

Cálculo de Funções de Uma Variável

Um Livro Colaborativo

31 de janeiro de 2018

Organizadores

`#srcPath:/organizadores.tex#`

Esequia Sauter - UFRGS

Fabio Souto de Azevedo - UFRGS

Pedro Henrique de Almeida Konzen - UFRGS

Licença

`#srcPath:/licenca.tex#`

Este trabalho está licenciado sob a Licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada. Para ver uma cópia desta licença, visite <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/> ou envie uma carta para Creative Commons, PO Box 1866, Mountain View, CA 94042, USA.

Nota dos organizadores

`#srcPath:/nota_organizadores.tex#`

Nosso objetivo é de fomentar o desenvolvimento de materiais didáticos pela colaboração entre professores e alunos de universidades, institutos de educação e demais interessados no estudo e aplicação do cálculo nos mais diversos ramos da ciência e tecnologia.

Para tanto, disponibilizamos em repositório público GitHub (<https://github.com/reamat/Calculo>) todo o código-fonte do material em desenvolvimento sob licença Creative Commons Atribuição-CompartilhaIgual 3.0 Não Adaptada (CC-BY-SA-3.0). Ou seja, você pode copiar, redistribuir, alterar e construir um novo material para qualquer uso, inclusive comercial. Leia a licença para maiores informações.

O sucesso do projeto depende da colaboração! Participe diretamente da escrita dos recursos educacionais, dê sugestões ou nos avise de erros e imprecisões. Toda a colaboração é bem vinda. Veja mais sobre o projeto em:

<https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo>

Desejamos-lhe ótimas colaborações!

Prefácio

#srcPath:/prefacio.tex#

Em construção ... Gostaria de participar na escrita deste livro? Veja como em:

<https://www.ufrgs.br/reatmat/participe.html>

Sumário

Capa	i
Organizadores	ii
Licença	iii
Nota dos organizadores	iv
Prefácio	v
Sumário	viii
1 Introdução	1
1.1 Números reais e intervalos de numéricos reais	1
1.2 Funções reais e gráfico	1
1.3 Funções trigonométricas	2
1.4 Função inversa	2
1.5 Função composta	2
1.6 Exercícios finais	2
2 Limites	3
2.1 A ideia de limite	3
2.1.1 Limites no infinito	3
2.2 Operações com limites	3
2.3 Funções contínuas	4
2.4 Funções exponenciais e logaritmicas	4
2.5 Funções trigonométricas	4
2.6 Definição rigorosa de limite*	5
2.7 Exercícios finais	5

3	Derivadas	6
3.1	Coeficiente angular e reta tangente	6
3.2	Função derivada	6
3.3	Taxas de variação	7
3.4	Soma, diferença e produto por constante	7
3.5	Derivada de função polinomial	7
3.6	Regra do produto	7
3.7	Regra do quociente	8
3.8	Regra da cadeia	8
3.9	Derivação implícita	8
3.10	Derivada de funções trigonométricas	9
3.11	Derivada de funções exponenciais e logarítmicas	9
3.12	Taxas relacionadas	9
3.13	Teorema de L'Hôpital	10
3.14	Derivadas de ordem superior	10
3.15	Exercícios finais	10
4	Aplicações das derivadas	11
4.1	Teorema do valor médio	11
4.2	Funções crescentes e decrescentes	11
4.3	Máximos e mínimos	12
4.4	Concavidade	12
4.5	Problemas de otimização	12
4.6	Exercícios finais	12
5	Integração	13
5.1	Primitiva de uma função	13
5.2	Integração por substituição	13
5.3	Integral definida	14
5.4	Teorema fundamental do cálculo	14
5.5	Cálculo de áreas	14
5.6	integrais impróprias	14
5.7	Exercícios finais	15
6	Aplicações da integração	16
6.1	Integração por partes	16
6.2	Integrais trigonométricas	16
6.3	Frações parciais	17
6.4	Exercícios finais	17

7	Aplicações da integração	18
7.1	Comprimento de arcos	18
7.2	Volumes de sólidos	18
7.3	Áreas de superfícies	19
7.4	Área em coordenadas polares	19
7.5	Centro de massa	19
7.6	Momento de inércia	20
7.7	Exercícios finais	20
8	Sequências e séries	21
8.1	Sequências	21
8.1.1	Sequências convergentes	21
8.1.2	Sequências monótonas	21
8.2	Séries	21
8.3	Séries de termos positivos	22
8.4	Teste do valor final	22
8.5	Teste da razão	22
8.6	Teste da raiz	23
8.7	Teste da integral	23
8.8	Séries alternadas	23
8.9	Teste de Dirichlet*	24
8.10	Séries de Taylor	24
8.11	Convergência de séries de Taylor	24
8.12	Diferenciação e integração das séries de Taylor	25
8.13	Funções trigonométricas e exponencial*	25
8.14	Exercícios finais	25
	Referências Bibliográficas	26
	Índice Remissivo	27

Capítulo 1

Introdução

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex#

1.1 Números reais e intervalos de numéricos reais

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.2 Funções reais e gráfico

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.3 Funções trigonométricas

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.4 Função inversa

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.5 Função composta

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

1.6 Exercícios finais

#srcPath:cap_intro/cap_intro.tex#

+++construirExer+++

Capítulo 2

Limites

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex#
+++emConstrucao+++

2.1 A ideia de limite

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex#

2.1.1 Limites no infinito

+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.2 Operações com limites

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.3 Funções contínuas

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.4 Funções exponenciais e logarítmicas

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.5 Funções trigonométricas

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

2.6 Definição rigorosa de limite*

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

ER 2.6.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} 2x$.

Solução. Podemos calcular o limite solicitado da seguinte forma

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} 2x &= 2 \lim_{x \rightarrow 2} x \\ &= 2 \times 2 = 4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

◇

Exercícios

+++construirExer+++

E 2.6.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow 3} 5x$.

2.7 Exercícios finais

#srcPath:cap_limites/cap_limites.tex#
+++construirExer+++

E 2.7.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x}}{x^{99999}}$.

Capítulo 3

Derivadas

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex#
+++emConstrucao+++

3.1 Coeficiente angular e reta tangente

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.2 Função derivada

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.3 Taxas de variação

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.4 Soma, diferença e produto por constante

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.5 Derivada de função polinomial

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.6 Regra do produto

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.7 Regra do quociente

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.8 Regra da cadeia

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.9 Derivação implícita

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.10 Derivada de funções trigonométricas

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.11 Derivada de funções exponenciais e logarítmicas

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.12 Taxas relacionadas

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.13 Teorema de L'Hôpital

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.14 Derivadas de ordem superior

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

3.15 Exercícios finais

#srcPath:cap_derivadas/cap_derivadas.tex#
+++construirExer+++

Capítulo 4

Aplicações das derivadas

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex#
+++emConstrucao+++

4.1 Teorema do valor médio

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.2 Funções crescentes e decrescentes

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.3 Máximos e mínimos

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.4 Concavidade

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.5 Problemas de otimização

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

4.6 Exercícios finais

#srcPath:cap_apl_derivadas/cap_apl_derivadas.tex#
+++construirExer+++

Capítulo 5

Integração

```
#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex#  
+++emConstrucao+++
```

5.1 Primitiva de uma função

```
#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

5.2 Integração por substituição

```
#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

5.3 Integral definida

#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

5.4 Teorema fundamental do cálculo

#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

5.5 Cálculo de áreas

#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

5.6 integrais impróprias

#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex# +++construirSec+++
+++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

5.7 Exercícios finais

#srcPath:cap_integracao/cap_integracao.tex#
+++construirExer+++

Capítulo 6

Aplicações da integração

```
#srcPath:cap_tec_integracao/cap_tec_integracao.tex#  
+++emConstrucao+++
```

6.1 Integração por partes

```
#srcPath:cap_tec_integracao/cap_tec_integracao.tex# +++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

6.2 Integrais trigonométricas

```
#srcPath:cap_tec_integracao/cap_tec_integracao.tex# +++construir-  
Sec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```


6.3 Frações parciais

```
#srcPath:cap_tec_integracao/cap_tec_integracao.tex# +++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

6.4 Exercícios finais

```
#srcPath:cap_tec_integracao/cap_tec_integracao.tex#  
+++construirExer+++
```

Capítulo 7

Aplicações da integração

```
#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex#  
+++emConstrucao+++
```

7.1 Comprimento de arcos

```
#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construir-  
Sec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

7.2 Volumes de sólidos

```
#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construir-  
Sec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

+++construirExer+++

7.3 Áreas de superfícies

#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construir-
Sec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

7.4 Área em coordenadas polares

#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construir-
Sec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

7.5 Centro de massa

#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

7.6 Momento de inércia

#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

7.7 Exercícios finais

#srcPath:cap_apl_integracao/cap_apl_integracao.tex#
+++construirExer+++

Capítulo 8

Sequências e séries

```
#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex#  
+++emConstrucao+++
```

8.1 Sequências

```
#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex#
```

8.1.1 Sequências convergentes

8.1.2 Sequências monótonas

```
+++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

```
+++construirExeresol+++
```

Exercícios

```
+++construirExer+++
```

8.2 Séries

```
#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++
```

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.3 Séries de termos positivos

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.4 Teste do valor final

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.5 Teste da razão

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.6 Teste da raiz

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.7 Teste da integral

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.8 Séries alternadas

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.9 Teste de Dirichlet*

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.10 Séries de Taylor

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.11 Convergência de séries de Taylor

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.12 Diferenciação e integração das séries de Taylor

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.13 Funções trigonométricas e exponencial*

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex# +++construirSec+++

Exercícios resolvidos

+++construirExeresol+++

Exercícios

+++construirExer+++

8.14 Exercícios finais

#srcPath:cap_seq_series/cap_seq_series.tex#
+++construirExer+++

Referências Bibliográficas

Índice Remissivo

Área

em coordenadas polares, 19

área

de superfícies, 19

sob uma curva, 14

aplicações

derivadas, 11

integrais, 16, 18

arcos, 18

cálculo de áreas, 14

centro de massa, 19

Coefficiente angular, 6

comprimento

de arcos, 18

concavidade, 12

continuidade, 4

coordenadas

polares, 19

curvas, 18

Derivação implícita, 8

derivada, 6

de funções polinomial, 7

de funções trigonométricas, 9

de ordem superior, 10

derivadas

operações, 7

derivadas múltiplas, 10

exponenciais, 4

exponencial, 9

frações parciais, 17

função

derivada, 6

função polinomial, 7

funções

contínuas, 4

crescentes, 11

decrescentes, 11

exponenciais, 4, 9

logarítmicas, 9

logarítmicas, 4

monótonas, 11

trigonométricas, 4, 25

funções trigonométricas, 9, 16

Integração, 13

integração

por partes, 16

integração por substituição, 13

integrais

trigonométricas, 16

integrais impróprias, 14

integral

indefinida, 13, 14

limite, 3

limites

no infinito, 3

operações, 3

logaritmo, 9

logaritmos, 4

mínimos, 12

máximos, 12

momento de inércia, 20

- otimização, [12](#)
- polinômio, [7](#)
- pontos
 - de mínimo, [12](#)
 - de máximo, [12](#)
- primitiva de uma função, [13](#)
- problemas
 - de otimização, [12](#)
 - da raiz, [23](#)
 - da razão, [22](#)
 - das série alternada, [23](#)
 - de Dirichlet, [24](#)
 - do valor final, [22](#)
- trigonometria, [9](#), [16](#), [25](#)
- Volume
 - de sólidos, [18](#)
- regra da cadeia, [8](#)
- regra do produto, [7](#)
- regra do quociente, [8](#)
- reta tangente, [6](#)
- séries, [21](#)
 - convergência, [24](#)
 - de Taylor, [24](#)
 - de Taylor (convergência), [24](#)
 - de Taylor (diferenciação), [25](#)
 - de Taylor (integração), [25](#)
 - de termos positivos, [22](#)
- séries alternadas, [23](#)
- sólidos, [18](#)
- sequência, [21](#)
- sequências, [21](#)
 - convergentes, [21](#)
 - crescentes, [21](#)
 - decrescentes, [21](#)
 - monótonas, [21](#)
- superfícies, [19](#)
- técnicas de integração
 - substituição, [13](#)
- taxas de variação, [7](#)
- taxas relacionadas, [9](#)
- teorema
 - de L'Hôpital, [10](#)
 - do valor médio, [11](#)
 - fundamental do cálculo, [14](#)
- teste
 - da integral, [23](#)