|^2 \geq 0$ e $\|\hat{u}-\hat{v}\|^2 \geq 0$, pelo que temos:

$$-1 \leq \hat{u}\cdot\hat{v} \leq 1$$

O que implica $|\hat{u}\cdot\hat{v}| \leq 1$. Como $\vec{u} = u\hat{u}$ e $\vec{v} = v\hat{v}$, temos

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq uv$$

Observamos que com uma demontração puramente algébrica para a desigualdade de Cauchy-Schwarz, podemos derivar uma demonstração puramente algébrica da desigualdade triangular (2.12b). Ver também a discussão do excício 2.2.2. Para tal considere a seguinte identidade:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = u^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + v^2$$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq uv$, temos:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, temos:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq (u+v) = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$$

Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dito ortogonais se o ângulo entre eles é 90°, ou seja, se $\cos(\vec{u},\vec{v}) = 0$. De (2.16), isto acontece quando $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$. Usamos o símbolo $\perp$ para denotar a ortogonalidade:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \tag{2.18}$$

Em especial os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são ortogonais, ou seja:

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

E 2.3.3. Considere os vetores dados por $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{w} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ conforme exercício 2.2.4. Calcule o ângulo entre esses vetores.

Resp: 18,43°, 11,3° e 7,13°

E 2.3.4. Mostre que se α e β são escalares diferentes de zero e $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores não nulos, então

$$\cos(\alpha\vec{u},\beta\vec{v}) = \cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Interprete geometricamente esta identidade.

E 2.3.5. Mostre que se $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ então $u_1 = \vec{u}\cdot\vec{i}$, $u_2 = \vec{u}\cdot\vec{j}$ e $u_3 = \vec{u}\cdot\vec{k}$. Conclua que

$$\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\vec{i}\right)\vec{i} + \left(\vec{u}\cdot\vec{j}\right)\vec{j} + \left(\vec{u}\cdot\vec{k}\right)\vec{k}.$$

E 2.3.6. Sejam $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$ e $\vec{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} - \vec{j}\right)$. Mostre que estes vetores são unitários e ortogonais entre si. Encontre dois vetores unitários distintos ortogonais tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$.

Resp: $-\vec{k}$ e $\vec{k}$.

E 2.3.7. Sejam $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Mostre que estes vetores são ortogonais entre si. Encontre dois vetores unitários distintos ortogonais tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

Resp: $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{j} - \vec{k}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\vec{j} + \vec{k}\right)$.

E 2.3.8. Encontre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que:

a) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} = \vec{0}$ mas $\vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{w}) \neq \vec{0}$

b) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w} \neq \vec{u}\,(\vec{v}\cdot\vec{w})$ e ambos não nulos.

Exemplos de respostas: a) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{j}$. b) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{w} = \vec{j}$.

E 2.3.9. Sejam os vetores $\vec{u} = \cos(\theta_1)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta_1)\vec{j}$ e $\vec{v} = \cos(\theta_2)\vec{i} + \operatorname{sen}(\theta_2)\vec{j}$ então

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

Conclua que o ângulo θ entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por

$$\theta = \begin{cases} |\theta_1 - \theta_2|, & |\theta_1 - \theta_2| \leq 180^\circ \\ 360^\circ - |\theta_1 - \theta_2|, & |\theta_1 - \theta_2| > 180^\circ \end{cases}$$

contanto que θ_1 e θ_2 estejam entre 0 e 360°. Interprete geometricamente este resultado.

E 2.3.10. Seja $\vec{u}$ um vetor não nulo fixo e $\vec{v}$ um vetor de norma não nula fixa. Mostre que $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ tem um ponto de máximo quando $\hat{u} = \hat{v}$ e um ponto de mínimo quando $\hat{u} = -\hat{v}$. Interprete o resultado geometricamente e compare com o problema (2.2.7).

Dica: $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = u^2 + v^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ e (2.16).

2.4 O produto vetorial

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#` Além do produto escalar entre vetores, definimos também o produto vetorial. Enquanto o produto escalar de dois vetores é um escalar, o produto vetorial é um terceiro vetor. O produto vetorial entre $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ é denotado $\vec{u} \times \vec{v}$ e é definido em coordenadas cartesianas como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k} \tag{2.19}$$

A definição de produto vetorial pode parecer à primeira vista arbitrária e fortemente dependente do sistema de coordenadas escolhido. No entanto, mostraremos que o produto vetorial admite uma formulação intrínseca, ou seja, que não depende do sistema de coordenadas escolhido. Ademais, veremos que tanto o produto escalar como o produto vetorial surgem naturalmente no estudo da física clássica.

O produto vetorial possui as seguintes propriedades:

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}, \qquad \text{(Anticomutatividade)} \tag{2.20a}$$

$$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) \times \vec{w} = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{w}) + \beta\,(\vec{v} \times \vec{w})\,, \qquad \text{(Linearidade à esquerda)} \tag{2.20b}$$

$$\vec{u} \times (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\,(\vec{u} \times \vec{v}) + \beta\,(\vec{u} \times \vec{w})\,, \qquad \text{(Linearidade à direita)} \tag{2.20c}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0, \qquad \text{(Ortogonalidade)} \tag{2.20d}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = uv\,\text{sen}\,(\vec{u},\vec{v}). \qquad \text{(Norma)} \tag{2.20e}$$

$$\det\,(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \times \vec{v}) = u^2v^2\,\text{sen}\,^2(\vec{u},\vec{v}) > 0. \qquad \text{(Orientação dextrogira)} \tag{2.20f}$$

Nas duas últimas propriedades, $\text{sen}\,(\vec{u},\vec{v})$ denota o seno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Observa-se que quando $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ é nulo, este ângulo não está bem definido, estas identidades devem ser então interpretadas como $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$ e $\det\,(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \times \vec{v}) = 0$.

A última propriedade significa que o trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{u} \times \vec{v}$ forma um sistema dextrogiro.

E 2.4.1. Mostre as propriedades (2.20a), (2.20b) e (2.20c).

A propriedade da ortogonalidade pode ser demonstrada diretamente da definição de produto vetorial e produto escalar:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= \left[(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}\right]\left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\,u_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,u_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\,u_3 = 0\end{aligned}$$

igualmente temos:

$$\begin{aligned}(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} &= \left[(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}\right]\left(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}\right)\\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\,v_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\,v_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\,v_3 = 0\end{aligned}$$

Para provar a propriedade (2.20e), mostraremos primeiramente a seguinte (interessante) identidade:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = u^2v^2 \tag{2.21}$$

Da definição de norma e de produto vetorial temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 &= \left\|(u_2v_3 - u_3v_2)\,\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\,\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{k}\right\|^2\\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_3v_1 - u_1v_3)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2\\ &= \left(u_2^2v_3^2 - 2u_2u_3v_2v_3 + u_3^2v_2^2\right) + \left(u_3^2v_1^2 - 2u_1u_3v_1v_3 + u_1^2v_3^2\right)\\ &+ \left(u_1^2v_2^2 - 2u_1u_2v_1v_2 + u_2^2v_1^2\right).\end{aligned} \tag{2.22}$$

Da definição de norma e de produto escalar temos:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2 + 2u_1u_2v_1v_2 + 2u_1u_3v_1v_3 + 2u_2u_3v_2v_3.$$

Somando estas últimas duas expressões, simplificando e reagrupando termos, chegamos ao resultado desejado:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 &= (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2\\ &= u_1^2v_1^2 + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 + u_3^2v_3^2\\ &= \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2\right)\left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) = u^2v^2.\end{aligned}$$

Agora que dispomos da identidade (2.21), usamos (2.16) para escrever

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = u^2v^2 - |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = u^2v^2 - [uv\cos(\vec{u},\vec{v})]^2 = u^2v^2\left[1 - \cos^2(\vec{u},\vec{v})\right] = u^2v^2\,\mathrm{sen}^{\,2}(\vec{u},\vec{v})$$

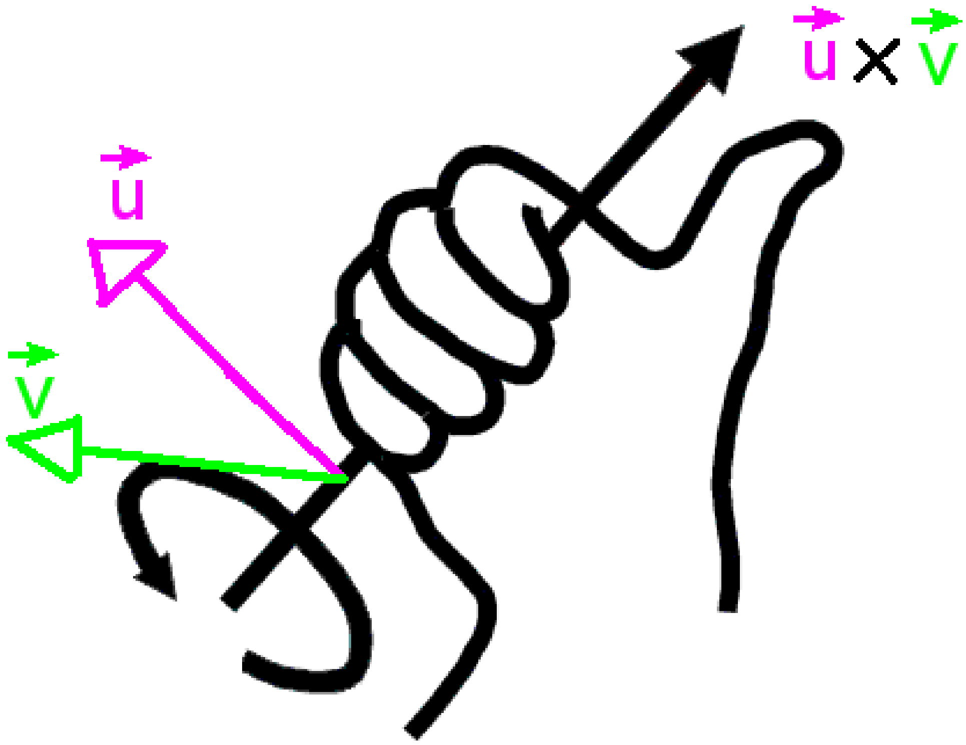

Figura 2.5: Regra da mão direita.

Extraímos a raiz quadrada, observando que sen $(\vec{u},\vec{v}) \geq 0$ e obtemos o resultado desejado (2.20e). Um caso particular importante é quando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão na mesma direção. Como sen $0 =$ sen $180° = 0$, o produto vetorial de dois vetores paralelos é $\vec{0}$. Para demonstrar a propriedade (2.20f), calculamos o determinante envolvido

$$\begin{aligned}
\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}\right) &= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & (u_2v_3 - u_3v_2) \\ u_2 & v_2 & (u_3v_1 - u_1v_3) \\ u_3 & v_3 & (u_1v_2 - u_2v_1) \end{vmatrix} \\
&= \left(u_1^2v_2^2 - u_1u_2v_1v_2\right) + \left(u_3^2v_1^2 - u_1u_3v_1v_3\right) + \left(u_2^2v_3^2 - u_2u_3v_2v_3\right) \\
&- \left(u_1u_2v_1v_2 - u_2^2v_1^2\right) - \left(u_1u_3v_1v_3 - u_1^2v_3^2\right) - \left(u_2u_3v_2v_3 - u_3^2v_2^2\right)
\end{aligned}$$

Agora basta observar que esta expressão é idêntica a (2.22), ou seja, $\|\vec{u}\times\vec{v}\|^2$ e portanto o determinante $\det\left(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\times\vec{v}\right)$ é positivo.

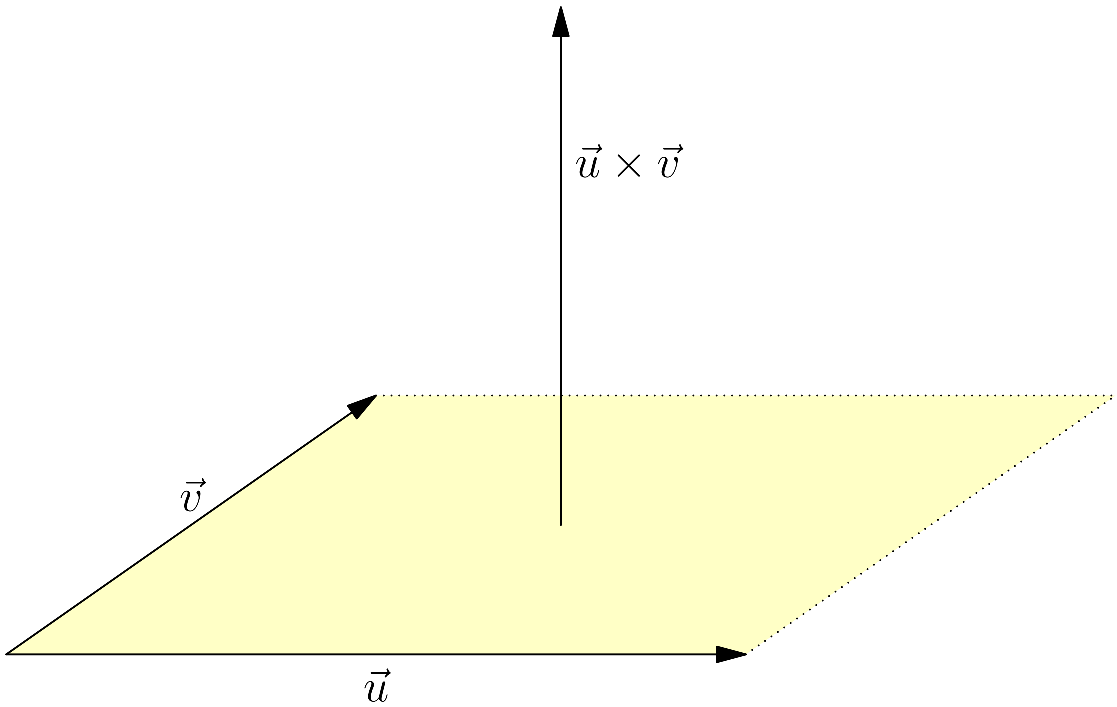

Figura 2.6: Interpretação geométrica do produto vetorial.

A importância desta propriedade está no fato que se $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ então o trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro. Além disso, por causa da propriedade (2.20d), $\vec{w}$ deve ser ortogonal tanto aos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$. Finalmente, observando a propriedade da norma (2.20e), podemos estabelecer a seguinte identidade para o produto vetorial de dois vetores não colineares $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = uv \operatorname{sen}\,(\vec{u},\vec{v})\,\hat{e} \tag{2.23}$$

onde o versor $\hat{e}$ é ortogonal ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e forma um sistema dextrogiro com eles.

A norma do produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser interpretada como a área do paralelogramo cujos lados são $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (ver figura 2.6. A direção do produto vetorial é então ortogonal ao plano gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o sentido é dado pela regra da mão direita.

A definição de produto vetorial dada em (2.19) pode ser mais facilmente lembrada através do seguinte determinante formal:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{2.24}$$

que pode ser calculado pela regra de Sarrus.

O produto vetorial entre os vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ pode ser obtido da definição (2.19) ou da caracterização geométrica do produto vetorial:

$$\begin{array}{lll} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, & \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, & \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, & \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, & \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0} \end{array} \tag{2.25}$$

Exercícios resolvidos

E 2.4.2. Seja $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, calcule o vetor $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

Solução. Primeira forma: Calcularemos primeiramente usando o determinante (2.24):

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \vec{i}(0-0) + \vec{j}(0-0) + \vec{k}(-2-6) \\ &= -8\vec{k} \end{aligned}$$

Segunda forma: Calcularemos usando as propriedades (2.20) e as relações (2.25):

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} = \left(\vec{i} + 2\vec{j}\right) \times \left(3\vec{i} - 2\vec{j}\right) \\ &= 3(\vec{i} \times \vec{i}) - 2(\vec{i} \times \vec{j}) + 6(\vec{j} \times \vec{i}) - 4(\vec{j} \times \vec{j}) \\ &= 3\,\vec{0} - 2\,\vec{k} - 6\,\vec{k} - 4\,\vec{0} \\ &= -8\vec{k} \end{aligned}$$

◊

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

E 2.4.3. Refaça os exercícios 2.3.6 e 2.3.7 usando o conceito de produto vetorial.

E 2.4.4. Encontre três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.
Exemplo de resposta: $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{i}$ e $\vec{w} = \vec{k}$.

E 2.4.5. Simplifique as seguintes expressões:

a) $\vec{u} \times \vec{u}$

b) $\vec{u} \times \hat{u}$

c) $\vec{u} \cdot \vec{u}$

d) $\vec{u} \cdot \hat{u}$

e) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

f) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$

g) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

h) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

i) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

j) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

Resp: $\vec{0}$,$\vec{0}$,u^2,u,$u^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$, $\vec{0}$, $u^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + v^2$, $\vec{0}$, $u^2 - v^2$, $2\vec{v} \times \vec{u}$

E 2.4.6. Mostre que $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$. Conclua que o trio de vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forma um sistema dextrogiro se $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) > 0$ e levogiro se $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) < 0$. Interprete geometricamente.

2.5 Os triplos produtos e outras identidades vetoriais

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#` O triplo produto escalar é definido por um produto vetorial e um produto escalar, isto é:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}). \tag{2.26}$$

Em coordenadas cartesianas, podemos escrever o triplo produto vetorial como:

$$\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\cdot\left[\left(v_1\vec{i}+v_2\vec{j}+v_3\vec{k}\right)\times\left(w_1\vec{i}+w_2\vec{j}+w_3\vec{k}\right)\right].$$

Agora, usando a definição em cartesianas do produto vetorial dada na equação (2.19), substituindo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ por $\vec{v}$ e $\vec{w}$, respectivamente, isto é:

$$\vec{v}\times\vec{w}=(v_2w_3-v_3w_2)\,\vec{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\,\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\,\vec{k}.$$

Obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= u_1(v_2w_3-v_3w_2)+u_2(v_3w_1-v_1w_3)+u_3(v_1w_2-v_2w_1)\\ &= (u_1v_2w_3-u_1v_3w_2)+(u_2v_3w_1-u_2v_1w_3)+(u_3v_1w_2-u_3v_2w_1)\\ &= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\end{aligned}\tag{2.27}$$

Observação 2.5.1. Assim como o produto vetorial possui uma interpretação geométrica importante, a intepretação geométrica do triplo produto escalar está relacionado com o paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ver figura (2.7). O módulo é o volume do paralepípedo e o sinal é dado pela orientação do trio $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$: positivo ou negativo para as orientações dextrogira ou levogira, respectivamente.

O triplo produto escalar pode, portanto, ser calculado pelo determinante da matriz formada pelas componentes dos três vetores envolvidos. A expressão do triplo produto escalar como o determinante dos três vetores poderia ter sido mais rapidamente obtido usando (2.24) o determinante formal que, alternativamente, define o produto vetorial:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\left(u_1\vec{i}+u_2\vec{j}+u_3\vec{k}\right)\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}\tag{2.28}$$

Sabemos que quando permutamos duas linhas de uma matriz, seu determinante muda de sinal, pelo que podemos obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) &= -\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})\\ &= -\vec{w}\cdot(\vec{v}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=-\vec{u}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})\end{aligned}$$

Extraindo apenas os termos de ordem ímpar temos:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})=\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\tag{2.29}$$

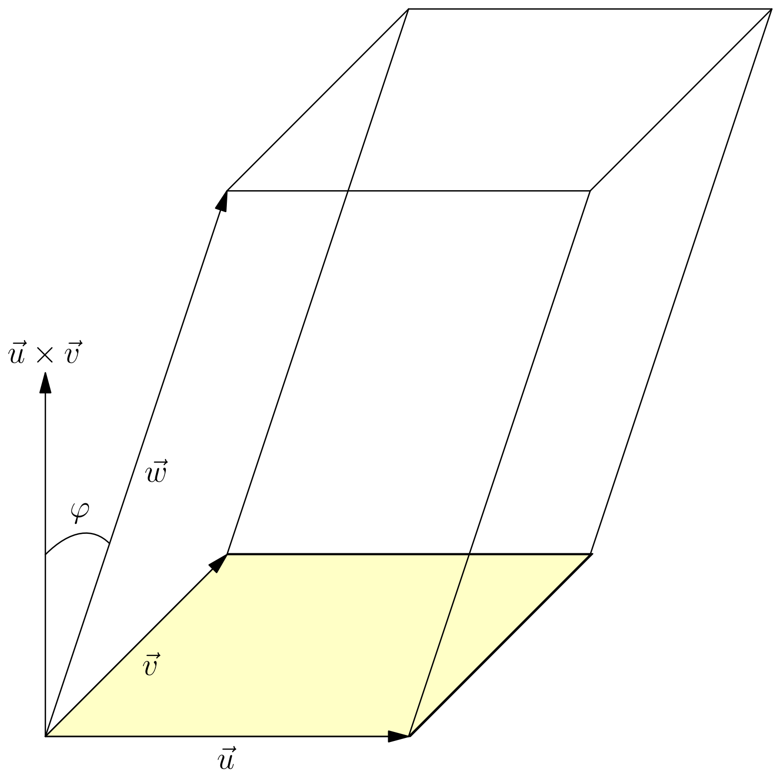

Figura 2.7: Representação do paralelepípedo formado por três vetores.

Observação 2.5.2. Um caso particular interessante é quando escolhemos $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ e obtemos:

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{u} \times \vec{v}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|^2.$$

Assim, retornamos à expressão (2.20f).

Podemos igualmente definir o triplo produto vetorial como o produto vetorial de um vetor pelo produto vetorial de outros dois vetores, isto é:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Observe cuidadosamente que o produto vetorial não é associativo, isto é, pode acontecer $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ (ver problema 2.4.4), portanto, a ordem dos vetores é relevante.2 Podemos mostrar que o triplo produto vetorial pode ser expresso como:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$$

Para verificar esta identidade, retornamos ao produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em coordenadas cartesianas e o escrevemos como a diferença entre dois vetores:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= (v_2w_3 - v_3w_2)\,\vec{i} + (v_3w_1 - v_1w_3)\,\vec{j} + (v_1w_2 - v_2w_1)\,\vec{k} \\
&= \underbrace{\left(v_2w_3\vec{i} + v_3w_1\vec{j} + v_1w_2\vec{k}\right)}_{\vec{p_1}} - \underbrace{\left(v_3w_2\vec{i} + v_1w_3\vec{j} + v_2w_1\vec{k}\right)}_{\vec{p_2}} = \vec{p_1} - \vec{p_2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{p_1} &= \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right) \times \left(v_2w_3\vec{i} + v_3w_1\vec{j} + v_1w_2\vec{k}\right) \\
&= (u_2v_1w_2 - u_3v_3w_1)\,\vec{i} + (u_3v_2w_3 - u_1v_1w_2)\,\vec{j} + (u_1v_3w_1 - u_2v_2w_3)\,\vec{k} \\
&= \left(u_2v_1w_2\vec{i} + u_3v_2w_3\vec{j} + u_1v_3w_1\vec{k}\right) - \left(u_3v_3w_1\vec{i} + u_1v_1w_2\vec{j} + u_2v_2w_3\right)\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{p_2} &= \left(u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\right) \times \left(v_3w_2\vec{i} + v_1w_3\vec{j} + v_2w_1\vec{k}\right) \\
&= (u_2v_2w_1 - u_3v_1w_3)\,\vec{i} + (u_3v_3w_2 - u_1v_2w_1)\,\vec{j} + (u_1v_3w_1 - u_2v_3w_2)\,\vec{k} \\
&= \left(u_2v_2w_1\vec{i} + u_3v_3w_2\vec{j} + u_1v_3w_1\vec{k}\right) - \left(u_3v_1w_3\vec{i} + u_1v_2w_1\vec{j}u_2v_3w_2\vec{k}\right)
\end{aligned}$$

Subtraíndo temos:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{p_1} - \vec{p_2}) &= \left[(u_2w_2 + u_3w_3)\,v_1\vec{i} + (u_1w_1 + u_3w_3)\,v_2\vec{j} + (u_1w_1 + u_2w_2)\,v_3\vec{k}\right] \\
&- \left[(u_2v_2 + u_3v_3)\,w_1\vec{i} + (u_1v_1 + u_3v_3)\,w_2\vec{j} + (u_1v_1 + u_2v_2)\,w_3\vec{k}\right]
\end{aligned}$$

Agora, somamos $u_1v_1w_1$ à primeira coordenada de cada um dos dois termos da subtração; somamos $u_2v_2w_2$ à segunda coordenada de cada um dos dois termos da subtração e somamos $u_3v_3w_3$ à terceira coordenada de cada um dos dois termos da subtração para obter:

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times (\vec{p_1} - \vec{p_2}) &= \left[(\vec{u}\cdot\vec{w})\, v_1\vec{i} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\, v_2\vec{j} + (\vec{u}\cdot\vec{w})\, v_3\vec{k}\right] \\
&- \left[(\vec{u}\cdot\vec{v})\, w_1\vec{i} + (\vec{u}\cdot\vec{v})\, w_2\vec{j} + (\vec{u}\cdot\vec{v})\, w_3\vec{k}\right] \\
&= (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}.
\end{aligned}$$

Lembrando que $\vec{p_1} - \vec{p_2} = \vec{v} \times \vec{w}$, obtemos:

$$\vec{u} \times (\vec{p_1} - \vec{p_2}) = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{w}.$$

O formulário abaixo resume as indentidades que acabamos de demonstrar e lista mais algumas sem demonstração:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u}) = \vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})\,, \quad \text{Triplo produto escalar} \tag{2.30a}$$

$$\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}\cdot\vec{v})\,\vec{w}, \quad \text{Triplo produto vetorial} \tag{2.30b}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\,\vec{u}, \quad \text{Triplo produto vetorial} \tag{2.30c}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot(\vec{w}\times\vec{x}) = (\vec{u}\cdot\vec{w})\,(\vec{v}\cdot\vec{x}) - (\vec{v}\cdot\vec{w})\,(\vec{u}\cdot\vec{x})\,, \tag{2.30d}$$

$$(\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))\,\vec{x} = (\vec{u}\cdot\vec{x})\,(\vec{v}\times\vec{w}) + (\vec{v}\cdot\vec{x})\,(\vec{w}\times\vec{u}) + (\vec{w}\cdot\vec{x})\,(\vec{u}\times\vec{v})\,, \tag{2.30e}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{x}) = (\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{x}))\,\vec{w} - (\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w}))\,\vec{x}, \tag{2.30f}$$

(2.30g)

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.6 Sistema de coordenadas cilíndricas

#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#

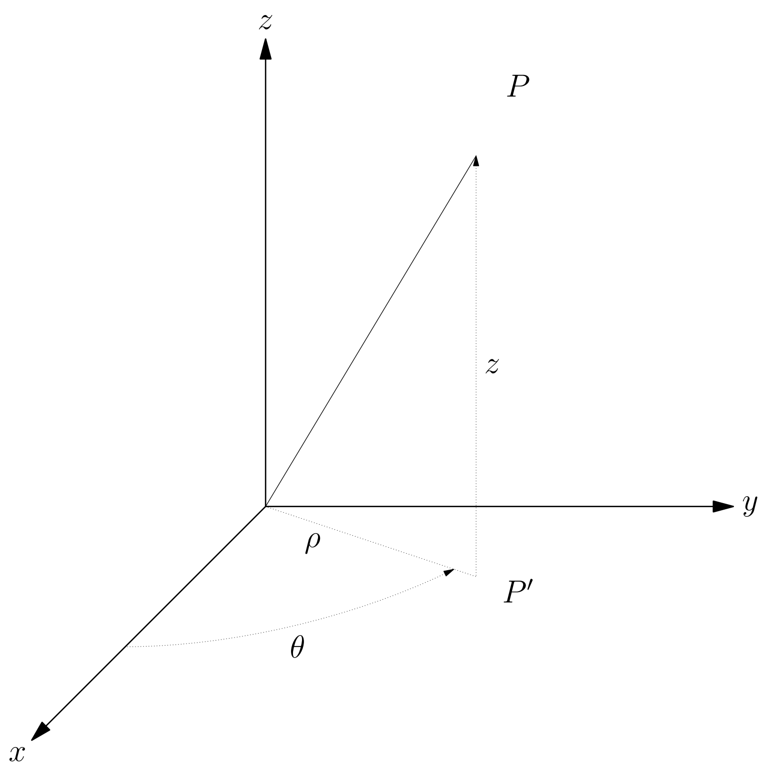

Figura 2.8: Representação de um ponto de coordenadas cilíndricas.

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pelas coordenadas ρ, θ e z. A coordenada z é a mesma do sistema de coordenadas retangulares. A coordenada ρ indica a distância entre a origem e a projeção P' de P sob o eixo xy. Finalmente θ é o ângulo entre o semi-eixo $x > 0$ e o ponto P'. Ver figura 2.8. É fácil ver que

$$x = \rho\cos\theta \tag{2.31a}$$
$$y = \rho\,\text{sen }\theta \tag{2.31b}$$

onde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.32}$$

A coordenadas ρ, θ e z são comumente denominadas, respectivamente, de "distância radial", "azimute" e "altura".

As equações (2.31) podem ser reescritas como

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.33a}$$
$$\text{sen }\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{2.33b}$$

E 2.6.1. Os seguintes pontos são dados em coordenadas cartesianas, encontre suas representações em coordenas cilíndricas:

a) $\langle 1,1,1\rangle$

b) $\langle 1,-1,1\rangle$

c) $\langle -1,1,1\rangle$

d) $\langle -1,-1,1\rangle$

Resp: $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},1\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4},1\right)$, $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4},1\right)$ e $\left(\sqrt{2},\frac{7\pi}{4},1\right)$.

E 2.6.2. Encontre uma expressão para distância de um ponto à origem em coordenadas cilíndricas

Resp: $\sqrt{\rho^2 + z^2}$

2.7 Sistema de coordenadas esféricas

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#`

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pelas coordenadas r, θ e φ. A coordenada r indica a distância do ponto P até a origem,

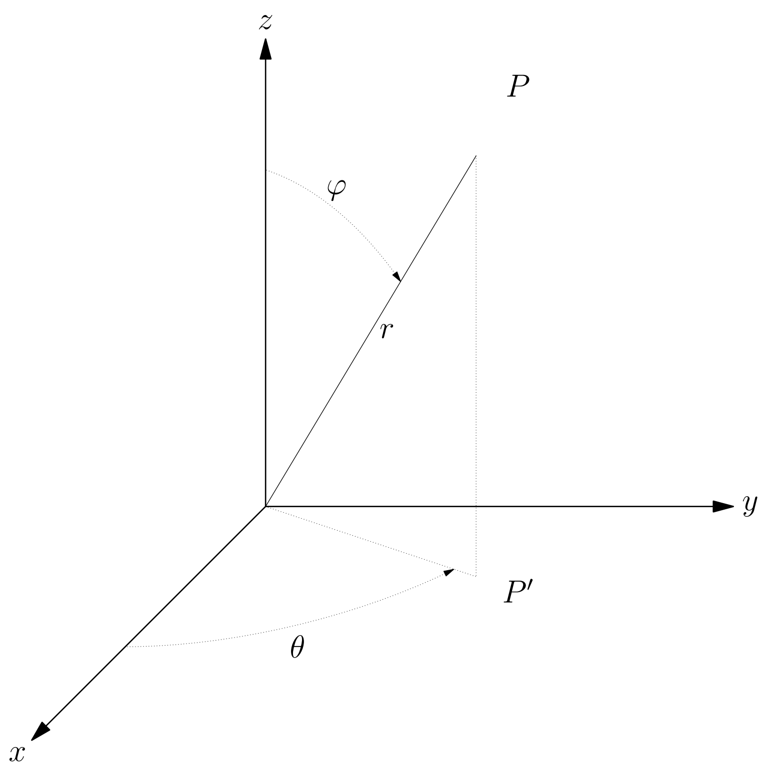

Figura 2.9: Representação de um ponto de coordenadas esféricas.

sendo consistente com a definição de módulo de um vetor. A coordenada θ é o mesmo ângulo do sistema de coordenadas cilíndricas, ou seja, é o ângulo entre o semi-eixo $x > 0$ e o ponto P' (projeção de P no plano xy). O ângulo φ é o ângulo entre a reta que liga a origem até o ponto P e o semi-eixo $z > 0$. Ver figura 2.9. A relação entre a coordenadas no sistema de coordenadas esféricas e no sistema de coordenadas cilíndricas é dada pelas projeções:

$$z = r\cos\varphi \tag{2.34a}$$
$$\rho = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \tag{2.34b}$$

Usando (2.31), encontramos a relação entre o sistema de coordenadas esféricas e cartesianas:

$$x = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta \tag{2.35a}$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.35b}$$
$$z = r\cos\varphi \tag{2.35c}$$

Analogamente, pode-se escrever:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{2.36a}$$
$$\cos\varphi = \frac{z}{r} = \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \tag{2.36b}$$
$$\cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{x^2+y^2} \tag{2.36c}$$
$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{x^2+y^2} \tag{2.36d}$$

E 2.7.1. Os seguintes pontos são dados em coordenadas cartesianas, encontre suas representações em coordenas esféricas (ver também excício 2.6.1):

a) $\langle 1,1,1\rangle$

b) $\langle 1,-1,1\rangle$

c) $\langle -1,1,1\rangle$

d) $\langle -1,-1,1\rangle$

Resp: $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{4},\theta\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{5\pi}{4},\theta\right)$, $\left(\sqrt{3},\frac{3\pi}{4},\theta\right)$ e $\left(\sqrt{3},\frac{7\pi}{4},\theta\right)$, onde $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx$ 0,955.

2.8 Exemplos na física

#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex# Na mecânica, o trabalho de uma força constante atuando sobre um corpo que se move com velocidade constante é dado pelo produto escalar da força pelo deslocamento:

$$W = \vec{F} \cdot \triangle \vec{r}$$

O torque de uma força em relação a um eixo dado é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

onde $\vec{r}$ é o vetor que liga o ponto onde a força é aplicada e o pondo onde o torque é medido.

A força $\vec{F}$ que uma campo magnético $\vec{B}$ produz em uma partícula de carga elétrica q em movimento com velocidade $\vec{v}$ é dado pela lei de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

2.9 Notas avançadas

#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#

2.9.1 O que é um espaço linear?

A definição de espaço vetorial dada em (2.1) é ampla e engloba conceitos bem mais gerais que os espaços euclidianos de dimensão 2 e 3 com os quais o leitor tem maior familiaridade. As funções reais $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por exemplo, formam espaço vetorial onde os escalares são dados pelos números reais. O vetor nulo, neste caso, é a função $f(x) = 0$. Este espaço não tem dimensão finita pois os polinômios $P_n(x) = x^n$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$ formam uma família infinita de vetores linearmente independentes (isso é uma consequência do teorema fundamental da álgebra).

2.9.2 Todo espaço linear tem uma base? Axioma da escolha.

Um problema importante é descobrir se todo espaço linear admite uma base. Este problema é mais complicado do que pode parecer e conduz a uma profunda discussão sobre os próprios fundamentos da matemática. De fato, pode-se mostrar que, o axioma da escolha implica que todo espaço linear tenha uma base.

O axioma da escolha é um dos axiomas da teoria de conjuntos padrão que tem diversas consequências contraintuitivas e fisicamente inesperadas. Um exemplo das bizarrias produzidas pelo axioma da escolha é o chamado paradoxo de

Banach-Tarski: Dada uma esfera no espaço euclidiano de três dimensões, é possível cortá-la em um número finito de pedaços e rearranjar esses pedaços de forma a construir duas esferas idênticas à original. Em outras palavras, o axioma da escolha aplicado ao espaço euclidiano tridimensional traz como consequências a não preservação de "volume" frente a translações e rotações. Para definir de forma razoável os conceitos de comprimento, área e volumes, foi necessário o desenvolvimento da teoria da medida no final do Século XIX e início do Século XX. A solução encontrada foi construir uma medida apenas em uma família de subconjuntos chamamos conjuntos mensuráveis.

Vejamos um exemplo de espaço linear de dimensão: é fácil verificar que o conjunto de todos os polinômios $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots a_nx^n$ formam um espaço linear frente às operações usuais de soma e multiplicação por um escalar. A base deste espaço é dada pelos monômios $P_n(x) = x^n$ para $n = 0,1,2,3,\ldots$ pois cada polinômio pode ser escrito como uma combinação linear **finita** de elementos desse base. No entanto, não é possível mostrar desta forma contrutiva uma base para o espaço das funções reais ou mesmo para as funções reais contínuas. A existência de uma base para estes espaços é um conceito abstrato não contrutivo.

2.9.3 Qual amplo é o conceito de norma?

Vimos que o conceito de espaço linear é muito mais amplo e útil que parecia. E quanto à norma? Estamos familiariados com a norma euclidiana, mas será que é possível definir outras normas no espaço $\mathbb{R}^n$ de forma a satisfazer as propriedades (2.12)? A norma euclidiana em um espaço de dimensão n é dada por

$$\|\vec{x}\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2\right)^{1/2}$$

De fato é possível mostrar que podemos alterar esta expressão para

$$\|\vec{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p\right)^{1/p}$$

com $p \geq 1$ de forma a preservar todas as propriedades da norma.

Mas será que é possível definir uma norma no espaço das funções reais? Esta é uma pergunta complicada, mas podemos simplificar exigindo um pouco mais desse espaço. Por exemplo, vamos considerar o espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo $[0,1]$. Neste espaço é possível definir a seguinte norma:

$$\|f(x)\| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \tag{2.37}$$

ou seja, a norma de uma função contínua é dada pelo máximo de seu módulo no intervalo.

No entanto, esta não é a única maneira de definir uma norma neste espaço, outra possibilidade é:

$$\|f(x)\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^p \tag{2.38}$$

onde $p \geq 1$.

A norma (2.38) é chamada de norma L^p de uma função e a norma (2.37) é chamada de norma do máximo ou norma infinito ou norma L^∞. Isso porque

$$\lim_{p\to\infty} \|f(x)\|_p = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Esta normas exercem enorme importância na teoria de funções com importantes aplicações no estudo das equações diferenciais.

2.9.4 E o produto escalar?

Uma operação com as propriedades (2.17) é um produto escalar. Produtos escalares não aparecem apenas em espaços de duas ou três dimensões: mesmo espaços de dimensão infinita podem possuir um produto escalar. Tomemos como exemplo novamente o espaço das funções contínuas definidas no intervalo [0,1]. A seguinte operação possui todas as propriedades de um produto escalar:

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Observe o leitor que foi usada a notação $\langle,\rangle$ para indicar o produto interno. Este produto interno induz a seguinte norma:

$$\|f\|_2 = \left(\langle f,f\rangle\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

que é o caso particular de (2.38) quando $p = 2$. A desigualdade de Cauchy-Schwarz admite a seguinte forma:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx \leq \left(\int_0^1 f(x)^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 g(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.10 Exercícios finais

`#srcPath:cap_algvet/cap_algvet.tex#`
+++construirExer+++

Capítulo 3

Seções cônicas

#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#
+++emConstrucao+++

3.1 Parábola

#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex# +++construirSec+++

3.1.1 Equação canônica

+++construirSec+++

3.1.2 Propriedades

+++construirSec+++

3.1.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.2 Elipse

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#` +++construirSec+++

3.2.1 Equação canônica

+++construirSec+++

3.2.2 Propriedades

+++construirSec+++

3.2.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.3 Hipérbole

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#` +++construirSec+++

3.3.1 Equação canônica

+++construirSec+++

3.3.2 Propriedades

+++construirSec+++

3.3.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.4 Rotação

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#` +++construirSec+++

3.4.1 Discriminante

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.5 Conexão com seções do cone

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#` +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.6 Cônicas em coordenadas polares

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#` +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

3.7 Exercícios finais

`#srcPath:cap_conicas/cap_conicas.tex#`
+++construirExer+++

Capítulo 4

Superfícies Quádricas

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++emConstrucao+++

4.1 Elipsóide

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.1.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.1.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.1.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.2 Parabolóide elíptico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.2.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.2.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.2.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.3 Parabolóide hiperbólico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.3.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.3.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.3.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.4 Hiperbolóide de uma folha

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.4.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.4.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.4.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.5 Hiperbolóide de duas folhas

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.5.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.5.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.5.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.6 Cilíndro elíptico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.6.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.6.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.6.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.7 Cilindro hiperbólico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.7.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.7.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.7.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.8 Cilindro parabólico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.8.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.8.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.8.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

4.9 Cone elíptico

#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex# +++construirSec+++

4.9.1 Equação canônica

+++construirSec+++

4.9.2 Propriedades

+++construirSec+++

4.9.3 Forma paramétrica

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.10 Exercícios finais

`#srcPath:cap_quadricas/cap_quadricas.tex#`
+++construirExer+++

Capítulo 5

Derivadas parciais

#srcPath:cap_parciais/cap_parciais.tex# +++emConstrucao+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

5.1 Exercícios finais

#srcPath:cap_parciais/cap_parciais.tex#
+++construirExer+++

Capítulo 6

Integrais múltiplas

#srcPath:cap_integ/cap_integ.tex# +++emConstrucao+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

6.1 Exercícios finais

#srcPath:cap_integ/cap_integ.tex#
+++construirExer+++

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo