Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет)
Факультет прикладной математики
и физики.

Курсовая работа по дискретной математике.

Выполнила:
Студентка группы 8О-104Б
Черыгова Е.Е.

Проверила:
Смерчинская С.О.

Москва 2015

Оглавление

Задание

Составить программу для поиска максимальной клики в графе

Теория

Пусть $G = (\mathbf{E}, \Gamma)$ — симметрический граф без петель и $\bar{G} = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}})$ — соответствующий ему неориентированный граф. Обозначим через $G^* = (\mathbf{E}, \bar{\mathbf{U}}^*)$ граф, дополнительный к G, и через $\bar{G}^*$ — неориентированный граф, соответствующий G^*.

Подмножество $\mathbf{E}_k \subset \mathbf{E}$ называется *кликой*, если подграф $G_k = (\mathbf{E}_k, \Gamma)$ полный, т. е.

$$(\forall X_i \in \mathbf{E}_k)(\forall X_j \in \mathbf{E}_k)\ X_j \in \Gamma X_i. \qquad (34.1)$$

Подмножество $\mathbf{E}_{M_k} \subset \mathbf{E}$ называется *максимальной кликой*, если соответствующий полный подграф G_{M_k} не содержится (строго) ни в каком полном подграфе.

Например, на рис. 146 выделен полный подграф графа на рис. 143 с кликой $\mathbf{E}_k = \{A, C, D, G\}$.

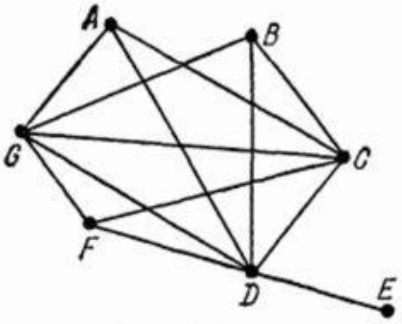


Рис. 143.

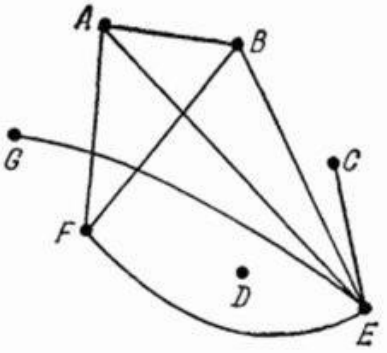


Рис. 144.

Понятие клики, в частности максимальной клики, используется в различных социологических теориях (вопросы, связанные с голосованием, альянсами и т. п.), а также в теории игр.

Нахождение максимальной клики [1]) в графе $\bar{G}$ сводится к нахождению максимального внутренне устойчивого подмножества

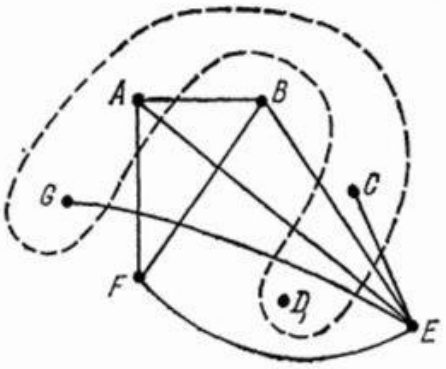


Рис. 145.

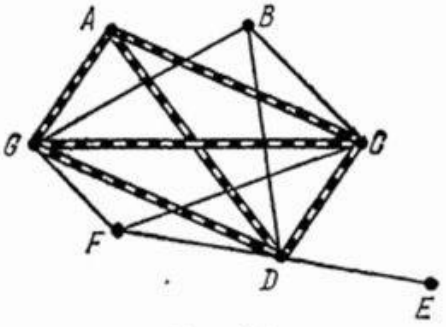


Рис. 146.

в графе $\bar{G}^*$, дополнительном к графу $\bar{G}$. Действительно, дополнительный граф определяется согласно (25.23):

$$(\forall X_i \in \mathbf{E})\, \Gamma^* X_i = \mathbf{E} - \Gamma X_i. \qquad (34.2)$$

Для каждой клики $\mathbf{E}_k$ имеем

$$(\forall X_l \in \mathbf{E}_k)(\forall X_j \in \mathbf{E}_k)(X_j \in \Gamma X_l) \Leftrightarrow (\{X_j\} \cap \Gamma^* X_l) = \varnothing, \qquad (34.3)$$

и, таким образом, максимальному внутренне устойчивому подмножеству в $\bar{G}^*$ соответствует максимальная клика в $\bar{G}$.

Алгоритм решения задачи

За основу взят алгоритм Брона-Кербоша.

Алгоритм использует тот факт, что всякая клика в графе является его максимальным по включению полным подграфом. Начиная с одиночной вершины (образующей полный подграф), алгоритм на каждом шаге пытается увеличить уже построенный полный подграф,

добавляя в него вершины из множества кандидатов. Высокая скорость обеспечивается отсечением при переборе вариантов, которые заведомо не приведут к построению клики, для чего используется дополнительное множество, в которое помещаются вершины, которые уже были использованы для увеличения полного подграфа.

Алгоритм оперирует тремя множествами вершин графа:

1. Множество **compsub** — множество, содержащее на каждом шаге рекурсии полный подграф для данного шага. Строится рекурсивно.
2. Множество **candidates** — множество вершин, которые могут увеличить compsub
3. Множество **used** — множество вершин, которые уже использовались для расширения **compsub** на предыдущих шагах алгоритма.

Алгоритм является рекурсивной процедурой, применяемой к этим трем множествам.

ПРОЦЕДУРА *extend* (*candidates*, *not*):
ПОКА *candidates* НЕ пусто **И** *used* НЕ содержит вершины, СОЕДИНЕННОЙ СО ВСЕМИ вершинами из *candidates*,
ВЫПОЛНЯТЬ:
1 Выбираем вершину *v* из *candidates* и добавляем ее в *compsub*
2 Формируем *new_candidates* и *new_not*, удаляя из *candidates* и *not* вершины, не СОЕДИНЕННЫЕ с *v*
3 **ЕСЛИ** *new_candidates* и *new_not* пусты
4 **ТО** *compsub* – клика
5 **ИНАЧЕ** рекурсивно вызываем *extend* (*new_candidates*, *new_not*)
6 Удаляем v из *compsub* и *candidates*, и помещаем в *used*

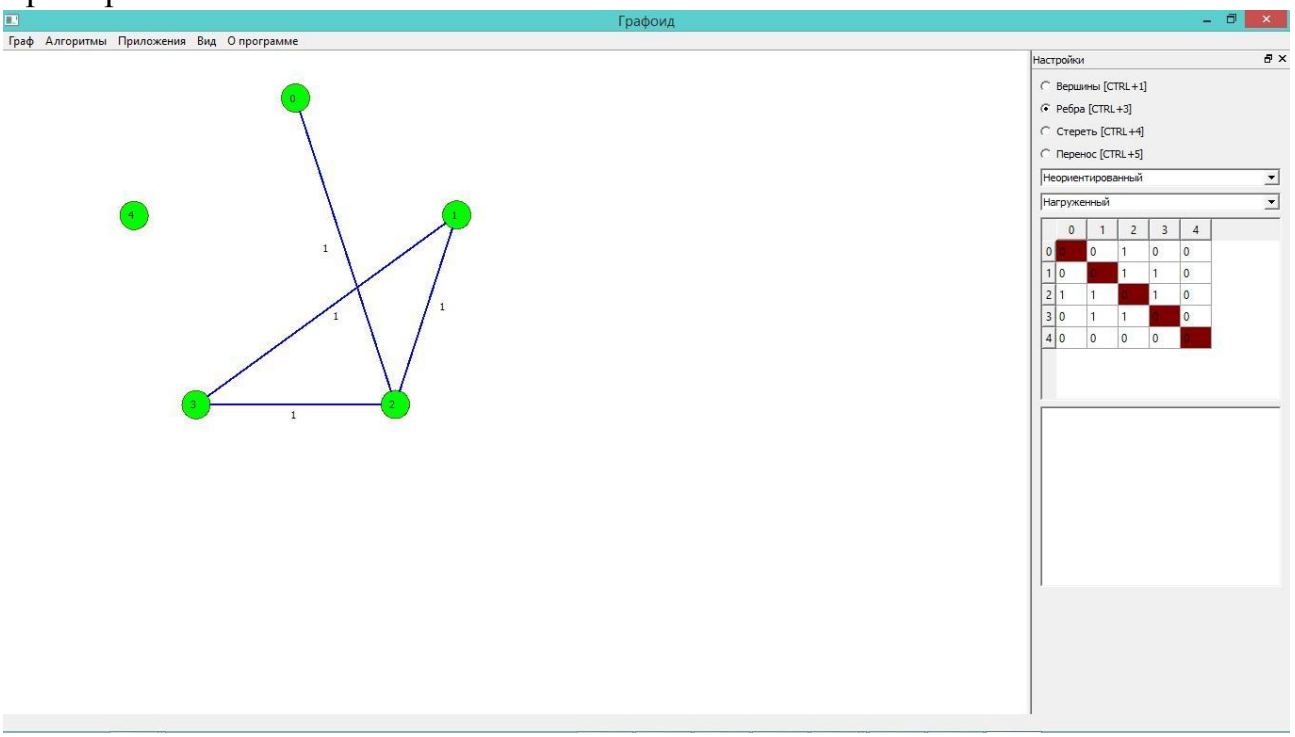
Вычислительная сложность

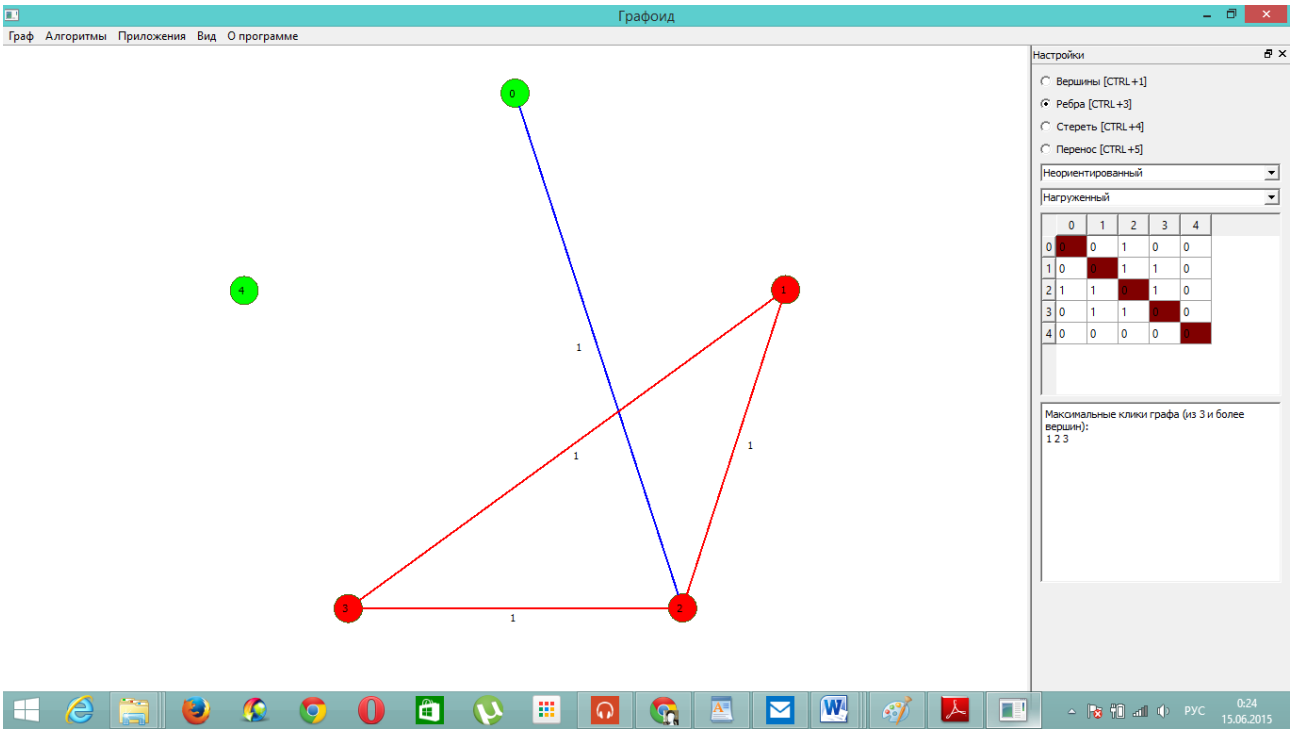
Линейна относительно количества клик в графе. В худшем случае алгоритм работает за O(3n/3), где n — количество вершин в графе.

Описание программы

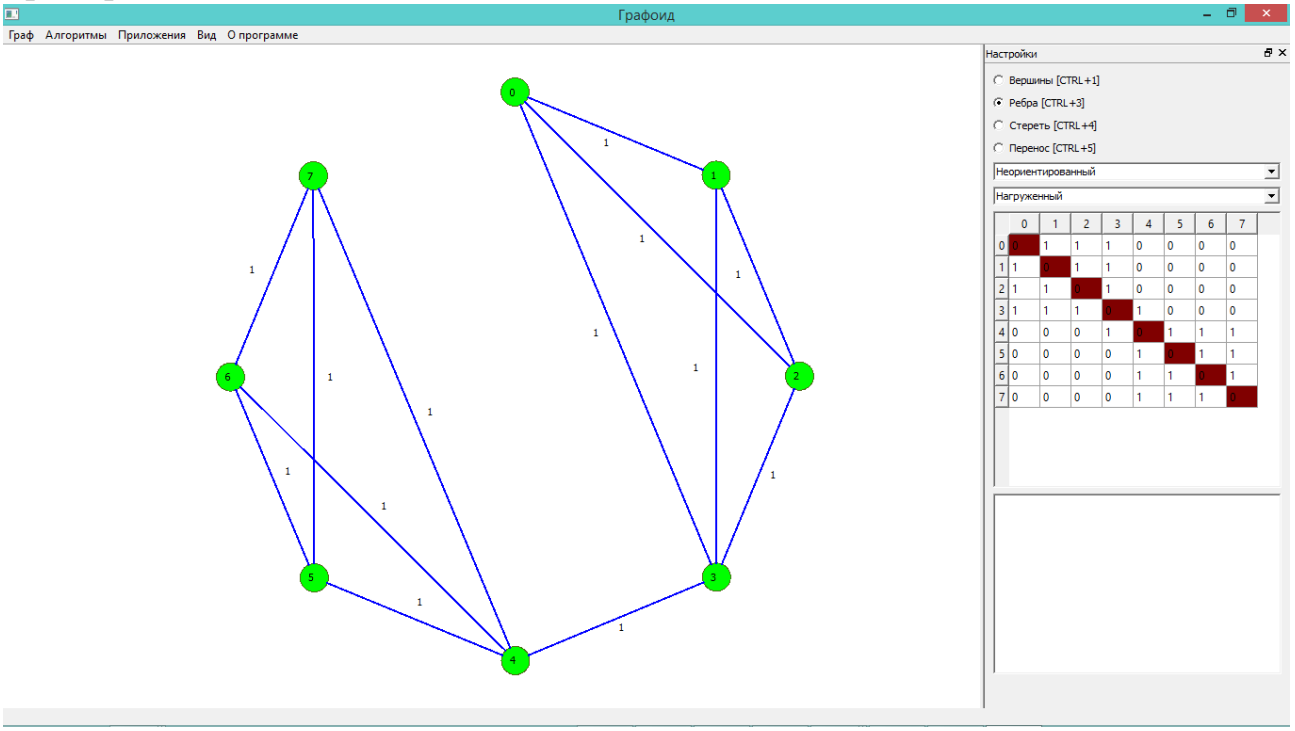
Разработанная программа находит все максимальные клики графа используя алгоритм Брона-Кербоша. Изначально в программе рисуется граф и автоматически строится его матрица смежности. Программа работает непосредственно с этой матрицей. В конечном счете, на экран выводится список всех максимальных клик графа с номерами вершин и каждая максимальная клика исходного графа выделяется с помощью определённого цвета. Если у нескольких максимальных клик есть общие вершины и ребра, то приоритет в раскраске отдаётся наибольшей из найденных.

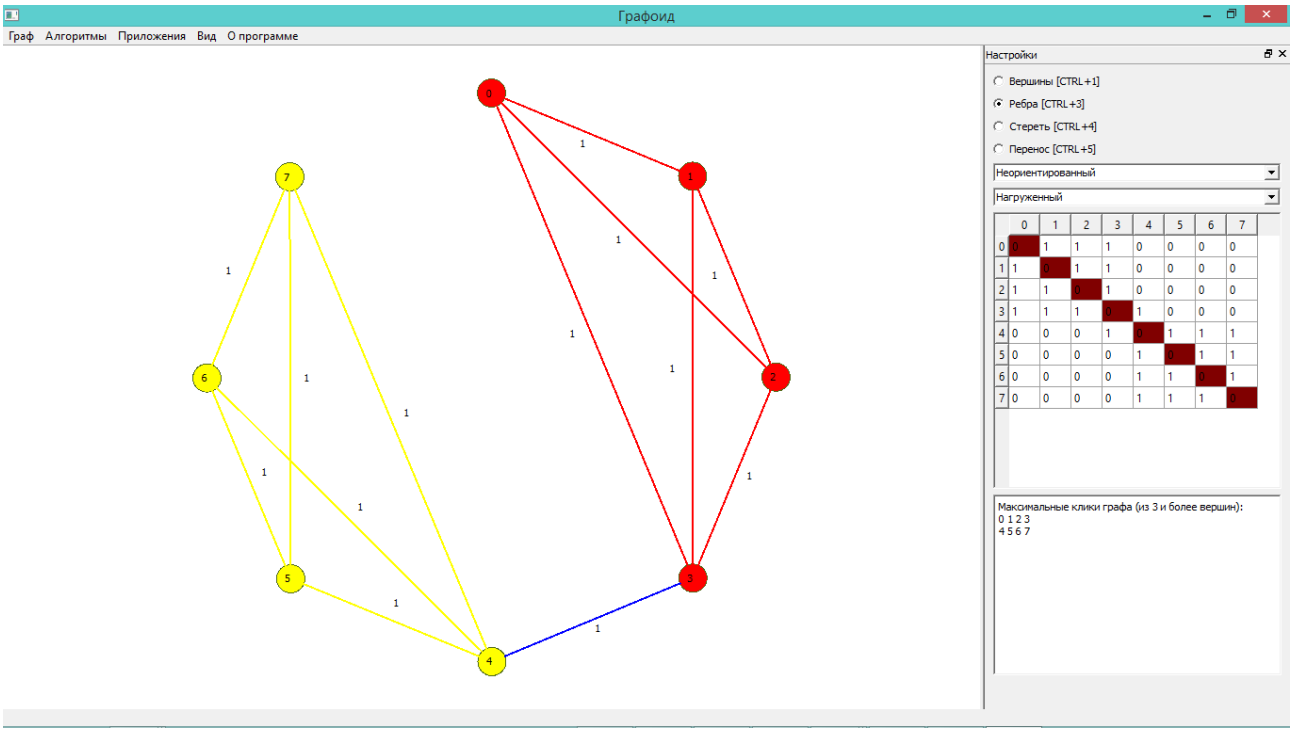
Пример 1.



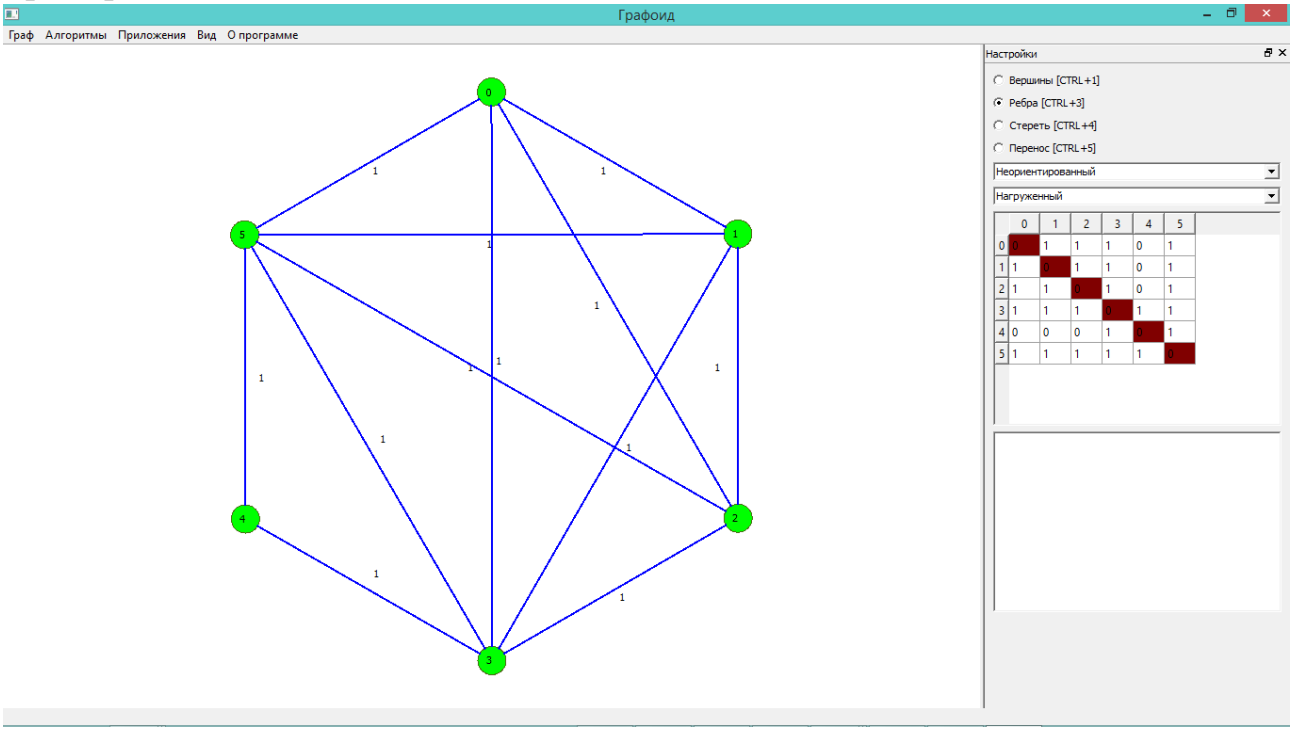


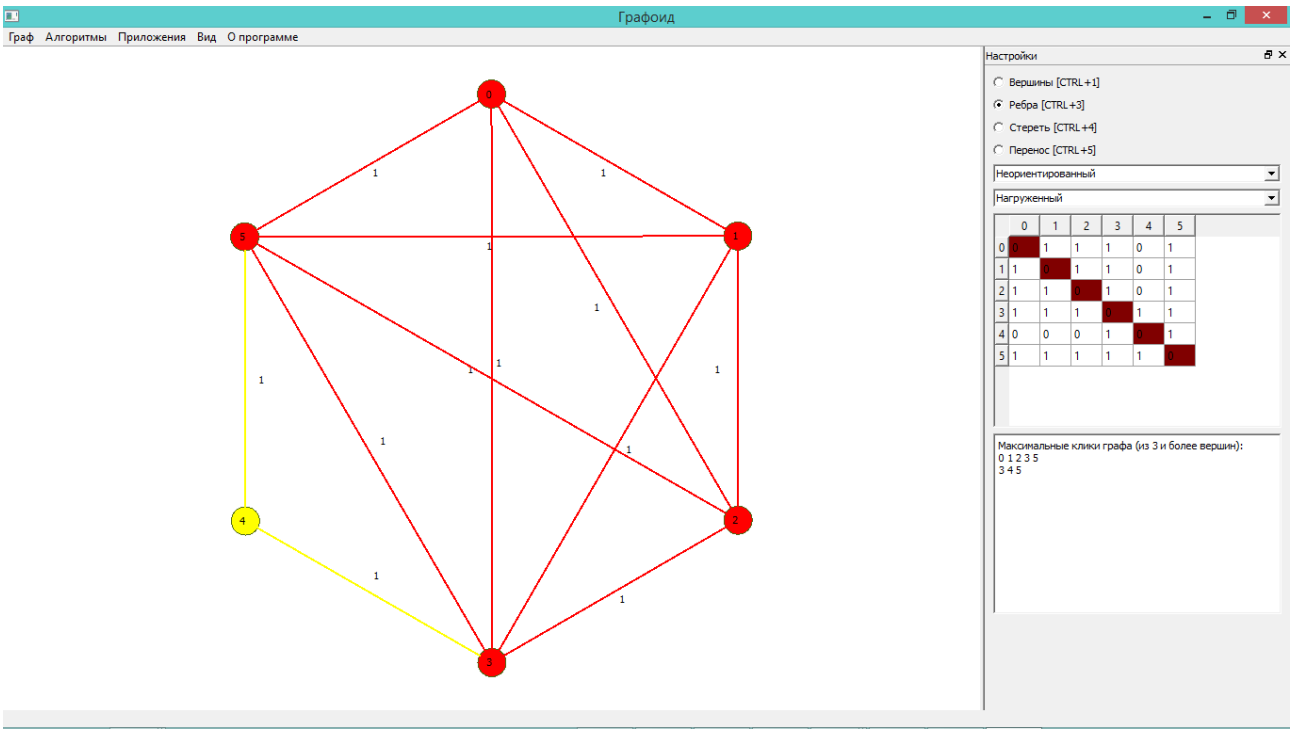
Пример 2.


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный

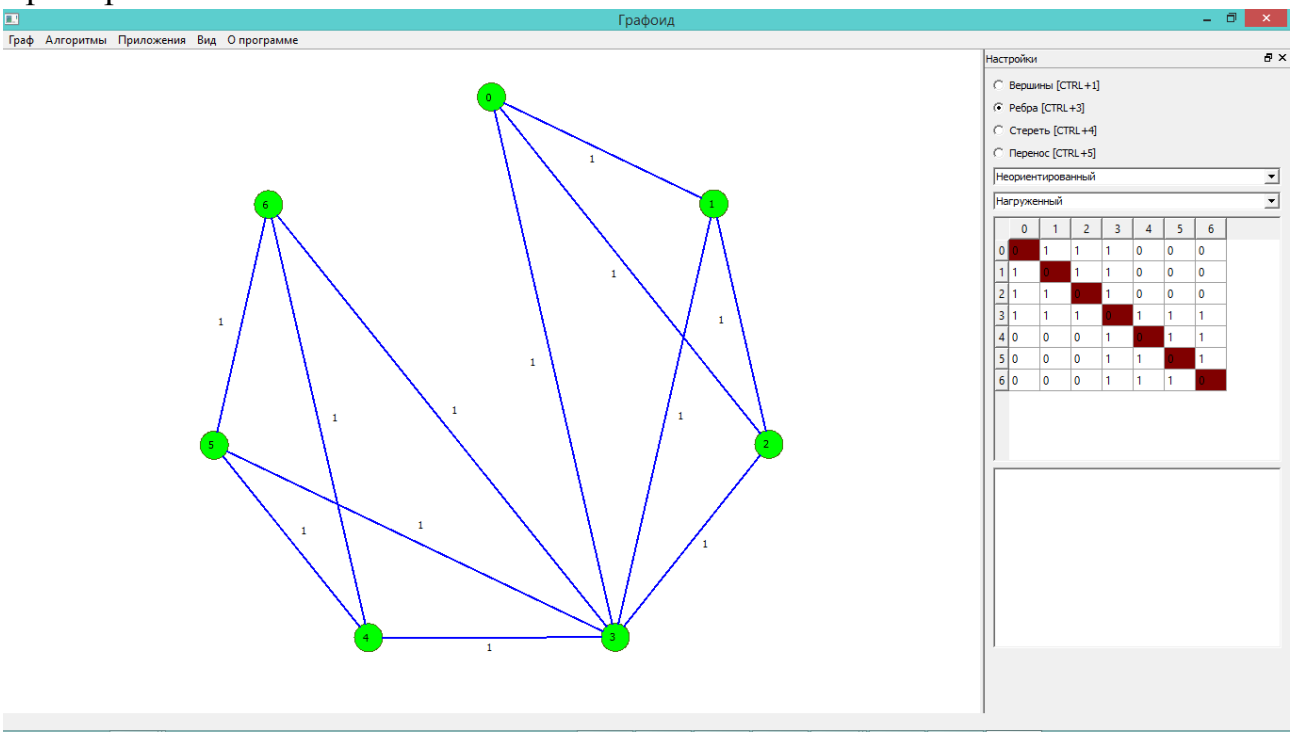

Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный
Максимальные клики графа (из 3 и более вершин):
0 1 2 3
4 5 6 7

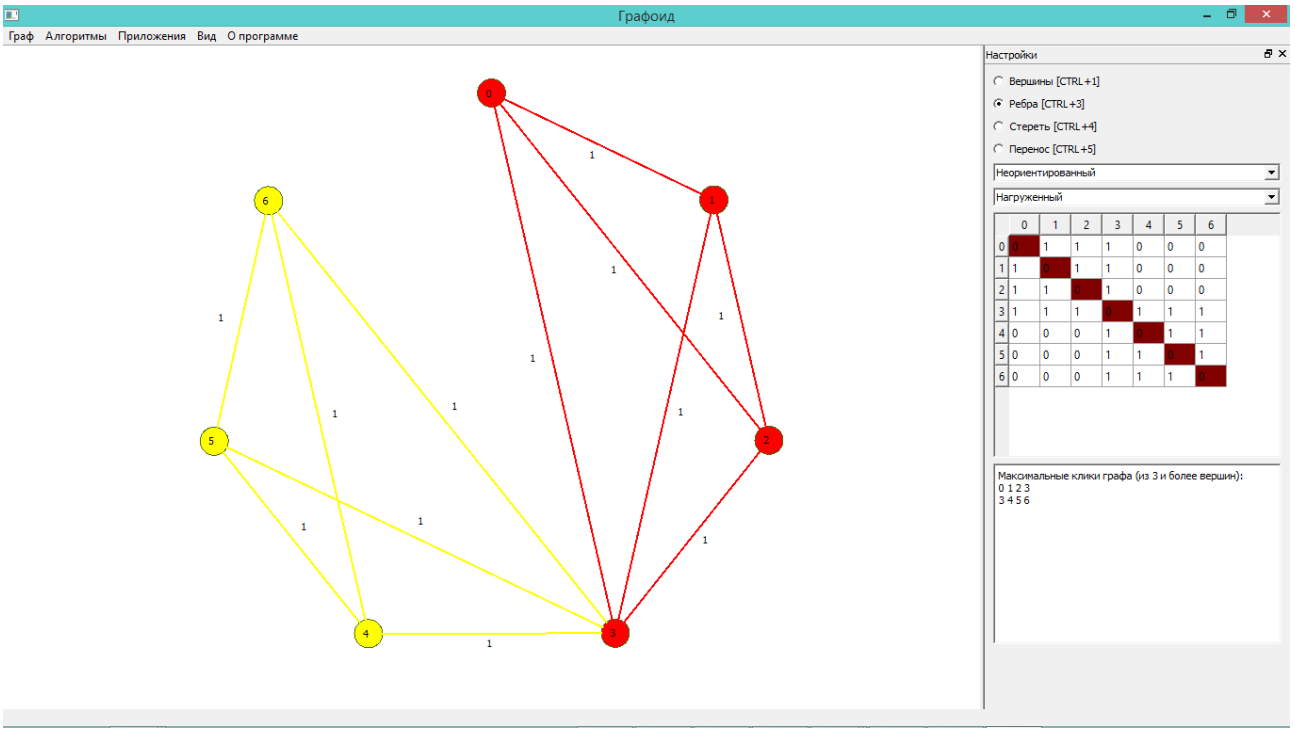
Пример 3.


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный

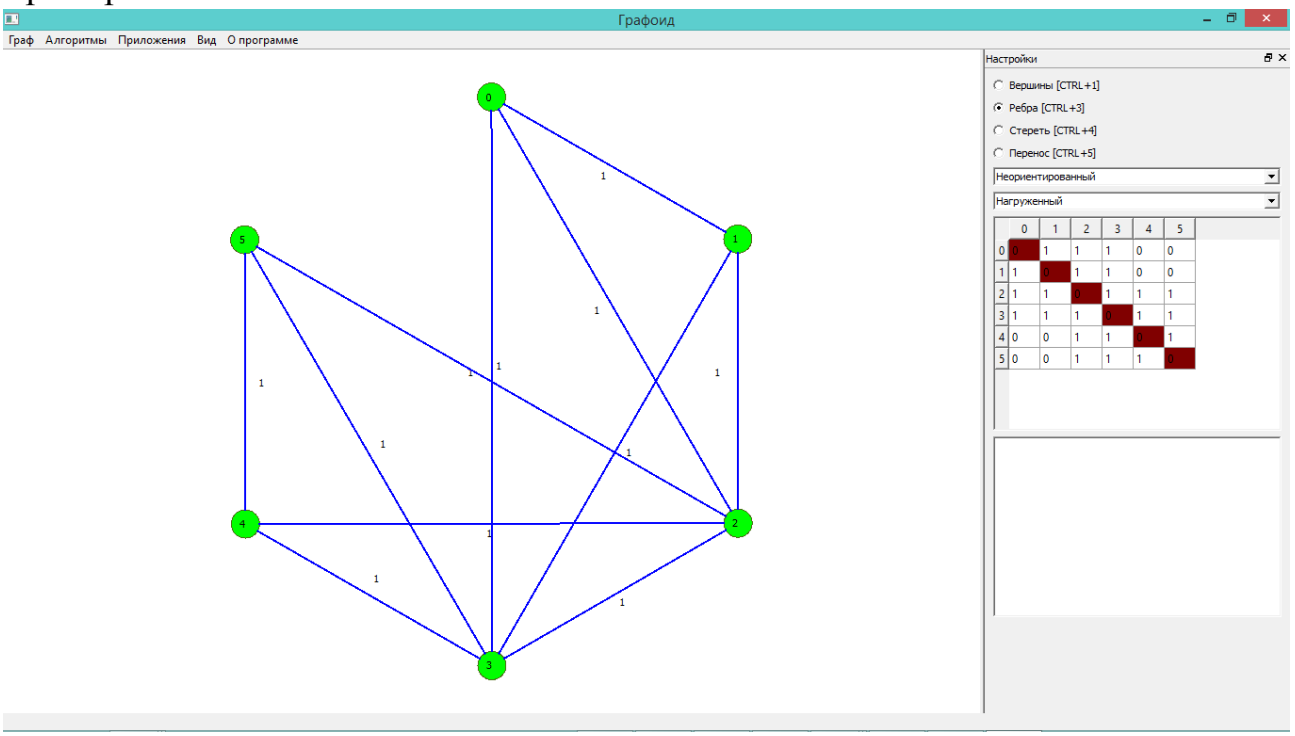

Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный
Максимальные клики графа (из 3 и более вершин):
0 1 2 3 5
3 4 5

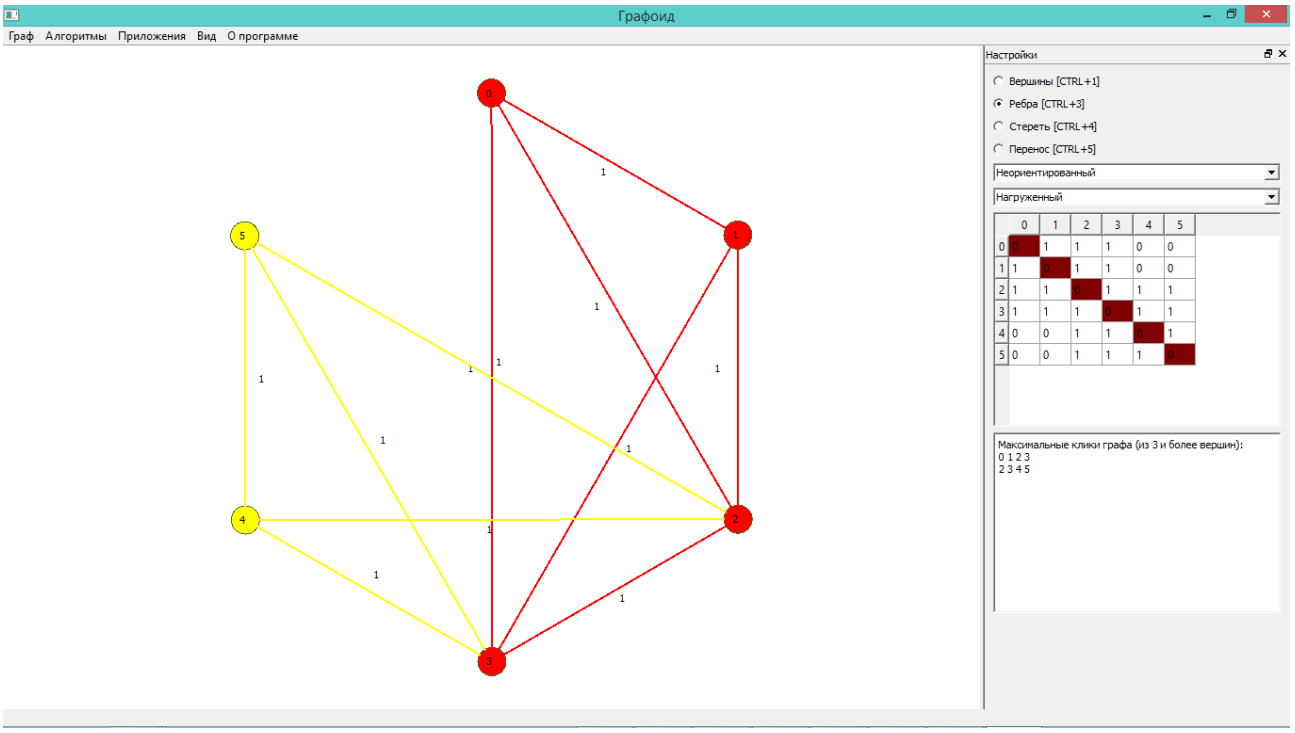
Пример 4.


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный
Максимальные клики графа (из 3 и более вершин):
0 1 2 3
3 4 5 6

Пример 5.


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный


Графоид
Граф Алгоритмы Приложения Вид О программе
Настройки
Вершины [CTRL+1]
Ребра [CTRL+3]
Стереть [CTRL+4]
Перенос [CTRL+5]
Неориентированный
Нагруженный
Максимальные клики графа (из 3 и более вершин):
0 1 2 3
2 3 4 5

Код программы

```
#include <fstream>
#include <vector>
#include <set>

using namespace std;

int **matrix; // матрица смежности графа
int dim; // размерность матрицы смежности
vector < set <int> > result; // вектор множеств, содержащих вершины макс. клик

bool no_node_connected_to_all(set <int> candidates, set <int> used); // функция проверки наличия в used вершины, соединённой со всеми вершинами в candidates
set <int> maxclique(set <int> clique, set <int> candidates, set <int> used); // функция рекурсивного поиска макс. клик

int main(int argc, char *argv[])
{
	ifstream in(argv[1]); // входной поток из файла
	in >> dim; // считываем размерность матрицы (количество вершин)

	// выделяем память под матрицу смежности, заполняем её из файла
	matrix = new int *[dim];
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		matrix[i] = new int[dim];
		for (int j = 0; j < dim; ++j)
			in >> matrix[i][j];
	}
	in.close();

	//////////////////////
	// вводим множества
	set <int> clique; // искомые вершины макс. клики
	set <int> candidates; // вершины, которые могут увеличить clique
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		candidates.insert(i);
	}
	set <int> used; // вершины, уже использованные для расширения клики на предыдущий этапах

	maxclique(clique, candidates, used); // запускаем рекурсивный поиск макс. клик, списки вершин запишутся в вектор results

	//////////////////////
	char color[5][20] = { " Red", " Yellow", " Magenta", " DarkGreen", " Gray" }; // массив с обозначениями цветов
	int *nodes = new int[dim]; // массив для соотнесения вершин с номерами макс. клик
	int **edges = new int*[dim]; // массив для соотнесения рёбер с номерами макс. клик
```

```
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		nodes[i] = 0;
		edges[i] = new int[dim];
		for (int j = 0; j < dim; ++j)
			edges[i][j] = 0;
	}

	for (unsigned int i = 0; i < result.size(); ++i)
	{
		for (set <int> ::iterator j = result[i].begin(); j != 
result[i].end(); ++j)
		{
			// сохранение номера макс. клики, в которую входит 
вершина
			if (nodes[*j] != 0)
			{
				if (result[i].size() > result[nodes[*j] - 
1].size())
					nodes[*j] = i + 1;
			}
			else
				nodes[*j] = i + 1;

			for (set <int> ::iterator k = j; k != result[i].end(); 
++k)
			{
				if (matrix[*j][*k]) // если есть ребро
				{
					// сохранение номера макс. клики, в которую 
входит ребро
					if (edges[*j][*k] > 0)
					{
						if (result[i].size() > 
result[edges[*j][*k] - 1].size())
						{
							edges[*j][*k] = i + 1;
							edges[*k][*j] = i + 1;
						}
					}
					else
					{
						edges[*j][*k] = i + 1;
						edges[*k][*j] = i + 1;
					}
				}
			}
		}
	}

	//////////////////////
	ofstream out(argv[1]);
	out << dim << endl; // записываем размерность матрицы
```

```
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		for (int j = 0; j < dim; ++j)
			out << matrix[i][j] << ' ';
		out << endl;
	}

	out << "Colors_Nodes:" << endl;
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		out << i;
		if (nodes[i])
			out << color[(nodes[i] - 1) % 5];
		else
			out << " Green";
		out << endl;
	}

	out << "Colors_Edges:" << endl;
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		for (int j = 0; j < dim; ++j)
		{
			if (matrix[i][j])
			{
				out << i << ' ' << j;
				if (edges[i][j] != 0)
					out << color[(edges[i][j] - 1) % 5];
				else
					out << " Blue";
				out << endl;
			}
		}
	}

	// заполняем текстовое поля
	out << "Text:" << endl << "Максимальные клики графа (из 3 и более
вершин):" << endl;
	for (unsigned int i = 0; i < result.size(); ++i)
	{
		for (set <int> ::iterator j = result[i].begin(); j !=
result[i].end(); ++j)
		{
			out << *j << ' ';
		}
		out << endl;
	}
	out.close();

	// освобождение памяти
	for (int i = 0; i < dim; ++i)
	{
		delete[] matrix[i];
		delete[] edges[i];
```

```
	}
	delete[] matrix;
	delete[] nodes;
	delete[] edges;

	return 0;
}

bool no_node_connected_to_all(set <int> candidates, set <int> used)
{
	bool ans;
	for (set <int> ::iterator i = used.begin(); i != used.end(); ++i)
	{
		ans = true;
		for (set <int> ::iterator j = candidates.begin(); j != 
candidates.end(); ++j)
		{
			if (!matrix[*i][*j]) // если где-то нет связи
			{
				ans = false;
				break;
			}
		}
		if (ans)
			return false; // если флаг не поменялся, найдена 
вершина, соединённая со всеми в candidates
	}
	return true;
}

set <int> maxclique(set <int> clique, set <int> candidates, set <int> 
used)
{
	// пока candidates не пустое и used НЕ содержит вершины, 
соединённой со всеми вершинами в candidates
	while (candidates.size() != 0 && 
no_node_connected_to_all(candidates, used))
	{
		// выбираем вершину
		int node = *candidates.begin();
		clique.insert(node);

		// формируем new_candidates и new_not, удаляя из candidates и 
not вершины, не соединённые с node
		set <int> new_candidates = candidates;
		set <int> new_used = used;
		for (int i = 0; i < dim; ++i)
		{
			if (!matrix[i][node])
			{
				new_candidates.erase(i);
				new_used.erase(i);
			}
		}
```

```
            // если new_candidates и new_not пусты
            if (new_candidates.size() == 0 && new_used.size() == 0 &&
clique.size() > 2)
                  result.push_back(clique);
            else
                  clique = maxclique(clique, new_candidates, new_used);

            // удаляем v из clique и candidates, и помещаем в not
            clique.erase(node);
            candidates.erase(node);
            used.insert(node);
      }
      return clique;
}
```