Examen : Séries et intégrales généralisées

UCAO-UUT 2024-2025 Durée : 2 heures

Étudiant : Ambroise KOUWADAN

Question 1

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + e^{-2n})$

Analyse :
La série est $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ avec $u_n = \ln(1 + e^{-2n}) > 0$.
Équivalent :
Pour $n \to +\infty$, $e^{-2n} \to 0$, donc :

$$\ln(1 + e^{-2n}) \sim e^{-2n}$$

Comparaison :
La série $\sum e^{-2n}$ est géométrique de raison $r = e^{-2} < 1$, donc convergente.
Conclusion :
Par équivalence et critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ **converge**.

Question 2

Étudier la convergence de $f_n(x) = n^2 x e^{-nx}$ **pour** $x \geq 0$

Convergence simple :
Pour tout $x \geq 0$ fixé :

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La suite converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
Convergence uniforme :
Calculons la norme infinie :

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \geq 0} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n}{e} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Puisque $\|f_n\|_\infty \not\to 0$, il n'y a **pas de convergence uniforme** sur $[0, +\infty[$.

Question 3

Rayon de convergence de $1 + \frac{x}{3 \times 2} + \frac{x^2}{3^2 \times 3} + \frac{x^3}{3^3 \times 4} + \cdots$

Solution

Terme général :

$$a_n = \frac{1}{3^n (n+1)}, \quad n \geq 0$$

Critère de d'Alembert :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}}{\frac{1}{3^n(n+1)}} = \frac{n+1}{3(n+2)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{3}$$

Conclusion :
Le rayon de convergence est $R = 3$.

Question 4

Développer en série entière $f(x) = e^{x^2}$

Utilisation du développement connu :

$$e^y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{y^k}{k!} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Substitution :

$$f(x) = e^{x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Validité :
Le développement est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Question 5

Déterminer $S = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots$

Expression générale :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)x^n$$

Décomposition :

$$S(x) = 2\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n}_{S_1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{S_2}$$

Calculs :

$$S_2 = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1)$$

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) = x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Somme finale :

$$S(x) = 2 \cdot \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x+1-x}{(1-x)^2} = \mathbf{\frac{1+x}{(1-x)^2}}$$

Valable pour $|x| < 1$.

Question 6

Étudier la convergence des intégrales

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t-1}$
Problèmes en 0^+ **et** $+\infty$

— En $+\infty$: $\frac{1}{e^t-1} \sim e^{-t}$, intégrale convergente
— En 0^+ : $\frac{1}{e^t-1} \sim \frac{1}{t}$, divergence (Riemann)
Conclusion : Divergence (problème en 0)

2. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1} dt$
Problèmes en 0^+ **(**$t \to 0$**) et** $+\infty$

— En $+\infty$: $\left|\frac{\ln t}{t^2+1}\right| \leq \frac{\ln t}{t^2} \sim o(t^{-3/2})$, convergence
— En 0^+ : $\frac{\ln t}{t^2+1} \sim \ln t$, et $\int_0^1 \ln t dt = [-t\ln t + t]_0^1 = -1$, convergence
Conclusion : Convergence