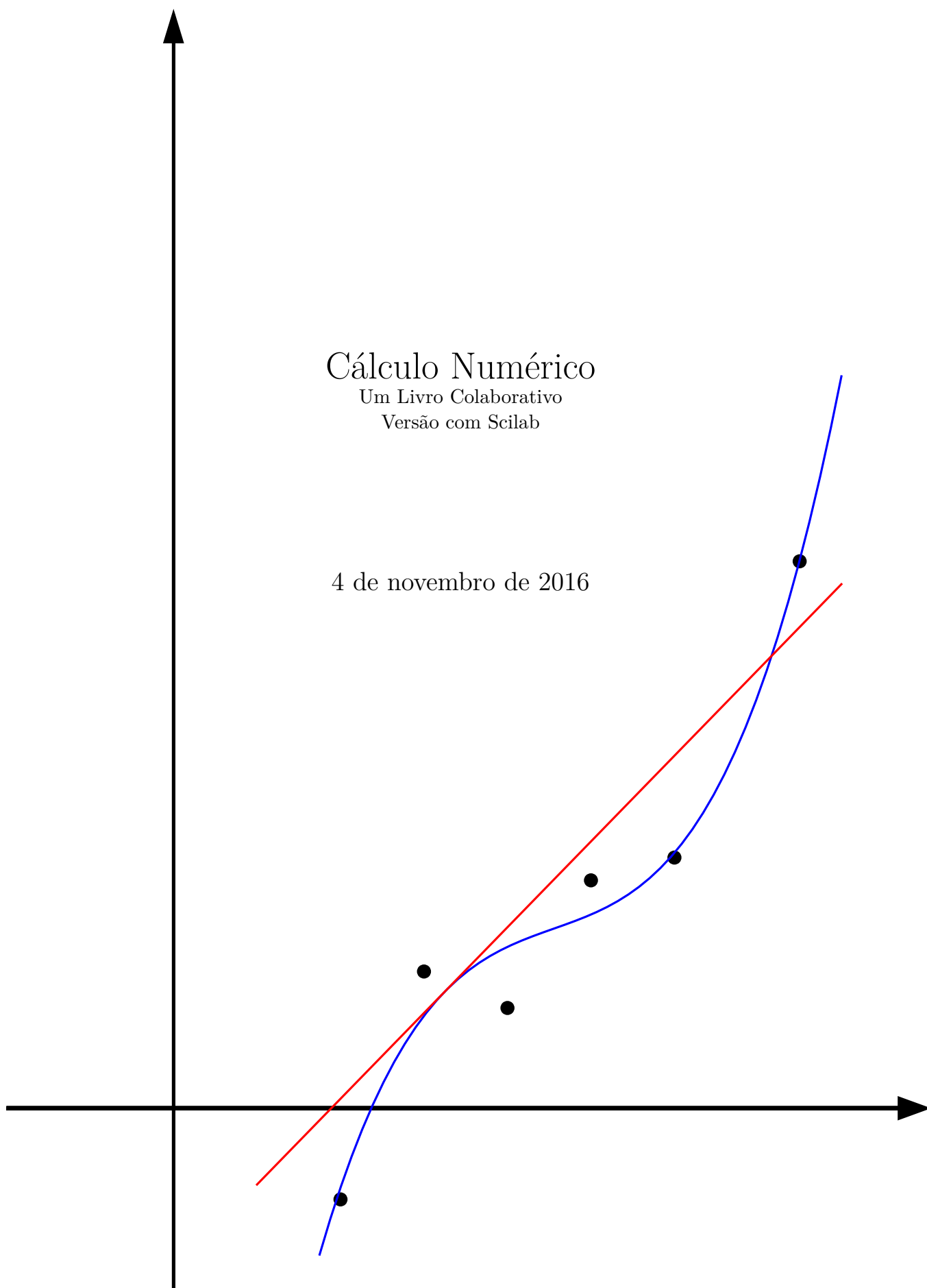


# Cálculo Numérico

Um Livro Colaborativo

Versão com Scilab

4 de novembro de 2016



# Organizadores

Dagoberto Adriano Rizzotto Justo - UFRGS

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Leonardo Fernandes Guidi - UFRGS

Matheus Correia dos Santos - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

# Licença

Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

# Nota dos organizadores

Estamos escrevendo este livro de forma colaborativa desde 2011 e, recentemente, decidimos por abrir à colaborações externas. Nosso objetivo é de produzir um material didático em nível de graduação de excelente qualidade e de acesso livre pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados na análise, estudo e aplicação de métodos numéricos nos mais diversos ramos da ciência e da tecnologia.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Edite você mesmo o livro, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Saiba mais visitando o site oficial do projeto:

`http://www.ufrgs.br/numerico`

Nós preparamos uma série de ações para ajudá-lo a participar. Em primeiro lugar, o acesso irrestrito ao livro pode se dar através do site oficial do projeto. Disponibilizamos o livro na versão original em PDF e versões adaptadas em HTML, EPUB e Slides. Além disso, o livro está escrito em código  $\text{\LaTeX}$  disponível em repositório GitHub público.

Nada disso estaria completo sem uma licença apropriada à colaboração. Por isso, escolhemos disponibilizar o material do livro sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA 3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

Lhe desejamos ótimas colaborações!

# Prefácio

Este livro busca abordar os tópicos de um curso de introdução ao cálculo numérico moderno oferecido a estudantes de matemática, física, engenharias e outros. A ênfase é colocada na formulação de problemas, implementação em computador da resolução e interpretação de resultados. Pressupõe-se que o estudante domine conhecimentos e habilidades típicas desenvolvidas em cursos de graduação de cálculo, álgebra linear e equações diferenciais. Conhecimentos prévios em linguagem de computadores é fortemente recomendável, embora apenas técnicas elementares de programação sejam realmente necessárias.

Nesta versão do livro, fazemos ênfase na utilização do **software** livre **Scilab** para a implementação dos métodos numéricos abordados. Recomendamos ao leitor ter à sua disposição um computador com o **Scilab** instalado. Não é necessário estar familiarizado com esta linguagem, mas recomendamos a leitura do Apêndice ??, no qual apresentamos uma rápida introdução a este pacote computacional. Alternativamente, existem algumas soluções em nuvem que fornecem acesso ao **Scilab** via internet. Por exemplo, a plataforma virtual rollApp (<https://www.rollapp.com/app/scilab>) ou o Scilab on Cloud (<http://cloud.scilab.in/>).

# Sumário

Capa	i
Organizadores	ii
Licença	iii
Nota dos organizadores	iv
Prefácio	v
Sumário	vii
<b>1 Solução de equações de uma variável</b>	<b>1</b>
1.1 Existência e unicidade . . . . .	1
1.2 Método da bisseção . . . . .	4
1.2.1 Código Scilab: método da bisseção . . . . .	8
1.3 Iteração de Ponto Fixo . . . . .	11
1.3.1 Teorema do ponto fixo . . . . .	14
1.3.2 Teste de convergência . . . . .	16
1.3.3 Estabilidade e convergência . . . . .	17
1.3.4 Erro absoluto e tolerância . . . . .	18
1.4 Método de Newton-Raphson . . . . .	25
1.4.1 Interpretação geométrica . . . . .	26
1.4.2 Análise de convergência . . . . .	26
1.5 Método das secantes . . . . .	31
1.5.1 Interpretação geométrica . . . . .	32
1.5.2 Análise de convergência . . . . .	33
1.6 Critérios de parada . . . . .	37
1.7 Exercícios finais . . . . .	39
<b>Respostas dos Exercícios</b>	<b>43</b>

---

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>47</b>
<b>Colaboradores</b>	<b>48</b>
<b>Índice Remissivo</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Solução de equações de uma variável

Neste capítulo buscaremos aproximações numéricas para a solução de **equações de uma variável real**. Observamos que obter uma solução para uma tal dada equação é equivalente a encontrar um **zero de uma função** apropriada. Com isso, iniciamos este capítulo discutindo sobre condições de existência e unicidade de raízes de funções de uma variável real. Então, apresentamos o **método da bisseção** como uma primeira abordagem numérica para a solução de tais equações.

Em seguida, exploramos uma outra abordagem via **iteração do ponto fixo**. Desta, obtemos o **método de Newton**<sup>1</sup>, para o qual discutimos sua aplicação e convergência. Por fim, apresentamos o **método das secantes** como uma das possíveis variações do método de Newton.

### 1.1 Existência e unicidade

O **teorema de Bolzano**<sup>2</sup> nos fornece condições suficientes para a existência do zero de uma função. Este é uma aplicação direta do **teorema do valor intermediário**.

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Bolzano). *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , é uma função contínua tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , então existe  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ .*

*Demonstração.* O resultado é uma consequência imediata do teorema do valor intermediário que estabelece que dada uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x)$ , tal que  $f(a) < f(b)$  (ou  $f(b) < f(a)$ ), então para qualquer  $d \in (f(a), f(b))$

---

<sup>1</sup>Sir Isaac Newton, 1642 - 1727, matemático e físico inglês.

<sup>2</sup>Bernhard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano, 1781 - 1848, matemático do Reino da Boêmia.



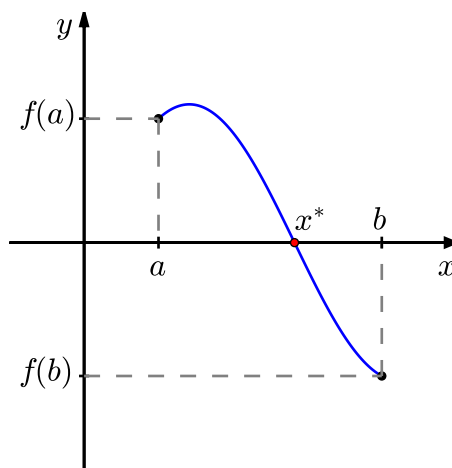


Figura 1.1: Teorema de Bolzano.

(ou  $k \in (f(b), f(a))$ ) existe  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = k$ . Ou seja, nestas notações, se  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , então  $f(a) < 0 < f(b)$  (ou  $f(b) < 0 < f(a)$ ). Logo, tomando  $k = 0$ , temos que existe  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = k = 0$ .  $\square$

Em outras palavras, se  $f(x)$  é uma função contínua em um dado intervalo no qual ela troca de sinal, então ela tem pelo menos um zero neste intervalo (veja a Figura 1.1).

**Exemplo 1.1.1.** Mostre que existe pelo menos uma solução da equação  $e^x = x + 2$  no intervalo  $(-2, 0)$ .

**Solução.** Primeiramente, observamos que resolver a equação  $e^x = x + 2$  é equivalente a resolver  $f(x) = 0$  com  $f(x) = e^x - x - 2$ . Agora, como  $f(-2) = e^{-2} > 0$  e  $f(0) = -2 < 0$ , temos do teorema de Bolzano que existe pelo menos um zero de  $f(x)$  no intervalo  $(-2, 0)$ . E, portanto, existe pelo menos uma solução da equação dada no intervalo  $(-2, 0)$ .

Podemos usar o **Scilab** para estudarmos esta função. Por exemplo, podemos definir a função  $f(x)$  e computá-la nos extremos do intervalo dado com os seguintes comandos:

```
-->deff('y=f(x)', 'y=exp(x)-x-2')
-->f(-2), f(0)
ans =
    0.1353353
ans =
   - 1.
```

Alternativamente (e com maior precisão), podemos verificar diretamente o sinal da função nos pontos desejados com comando `sign`:

```
-->sign(f(-2)),sign(f(0))
ans =
    1.
ans =
   -1.
```

◇

Quando procuramos aproximações para zeros de funções, é aconselhável isolar cada raiz em um intervalo. Desta forma, gostaríamos de poder garantir a existência e a unicidade da raiz dentro de um dado intervalo. A seguinte proposição nos fornece condições suficientes para tanto.

**Proposição 1.1.1.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  e  $f'(x) > 0$  (ou  $f'(x) < 0$ ) para todo  $x \in (a, b)$ , então existe um único  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ .*

Em outras palavras, para garantirmos que exista um único zero de uma dada função diferenciável num intervalo, é suficiente que ela troque de sinal e seja monótona neste intervalo.

**Exemplo 1.1.2.** No Exemplo 1.1.1, mostramos que existe pelo menos um zero de  $f(x) = e^x - x - 2$  no intervalo  $(-2, 0)$ , pois  $f(x)$  é contínua e  $f(-2) \cdot f(0) < 0$ . Agora, observamos que, além disso,  $f'(x) = e^x - 1$  e, portanto,  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (-2, 0)$ . Logo, da Proposição 1.1.1, temos garantida a existência de um único zero no intervalo dado.

Podemos inspecionar o comportamento da função  $f(x) = e^x - x - 2$  e de sua derivada fazendo seus gráficos no Scilab. Para tanto, podemos fazer o seguinte teste:

```
-->x = linspace(-2,0,50);
-->deff('y = f(x)', 'y=exp(x)-x-2') // define f
-->plot(x,f(x));xgrid // grafico de f
-->deff('y = fl(x)', 'y=exp(x)-1') // a derivada
-->plot(x,fl(x));xgrid // grafico de f'
```

A discussão feita nesta seção, especialmente o teorema de Bolzano, nos fornece os fundamentos para o método da bisseção, o qual discutimos na próxima seção.

## Exercícios

**E 1.1.1.** Mostre que  $\cos x = x$  tem solução no intervalo  $[0, \pi/2]$ .

**E 1.1.2.** Mostre que  $\cos x = x$  tem uma única solução no intervalo  $[0, \pi/2]$ .

**E 1.1.3.** Interprete a equação  $\cos(x) = kx$  como o problema de encontrar a intersecção da curva  $y = \cos(x)$  com  $y = kx$ . Encontre o valor positivo  $k$  para o qual essa equação admite exatamente duas raízes positivas distintas.

**E 1.1.4.** Mostre que a equação:

$$\ln(x) + x^3 - \frac{1}{x} = 10$$

possui uma única solução positiva.

**E 1.1.5.** Use o teorema de Bolzano para mostrar que o erro absoluto ao aproximar o zero da função  $f(x) = e^x - x - 2$  por  $\bar{x} = -1,841$  é menor que  $10^{-3}$ .

**E 1.1.6.** Mostre que o erro absoluto associado à aproximação  $\bar{x} = 1,962$  para a solução exata  $x^*$  de:

$$e^x + \sin(x) + x = 10$$

é menor que  $10^{-4}$ .

**E 1.1.7.** Mostre que a equação

$$\ln(x) + x - \frac{1}{x} = v$$

possui uma solução para cada  $v$  real e que esta solução é única.

## 1.2 Método da bisseção

O **método da bisseção** explora o fato de que uma função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(a) \cdot f(b) < 0$  tem um zero no intervalo  $(a, b)$  (veja o teorema de Bolzano 1.1.1). Assim, a ideia para aproximar o zero de uma tal função  $f(x)$  é tomar, como primeira aproximação, o ponto médio do intervalo  $[a, b]$ , i.e.:

$$x^{(0)} = \frac{(a + b)}{2}.$$

Pode ocorrer de  $f(x^{(0)}) = 0$  e, neste caso, o zero de  $f(x)$  é  $x^* = x^{(0)}$ . Caso contrário, se  $f(a) \cdot f(x^{(0)}) < 0$ , então  $x^* \in (a, x^{(0)})$ . Neste caso, tomamos como

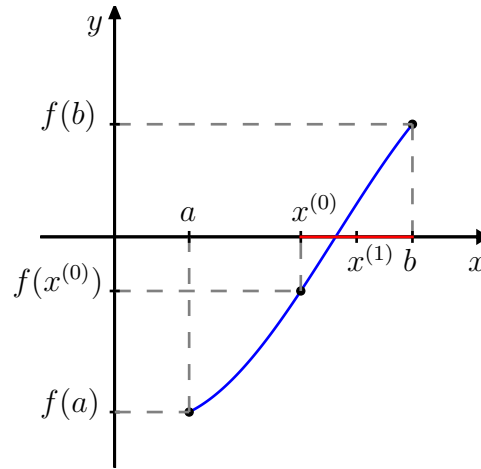


Figura 1.2: Método da biseção.

segunda aproximação do zero de  $f(x)$  o ponto médio do intervalo  $[a, x^{(0)}]$ , i.e.  $x^{(1)} = (a + x^{(0)})/2$ . Noutro caso, temos  $f(x^{(0)}) \cdot f(b) < 0$  e, então, tomamos  $x^{(1)} = (x^{(0)} + b)/2$ . Repetimos este procedimento até obtermos a aproximação desejada (veja, Figura 1.2).

De forma mais precisa, suponha que queiramos calcular uma aproximação com uma certa precisão  $TOL$  para um zero  $x^*$  de uma dada função contínua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Iniciamos, tomando  $n = 0$  e:

$$a^{(n)} = a, \quad b^{(n)} = b \quad \text{e} \quad x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}.$$

Verificamos o **critério de parada**, i.e. se  $f(x^{(n)}) = 0$  ou:

$$\frac{|b^{(n)} - a^{(n)}|}{2} < TOL,$$

então  $x^{(n)}$  é a aproximação desejada. Caso contrário, preparamos a próxima iteração  $n + 1$  da seguinte forma: se  $f(a^{(n)}) \cdot f(x^{(n)}) < 0$ , então setamos  $a^{(n+1)} = a^{(n)}$  e  $b^{(n+1)} = x^{(n)}$ ; noutro caso, se  $f(x^{(n)}) \cdot f(b^{(n)}) < 0$ , então setamos  $a^{(n+1)} = x^{(n)}$  e  $b^{(n+1)} = b^{(n)}$ . Trocando  $n$  por  $n + 1$ , temos a nova aproximação do zero de  $f(x)$  dada por:

$$x^{(n+1)} = \frac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}.$$

Voltamos a verificar o critério de parada acima e, caso não satisfeito, iteramos novamente. Iteramos até obtermos a aproximação desejada ou o número máximo de iterações ter sido atingido.

Tabela 1.1: Iteração do método da bisseção para o Exemplo 1.2.1.

$n$	$a^{(n)}$	$b^{(n)}$	$x^{(n)}$	$f(a^{(n)})f(x^{(n)})$	$\frac{ b^{(n)} - a^{(n)} }{2}$
0	-2	0	-1	$< 0$	1
1	-2	-1	-1,5	$< 0$	0,5
2	-2	-1,5	-1,75	$< 0$	0,25
3	-2	-1,75	-1,875	$> 0$	0,125
4	-1,875	-1,75	-1,8125	$< 0$	0,0625

**Exemplo 1.2.1.** Use o método da bisseção para calcular uma solução de  $e^x = x+2$  no intervalo  $[-2, 0]$  com precisão  $TOL = 10^{-1}$ .

**Solução.** Primeiramente, observamos que resolver a equação dada é equivalente a calcular o zero de  $f(x) = e^x - x - 2$ . Além disso, temos  $f(-2) \cdot f(0) < 0$ . Desta forma, podemos iniciar o método da bisseção tomando o intervalo inicial  $[a^{(0)}, b^{(0)}] = [-2, 0]$  e:

$$x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2} = -1.$$

Apresentamos as iterações na Tabela 1.1. Observamos que a precisão  $TOL = 10^{-1}$  foi obtida na quarta iteração com o zero de  $f(x)$  sendo aproximado por  $x^{(4)} = -1,8125$ .

Usando o Scilab neste exemplos, temos:

```
-->deff('y = f(x)', 'y = exp(x) - x - 2')
-->a=-2, b=0, x=(a+b)/2, TOL = (b-a)/2, sign(f(a)*f(x))
-->b=x, x=(a+b)/2, TOL = (b-a)/2, sign(f(a)*f(x))
```

e, assim, sucessivamente. Veja o código completo na Seção 1.2.1.  $\diamond$

Vamos, agora, discutir sobre a **convergência** do método da bisseção. O próximo Teorema 1.2.1 nos garante a convergência do método da bisseção.

**Teorema 1.2.1** (Convergência do método da bisseção). *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$  e  $x^*$  o único zero de  $f(x)$  no intervalo  $(a, b)$ . Então, a sequência  $\{x^{(n)}\}_{n \geq 0}$  do método da bisseção satisfaz:*

$$|x^{(n)} - x^*| < \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 0,$$

i.e.,  $x^{(n)} \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Notemos que, a cada iteração, a distância entre a aproximação  $x^{(n)}$  e o zero  $x^*$  da função é menor que a metade do tamanho do intervalo  $[a^{(n)}, b^{(n)}]$  (veja Figura 1.2), i.e.:

$$|x^{(n)} - x^*| < \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2}.$$

Por construção do método, temos  $[a^{(n)}, b^{(n)}] \subset [a^{(n-1)}, b^{(n-1)}]$  e:

$$b^{(n)} - a^{(n)} = \frac{b^{(n-1)} - a^{(n-1)}}{2}.$$

Desta forma:

$$|x^{(n)} - x^*| < \frac{b^{(n)} - a^{(n)}}{2} = \frac{b^{(n-1)} - a^{(n-1)}}{2^2} = \dots = \frac{b^{(0)} - a^{(0)}}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Logo, vemos que:

$$|x^{(n)} - x^*| < \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 0.$$

□

Observamos que a hipótese de que  $f(x)$  tenha um único zero no intervalo não é necessária. Se a função tiver mais de um zero no intervalo inicial, as iterações irão convergir para um dos zeros. Veja o Exercício 1.2.3.

**Observação 1.2.1.** O Teorema 1.2.1 nos fornece uma estimativa para a convergência do método da bisseção. Aproximadamente, temos:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \lesssim \frac{1}{2} |x^{(n)} - x^*|.$$

Isto nos leva a concluir que o método da bisseção tem **taxa de convergência** linear.

**Exemplo 1.2.2.** No Exemplo 1.2.1, precisamos de 4 iterações do método da bisseção para computar uma aproximação com precisão de  $10^{-1}$  do zero de  $f(x) = e^x - x - 2$  tomando como intervalo inicial  $[a, b] = [-2, 0]$ . Poderíamos ter estimado o número de iterações **a priori**, pois, como vimos acima:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{b - a}{2^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Logo, temos:

$$\begin{aligned} |x^{(n)} - x^*| &< \frac{b - a}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} \\ &= 2^{-n} < 10^{-1} \Rightarrow n > -\log_2 10^{-1} \approx 3,32. \end{aligned}$$

O que está de acordo com o experimento numérico realizado naquele exemplo.

O método da bisseção tem a boa propriedade de garantia de convergência, bem como de fornecer uma simples estimativa da precisão da aproximação calculada. Entretanto, a taxa de convergência linear é superada por outros métodos. A construção de tais métodos está, normalmente, associada a iteração do ponto fixo, a qual exploramos na próxima seção.

### 1.2.1 Código Scilab: método da bisseção

O seguinte código é uma implementação no Scilab do algoritmo da bisseção. As variáveis de entrada são:

- $f$  - função objetivo
- $a$  - extremo esquerdo do intervalo de inspeção  $[a, b]$
- $b$  - extremo direito do intervalo de inspeção  $[a, b]$
- TOL - tolerância (critério de parada)
- $N$  - número máximo de iterações

A variável de saída é:

- $p$  - aproximação da raiz de  $f$ , i.e.  $f(p) \approx 0$ .

```
function [p] = bissecao(f, a, b, TOL, N)
    i = 1
    fa = f(a)
    while (i <= N)
        //iteracao da bissecao
        p = a + (b-a)/2
        fp = f(p)
        //condicao de parada
        if ((fp == 0) | ((b-a)/2 < TOL)) then
            return p
        end
        //bissecta o intervalo
        i = i+1
        if (fa * fp > 0) then
            a = p
            fa = fp
        else
            b = p
        end
    end
end
```

```

    end
end
error('Num. max. de iter. excedido!')
endfunction

```

## Exercícios

**E 1.2.1.** Considere a equação  $\sqrt{x} = \cos(x)$ . Use o método da bisseção com intervalo inicial  $[a, b] = [0, 1]$  e  $x^{(1)} = (a + b)/2$  para calcular a aproximação  $x^{(4)}$  da solução desta equação.

**E 1.2.2.** Trace o gráfico e isole as três primeiras raízes positivas da função:

$$f(x) = 5 \sin(x^2) - \exp\left(\frac{x}{10}\right)$$

em intervalos de comprimento 0,1. Então, use o método da bisseção para obter aproximações dos zeros desta função com precisão de  $10^{-5}$ .

**Exemplo 1.2.3.** O polinômio  $p(x) = -4 + 8x - 5x^2 + x^3$  tem raízes  $x_1 = 1$  e  $x_2 = x_3 = 2$  no intervalo  $[1/2, 3]$ .

- Se o método da bisseção for usando com o intervalo inicial  $[1/2, 3]$ , para qual raiz as iterações convergem?
- É possível usar o método da bisseção para a raiz  $x = 2$ ? Justifique sua resposta.

**E 1.2.3.** Mostre que a equação do problema 1.1.7 possui uma solução no intervalo  $[1, v + 1]$  para todo  $v$  positivo. Dica: defina  $f(x) = \ln(x) + x - \frac{1}{x} - v$  e considere a seguinte estimativa:

$$f(v + 1) = f(1) + \int_1^{v+1} f'(x) dx \geq -v + \int_1^{v+1} dx = 0.$$

Use esta estimativa para iniciar o método de bisseção e obtenha o valor da raiz com pelo menos 6 algarismos significativos para  $v = 1, 2, 3, 4$  e  $5$ .

**E 1.2.4.** Considere o seguinte problema físico: uma plataforma está fixa a uma parede através de uma dobradiça cujo momento é dado por:

$$\tau = k\theta,$$



onde  $\theta$  é ângulo da plataforma com a horizontal e  $k$  é uma constante positiva. A plataforma é feita de material homogêneo, seu peso é  $P$  e sua largura é  $l$ . Modele a relação entre o ângulo  $\theta$  e o peso  $P$  próprio da plataforma. Encontre o valor de  $\theta$  quando  $l = 1$  m,  $P = 200$  N,  $k = 50$  Nm/rad, sabendo que o sistema está em equilíbrio. Use o método da bisseção e expresse o resultado com 4 algarismos significativos.

**E 1.2.5.** Considere a equação de Lambert dada por:

$$xe^x = t,$$

onde  $t$  é um número real positivo. Mostre que esta equação possui uma única solução  $x^*$  que pertence ao intervalo  $[0, t]$ . Usando esta estimativa como intervalo inicial, quantos passos são necessário para obter o valor numérico de  $x^*$  com erro absoluto inferior a  $10^{-6}$  quando  $t = 1$ ,  $t = 10$  e  $t = 100$  através do método da bisseção? Obtenha esses valores.

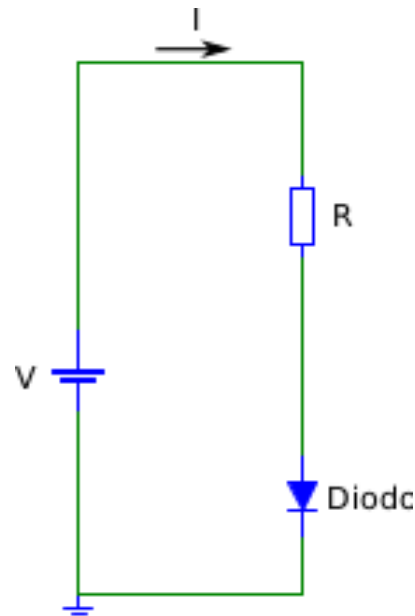
**E 1.2.6.** O polinômio  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$  possui raízes duplas em  $\sqrt{2}$  e  $-\sqrt{2}$ . O método da bisseção pode ser aplicados a  $f$ ? Explique.

**E 1.2.7.** O desenho abaixo mostra um circuito não linear envolvendo uma fonte de tensão constante, um diodo retificador e um resistor. Sabendo que a relação entre a corrente ( $I_d$ ) e a tensão ( $v_d$ ) no diodo é dada pela seguinte expressão:

$$I_d = I_R \left( \exp \left( \frac{v_d}{v_t} \right) - 1 \right),$$

onde  $I_R$  é a corrente de condução reversa e  $v_t$ , a tensão térmica dada por  $v_t = \frac{kT}{q}$  com  $k$ , a constante de Boltzmann,  $T$  a temperatura de operação e  $q$ , a carga do elétron. Aqui  $I_R = 1 \mu A = 10^{-12}$  A,  $T = 300$  K. Escreva o problema como uma equação na incógnita  $v_d$  e, usando o método da bisseção, resolva este problema com 3 algarismos significativos para os seguintes casos:

- a)  $V = 30 \text{ V}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .
- b)  $V = 3 \text{ V}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .
- c)  $V = 3 \text{ V}$  e  $R = 10 \text{ k}\Omega$ .
- d)  $V = 300 \text{ mV}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .
- e)  $V = -300 \text{ mV}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .
- f)  $V = -30 \text{ V}$  e  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .
- g)  $V = -30 \text{ V}$  e  $R = 10 \text{ k}\Omega$ .



Dica:  $V = RI_d + v_d$ .

**E 1.2.8.** Obtenha os valores de  $I_d$  no problema 1.2.7. Lembre que existem duas expressões disponíveis:

$$I_d = I_R \left( \exp \left( \frac{v_d}{v_t} \right) - 1 \right)$$

e

$$I_d = \frac{v - v_d}{R}$$

Faça o estudo da propagação do erro e decida qual a melhor expressão em cada caso.

## 1.3 Iteração de Ponto Fixo

Nesta seção, discutimos a abordagem da **iteração do ponto fixo** para a solução numérica de equações de uma variável real. Observamos que sempre podemos reescrever uma equação da forma  $f(x) = 0$  (problema de encontrar os zeros de uma função) em uma equação equivalente na forma  $g(x) = x$  (**problema de ponto fixo**). Um ponto  $x = x^*$  tal que  $g(x^*) = x^*$  é chamado de **ponto fixo** da função  $g(x)$ . Geometricamente, um ponto fixo de uma função é um ponto de interseção entre a reta  $y = x$  com o gráfico da função (veja, Figura 1.3).

**Exemplo 1.3.1.** Resolver a equação  $e^x = x + 2$  é equivalente a resolver  $f(x) = 0$ , com  $f(x) = e^x - x - 2$ . Estes são equivalentes a resolver  $g(x) = x$ , com  $g(x) = e^x - 2$ .

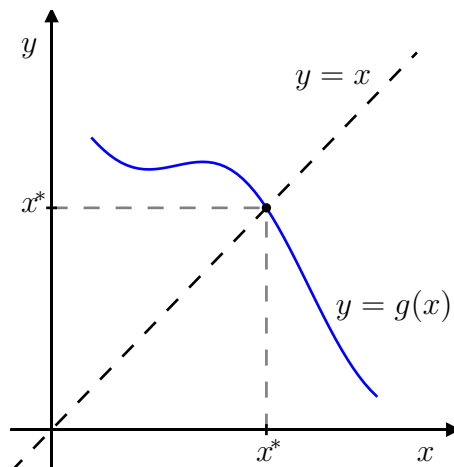


Figura 1.3: Ponto fixo  $g(x^*) = x^*$ .

Ou seja, temos:

$$e^x = x + 2 \Leftrightarrow e^x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = x$$

Dada uma função  $g(x)$ , a **iteração do ponto fixo** consiste em computar a seguinte sequência recursiva:

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)}), \quad n \geq 1,$$

onde  $x^{(1)}$  é uma aproximação inicial do ponto fixo.

**Exemplo 1.3.2** (Método babilônico). O método babilônico<sup>3</sup> é de uma iteração de ponto fixo para extrair a raiz quadrada de um número positivo  $A$ , i.e. para resolver a equação  $x^2 = A$ .

Seja  $r > 0$  uma aproximação para  $\sqrt{A}$ . Temos três possibilidades:

- $r > \sqrt{A} \Rightarrow \frac{A}{r} < \sqrt{A} \Rightarrow \sqrt{A} \in \left(\frac{A}{r}, r\right)$
- $r = \sqrt{A} \Rightarrow \frac{A}{r} = \sqrt{A}$
- $r < \sqrt{A} \Rightarrow \frac{A}{r} > \sqrt{A} \Rightarrow \sqrt{A} \in \left(r, \frac{A}{r}\right)$

Ou seja, uma aproximação melhor para  $\sqrt{A}$  está no intervalo entre  $r$  e  $\frac{A}{r}$  que pode ser aproximada como:

$$x = \frac{r + \frac{A}{r}}{2}$$

<sup>3</sup>Heron de Alexandria, 10 d.C. - 70 d.C., matemático grego.

Aplicando esse método repetidas vezes, podemos construir a iteração (de ponto fixo):

$$\begin{aligned}x^{(1)} &= r \\x^{(n+1)} &= \frac{x^{(n)}}{2} + \frac{A}{2x^{(n)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

Por exemplo, para obter uma aproximação para  $\sqrt{5}$ , podemos iniciar com a aproximação inicial  $r = 2$  e  $A = 5$ . Então, tomamos  $x^{(1)} = 2$  e daí seguem as aproximações:

$$\begin{aligned}x^{(2)} &= \frac{2}{2} + \frac{2,5}{2} = 2,25 \\x^{(3)} &= \frac{2,25}{2} + \frac{2,5}{2,25} = 2,2361111 \\x^{(4)} &= \frac{2,2361111}{2} + \frac{2,5}{2,2361111} = 2,236068 \\x^{(5)} &= \frac{2,236068}{2} + \frac{2,5}{2,236068} = 2,236068\end{aligned}$$

O método babilônico sugere que a iteração do ponto fixo pode ser uma abordagem eficiente para a solução de equações. Ficam, entretanto, as seguintes perguntas:

1. Será que a iteração do ponto fixo é convergente?
2. Caso seja convergente, será que o limite  $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$  é um ponto fixo?
3. Caso seja convergente, qual é a taxa de convergência?

A segunda pergunta é a mais fácil de ser respondida. No caso de  $g(x)$  ser contínua, se  $x^{(n)} \rightarrow x^* \in \text{Dom}(g)$ , então:

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x^{(n-1)}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n-1)}\right) = g(x^*).$$

Antes de respondermos as perguntas acima, vejamos mais um exemplo.

**Exemplo 1.3.3.** Considere o problema de encontrar o zero da função  $f(x) = x \exp(x) - 10$ . Uma maneira geral de construir um problema de ponto fixo equivalente é o seguinte:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \alpha f(x) = 0 \Rightarrow x - \alpha f(x) = x,$$

para qualquer parâmetro  $\alpha \neq 0$ . Consideremos, então, as seguintes duas funções:

$$g_1(x) = x - 0,5f(x) \quad \text{e} \quad g_2(x) = x - 0,05f(x).$$

Tabela 1.2: Iterações do ponto fixo para o Exemplo 1.3.3.

$n$	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$
1	1,700	1,700
2	2,047	1,735
3	-0,8812	1,743
4	4,3013	1,746
5	-149,4	1,746

Notamos que o ponto fixo destas duas funções coincide com o zero de  $f(x)$ . Construindo as iterações do ponto fixo:

$$x_1^{(n+1)} = g_1(x_1^{(n)}) \quad \text{e} \quad x_2^{(n+1)} = g_2(x_2^{(n)}),$$

tomando  $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = 1,7$ , obtemos os resultados apresentados na Tabela 1.2. Observamos que, enquanto, a iteração do ponto fixo com a função  $g_1(x)$  ( $\alpha = 0,5$ ) parece divergir, a iteração com a função  $g_2(x)$  ( $\alpha = 0,05$ ) parece convergir.

Afim de estudarmos a convergência da iteração do ponto fixo, apresentamos o Teorema do ponto fixo.

### 1.3.1 Teorema do ponto fixo

O Teorema do ponto fixo nos fornece condições suficientes para a existência e unicidade do ponto fixo, bem como para a convergência das iterações do método.

**Definição 1.3.1.** Uma **contração** é uma função real  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  tal que:

$$|g(x) - g(y)| \leq \beta |x - y|, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

**Observação 1.3.1.** Seja  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ ,  $y = g(x)$ .

- Se  $g(x)$  é uma contração, então  $g(x)$  função contínua.
- Se  $|g'(x)| < k$ ,  $0 < k < 1$ , para todo  $x \in [a, b]$ , então  $g(x)$  é uma contração.

**Teorema 1.3.1** (Teorema do ponto fixo). Se  $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$  é uma contração, então existe um único ponto  $x^* \in [a, b]$  tal que  $g(x^*) = x^*$ , i.e.  $x^*$  é ponto fixo de  $g(x)$ . Além disso, a sequência  $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$  dada por:

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$$

converge para  $x^*$  para qualquer  $x^{(1)} \in [a, b]$ .

*Demonstração.* Começamos demonstrando que existe pelo menos um ponto fixo. Para tal definimos a função  $f(x) = x - g(x)$  e observamos que:

$$f(a) = a - g(a) \leq a - a = 0$$

e

$$f(b) = b - g(b) \geq b - b = 0$$

Se  $f(a) = a$  ou  $f(b) = b$ , então o ponto fixo existe. Caso contrário, as desigualdades são estritas e a  $f(x)$  muda de sinal no intervalo. Como esta função é contínua, pelo teorema de Bolzano 1.1.1, existe um ponto  $x^*$  no intervalo  $(a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ , ou seja,  $g(x^*) = x^*$ . Isto mostra a existência.

Para provar que o ponto fixo é único, observamos que se  $x^*$  e  $x^{**}$  são pontos fixos, eles devem ser iguais, pois:

$$|x^* - x^{**}| = |g(x^*) - g(x^{**})| \leq \beta |x^* - x^{**}|.$$

A desigualdade  $|x^* - x^{**}| \leq \beta |x^* - x^{**}|$  com  $0 \leq \beta < 1$  implica  $|x^* - x^{**}| = 0$ .

Para demonstrar a convergência da sequência, observamos que:

$$|x^{(n+1)} - x^*| = |g(x^{(n)}) - x^*| = |g(x^{(n)}) - g(x^*)| \leq \beta |x^{(n)} - x^*|.$$

Daí, temos:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \beta |x^{(n-1)} - x^*| \leq \beta^2 |x^{(n-2)} - x^*| \leq \dots \leq \beta^n |x^{(0)} - x^*|.$$

Portanto, como  $0 \leq \beta < 1$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{(n)} - x^*| = 0,$$

ou seja,  $x^{(n)} \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ . □

**Exemplo 1.3.4.** Mostre que o Teorema do ponto fixo se aplica a função  $g(x) = \cos(x)$  no intervalo  $[1/2, 1]$ , i.e. que a iteração do ponto fixo converge para a solução da equação  $\cos x = x$ .

**Solução.** Basta mostrarmos que:

a)  $g([1/2, 1]) \subseteq [1/2, 1];$

b)  $|g'(x)| < \beta, \quad 0 < \beta < 1, \quad \forall x \in [1/2, 1].$

$n$	$x^{(n)}$
1	0,700
2	0,765
3	0,721
4	0,751
5	0,731
6	0,744
7	0,735

Tabela 1.3: Iteração do ponto fixo para o Exemplo 1.3.4.

Para provar a), observamos que  $g(x)$  é decrescente no intervalo, pelo que temos:

$$0,54 < \cos(1) \leq \cos(x) \leq \cos(1/2) < 0,88$$

Como  $[0,54, 0,88] \subseteq [0,5, 1]$ , temos o item a).

Para provar o item b), observamos que:

$$g'(x) = -\sin(x).$$

Da mesma forma, temos a estimativa:

$$-0,85 < -\sin(1) \leq -\sin(x) \leq -\sin(1/2) < -0,47.$$

Assim,  $|g'(x)| < 0,85$  temos a desigualdade com  $\beta = 0,85 < 1$ .

A Tabela 1.3 apresenta o comportamento numérico da iteração do ponto fixo:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 0,7 \\ x^{(n+1)} &= \cos(x^{(n)}), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

◇

### 1.3.2 Teste de convergência

Seja  $g : [a,b]$  uma função  $C^0[a,b]$  e  $x^* \in (a,b)$  um ponto fixo de  $g$ . Então  $x^*$  é dito estável se existe uma região  $(x^* - \delta, x^* + \delta)$  chamada bacia de atração tal que  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$  é convergente sempre que  $x^{(0)} \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$ .

**Proposição 1.3.1** (Teste de convergência). *Se  $g \in C^1[a,b]$  e  $|g'(x^*)| < 1$ , então  $x^*$  é estável. Se  $|g'(x^*)| > 1$  é instável e o teste é inconclusivo quando  $|g'(x^*)| = 1$ .*

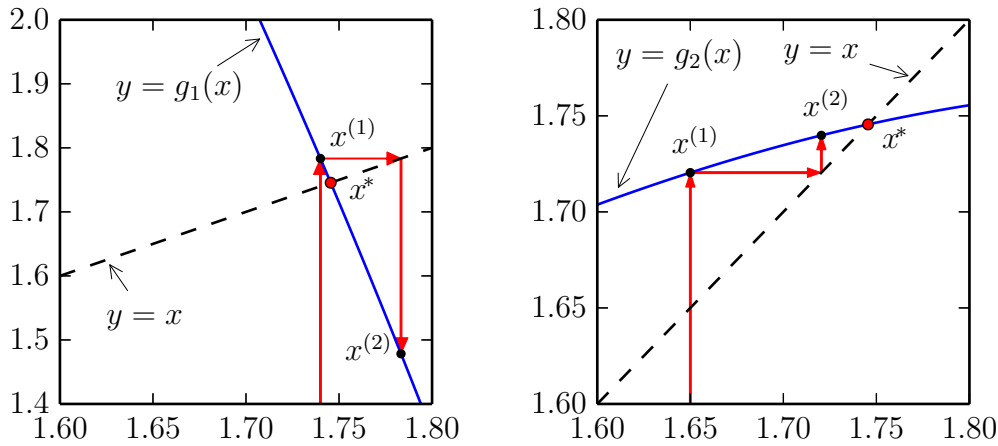


Figura 1.4: Ilustração das iterações do ponto fixo para: (esquerda)  $y = g_1(x)$  e (direita)  $y = g_2(x)$ . Veja Exemplo 1.3.5.

**Exemplo 1.3.5.** No Exemplo 1.3.3 observamos que a função  $g_1(x)$  nos forneceu uma iteração divergente, enquanto que a função  $g_2(x)$  forneceu uma iteração convergente (veja a Figura 1.4. A razão destes comportamentos é explicada pelo teste da convergência. Com efeito, sabemos que o ponto fixo destas funções está no intervalo  $[1,6, 1,8]$  e temos:

$$|g_1'(x)| = |1 - 0,5(x+1)e^x| > 4,8, \quad \forall x \in [1,6, 1,8],$$

enquanto:

$$|g_2'(x)| = |1 - 0,05(x+1)e^x| < 0,962, \quad \forall x \in [1,6, 1,8].$$

### 1.3.3 Estabilidade e convergência

A fim de compreendermos melhor os conceitos de estabilidade e convergência, considere uma função  $\Phi(x)$  com um ponto fixo  $x^* = g(x^*)$  e analisemos o seguinte processo iterativo:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= g(x^{(n)}) \\ x^{(0)} &= x \end{aligned}$$



Vamos supor que a função  $g(x)$  pode ser aproximada por seu polinômio de Taylor em torno do ponto fixo:

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x^*) + (x - x^*)g'(x^*) + O\left((x - x^*)^2\right), n \geq 0 \\ &= x^* + (x - x^*)g'(x^*) + O\left((x - x^*)^2\right) \\ &\approx x^* + (x - x^*)g'(x^*) \end{aligned}$$

Substituindo na relação de recorrência, temos

$$x^{(n+1)} = g\left(x^{(n)}\right) \approx x^* + (x^{(n)} - x^*)g'(x^*)$$

Ou seja:

$$(x^{(n+1)} - x^*) \approx (x^{(n)} - x^*)g'(x^*)$$

Tomando módulos, temos:

$$\underbrace{|x^{(n+1)} - x^*|}_{\epsilon_{n+1}} \approx \underbrace{|x^{(n)} - x^*|}_{\epsilon_n} |g'(x^*)|,$$

onde  $\epsilon_n = |x^{(n)} - x^*|$ .

**Observação 1.3.2.** A análise acima, concluímos:

- Se  $|g'(x^*)| < 1$ , então, a distância de  $x^{(n)}$  até o ponto fixo  $x^*$  está diminuindo a cada passo.
- Se  $|g'(x^*)| > 1$ , então, a distância de  $x^{(n)}$  até o ponto fixo  $x^*$  está aumentando a cada passo.
- Se  $|g'(x^*)| = 1$ , então, nossa aproximação de primeiro ordem não é suficiente para compreender o comportamento da sequência.

### 1.3.4 Erro absoluto e tolerância

Na prática, quando se aplica uma iteração como esta, não se conhece de antemão o valor do ponto fixo  $x^*$ . Assim, o erro  $\epsilon_n = |x^{(n)} - x^*|$  precisa ser estimado com base nos valores calculados  $x^{(n)}$ . Uma abordagem frequente é analisar a evolução da diferença entre dois elementos da sequência:

$$\Delta_n = |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$$

A pergunta natural é: Será que o erro  $\epsilon_n = |x^{(n)} - x^*|$  é pequeno quando  $\Delta_n = |x^{(n+1)} - x^{(n)}|$  for pequeno?

Para responder a esta pergunta, observamos que

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$$

portanto:

$$\begin{aligned} x^* - x^{(N)} &= (x^{(N+1)} - x^{(N)}) + (x^{(N+2)} - x^{(N+1)}) + (x^{(N+3)} - x^{(N+2)}) + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^{(N+k+1)} - x^{(N+k)}) \end{aligned}$$

Usamos também as expressões:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &\approx x^* + (x^{(n)} - x^*)g'(x^*) \\ x^{(n)} &\approx x^* + (x^{(n-1)} - x^*)g'(x^*) \end{aligned}$$

Subtraindo uma da outra, temos:

$$x^{(n+1)} - x^{(n)} \approx (x^{(n)} - x^{(n-1)})g'(x^*)$$

Portanto:

$$x^{(N+k+1)} - x^{(N+k)} \approx (x^{(N+1)} - x^{(N)}) (g'(x^*))^k$$

E temos:

$$\begin{aligned} x^* - x^{(N)} &= \sum_{k=0}^{\infty} (x^{(N+k+1)} - x^{(N+k)}) \\ &\approx \sum_{k=0}^{\infty} (x^{(N+1)} - x^{(N)}) (g'(x^*))^k \\ &= (x^{(N+1)} - x^{(N)}) \frac{1}{1 - g'(x^*)}, \quad |g'(x^*)| < 1 \end{aligned}$$

Tomando módulo, temos:

$$\begin{aligned} |x^* - x^{(N)}| &\approx |x^{(N+1)} - x^{(N)}| \frac{1}{1 - g'(x^*)} \\ \epsilon_N &\approx \frac{\Delta_N}{1 - g'(x^*)} \end{aligned}$$

**Observação 1.3.3.** Tendo em mente a relação  $x^{(n+1)} - x^{(n)} \approx (x^{(n)} - x^{(n-1)})g'(x^*)$ , concluímos:

- Quando  $g'(x^*) < 0$ , o esquema é alternante, isto é, o sinal do erro se altera a cada passo. O erro  $\epsilon_N$  pode ser estimado diretamente da diferença  $\Delta_N$ , pois o denominador  $1 - g'(x^*) > 1$ .

- Quando  $0 < g'(x^*) < 1$ , o esquema é monótono e  $\frac{1}{1-g'(x^*)} > 1$ , pelo que o erro  $\epsilon_N$  é maior que a diferença  $\Delta_N$ . A relação será tão mais importante quando mais próximo da unidade for  $g'(x^*)$ , ou seja, quando mais lenta for a convergência. Para estimar o erro em função da diferença  $\Delta_N$ , observamos que  $g'(x^*) \approx \frac{x^{(n+1)} - x^{(n)}}{x^{(n)} - x^{(n-1)}}$  e

$$|g'(x^*)| \approx \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$$

e portanto

$$\epsilon_N \approx \frac{\Delta_N}{1 - \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}.$$

## Exercícios

**E 1.3.1.** Resolver a equação  $e^x = x + 2$  é equivalente a calcular os pontos fixos da função  $g(x) = e^x + 2$  (veja o Exemplo 1.3.1). Use a iteração do ponto fixo  $x^{(n+1)} = g(x^n)$  com  $x^{(1)} = -1,8$  para obter uma aproximação de uma das soluções da equação dada com 8 dígitos significativos.

**E 1.3.2.** Mostre que a equação:

$$\cos(x) = x$$

possui uma única solução no intervalo  $[0, 1]$ . Use a iteração do ponto fixo e encontre uma aproximação para esta solução com 4 dígitos significativos.

**E 1.3.3.** Mostre que a equação  $xe^x = 10$  é equivalente às seguintes equações:

$$x = \ln\left(\frac{10}{x}\right) \quad \text{e} \quad x = 10e^{-x}.$$

Destas, considere as seguintes iterações de ponto fixo:

a)  $x^{(n+1)} = \ln\left(\frac{10}{x^{(n)}}\right)$

b)  $x^{(n+1)} = 10e^{-x^{(n)}}$

Tomando  $x^{(1)} = 1$ , verifique se estas sequências são convergentes.

**E 1.3.4.** Verifique (analiticamente) que a única solução real da equação:

$$xe^x = 10$$

é ponto fixo das seguintes funções:

a)  $g(x) = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$

b)  $g(x) = x - \frac{xe^x - 10}{15}$

c)  $g(x) = x - \frac{xe^x - 10}{10 + e^x}$

Implemente o processo iterativo  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$  para  $n \geq 0$  e compare o comportamento. Discuta os resultados com base na teoria estudada.

**E 1.3.5.** Verifique (analiticamente) que a única solução real da equação:

$$\cos(x) = x$$

é ponto fixo das seguintes funções:

a)  $g(x) = \cos(x)$

b)  $g(x) = 0,4x + 0,6 \cos(x)$

c)  $g(x) = x + \frac{\cos(x) - x}{1 + \sin(x)}$

Implemente o processo iterativo  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$  para  $n \geq 0$  e compare o comportamento. Discuta os resultados com base na teoria estudada.

**E 1.3.6.** Encontre a solução de cada equação com erro absoluto inferior a  $10^{-6}$ .

a)  $e^x = x + 2$  no intervalo  $(-2, 0)$ .

b)  $x^3 + 5x^2 - 12 = 0$  no intervalo  $(1, 2)$ .

c)  $\sqrt{x} = \cos(x)$  no intervalo  $(0, 1)$ .

**E 1.3.7.** Encontre numericamente as três primeiras raízes positivas da equação dada por:

$$\cos(x) = \frac{x}{10 + x^2}$$

com erro absoluto inferior a  $10^{-6}$ .

**E 1.3.8.** Calcule uma equação da reta tangente a curva  $y = e^{-(x-1)^2}$  que passa pelo ponto  $(3, 1/2)$ .

**E 1.3.9.** Resolva numericamente a inequação:

$$e^{-x^2} < 2x$$

**E 1.3.10.** Considere os seguintes processos iterativos:

$$\begin{aligned} a \left\{ \begin{array}{l} x^{(n+1)} = \cos(x^{(n)}) \\ x^{(1)} = .5 \end{array} \right. \\ \text{e} \\ b \left\{ \begin{array}{l} x^{(n+1)} = .4x^{(n)} + .6 \cos(x^{(n)}) \\ x^{(1)} = .5 \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Use o teorema do ponto fixo para verificar que cada um desses processos converge para a solução da equação  $x^*$  de  $\cos(x) = x$ . Observe o comportamento numérico dessas sequências. Qual estabiliza mais rápido com cinco casas decimais? Discuta.

Dica: Verifique que  $\cos([0.5, 1]) \subseteq [0.5, 1]$  e depois a mesma identidade para a função  $f(x) = .4x + .6 \cos(x)$ .

**E 1.3.11.** Use o teorema do ponto fixo aplicado a um intervalo adequado para mostrar que a função  $g(x) = \ln(100 - x)$  possui um ponto fixo estável.

**E 1.3.12.** Na hidráulica, o fator de atrito de Darcy é dado pela implicitamente pela equação de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{14.8 R_h} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{f}} \right)$$

onde  $f$  é o fator de atrito,  $\varepsilon$  é a rugosidade do tubo em metros,  $R_h$  é o raio hidráulico em metros e  $\text{Re}$  é o número de Reynolds. Considere  $\varepsilon = 2\text{mm}$ ,  $R_h = 5\text{cm}$  e  $\text{Re} = 10000$  e obtenha o valor de  $f$  pela iteração:

$$x^{(n+1)} = -2 \log_{10} \left( \frac{\varepsilon}{14.8 R_h} + \frac{2.51 x^{(n)}}{\text{Re}} \right)$$

**E 1.3.13.** Encontre uma solução aproximada para equação algébrica

$$180 - 100x = 0.052 \sinh^{-1}(10^{13}x)$$

com erro absoluto inferior a  $10^{-3}$  usando um método iterativo. Estime o erro associado ao valor de  $v = 180 - 100x = 0.052 \sinh^{-1}(10^{13}x)$ , usando cada uma dessas expressões. Discuta sucintamente o resultado obtido. Dica: Este caso é semelhante ao problema 1.2.7.

**E 1.3.14.** Considere que  $x_n$  satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$x_{n+1} = x_n - \beta(x_n - x^*)$$

onde  $\beta$  e  $x^*$  são constantes. Prove que

$$x_n - x^* = (1 - \beta)^{n-1}(x_1 - x^*).$$

Conclua que  $x_n \rightarrow x^*$  quando  $|1 - \beta| < 1$ .

**E 1.3.15.** Considere o seguinte esquema iterativo:

$$\begin{cases} x^{(n+1)} = x_n + q^n \\ x^{(0)} = 0 \end{cases}$$

onde  $q = 1 - 10^{-6}$ .

a) Calcule o limite

$$x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}$$

analiticamente.

b) Considere que o problema de obter o limite da sequência numericamente usando como critério de parada que  $|x^{(n+1)} - x^{(n)}| < 10^{-5}$ . Qual o valor é produzido pelo esquema numérico? Qual o desvio entre o valor obtido pelo esquema numérico e o valor do limite obtido no item a? Discuta. (Dica: Você não deve implementar o esquema iterativo, obtendo o valor de  $x^{(n)}$  analiticamente)

c) Qual deve ser a tolerância especificada para obter o resultado com erro relativo inferior a  $10^{-2}$ ?

**E 1.3.16.** Considere o seguinte esquema iterativo:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [x^{(n)}]^3, \quad x^{(n)} \geq 0$$

com  $x^{(0)} = 10^{-2}$ . Prove que  $\{x^{(n)}\}$  é sequência de número reais positivos convergindo para zero. Verifique que são necessários mais de mil passos para que  $x^{(n)}$  se torne menor que  $0.9x^{(0)}$ .

**E 1.3.17.**

a) Use o teorema do ponto fixo para mostrar que a função  $g(x) = 1 - \sin(x)$  possui um único ponto fixo estável o intervalo  $[\frac{1}{10}, 1]$ . Construa um método iterativo  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$  para encontrar esse ponto fixo. Use o Scilab para encontrar o valor numérico do ponto fixo.

- b) Verifique que função  $\psi(x) = \frac{1}{2}[x + 1 - \sin(x)]$  possui um ponto fixo  $x^*$  que também é o ponto fixo da função  $g$  do item a. Use o Scilab para encontrar o valor numérico do ponto fixo através da iteração  $x^{(n+1)} = \psi(x^{(n)})$ . Qual método é mais rápido?

**E 1.3.18.** (*Esquemas oscilantes*)

- a) Considere a função  $g(x)$  e função composta  $\psi(x) = g \circ g = g(g(x))$ . Verifique todo ponto fixo de  $g$  também é ponto fixo de  $\psi$ .
- b) Considere a função

$$g(x) = 10 \exp(-x)$$

e função composta  $\psi(x) = g \circ g = g(g(x))$ . Mostre que  $\psi$  possui dois pontos fixos que não são pontos fixos de  $g$ .

- c) No problema anterior, o que acontece quando o processo iterativo  $x^{(n+1)} = g(x^{(n)})$  é inicializado com um ponto fixo de  $\psi$  que não é ponto fixo de  $g$ ?

**E 1.3.19.** Mostre que se  $f(x)$  possui uma raiz  $x^*$  então  $x^*$  é um ponto fixo de  $\phi(x) = x + \gamma(x)f(x)$ . Encontre uma condição em  $\gamma(x)$  para que o ponto fixo  $x^*$  de  $\phi$  seja estável. Encontre uma condição em  $\gamma(x)$  para que  $\phi'(x^*) = 0$ .

**E 1.3.20.** Considere que  $x^{(n)}$  satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \gamma f(x^{(n)})$$

onde  $\gamma$  é uma constante. Suponha que  $f(x)$  possui um zero em  $x^*$ . Aproxime a função  $f(x)$  em torno de  $x^*$  por

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + O((x - x^*)^2).$$

Em vista do problema anterior, qual valor de  $\gamma$  você escolheria para que a sequência  $x^{(n)}$  convirja rapidamente para  $x^*$ .

**E 1.3.21.** Considere o problema da questão 1.2.7 e dois seguintes esquemas iterativos.

$$A \begin{cases} I^{(n+1)} = \frac{1}{R} \left[ V - v_t \ln \left( 1 + \frac{I^{(n)}}{I_R} \right) \right], n > 0 \\ I^{(0)} = 0 \end{cases}$$

e

$$B \begin{cases} I^{(n+1)} = I_R \left[ \exp \left( \frac{V - RI^{(n)}}{v_t} \right) - 1 \right], n > 0 \\ I^{(0)} = 0 \end{cases}$$

Verifique numericamente que apenas o processo A é convergente para a, b e c; enquanto apenas o processo B é convergente para os outros itens.

## 1.4 Método de Newton-Raphson

Nesta seção, apresentamos o **método de Newton-Raphson**<sup>45</sup> para calcular o zero de funções reais de uma variável real.

Assumimos que  $x^*$  é um zero de uma dada função  $f(x)$  continuamente diferenciável, i.e.  $f(x^*) = 0$ . Afim de usar a iteração do ponto fixo, observamos que, equivalentemente,  $x^*$  é um ponto fixo da função:

$$g(x) = x + \alpha(x)f(x), \quad \alpha(x) \neq 0,$$

onde  $\alpha(x)$  é uma função arbitrária que queremos escolher de forma que a iteração do ponto fixo tenha ótima taxa de convergência.

Do **Teorema do ponto fixo** temos que a taxa de convergência é dada em função do valor absoluto da derivada de  $g(x)$ . Calculando a derivada temos:

$$g'(x) = 1 + \alpha(x)f'(x) + \alpha'(x)f(x).$$

No ponto  $x = x^*$ , temos:

$$g'(x^*) = 1 + \alpha(x^*)f'(x^*) + \alpha'(x^*)f(x^*).$$

Como  $f(x^*) = 0$ , temos:

$$g'(x^*) = 1 + \alpha(x^*)f'(x^*).$$

Sabemos que o processo iterativo converge tão mais rápido quanto menor for  $|g'(x)|$  nas vizinhanças de  $x^*$ . Isto nos leva a escolher:

$$g'(x^*) = 0,$$

e, então, temos:

$$\alpha(x^*) = -\frac{1}{f'(x^*)},$$

se  $f'(x^*) \neq 0$ .

A discussão acima nos motiva a introduzir o método de Newton, cujas iterações são dada por:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}, \quad n \geq 1,$$

sendo  $x^{(1)}$  uma aproximação inicial dada.

<sup>4</sup>Joseph Raphson, 1648 - 1715, matemático inglês.

<sup>5</sup>Também chamado apenas de método de Newton.



### 1.4.1 Interpretação geométrica

Seja dada uma função  $f(x)$  conforme na Figura 1.5. Para tanto, escolhamos uma aproximação inicial  $x^{(1)}$  e computamos:

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}.$$

Geometricamente, o ponto  $x^{(2)}$  é a interseção da reta tangente ao gráfico da função  $f(x)$  no ponto  $x = x^{(1)}$  com o eixo das abscissas. Com efeito, a equação desta reta é:

$$y = f'(x^{(1)})(x - x^{(1)}) + f(x^{(1)}).$$

Assim, a interseção desta reta com o eixo das abscissas ocorre quando ( $y = 0$ ):

$$f'(x^{(1)})(x - x^{(1)}) + f(x^{(1)}) = 0 \Rightarrow x = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})}.$$

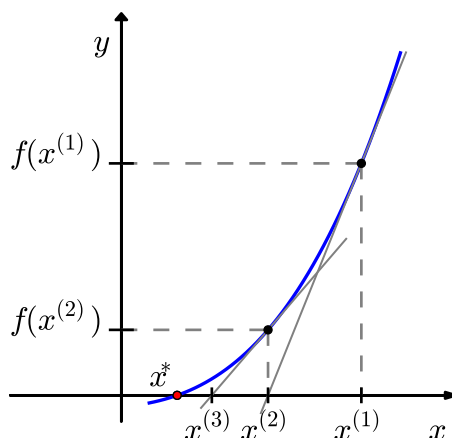


Figura 1.5: Interpretação do método de Newton.

Ou seja, dado  $x^{(n)}$  a próxima aproximação  $x^{(n+1)}$  é o ponto de interseção entre o eixo das abscissas e a reta tangente ao gráfico da função no ponto  $x = x^{(n)}$ . Observe a Figura 1.5.

### 1.4.2 Análise de convergência

Seja  $f(x)$  um função com derivadas primeira e segunda contínuas tal que  $f(x^*) = 0$  e  $f'(x^*) \neq 0$ . Seja também a função  $g(x)$  definida como:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Expandimos em série de Taylor em torno de  $x = x^*$ , obtemos:

$$g(x) = g(x^*) + g'(x^*)(x - x^*) + \frac{g''(x^*)}{2}(x - x^*)^2 + O((x - x^*)^3).$$

Observamos que:

$$\begin{aligned} g(x^*) &= x^* \\ g'(x^*) &= 1 - \frac{f'(x^*)f'(x^*) - f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0 \end{aligned}$$

Portanto:

$$g(x) = x^* + \frac{g''(x^*)}{2}(x - x^*)^2 + O((x - x^*)^3)$$

Com isso, temos:

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) = x^* + \frac{g''(x^*)}{2}(x^{(n)} - x^*)^2 + O((x - x^*)^3),$$

ou seja:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq C |x^{(n)} - x^*|^2,$$

com constante  $C = |g''(x^*)/2|$ . Isto mostra que o método de Newton tem **taxa de convergência quadrática**. Mais precisamente, temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.4.1** (Método de Newton). *Sejam  $f \in C^2([a, b])$  com  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$  e:*

$$m := \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| > 0 \quad e \quad M := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

*Escolhendo  $\rho > 0$  tal que:*

$$q := \frac{M}{2m}\rho < 1,$$

*definimos a **bacia de atração** do método de Newton pelo conjunto:*

$$K_\rho(x^*) := \{x \in \mathbb{R}; |x - x^*| \leq \rho\} \subset [a, b].$$

*Então, para qualquer  $x^{(1)} \in K_\rho(x^*)$  a iteração do método de Newton:*

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})},$$

*fornece uma sequência  $x^{(n)}$  que converge para  $x^*$ , i.e.  $x^{(n)} \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

*Além disso, temos a seguinte estimativa de erro **a priori**:*

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{(2^{n-1})}, \quad n \geq 2,$$

*e a seguinte estimativa de erro **a posteriori**:*

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|^2, \quad n \geq 2.$$

*Demonstração.* Para  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , temos:

$$x^{n+1} - x^* = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})} - x^* = -\frac{1}{f'(x^{(n)})} [f(x^{(n)}) + (x^* - x^{(n)})f'(x^{(n)})]. \quad (1.2)$$

Agora, para estimar o lado direito desta equação, usamos o polinômio de Taylor de grau 1 da função  $f(x)$  em torno de  $x = x^{(n)}$ , i.e.:

$$f(x^*) = f(x^{(n)}) + (x^* - x^{(n)})f'(x^{(n)}) + \int_{x^{(n)}}^{x^*} f''(t)(x^* - t) dt.$$

Pela mudança de variável  $t = x^{(n)} + s(x^{(n)} - x^*)$ , observamos que o resto deste polinômio de Taylor na forma integral é igual a:

$$R(x^*, x^{(n)}) := (x^* - x^{(n)})^2 \int_0^1 f''(x^{(n)} + s(x^* - x^{(n)})) (1 - s) ds.$$

Assim, da cota da segunda derivada de  $f(x)$ , temos:

$$|R(x^*, x^{(n)})| \leq M|x^* - x^{(n)}|^2 \int_0^1 (1 - s) ds = \frac{M}{2}|x^* - x^{(n)}|^2. \quad (1.3)$$

Se  $x^{(n)} \in K_\rho(x^*)$ , então de (1.2) e (1.3) temos:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq \frac{M}{2m}|x^{(n)} - x^*|^2 \leq \frac{M}{2m}\rho^2 < \rho. \quad (1.4)$$

Isto mostra que se  $x^{(n)} \in K_\rho(x^*)$ , então  $x^{(n+1)} \in K_\rho(x^*)$ , i.e.  $x^{(n)} \in K_\rho(x^*)$  para todo  $n \in \mathbb{R}$ .

Agora, obtemos a estimativa **a priori** de (1.4.2), pois:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} \left( \frac{M}{2m} |x^{(n-1)} - x^*| \right)^2 \leq \dots \leq \frac{2m}{M} \left( \frac{M}{2m} |x^{(1)} - x^*| \right)^{2^{n-1}}.$$

Logo:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{2^{n-1}},$$

donde também vemos que  $x^{(n)} \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ , pois  $q < 1$ .

Por fim, para provarmos a estimativa **a posteriori** tomamos a seguinte expansão em polinômio de Taylor:

$$f(x^{(n)}) = f(x^{(n-1)}) + (x^{(n)} - x^{(n-1)})f'(x^{(n-1)}) + R(x^{(n)}, x^{(n-1)}).$$

Aqui, temos:

$$f(x^{(n-1)}) + (x^{(n)} - x^{(n-1)})f'(x^{(n-1)}) = 0$$

e, então, conforme acima:

$$|f(x^{(n)})| = |R(x^{(n)}, x^{(n-1)})| \leq \frac{M}{2} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|^2.$$

Com isso e do Teorema do valor médio, concluímos:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{1}{m} |f(x^{(n)}) - f(x^*)| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}|^2.$$

□

**Exemplo 1.4.1.** Estime o raio  $\rho$  da bacia de atração  $K_\rho(x^*)$  para a função  $f(x) = \cos(x) - x$  restrita ao intervalo  $[0, \pi/2]$ .

**Solução.** O raio da bacia de atração é tal que:

$$\rho < \frac{2m}{M}$$

onde  $m := \min |f'(x)|$  e  $M := \max |f''(x)|$  com o mínimo e o máximo tomados em um intervalo  $[a, b]$  que contenha o zero da função  $f(x)$ . Aqui, por exemplo, podemos tomar  $[a, b] = [0, \pi/2]$ . Como, neste caso,  $f'(x) = -\sin(x) - 1$ , temos que  $m = 1$ . Também, como  $f''(x) = -\cos x$ , temos  $M = 1$ . Assim, concluímos que  $\rho < 2$  (lembrando que  $K_\rho(x^*) \subset [0, \pi/2]$ ). Ou seja, neste caso as iterações de Newton convergem para o zero de  $f(x)$  para qualquer escolha da aproximação inicial  $x^{(1)} \in [0, \pi/2]$ . ◇

## Exercícios

**E 1.4.1.** Considere o problema de calcular as soluções positivas da equação:

$$\operatorname{tg}(x) = 2x^2.$$

- Use o método gráfico para isolar as duas primeiras raízes positivas em pequenos intervalos. Use a teoria estudada em aula para argumentar quanto à existência e unicidade das raízes dentro intervalos escolhidos.
- Calcule o número de iterações necessárias para que o método da bisseção aproxime cada uma das raízes com erro absoluto inferior a  $10^{-8}$ . Calcule as raízes por este método usando este número de passos.
- Calcule cada uma das raízes pelo método de Newton com oito dígitos significativos e discuta a convergência comparando com o item b).

**Obs:** Alguns alunos encontraram como solução  $x_1 \approx 1,5707963$  e  $x_2 \approx 4,7123890$ . O que eles fizeram de errado?

**E 1.4.2.** Considere a equação

$$e^{-x^2} = x$$

trace o gráfico com auxílio do **Scilab** e verifique que ela possui uma raiz positiva. Encontre uma aproximação para esta raiz pelo gráfico e use este valor para inicializar o método de Newton e obtenha uma aproximação para a raiz com 8 dígitos significativos. (Use o comando `format('v',16)` para alterar a visualização no **Scilab**.)

**E 1.4.3.** Isole e encontre as cinco primeiras raízes positivas da equação com 6 dígitos corretos através de traçado de gráfico e do método de Newton.

$$\cos(10x) = e^{-x}.$$

Dica: a primeira raiz positiva está no intervalo  $(0,0.02)$ . Fique atento.

**E 1.4.4.** Encontre as raízes do polinômio  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$  através do método de Newton. O que você observa em relação ao erro obtido? Compare com a situação do problema 1.2.6.

**E 1.4.5.** Encontre as raízes reais do polinômio  $f(x) = \frac{x^5}{100} + x^4 + 3x + 1$  isolando-as pelo método do gráfico e depois usando o método de Newton. Expresse a solução com 7 dígitos significativos.

**E 1.4.6.** Considere o método de Newton aplicado para encontrar a raiz de  $f(x) = x^3 - 2x + 2$ . O que acontece quando  $x^{(0)} = 0$ ? Escolha um valor adequado para inicializar o método e obter a única raiz real desta equação.

**E 1.4.7.** Justifique a construção do processo iterativo do método de Newton através do conceito de estabilidade de ponto fixo e convergência do método da iteração. Dica: Considere os problemas 1.3.19 e 1.3.20.

**E 1.4.8.** Entenda a interpretação geométrica ao método de Newton. Encontre um valor para iniciar o método de Newton aplicado ao problema  $f(x) = xe^{-x} = 0$  tal que o esquema iterativo divirja.

**E 1.4.9.** Aplique o método de Newton à função  $f(x) = \frac{1}{x} - u$  e construa um esquema computacional para calcular a inversa de  $u$  com base em operações de multiplicação e soma/subtração.

**E 1.4.10.** Aplique o método de Newton à função  $f(x) = x^n - A$  e construa um esquema computacional para calcular  $\sqrt[n]{A}$  para  $A > 0$  com base em operações de multiplicação e soma/subtração.

**E 1.4.11.** Considere a função dada por

$$\psi(x) = \ln(15 - \ln(x))$$

definida para  $x > 0$

- a) (1.5) Use o teorema do ponto fixo para provar que se  $x_0$  pertence ao intervalo  $[1,3]$ , então a sequência dada iterativamente por

$$x^{(n+1)} = \psi(x^{(n)}), n \geq 0$$

converge para o único ponto fixo,  $x^*$ , de  $\psi$ . Construa a iteração  $x^{(n+1)} = \psi(x^{(n)})$  e obtenha numericamente o valor do ponto fixo  $x^*$ . Expresse a resposta com 5 algarismos significativos corretos.

- b) (1.0) Construa a iteração do método de Newton para encontrar  $x^*$ , explicitando a relação de recorrência e iniciando com  $x_0 = 2$ . Use o Scilab para obter a raiz e expresse a resposta com oito dígitos significativos corretos.

## 1.5 Método das secantes

O **método das secantes** é uma variação do método de Newton, evitando a necessidade de conhecer-se a derivada analítica de  $f(x)$ . Dada uma função  $f(x)$ , a ideia é aproximar sua derivada pela razão fundamental:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \approx x_0.$$

Mais precisamente, o método de Newton é uma iteração de ponto fixo da forma:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \alpha(x^{(n)})f(x^{(n)}), \quad n \geq 1,$$

onde  $x^{(1)}$  é uma aproximação inicial dada e  $\alpha(x^{(n)}) = 1/f'(x^{(n)})$ . Usando a aproximação da derivada acima, com  $x = x^{(n)}$  e  $x_0 = x^{(n-1)}$ , temos:

$$\alpha(x^{(n)}) = \frac{1}{f'(x^{(n)})} \approx \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}.$$

Isto nos motiva a introduzir a **iteração do método das secantes** dada por:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - f(x^{(n)}) \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}, \quad n \geq 2.$$

Observe que para inicializarmos a iteração acima precisamos de duas aproximações iniciais, a saber,  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$ . Maneiras apropriadas de escolher estas aproximações podem ser inferidas da interpretação geométrica do método.

**Exemplo 1.5.1.** Encontre as raízes de  $f(x) = \cos(x) - x$ .

**Solução.** Da inspeção do gráfico das funções  $y = \cos(x)$  e  $y = x$ , sabemos que esta equação possui uma raiz em torno de  $x = 0,8$ . Iniciamos o método com  $x_0 = 0,7$  e  $x_1 = 0,8$ .

$x^{(n-1)}$	$x^{(n)}$	$m$	$x^{(n+1)}$
		$\frac{f(0,8)-f(0,7)}{0,8-0,7} =$	$0,8 - \frac{f(0,8)}{-1,6813548} =$
0,7	0,8	-1,6813548	0,7385654
0,8	0,7385654	-1,6955107	0,7390784
0,7385654	0,7390784	-1,6734174	0,7390851
0,7390784	0,7390851	-1,6736095	0,7390851

◇

### 1.5.1 Interpretação geométrica

Enquanto, o método de Newton está relacionado às retas tangentes ao gráfico da função objetivo  $f(x)$ , o método das secantes, como o próprio nome indica, está relacionado às retas secantes.

Sejam  $f(x)$  e as aproximações  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  do zero  $x^*$  desta função (veja Figura 1.6). A iteração do método das secantes fornece:

$$x^{(3)} = x^{(2)} - f(x^{(2)}) \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}.$$

De fato,  $x^{(3)}$  é o ponto de interseção da reta secante ao gráfico de  $f(x)$  pelos pontos  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  com o eixo das abscissas. Com efeito, a equação desta reta secante é:

$$y = \frac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}}(x - x^{(2)}) + f(x^{(2)}).$$

Esta reta intercepta o eixo das abscissas no ponto  $x$  tal que  $y = 0$ , i.e.:

$$\frac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{x^{(2)} - x^{(1)}}(x - x^{(2)}) + f(x^{(2)}) \Rightarrow x = x^{(2)} - f(x^{(2)}) \frac{x^{(2)} - x^{(1)}}{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}.$$

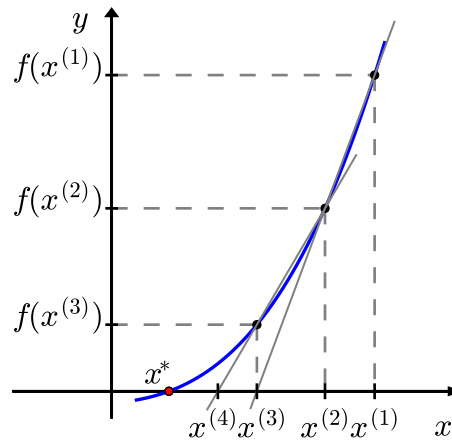


Figura 1.6: Método das secantes.

### 1.5.2 Análise de convergência

Uma análise assintótica semelhante aquela feita para o método de Newton nos indica que, para uma função  $f(x)$  duas vezes diferenciável, as iterações do método da secante satisfazem:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \approx C|x^{(n)} - x^*||x^{(n-1)} - x^*|,$$

para aproximações iniciais suficientemente próximas de  $x^*$ , onde  $f(x^*) = 0$ . Além disso, veremos que:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq C|x^{(n)} - x^*|^{1,6}$$

sob certas condições. Ou seja, o método das secantes tem **taxa de convergência superlinear**.

**Teorema 1.5.1** (Método das secantes). *Seja  $f \in C^2([a, b])$  uma função com  $x^* \in (a, b)$  tal que  $f(x^*) = 0$ . Sejam, também:*

$$m := \min_{x \in [a, b]} |f'(x)| > 0 \quad e \quad M := \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| < \infty.$$

Além disso, seja  $\rho > 0$  tal que:

$$q := \frac{M}{2m}\rho < 1, \quad K_\rho(x^*) := \{x \in \mathbb{R}; |x - x^*| \leq \rho\} \subset [a, b].$$

Então, para aproximações iniciais  $x^{(1)}, x^{(2)} \in K_\rho(x^*)$ , com  $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ , temos que as iterações do método das secantes  $x^{(n)} \in K_\rho(x^*)$ ,  $n \geq 1$ , e  $x^{(n)} \rightarrow x^*$ , quando



$n \rightarrow \infty$ . Além disso, vale a seguinte estimativa de convergência **a priori**:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{\gamma_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

onde  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é a sequência de Fibonacci<sup>67</sup>, bem como vale a estimativa **a posteriori**:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| |x^{(n-1)} - x^{(n-2)}|, \quad n \geq 3.$$

*Demonstração.* Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , e  $x^{(n)}, x^{(n-1)} \in K_\rho(x^*)$ , tal que  $x^{(n)} \neq x^{(n-1)}$ ,  $x^{(n)} \neq x^*$  e  $x^{(n-1)} \neq x^*$ . Seja, também:

$$g(x^{(n)}, x^{(n-1)}) := x^{(n)} - f(x^{(n)}) \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}.$$

Com isso, temos:

$$\begin{aligned} g(x^{(n)}, x^{(n-1)}) - x^* &= x^{(n)} - f(x^{(n)}) \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} - x^* \\ &= \frac{x^{(n)} - x^{(n-1)}}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \left\{ (x^{(n)} - x^*) \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} - f(x^{(n)}) + f(x^*) \right\}. \end{aligned}$$

Então, da cota assumida para primeira derivada de  $f(x)$  e do Teorema do valor médio, temos:

$$|g(x^{(n)}, x^{(n-1)}) - x^*| \leq \frac{|x^{(n)} - x^*|}{m} \left| \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} - \frac{f(x^{(n)}) - f(x^*)}{x^{(n)} - x^*} \right|. \quad (1.5)$$

Agora, iremos estimar este último termo a direita. Para tanto, começamos observando que da expansão em polinômio de Taylor de ordem 0 da função  $f(x)$  com resto na forma integral, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} &= - \int_0^1 \frac{d}{dr} f(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)})) \frac{dr}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} \\ &= \int_0^1 f'(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)})) dr \end{aligned}$$

De forma análogo, temos:

$$\frac{f(x^{(n)}) - f(x^*)}{x^{(n)} - x^*} = \int_0^1 f'(x^{(n)} + r(x^* - x^{(n)})) dr$$

<sup>6</sup>Leonardo Fibonacci, c. 1170 - c. 1250, matemático italiano.

<sup>7</sup>A sequência de Fibonacci  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é definida por  $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$  e  $\gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

Logo, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} - \frac{f(x^{(n)}) - f(x^*)}{x^{(n)} - x^*} = \\ & \int_0^1 \left[ f'(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)})) - f'(x^{(n)} + r(x^* - x^{(n)})) \right] dr. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Agora, novamente temos:

$$\begin{aligned} & f'(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)})) - f'(x^{(n)} + r(x^* - x^{(n)})) \\ &= \int_0^r \frac{d}{ds} f'(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)}) + s(x^* - x^{(n-1)})) ds \\ &= \int_0^r f''(x^{(n)} + r(x^{(n-1)} - x^{(n)}) + s(x^* - x^{(n-1)})) ds (x^* - x^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Então, retornando à Equação (1.6) e usando a assumida cota para a segunda derivada, obtemos:

$$\left| \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} - \frac{f(x^{(n)}) - f(x^*)}{x^{(n)} - x^*} \right| \leq \frac{M}{2} |x^{(n-1)} - x^*|.$$

Agora, retornando à Equação (1.5), obtemos:

$$|g(x^{(n)}, x^{(n-1)}) - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^*| |x^{(n-1)} - x^*| \leq \frac{M}{2m} \rho^2 < \rho.$$

Portanto, concluímos que as iterações do método das secantes  $x^{(n)}$  permanecem no conjunto  $K_\rho(x^*)$ , se começarem nele. Além disso, temos demonstrado que:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^*| |x^{(n-1)} - x^*|.$$

Com isso, temos:

$$\rho_n := \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^*| \Rightarrow \rho_{n+1} \leq \rho_n \rho_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Como  $\rho_1 \leq q$  e  $\rho_2 \leq q$ , temos  $\rho_n \leq q^{\gamma_{n-1}}$ ,  $n \geq 1$ . Isto mostra a estimativa de convergência **a priori**:

$$|x^n - x^*| \leq \frac{2m}{M} q^{\gamma_{n-1}}.$$

Além disso, como  $\gamma_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$  e  $q < 1$ , temos que as iterações do método das secantes  $x^{(n)} \rightarrow x^*$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Por fim, mostramos a estimativa de convergência **a posteriori**. Para tanto, da cota assumida para a primeira derivada e do Teorema do valor médio, temos, para  $n \geq 3$ :

$$\begin{aligned} |x^{(n)} - x^*| &\leq \frac{1}{m} |f(x^{(n)}) - f(x^*)| \\ &= \frac{1}{m} \left| f(x^{(n-1)}) + (x^{(n)} - x^{(n-1)}) \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} \right| \\ &= \frac{1}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| \left| \frac{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} + \frac{f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} \right|. \end{aligned}$$

Agora, da iteração do método das secantes:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - f(x^{(n-1)}) \frac{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})},$$

temos:

$$\frac{f(x^{(n-1)})}{x^{(n)} - x^{(n-1)}} = - \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}}.$$

Logo:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{1}{m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| \left| \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n)})}{x^{(n-1)} - x^{(n)}} - \frac{f(x^{(n-1)}) - f(x^{(n-2)})}{x^{(n-1)} - x^{(n-2)}} \right|$$

Observamos que o último termo pode ser estimado como feito acima para o termo análogo na Inequação (1.5). Com isso, obtemos a estimativa desejada:

$$|x^{(n)} - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^{(n-1)}| |x^{(n)} - x^{(n-2)}|.$$

□

**Proposição 1.5.1** (Sequência de Fibonacci). *A sequência de Fibonacci  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é assintótica a  $\gamma_n \sim \lambda_1^{n+1}/\sqrt{5}$  e:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \lambda_1,$$

onde  $\lambda_1 = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$  é a porção áurea.

*Demonstração.* A sequência de Fibonacci  $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  é definida por  $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$  e  $\gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma_{n-1}$ ,  $n \geq 1$ . Logo, satisfaz a seguinte equação de diferenças:

$$\gamma_{n+2} - \gamma_{n+1} - \gamma_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tomando  $\gamma_n = \lambda^n$ ,  $\lambda \neq 0$  temos:

$$\lambda^n (\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Portanto,  $\gamma_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ . Como  $\gamma_0 = \gamma_1 = 1$ , as constantes satisfazem:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow c_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Ou seja, obtemos a seguinte forma explícita para os números de Fibonacci:

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Daí, segue imediatamente o enunciado. □

**Observação 1.5.1.** Sob as hipóteses do Teorema 1.5.1 e da Proposição 1.5.1, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{(n+1)} - x^*|}{|x^{(n)} - x^*|^{\lambda_1}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M}{2m} |x^{(n)} - x^*|^{1-\lambda_1} |x^{(n-1)} - x^*| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2m}{M} \right)^{1-\lambda_1} q^{(2-\lambda_1)\lambda_1^n / \sqrt{5}} = 0. \end{aligned}$$

Isto mostra que o método das secantes (nestas hipóteses) tem taxa de convergência superlinear ( $\lambda_1 \approx 1,6$ ).

## 1.6 Critérios de parada

Quando usamos métodos iterativos precisamos determinar um critério de parada. A Tabela 1.4 indica critérios de parada usuais para os métodos que estudamos neste capítulo.

**Observação 1.6.1.** O erro na tabela sempre se refere ao erro absoluto esperado. Nos três últimos métodos, é comum que se exija como critério de parada que a condição seja satisfeita por alguns poucos passos consecutivos. Outros critérios podem ser usados. No métodos das secantes, deve-se ter o cuidado de evitar divisões por zero quando  $x_{n+1} - x_n$  muito pequeno em relação à resolução do sistema de numeração.

Tabela 1.4: Quadro comparativo.

Método	Convergência	Erro	Critério de parada
Bisseção	Linear ( $p = 1$ )	$\epsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\epsilon$	$\frac{b_n - a_n}{2} < \text{erro}$
Iteração linear	Linear ( $p = 1$ )	$\epsilon_{n+1} \approx  \phi'(x^*) \epsilon_n$	$\frac{ \Delta_n }{1 - \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}} < \text{erro}$ $\Delta_n < \Delta_{n-1}$
Newton	Quadrática ( $p = 2$ )	$\epsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2} \left  \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right  \epsilon_n^2$	$ \Delta_n  < \text{erro}$
Secante	$p = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ $\approx 1,618$	$\epsilon_{n+1} \approx \left  \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \right  \epsilon_n \epsilon_{n-1}$ $\approx M \epsilon_n^\phi$	$ \Delta_n  < \text{erro}$

## Exercícios

**E 1.6.1.** Refaça as questões 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4 e 1.4.5, usando o método das secantes.

**E 1.6.2.** Dê uma interpretação geométrica ao método das secantes. Qual a vantagem do método das secantes sobre o método de Newton?

**E 1.6.3.** Aplique o método das secantes para resolver a equação

$$e^{-x^2} = 2x$$

**E 1.6.4.** Refaça o problema 1.2.7 usando o método de Newton e das secantes.

**E 1.6.5.** Seja dada uma função  $f(x)$  duas vezes continuamente diferenciável. Faça uma análise assintótica para mostrar que as iterações do método das secantes satisfazem:

$$|x^{(n+1)} - x^*| \approx C |x^{(n)} - x^*| |x^{(n-1)} - x^*|,$$

para aproximações iniciais  $x^{(1)}$  e  $x^{(2)}$  suficientemente próximas de  $x^*$ , onde  $f(x^*) = 0$ .

## 1.7 Exercícios finais

**E 1.7.1.** A equação

$$\cos(\pi x) = e^{-2x}$$

tem infinitas raízes. Usando métodos numéricos encontre as primeiras raízes dessa equação. Verifique a  $j$ -ésima raiz ( $z_j$ ) pode ser aproximada por  $j - 1/2$  para  $j$  grande. Use o método de Newton para encontrar uma aproximação melhor para  $z_j$ .

**E 1.7.2.** A corrente elétrica,  $I$ , em Ampères em uma lâmpada em função da tensão elétrica,  $V$ , é dada por

$$I = \left( \frac{V}{150} \right)^{0.8}$$

Qual a potência da lâmpada quando ligada em série com uma resistência de valor  $R$  a uma fonte de 150V quando. (procure erro inferior a 1%)

- a)  $R = 0\Omega$
- b)  $R = 10\Omega$
- c)  $R = 50\Omega$
- d)  $R = 100\Omega$
- E)  $R = 500\Omega$

**E 1.7.3.** (Bioquímica) A concentração sanguínea de um medicamento é modelado pela seguinte expressão

$$c(t) = Ate^{-\lambda t}$$

onde  $t > 0$  é o tempo em minutos decorrido desde a administração da droga.  $A$  é a quantidade administrada em  $mg/ml$  e  $\lambda$  é a constante de tempo em  $\text{min}^{-1}$ . Responda:

- a) Sendo  $\lambda = 1/3$ , em que instantes de tempo a concentração é metade do valor máximo. Calcule com precisão de segundos.

- b) Sendo  $\lambda = 1/3$  e  $A = 100mg/ml$ , durante quanto tempo a concentração permanece maior que  $10mg/ml$ .

**E 1.7.4.** Considere o seguinte modelo para crescimento populacional em um país:

$$P(t) = A + Be^{\lambda t}.$$

onde  $t$  é dado em anos. Use  $t$  em anos e  $t = 0$  para 1960. Encontre os parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $\lambda$  com base nos anos de 1960, 1970 e 1991 conforme tabela:

Ano	população
1960	70992343
1970	94508583
1980	121150573
1991	146917459

Use esses parâmetros para calcular a população em 1980 e compare com o valor do censo.

**E 1.7.5.** Uma boia esférica flutua na água. Sabendo que a boia tem  $10\ell$  de volume e  $2Kg$  de massa. Calcule a altura da porção molhada da boia.

**E 1.7.6.** Uma boia cilíndrica tem secção transversal circular de raio  $10cm$  e comprimento  $2m$  e pesa  $10Kg$ . Sabendo que a boia flutua sobre água com o eixo do cilindro na posição horizontal, calcule a altura da parte molhada da boia.

**E 1.7.7.** Encontre com 6 casas decimais o ponto da curva  $y = \ln x$  mais próximo da origem.

**E 1.7.8.** Um computador é vendido pelo valor a vista de R\$2.000,00 ou em  $1+15$  prestações de R\$200,00. Calcule a taxa de juros associada à venda a prazo.

**E 1.7.9.** O valor de R\$110.000,00 é financiado conforme a seguinte programa de pagamentos:

Mês	pagamento
1	20.000,00
2	20.000,00
3	20.000,00
4	19.000,00
5	18.000,00
6	17.000,00
7	16.000,00

Calcule a taxa de juros envolvida. A data do empréstimo é o mês zero.

**E 1.7.10.** Depois de acionado um sistema de aquecedores, a temperatura em um forno evolui conforme a seguinte equação

$$T(t) = 500 - 800e^{-t} + 600e^{-t/3}.$$

onde  $T$  é a temperatura em Kelvin e  $t$  é tempo em horas.

- Obtenha analiticamente o valor de  $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)$ .
- Obtenha analiticamente o valor máximo de  $T(t)$  e o instante de tempo quando o máximo acontece
- Obtenha numericamente com precisão de minutos o tempo decorrido até que a temperatura passe pela primeira vez pelo valor de equilíbrio obtido no item a.
- Obtenha numericamente com precisão de minutos a duração do período durante o qual a temperatura permanece pelo menos 20% superior ao valor de equilíbrio.

**E 1.7.11.** Encontre os pontos onde a elipse que satisfaz  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$  intersepta a parábola  $y = x^2 - 2$ .

**E 1.7.12.** Encontre a área do maior retângulo que é possível inscrever entre a curva  $e^{-x^2}(1 + \cos(x))$  e o eixo  $y = 0$ .

**E 1.7.13.** Uma indústria consome energia elétrica de duas usinas fornecedoras. O custo de fornecimento em reais por hora como função da potência



consumida em  $kW$  é dada pelas seguintes funções

$$\begin{aligned} C_1(x) &= 500 + .27x + 4.1 \cdot 10^{-5}x^2 + 2.1 \cdot 10^{-7}x^3 + 4.2 \cdot 10^{-10}x^4 \\ C_2(x) &= 1000 + .22x + 6.3 \cdot 10^{-5}x^2 + 8.5 \cdot 10^{-7}x^3 \end{aligned}$$

Onde  $C_1(x)$  e  $C_2(x)$  são os custos de fornecimento das usinas 1 e 2, respectivamente. Calcule o custo mínimo da energia elétrica quando a potência total consumida é  $1500kW$ .

**E 1.7.14.** A pressão de saturação (em bar) de um dado hidrocarboneto pelo ser modelada pela equação de Antoine:

$$\ln(P^{sat}) = A - \frac{B}{T + C}$$

onde  $T$  é a temperatura e  $A$ ,  $B$  e  $C$  são constantes dadas conforme a seguir:

Hidrocarboneto	A	B	C
N-pentano	9.2131	2477.07	-39.94
N-heptano	9.2535	2911.32	-56.51

- a) Calcule a temperatura de bolha de uma mistura de N-pentano e N-heptano à pressão de 1.2bar quando as frações molares dos gases são  $z_1 = z_2 = 0.5$ . Para tal utilize a seguinte equação:

$$P = \sum_i z_i P_i^{sat}$$

- b) Calcule a temperatura de orvalho de uma mistura de N-pentano e N-heptano à pressão de 1.2bar quando as frações molares dos gases são  $z_1 = z_2 = 0.5$ . Para tal utilize a seguinte equação:

$$\frac{1}{P} = \sum_i \frac{z_i}{P_i^{sat}}$$

**E 1.7.15.** Encontre os três primeiros pontos de mínimo da função

$$f(x) = e^{-x/11} + x \cos(2x)$$

para  $x > 0$  com erro inferior a  $10^{-7}$ .

# Resposta dos Exercícios

Recomendamos ao leitor o uso criterioso das respostas aqui apresentadas. Devido a ainda muito constante atualização do livro, as respostas podem conter imprecisões e erros.

**E 1.1.1.1.** Observamos que a equação é equivalente a  $\cos(x) - x = 0$ . Tomando, então,  $f(x) = \cos(x) - x$ , temos que  $f(x)$  é contínua em  $[0, \pi/2]$ ,  $f(0) = 1$  e  $f(\pi/2) = -\pi/2 < 0$ . Logo, do teorema de Bolzano 1.1.1, concluímos que a equação dada tem pelo menos uma solução no intervalo  $(0, \pi/2)$ .

**E 1.1.1.2.** No Exercício 1.1.1, mostramos que a função  $f(x) = \cos(x) - x$  tem um zero no intervalo  $[0, \pi/2]$ . Agora, observamos que  $f'(x) = -\sin(x) - 1$ . Como  $0 < \sin x < 1$  para todo  $x \in (0, \pi/2)$ , temos que  $f'(x) < 0$  em  $(0, \pi/2)$ , i.e.  $f(x)$  é monotonicamente decrescente neste intervalo. Logo, da Proposição 1.1.1, temos que existe um único zero da função neste intervalo.

**E 1.1.1.3.**  $k \approx 0,161228$

**E 1.1.1.5.** Escolhendo o intervalo  $[a, b] = [-1,841 - 10^{-3}, -1,841 + 10^{-3}]$ , temos  $f(a) \approx 5 \times 10^{-4} > 0$  e  $f(b) \approx -1,2 \times 10^{-3} < 0$ , i.e.  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Então, o teorema de Bolzano nos garante que o zero exato  $x^*$  de  $f(x)$  está no intervalo  $(a, b)$ . Logo, da escolha feita,  $|-1,841 - x^*| < 10^{-3}$ .

**E 1.1.6.** Basta aplicar as ideias da solução do Exercício 1.1.5.

**E 1.2.2.** A primeira raiz se encontra no intervalo  $(0,4, 0,5)$ . A segunda raiz no intervalo  $(1,7, 1,8)$ . A terceira raiz se encontra no intervalo  $(2,5, 2,6)$ .

**E 1.2.3.** 1,390054; 1,8913954; 2,4895673; 3,1641544; 3,8965468

**E 1.2.4.**  $k\theta = \frac{LP}{2} \cos(\theta)$  com  $\theta \in (0, \pi/2)$ ; 1,030.

**E 1.2.5.** 19; 23; 26; 0,567143; 1,745528; 3,385630

**E 1.2.7.** a) 0,623; b) 0,559; c) 0,500; d) 0,300; e) -0,3; f) -30; g) -30

**E 1.2.8.** a) 0,0294; b)  $2,44e - 3$ ; c)  $2,50e - 4$ ; d)  $1,09 \cdot 10^{-7}$ ; e)  $-10^{-12}$ ; f)  $-10^{-12}$ ; g)  $-10^{-12}$

**E 1.3.1.** -1,8414057

**E 1.3.2.** 0,7391

**E 1.3.3.** Tomemos  $x^{(1)} = 1$  como aproximação inicial para a solução deste problema, iterando a primeira sequência a), obtemos:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1 \\ x^{(2)} &= \ln\left(\frac{10}{1}\right) = 2,3025851 \\ x^{(3)} &= \ln\left(\frac{10}{2,3025851}\right) = 1,4685526 \\ &\vdots \\ x^{(21)} &= 1,7455151 \\ x^{(31)} &= 1,745528 \\ x^{(32)} &= 1,745528 \end{aligned}$$

Iterando a segunda sequência b), obtemos:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= 1 \\ x^{(2)} &= 10e^{-1} = 3,6787944 \\ x^{(3)} &= 10e^{-3,6787944} = 0,2525340 \\ x^{(4)} &= 10e^{-0,2525340} = 7,7682979 \\ x^{(5)} &= 10e^{-7,7682979} = 0,0042293 \\ x^{(6)} &= 10e^{-0,0042293} = 9,9577961 \end{aligned}$$

Este experimento numérico sugere que a iteração a) converge para 1,745528 e a iteração b) não é convergente.

**E 1.3.9.**  $x > a$  com  $a \approx 0,4193648$ .

**E 1.3.12.** 0.0431266

**E 1.4.1.**

a) Primeiramente, deve-se observar que a função  $\operatorname{tg}(x)$  não está definida quando  $x$  é um múltiplo ímpar de  $\frac{\pi}{2}$ , pelo que devemos cuidado nas singularidades. Traçamos o gráfico da função  $f(x) = \operatorname{tg}(x) - 2x^2$  no Scilab usando os seguintes comandos:

```
-->deff('y=f(x)', 'y=tan(x)-2*x^2')
-->plot([0:.01:1.3], f)
```

Observamos facilmente uma raiz no intervalo (0,5, 0,6) e outra no intervalo (1,2, 1,3). Como a função  $f(x)$  é contínua fora dos pontos de singularidade da tangente, é fácil verificar que existe pelo menos uma solução nos intervalos dados pelo teorema de Bolzano 1.1.1:

$$\begin{aligned} f(0,5) &\approx 0,046302 > 0 \\ f(0,6) &\approx -0,035863 < 0 \\ f(1,2) &\approx -0,30784e-1 < 0 \\ f(1,3) &\approx 0,22210e-1 > 0 \end{aligned}$$

Para provar a unicidade da solução em cada intervalo, precisamos mostrar que a função é monótona, ou seja, a derivada não muda de sinal em cada intervalo:

$$\begin{aligned} f'(x) = \sec^2(x) - 4x &= \frac{1}{\cos^2(x)} - 4x \leq \frac{1}{\cos^2(0,6)} - 4 * 0,5 < 0, \quad x \in [0,5, 0,6] \\ f'(x) = \sec^2(x) - 4x &= \frac{1}{\cos^2(x)} - 4x \geq \frac{1}{\cos^2(1,2)} - 4 * 1,3 > 0, \quad x \in [1,2, 1,3] \end{aligned}$$

- b) Já isolamos as raízes em intervalos de comprimento  $10^{-1}$  e a precisão requerida exige que as isolemos em intervalos de comprimento  $2 \times 10^{-8}$ . Como cada passo da bisseção, confina a raiz em um intervalo com comprimento igual à metade do comprimento do intervalo anterior, temos a seguinte condição para o número de passos  $N_p$ :

$$\frac{10^{-1}}{2^{N_p}} \leq 2 \times 10^{-8}$$

isso é equivalente a

$$N_p \geq \log_2 \frac{10^{-1}}{2 \times 10^{-8}} = \log_2 \frac{10^7}{2} = 7 \log_2 10 - 1 = \frac{7}{\log_1 02} - 1 \approx 22.22$$

Como  $N_p$  é inteiro, o menor  $N_p$  que satisfaz a condição é 23.

As raízes obtidas são 0.55970415 e 1.2703426.

- c) Para recalcular as raízes pelo método de Newton, basta executar a interação

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f'(x^{(n)})}$$

Em relação à observação, o erro se deveu à falta de cuidado em compreender o problema antes de tentar resolvê-lo, em especial, à falta de observar que a função é descontínua em múltiplos ímpares de  $\frac{\pi}{2}$ . Nestes pontos, a função  $f(x)$  troca de sinal, mas não passa por zero.

**E 1.4.2.** 0.65291864

**E 1.4.3.** 0.0198679; 0.533890; 0.735412; 1.13237; 1.38851.

**E 1.4.5.** -99.99970, -0.3376513; -1.314006.

**E 1.4.8.**  $x_0 > 1$ .

**E 1.6.5.** Seja  $f(x) \in C^2$  um função tal que  $f(x^*) = 0$  e  $f'(x^*) \neq 0$ . Considere o processo iterativo do método das secantes:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} (x^{(n)} - x^{(n-1)})$$

Esta expressão pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} &= x^{(n)} - \frac{f(x^{(n)})(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \\ &= \frac{x^{(n)} \left( f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)}) \right) - f(x^{(n)})(x^{(n)} - x^{(n-1)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \\ &= \frac{x^{(n)} f(x^{(n-1)}) - x^{(n-1)} f(x^{(n)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \end{aligned}$$

Subtraindo  $x^*$  de ambos os lados temos:

$$\begin{aligned} x^{(n+1)} - x^* &= \frac{x^{(n)} f(x^{(n-1)}) - x^{(n-1)} f(x^{(n)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} - x^* \\ &= \frac{x^{(n)} f(x^{(n-1)}) - x^{(n-1)} f(x^{(n)}) - x^* \left( f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)}) \right)}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \\ &= \frac{(x^{(n)} - x^*) f(x^{(n-1)}) - (x^{(n-1)} - x^*) f(x^{(n)})}{f(x^{(n)}) - f(x^{(n-1)})} \end{aligned}$$

Definimos  $\epsilon_n = x_n - x^*$ , equivalente a  $x_n = x^* + \epsilon_n$

$$\epsilon_{n+1} = \frac{\epsilon_n f(x^* + \epsilon_{n-1}) - \epsilon_{n-1} f(x^* + \epsilon_n)}{f(x^* + \epsilon_n) - f(x^* + \epsilon_{n-1})}$$

Aproximamos a função  $f(x)$  no numerador por

$$\begin{aligned}
 f(x^* + \epsilon) &\approx f(x^*) + \epsilon f'(x^*) + \epsilon^2 \frac{f''(x^*)}{2} \\
 f(x^* + \epsilon) &\approx \epsilon f'(x^*) + \epsilon^2 \frac{f''(x^*)}{2} \\
 \epsilon_{n+1} &\approx \frac{\epsilon_n \left[ \epsilon_{n-1} f'(x^*) + \epsilon_{n-1}^2 \frac{f''(x^*)}{2} \right] - \epsilon_{n-1} \left[ \epsilon_n f'(x^*) + \epsilon_n^2 \frac{f''(x^*)}{2} \right]}{f(x^* + \epsilon_n) - f(x^* + \epsilon_{n-1})} \\
 &= \frac{\frac{f''(x^*)}{2} (\epsilon_n \epsilon_{n-1}^2 - \epsilon_{n-1} \epsilon_n^2)}{f(x^* + \epsilon_n) - f(x^* + \epsilon_{n-1})} \\
 &= \frac{1}{2} f''(x^*) \frac{\epsilon_n \epsilon_{n-1} (\epsilon_{n-1} - \epsilon_n)}{f(x^* + \epsilon_n) - f(x^* + \epsilon_{n-1})}
 \end{aligned}$$

Observamos, agora, que

$$\begin{aligned}
 f(x^* + \epsilon_n) - f(x^* + \epsilon_{n-1}) &\approx \left[ f(x^*) + f'(x^*) \epsilon_n \right] - \left[ f(x^*) + f'(x^*) \epsilon_{n-1} \right] \\
 &= f'(x^*) (\epsilon_n - \epsilon_{n-1})
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto:

$$\epsilon_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \epsilon_n \epsilon_{n-1} \tag{1.8}$$

ou, equivalentemente:

$$x^{(n+1)} - x^* \approx \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} (x^{(n)} - x^*) (x^{(n-1)} - x^*) \tag{1.9}$$

**E 1.7.1.**  $z_1 \approx 0.3252768$ ,  $z_2 \approx 1.5153738$ ,  $z_3 \approx 2.497846$ ,  $z_4 \approx 3.5002901$ ,  $z_j \approx j - 1/2 - (-1)^j \frac{e^{-2j+1}}{\pi}$ ,  $j > 4$

**E 1.7.2.** 150 W, 133 W, 87 W, 55 W, 6,5 W

**E 1.7.3.** a) 42 s e 8 min 2 s, b) 14 min 56 s.

**E 1.7.4.** 118940992

**E 1.7.5.** 7,7 cm

**E 1.7.6.** 4,32 cm

**E 1.7.7.** (0,652919, 0,426303)

**E 1.7.8.** 7,19% ao mês

**E 1.7.9.** 4,54% ao mês.

**E 1.7.10.** 500 K, 700 K em  $t = 3 \ln(2)$ , 26 min, 4 h 27 min.

**E 1.7.11.**  $(\pm 1,1101388, -0,7675919)$ ,  $(\pm 1,5602111, 0,342585)$

**E 1.7.12.** 1,5318075

**E 1.7.13.** Aproximadamente 2500 reais por hora.

**E 1.7.14.** a) 332,74 K b) 359,33 K

**E 1.7.15.** 1,2285751, 4,76770758, 7,88704085

# Referências Bibliográficas

- [1] Cecill and free software. <http://www.cecill.info>. Acessado em 30 de julho de 2015.
- [2] M. Baudin. Introduction to scilab. <http://forge.scilab.org/index.php/p/docintrotoscilab/>. Acessado em 30 de julho de 2015.
- [3] R.L. Burden and J.D. Faires. *Análise Numérica*. Cengage Learning, 8 edition, 2013.
- [4] J. P. Demailly. *Analyse Numérique et Équations Differentielles*. EDP Sciences, Grenoble, nouvelle Édition edition, 2006.
- [5] W Gautschi. Numerical analysis: An introduction birkhauser. *Barton, Mass, USA*, 1997.
- [6] Walter Gautschi and Gabriele Inglese. Lower bounds for the condition number of vandermonde matrices. *Numerische Mathematik*, 52(3):241–250, 1987/1988.
- [7] L.F. Guidi. Notas da disciplina cálculo numérico. [http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/calculo\\_numerico.pdf](http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/calculo_numerico.pdf). Acessado em julho de 2016.
- [8] E. Isaacson and H.B. Keller. *Analysis of numerical methods*. Dover, Ontário, 1994.
- [9] R. Rannacher. Einführung in die numerische mathematik (numerik 0). <http://numerik.uni-hd.de/~lehre/notes/num0/numerik0.pdf>. Acessado em 10.08.2014.

# Colaboradores

Aqui você encontra a lista de colaboradores do livro. Esta lista contém somente aqueles que explicitamente se manifestaram a favor de terem seus nomes registrados aqui. A lista completa de colaborações pode ser obtida no repositório GitHub do livro:

`https://github.com/livroscolaborativos/CalculoNumerico`

Além das colaborações via GitHub, o livro também recebe colaborações via discussões, sugestões e avisos deixados em nossa lista de emails:

`livro\_colaborativo@googlegroups.com`

Estas colaborações não estão listadas aqui, mas podem ser vistas no site do grupo de emails.

Caso encontre algum equívoco ou veja seu nome listado aqui por engano, por favor, entre em contato conosco por email:

`livroscolaborativos@gmail.com`

ou via o repositório GitHub.

Tabela 5: Lista de colaboradores

Nome	Afiliação	E-Mail	1ª Contribuição
Debora Lidia Gisch	-x-	-x-	#63

# Índice Remissivo

- contração, 14
- critério de parada, 5
- equações
  - de uma variável, 1
- erros
  - absoluto, 18
- função, 1
  - raiz de, 1
  - zero, 1
  - zero de, 1
- iteração do
  - ponto fixo, 11
- iteração do ponto fixo, 1
  - convergência, 17
  - estabilidade, 17
- método
  - da bisseção, 4
- método da bisseção, 1
- método das secantes, 1, 31
  - convergência, 33
- método de
  - Newton, 25
  - Newton-Raphson, 25
- método de Newton, 1
- método de Newton-Raphson, 25
  - convergência, 26
- ponto fixo, 11
- porção áurea, 36
- problema de
  - ponto fixo, 11
- sequência de
  - Fibonacci, 36
- teorema de
  - Bolzano, 1
- Teorema do
  - ponto fixo, 14
- teorema do
  - ponto fixo, 25
- teorema do valor intermediário, 1
- tolerância, 18