1/XII 2023 Векторные пространства

Векторное (линейное) пр-во над полем F — мн-во V (векторов) с операц. сложения и умнож. на эл-ты поля F (скаляры) со след. св-вами:

1. По сложению — абелева группа.
2. $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$ $\quad \lambda\in F,\ a,b\in V$
3. $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$ $\quad \lambda,\mu\in F,\ a\in V$
4. $(\lambda\mu)a=\lambda(\mu a)$ $\qquad F=\mathbb{R}$ вещ. пр-во
5. $\underset{\substack{\uparrow\\ F}}{1}a=a$ $\qquad F=\mathbb{C}$ компл. пр-во

Вычитание $a-b:=a+(-b)$

Следствия: $\underset{\substack{\uparrow\\ F}}{\lambda}\underset{\substack{\uparrow\\ V}}{0}=\underset{\substack{\uparrow\\ V}}{0}$ $\quad \lambda(a-b)=\lambda a-\lambda b$

$\underset{\substack{\uparrow\\ F}}{0}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ V}}{a}=\underset{\substack{\uparrow\\ V}}{0}$ $\quad (-1)a=-a$

Примеры: 1. $\{0\}$

2. Геом. в-ры на прямой/плоск./пр-ве
3. Координатное (арифм.) пр-во: пр-во столбцов высоты n с элементами F
F^n ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$), операции естеств.
4. $\mathrm{Func}(X,F)$: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
$(\lambda g)(x)=\lambda\cdot g(x)$
5. $\mathbb{C}$ — вект. пр-во над $\mathbb{R}$

6. $M_{m\times n}(F)$ станд операции

7. $\mathbb{R}[x]_n$ многочлены степени $\leq n$

8. $\mathbb{R}[x]_{=n}$ ст. ровно n

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n \quad \lambda_i \in F$$

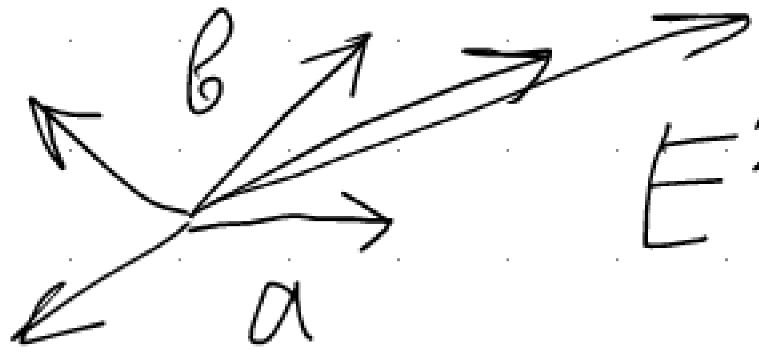
$a_i \in \bar{V}$ коэфф. лин. к

в линейно выраж. через $a_1, \ldots, a_n$ если он равен их лин. комбинации

$2x + 5 = 2 \cdot x^1 + 5 \cdot x^0$

Линейная оболочка мн-ва $S \subseteq V$ - все векторов, кот. представимы в виде лин. комб векторов из S. V порождается мн-вом S, если совпадает с лин. оболочкой мн-ва S

$\langle S \rangle$

1. 

$E^2 = \langle a, b \rangle$

$a \nparallel b$

2. $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$

$$\lambda_1 E_{11} + \lambda_2 E_{22} + \ldots + \lambda_n E_{nn} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

3. $\langle x^2, x, 1 \rangle = \mathbb{R}[x]_2$

Лин. комб $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ <u>тривиальная</u>, если все $\lambda_i = 0$, <u>нетривиальная</u> – в противн. сл.

В-ры $a_1, a_2, \dots, a_k \in V$ назыв <u>линейно зависимые</u> – если сущ их нетривиальная лин. комбинац, равная нулю.

<u>Лин. независимые</u>: $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow$ все $\lambda_i = 0$.

$x^2, 5x, 10x + 8x^2$

$\underset{\neq 0}{-8} \cdot x^2 - \underset{\neq 0}{2} \cdot 5x + \underset{\neq 0}{1} \cdot (10x + 8x^2) = 0$

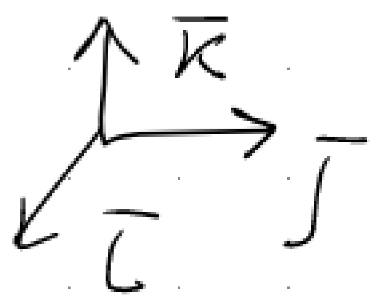
$x^2, x, 1 \in \mathbb{R}[x]_3$ $\quad \overset{=0}{\lambda_1} x^2 + \overset{=0}{\lambda_2} x + \overset{=0}{\lambda} 1 = 0 = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 \cdot 1$

Замечание: <u>система</u> векторов

1 Векторы занумерованы

2 среди них могут быть одинаковые

Пр $e_1 = \bar{i}$ $e_2 = \bar{j}$ $e_3 = \bar{k}$



$e_1 = \bar{j}$ $e_2 = \bar{i}$ $e_3 = \bar{k}$

$e_1 = \bar{i}$ $e_2 = \bar{i}$ $e_3 = \bar{k}$

пустая система { }.

Примеры лин зависимости:

1. Сист из одного вектора a лин зависима

$$\lambda \cdot a = 0$$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow a = 0$ $\Updownarrow$ $a = 0$

2. Сист из двух векторов a и b лин зависима $\Leftrightarrow$ a и b пропорциональны

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0 \ \Big| : \lambda_1 \qquad a = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) b$$

$\lambda_1 \neq 0$ a и b

3. Сист из трёх геом векторов $\Leftrightarrow$ они компланарны

Св-ва лин (не)зависимых систем:

1. Система векторов лин завис $\Leftrightarrow$ хотя бы один из этих векторов явл лин комб остальных

2. Если сист векторов содержит лин завис подсистему, то и вся система лин зависима

3. Если система в-ров лин независима, то и любая ее подсистема лин незав

Базис ~~вект~~ пр-ва V: $\overbrace{e_1, e_2, \ldots, e_n}^{e} \in V$ - система векторов - **базис** V, если каждый в-р из V единств. образом представим в виде лин комбинации в-ров $e_1, \ldots, e_n$

$$V \ni x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e \quad x_i \in F$$

координаты в-ра x в базисе e

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$

Примеры: 1 ненулевой в-р - базис E_1

2 любые два неколлин - базис E_2

3 любые три некомпл - базис E_3

4. F^n: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\mathbb{C}$: $\underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{a}} \cdot 1 + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\uparrow}{b}} \cdot i$ $\{1, i\}$ - базис $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$

6. $M_{m \times n}(F)$: матр. единицы E_{ij}

7. $\mathbb{R}[x]_n$

станд базис: мономы $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$

$(x-a)^n, (x-a)^{n-1}, \dots, (x-a), 1$

6. $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ...

$E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot E_{11} + 3E_{12} +$

$+ \dots + 2E_{23}$

Лемма. Набор $e_1, e_2, \dots, e_n$ порождающий пр-во V, явл базисом $\Leftrightarrow$ он лин. независим.

Док-во: $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$ и не все $\lambda_i = 0$

$+$

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e$

$x = (x_1 + \lambda_1) e_1 + \dots + (x_n + \lambda_n) e_n$ $\quad \underbrace{(x_j + \overset{\neq 0}{\lambda_j})}_{\neq x_j}$

$\overset{\shortparallel}{x + 0}$ 2 разных представл.

$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = \tilde{x}_1 e_1 + \dots + \tilde{x}_n e_n \Rightarrow$

$(x_1 - \tilde{x}_1) e_1 + \dots + (x_n - \tilde{x}_n) e_n = 0$ $\quad x_j - \tilde{x}_j \neq 0$

нетрив. лин. комбинация $\Rightarrow$ лин. завис.

Эквивал. опр. базиса: максимальная (по включению) лин. независ. система, порождающее все пр-во V

Во всех базисах одинаковое <u>кол-во векторов</u> — <u>размерность</u> пр-ва V

$\dim V = n$. Примеры:

1. $\dim\{0\} = 0$
2. $\dim \mathbb{R}[x]_n = n+1$

   $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^1, x^0 = 1$
3. $\dim M_{m\times n}(F) = m \cdot n$

$\dim V < \infty$ конечномерные пр-ва

$\dim V = \infty$ бесконечномерные пр-ва

Пример $\dim V = \infty$. <u>степенные ряды</u> с естеств операциями

базис: $1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots$

Подпространство $U \leq V$ $(U \subseteq V)$ — подмн-во мн-ва V, замкнутое относ операции в V. И само явл пр-вом относ тех же операции

$a, b \in U$ $\quad a+b \in U$ $\quad \lambda a \in U$

Примеры подпр-в:

1. $E_1 \leq E_2 \leq E_3$

2. $\mathbb{R}[x]_{n-1} \leq \mathbb{R}[x]_n$

3. Непр. ф-ции $f: X \to \mathbb{R}$ – $\subseteq \mathbb{R}$

подпр-во в $Func(X, \mathbb{R})$

4. Лин. оболочка любого мн-ва $S \subseteq V$

$\langle S \rangle \leq V$

Св-во монотонности размерности:

$\dim V < \infty \quad U \leq V$

$$\Downarrow$$

$$\dim U \leq \dim V$$

5. $\{0\} \leq V, \quad V \leq V$

(лин. отображения)

Гомоморфизмы вект. пр-в

$\varphi: V_1 \to V_2 \quad \varphi(\lambda a + \mu b) =$

$= \lambda \varphi(a) \underset{\text{в } V_2}{+} \mu \varphi(b)$

Изоморфизм – биективные гомоморфизм.

Все пр-ва одной размерности (над одним полем) изоморфны.

$$\dim V = n \Rightarrow V \simeq F^n$$

(над F) столбцы координат векторов