Организация поиска ограниченного по времени тестирования в случае непрерывного распределения вектора случайных параметров

Черыгова Е.Е. - студентка группы 8О-204М
Наумов А.В. - проф., д.ф.-м.н.

Московский авиационный институт
Институт № 8 «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра «Теория вероятностей и компьютерное моделирование»

МАИ, 2020

1. Модели времени ответа пользователя СДО. Непрерывная модель ван дер Линдена

Логарифм времени ответа *j*-го пользователя на *i*-е задание имеет вид

$$\ln T_{ij} = \mu + \beta_i + \tau_j + \varepsilon_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{I} \beta_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{J} \tau_j = 0,$$

где T_{ij} - случайная величина, обозначающая время ответа j-го пользователя на i-ю задачу, β_i - параметр сложности задания, τ_j - физиологические особенности пользователя, μ - общая составляющая для всех пользователей и заданий, ε_{ij} - случайное отклонение, $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$, $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{1, J}$ - независимые гауссовские случайные величины. Таким образом

$$T_{ij} \sim LogN(\mu + \beta_i + \tau_j, \sigma^2).$$

2. Модели времени ответа пользователя СДО. Непрерывная модель ван дер Линдена (продолжение)

Оценки параметров модели:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} \ln t_{ij}}{IJ}, \quad \hat{\beta}_i = \frac{\sum_{j=1}^{J} \ln t_{ij}}{J} - \hat{\mu},$$

$$\hat{\tau}_j = \frac{\sum_{i=1}^{I} \ln t_{ij}}{I} - \hat{\mu}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} (\ln t_{ij} - \hat{\tau}_j - \hat{\beta}_i - \hat{\mu})^2}{IJ}$$

Логнормальная модель времени ответа j-го пользователя на i-е задание имеет плотность вероятности вида:

$$f(t_{ij}, \hat{\mu}, \hat{\beta}_i, \hat{\tau}_j, \hat{\sigma}) = \frac{1}{t_{ij}\sqrt{2\pi\hat{\sigma}^2}} exp\Big\{ -\frac{1}{2} \Big[\frac{\ln t_{ij} - (\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_j)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \Big]^2 \Big\}$$

3. Постановка задачи определения оптимального набора ограниченных по времени тестовых заданий

Пусть существует множество $Z = (z_1, \dots, z_I)$ из I заданий, разделенных на M различных типов, I_m - число заданий m-го типа, тогда $\sum\limits_{m=1}^{M} I_m = I$, $m = \overline{1, M}$. Для обозначения принадлежности задания к определенному типу введем матрицу A размерности $I \times M$:

$$A = \parallel a_i^m \parallel, a_i^m = \begin{cases} 1, & z_i \in Z_m, \\ 0, & z_i \notin Z_m. \end{cases}$$

Пусть $u \in R^I$ вектор принадлежности задания к тесту:

$$u_i = \begin{cases} 1, & \text{если задача } i \text{ попала в тестовый набор}, \\ 0, & \text{если задача } i \text{ не попала в тестовый набор}. \end{cases}$$

Определим вектор $w \in R^I$, i-я координата которого является сложностью i-го задания. Пусть c - суммарная сложность теста и k - количество заданий в тесте, $k \geqslant M$.

4. Постановка задачи (продолжение)

Пусть в тестировании участвуют N пользователей. Обозначим через T_i^n случайное время, которое потребуется пользователю n, на решение i задачи, где $i = \overline{1, I}$, $n = \overline{1, N}$, $T_i^n \sim LogN(\hat{\mu} + \hat{\beta}_i + \hat{\tau}_n, \hat{\sigma}^2)$.
Рассмотрим матрицу T размерности $N \times I$:

$$T = \| T_i^n \| .$$

Будем предполагать, что случайные величины T_i^n являются независимыми.
Пусть общее время на выполнение теста неизвестно. Обозначим его через φ. Рассмотрим функцию квантили:

$$\Phi_\alpha(u) \stackrel{\triangle}{=} min\{\varphi \in R^1 : P\{\max_{n=\overline{1,N}} T_n u \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{1}$$

где T_n, $n-$я строка матрицы T.

5. Постановка задачи (продолжение)

В случае логнормального распределения времени ответа студентов, получить точное значение квантили заданного уровня не представляется возможным.
Преодолеть указанный недостаток предлагается использованием гамма-распределения в качестве модели времени ответа пользователя на задание, так как плотности вероятности логнормального и гамма-распределений имеют схожие структуры, и гамма-распределение обладает следующим свойством:
Если $\Theta_1, \ldots, \Theta_I$ - независимые СВ, такие что $\Theta_i \sim \Gamma(k_i, \theta)$, $i = \overline{1, I}$, то

$$\vartheta = \sum_{i=1}^{I} \Theta_i \sim \Gamma(\sum_{i=1}^{I} k_i, \theta).$$

Необходимо подобрать параметр θ таким образом, чтобы он был одинаковым для всех задач, и при этом для максимального количества заданий принималась бы гипотеза о гамма-распределении времени ответа пользователя на это задание.

6. Постановка задачи. Алгоритм подбора параметров гамма-распределения.

0. Зафиксировать номер пользователя n и положить

$$\theta_n^* = 0, k_{in}^* = 0, S = 0, m = 0,$$

где θ_n^* - искомое значение параметра гамма-распределения, k_{in}^* - искомое значение второго параметра распределения, S - число задач, для которых принимается гипотеза о гамма-распределении, m - счётчик.
1. $\forall i = \overline{1, I}$ сгенерировать выборки t_{in}^{ν} СВ T_i^n объёма ν и методом максимального правдоподобия найти оценки $\widehat{\theta}_{in}$ параметра θ_n. Положить

$$\widehat{\theta}_{min\ n} = \min_{i=\overline{1,I}}\{\widehat{\theta}_{in}\},\ \widehat{\theta}_{max\ n} = \max_{i=\overline{1,I}}\{\widehat{\theta}_{in}\},$$

$$h = \frac{\widehat{\theta}_{max\ n} - \widehat{\theta}_{min\ n}}{L},\ \theta_n^m = \widehat{\theta}_{min\ n} - h,$$

где h - шаг для варьирования θ_n, L - число шагов дискретизации.
2. $m := m + 1, \theta_n^m = \theta_n^{m-1} + h, \widehat{k}_{in} = \frac{\overline{t}_{in}^{\nu}}{\theta_n^m}$, где $\overline{t}_{in}^{\nu}$ - выборочное МО.
3. $\forall i = \overline{1, I}$ проверить гипотезу $H_0 = t_{in} \sim \Gamma(\widehat{k}_{in}, \theta_n^m)$ с помощью критерия Пирсона на выбранном уровне доверительной вероятности $1 - \alpha$. Если число принятых гипотез $S' > S$, то положить $S = S', \theta_n^* = \theta_n^m, k_{in}^* = \widehat{k}_{in}, i = \overline{1, I}$.
4. Если $m \leqslant L - 1$, то перейти к шагу 2.
5. Окончание работы алгоритма.

7. Постановка задачи (продолжение)

Пусть $\Theta_i^n \sim \Gamma(\hat{k}_{in}, \hat{\theta}_n)$, где Θ_i^n - случайное время, которое потребуется пользователю n на решение i задачи. Введём матрицу Θ размерности $N \times I$:

$$\Theta = \| \Theta_i^n \| .$$

В предположении, что случайные величины Θ_i^n являются независимыми, функция квантили (1) примет вид:

$$\Phi_\alpha(u) \stackrel{\triangle}{=} min\{\varphi \in R^1 : P\{ \max_{n=\overline{1,N}} \Theta_n u \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}, \tag{2}$$

где Θ_n, $n-$я строка матрицы Θ.

8. Постановка задачи (продолжение)

В силу свойств гамма-распределения, функцию в (2) можно записать в виде:

$$\Phi_\alpha(u) \stackrel{\triangle}{=} min\{\varphi \in R^1 : P\{\vartheta_1 \leqslant \varphi, \ldots, \vartheta_N \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\} =$$

$$= min\{\varphi \in R^1 : F_{\vartheta_1}(\varphi) \cdot \ldots \cdot F_{\vartheta_N}(\varphi) \geqslant \alpha\}, \qquad (3)$$

где $\vartheta_n = \Theta_n \cdot u,\ \vartheta_n \sim \Gamma(\hat{k}_n^T \cdot u,\ \hat{\theta}_n),\ n = \overline{1, N}$ - независимые СВ, $\hat{k}_n = (\hat{k}_{1n}, \ldots, \hat{k}_{In})^T,\ n = \overline{1, N}$.

9. Постановка задачи (продолжение)

$$u_\alpha = Arg \min_{u \in \{0,1\}^I} \left(\gamma \frac{| c - w^T u |}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\Phi_\alpha(u)}{2700}\right), \quad (4)$$

$$\varphi_\alpha = \min_{u \in \{0,1\}^I} \left(\gamma \frac{| c - w^T u |}{\varepsilon} + (1-\gamma)\frac{\Phi_\alpha(u)}{2700}\right), \quad (5)$$

$$c - w^T u \leqslant \varepsilon, \quad (6)$$

$$w^T u - c \leqslant \varepsilon, \quad (7)$$

$$A^T u \geqslant e_M, \quad (8)$$

$$e^T u = k, \quad (9)$$

где $(\cdot)^T$ - операция транспонирования, $\gamma \in [0,1]$ - весовой коэффициент, $\alpha \in (0,1)$ - заданный уровень доверительной вероятности, $e \in R^I$, $e = (1,\dots,1)^T$, $e_M \in R^M$, $e_M = (1,\dots,1)^T$.

10. Алгоритм поиска оптимального набора заданий

1. Составить множество $\overline{U}$ всех u, удовлетворяющих неравенствам (6) - (9):

$$\overline{U} \triangleq \{u \in R^I : c - w^T u \leqslant \varepsilon, w^T u - c \leqslant \varepsilon, A^T u \geqslant e_M, e^T u = k, u \in \{0,1\}^I\};$$

2. Для каждого $u^s \in \overline{U}$ найти

$$\varphi_s^* \triangleq min\{\varphi \in R^1 : F_{\vartheta_1}(\varphi) \cdot \ldots \cdot F_{\vartheta_N}(\varphi) \geqslant \alpha\},\ n = 1, \ldots, N,$$

$$\psi_s^* = \gamma \frac{\mid c - w^T u^s \mid}{\varepsilon} + (1 - \gamma) \frac{\varphi_s^*}{2700}$$

3. Среди всех ψ_s^* выбираем наименьшее ($\psi_{s^*}^*$);
4. Полагаем решение исходной задачи (3)-(9) равным $u^{s^*}, \psi_{s^*}^*, \varphi_{s^*}^*$.

Таблица 1 Наборы заданий для минимальных значений критериальной функции для разных значений допустимых отклонений от суммарной сложности теста

ε	Кол-во реш-й, удовл. дет. огр.	$\gamma = 0$			$\gamma = 0.5$			$\gamma = 1$		
		φ^* (минуты)	ψ^*	Номера заданий, вошедших в тест	φ^* (минуты)	ψ^*	Номера заданий, вошедших в тест	φ^* (минуты)	ψ^*	Номера заданий, вошедших в тест
0.001	7	23.3651	0.5192	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	33.5329	0.5226	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	34.7905	0.3000	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
								33.5329	0.3000	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$
0.002	21	23.3651	0.5192	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	33.5329	0.5226	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	34.7905	0.1500	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
								33.5329	0.1500	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$
0.003	30	22.0362	0.4897	$z_7^1, z_{10}^1, z_1^2, z_4^2, z_5^3$	23.3651	0.3929	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	34.7905	0.1000	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
								33.5329	0.1000	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$
0.004	35	22.0362	0.4897	$z_7^1, z_{10}^1, z_1^2, z_4^2, z_5^3$	23.3651	0.3929	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	34.7905	0.0750	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
								33.5329	0.0750	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$
0.005	40	22.0362	0.4897	$z_7^1, z_{10}^1, z_1^2, z_4^2, z_5^3$	23.3651	0.3929	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	34.7905	0.0600	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$
								33.5329	0.0600	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$

Таблица 2 Подбор оптимального набора заданий для $\varepsilon = 0.005$ и различных значений весового коэффициента γ

γ	Значение квантили φ^* (секунды)	Значение квантили φ^* (минуты)	Номера заданий, вошедших в тест	$\lvert c - w^T u^* \rvert$	Значение критерия ψ^*
0	1322.1736	22.0362	$z_7^1, z_{10}^1, z_1^2, z_4^2, z_5^3$	0.0024	0.4897
0.1	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.4833
0.2	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.4474
0.3	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.4115
0.4	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.3755
0.5	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.3396
0.6	1401.9066	23.3651	$z_6^1, z_1^2, z_2^2, z_9^2, z_5^3$	0.0008	0.3037
0.7	2011.9718	33.5329	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	0.0003	0.2656
0.8	2011.9718	33.5329	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	0.0003	0.1970
0.9	2011.9718	33.5329	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	0.0003	0.1285
1	2011.9718	33.5329	$z_6^1, z_{10}^1, z_5^2, z_6^3, z_7^3$	0.0003	0.0600
	2087.4279	34.7905	$z_5^1, z_8^1, z_3^2, z_7^3, z_9^3$	0.0003	0.0600

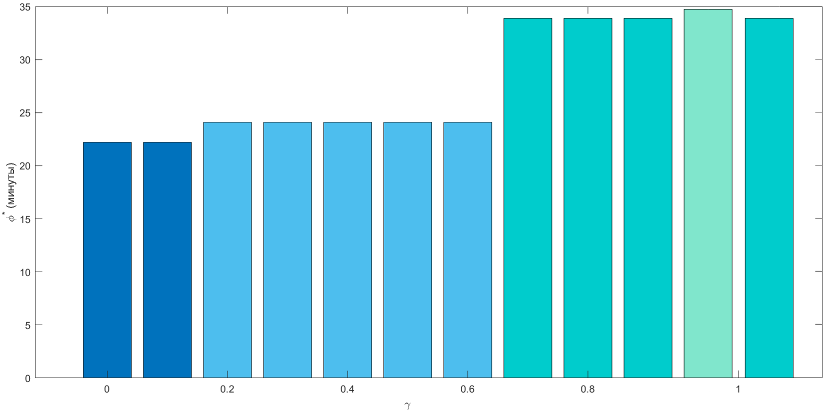

Рисунок 1 Квантили времени выполнения подобранных тестов в зависимости от γ для $\varepsilon = 0.005$

14. Основные результаты работы

- предложена постановка задачи формирования теста заданного уровня сложности с минимальным временем выполнения для группы студентов, задача сформулирована в терминах одноэтапной задачи квантильной оптимизации;
- представлен алгоритм решения сформулированной задачи, основанный на её декомпозиции;
- получены результаты численного эксперимента, подтверждающие адекватность предложенной модели;
- опубликована статья в журнале «Вестник компьютерных и информационных технологий» и тезисы в сборниках докладов «XLV Гагаринских чтений», 17-й и 18-й Международной конференции «Авиация и космонавтика».