

## Sistemas de Coordenadas e Transformações

### Problemas Tipo :

1. Dada a matriz de dimensão 3x3

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Mostre que  $R$  é uma matriz de rotação.
  - Determine o vector unitário que define o eixo de rotação e o valor do ângulo de rotação.
  - Quais são os parâmetros de Euler  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  de  $R$ ?
2. O sistema de coordenadas  $\{B\}$  está inicialmente coincidente com o sistema de coordenadas  $\{A\}$ . É efectuada a rotação de  $\{B\}$  sobre  $OY_B$  de um ângulo igual a  $\phi$  graus seguida de uma outra rotação de  $\{B\}$  sobre  $OX_B$  de um ângulo igual a  $\theta$  graus.
- Obtenha a matriz de rotação  ${}^A_B R$ , a qual permite alterar a descrição do vector  $P$  no sistema referencial  $\{B\}$ ,  ${}^B P$ , para o sistema de coordenadas  $\{A\}$ ,  ${}^A P$ .
  - Qual é o resultado se  $\theta = 60^\circ$  e  $\phi = 30^\circ$ ?
  - Obtenha  ${}^A \hat{Z}_B$ .

3. Em geral, a multiplicação de matrizes de transformação homogéneas não é comutativa. Considere o produto matricial que se apresenta

$$H = R_{OX,\alpha} \cdot T_{X,b} \cdot T_{Z,d} \cdot R_{OZ,\theta}$$

- Do conjunto de matrizes que se apresentam à direita da equação, diga quais os pares de matrizes que comutam. Explique as razões que suportam a sua escolha.
- Apresente todas as permutações destas quatro matrizes que se traduzem na mesma matriz de transformação homogénea,  $H$ .

4. Mostre que  $Q_I = (1, 0, 0, 0)$  é o elemento identidade para a multiplicação de quaterniões unitários, i.e.,  $QQ_I = Q_IQ = Q$  para qualquer quaternião unitário  $Q$ .
5. O conjugado  $Q^*$  de um quaternião  $Q$  é definido por  $Q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$ . Mostre que  $Q^*$  é o quaternião inverso de  $Q$ , i.e., mostre que  $Q^*Q = QQ^* = (1, 0, 0, 0)$ .
6. Considere os quaterniões  $Q_x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$  e  $Q_z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Mostre que a rotação do vetor  $x_0$  pelo quaternião composto  $Q_xQ_z$  resulta no vetor  $z_0$ . Confirme que se obtém o mesmo resultado através de  $R_x(\pi/2)R_z(\pi/2)x_0$ .
7. Dois sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação  ${}^A_BT$ , a qual traduz a rotação de  $B$  sobre o eixo  ${}^A\vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$  de um ângulo  $\phi = 45^\circ$ .
  - a. Represente numericamente a matriz de transformação  ${}^A_BT$  e obtenha os ângulos de Roll–Pitch–Yaw equivalentes.
  - b. Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  após se terem realizado os seguintes movimentos:
    - i. Rodar o sistema de coordenadas  $A$  de um ângulo igual a  $\frac{\pi}{3}$  sobre o eixo de rotação  ${}^A\vec{r}$ ;
    - ii. Deslocar o sistema de coordenadas  $B$  em 4 unidades segundo o eixo de rotação  ${}^A\vec{r}$ ;
  - c. Qual o deslocamento a realizar, se na sequência de movimentos da alínea anterior substituir o deslocamento realizado segundo a direção  ${}^A\vec{r}$  por deslocamentos realizados segundo os eixos do sistema referencial  $A$ .
  - d. Apresente graficamente as sequências de movimentos propostas nas alíneas b) e c).
  - e. Qual a expressão que representa a localização da origem do referencial  $B$  após ter realizado os movimentos propostos em b)? Qual a nova localização?
8. Dois sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação  ${}^A_BT$ . O sistema de coordenadas  $A$  encontra-se localizado em  $t = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$  relativamente ao sistema de coordenadas  $B$  e a matriz de rotação  ${}^A_BR$  é representada pelos parâmetros de Euler que se apresentam

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_3 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \quad \varepsilon_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- a) Represente numericamente a matriz de transformação  ${}^A_B T$  e obtenha os ângulos de Roll–Pitch–Yaw equivalentes.
- b) Qual a nova matriz de transformação que relaciona os sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  após se terem realizado os seguintes movimentos:
1. Rodar o sistema de coordenadas  $B$  de um ângulo igual a  $\pi/2$  sobre o eixo de rotação  ${}^B \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ ;
  2. Deslocar o sistema de coordenadas  $A$  em 4 unidades segundo o eixo de rotação  ${}^B \vec{r}$ ;
  3. Rodar o atual sistema de coordenadas  $A$  de um ângulo igual a  $-\pi/2$  sobre o eixo de rotação  $OY_B$ .
- c) Apresente graficamente a sequência de movimentos proposta na alínea b).
- d) Apresente uma sequência alternativa de movimentos que se traduza na mesma matriz de transformação.
9. Dois sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  estão fixos relativamente a um sistema inercial base. Sabendo que  $\hat{X}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{X}_A - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{Z}_A$ ,  $\hat{Y}_B = \hat{Y}_A$ ,  $\hat{Z}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{X}_A + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{Z}_A$ , e que  ${}^A t_{ori_B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ , obtenha:
- a) A sequência de movimento a realizar de modo a recolocar o sistema de coordenadas  $B$  coincidente com o sistema de coordenadas  $A$ , i.e.,  ${}^A_B T = I_{4 \times 4}$ .
  - b) Obtenha os valores do quaternião unitário da matriz  ${}^A_B R$  ( $[e_1, e_2, e_3, e_4]$ ), e com base nos valores obtidos calcule o eixo de rotação arbitrário  ${}^A \vec{r}$  e correspondente ângulo de rotação  $\phi$ .
  - c) Obtenha a transformação  ${}^B_N T$  que resulta da rotação do sistema de coordenadas  $B$  sobre o eixo  ${}^A \vec{r}$  de um ângulo  $\phi$  igual a  $\pi/3$ .
10. Considere o vector,  ${}^A V = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}^T$ , expresso no sistema de coordenadas  $A$ . De que forma o vector se altera se for expresso no referencial  $B$ ? São  ${}^A V$  e  ${}^B V$  o mesmo vector? Comente do ponto de vista das suas magnitudes e direcções. Caso sejam diferentes, de que forma se pode transformar o vector  ${}^A V$  em  ${}^B V$ ? Obtenha  ${}^B V$  partindo do conhecimento de  ${}^A V$ .
11. Considere um espaço de trabalho constituído por um manipulador equipado com uma garra, cuja localização da garra é definida na sua base através da transformação  ${}^0 T = {}^0_6 T {}^6_G T$ . O manipulador está colocado num espaço de trabalho,

sendo a pose do robot nesse espaço definida através de  ${}^w_0T$ . O espaço de trabalho é monitorizado por uma câmara definida por  ${}^w_cT$ , sendo a pose da peça a manusear obtida no referencial da câmara e definida por  ${}^c_oT$ .

Obtenha:

- A transformação  ${}^0_oT$  que assegura a colocação da garra na posição de agarrar a peça;
- A nova transformação  ${}^c_oT$  após o robot ter movido a peça através de uma rotação  $\theta$  segundo o seu eixo  $OZ$ .

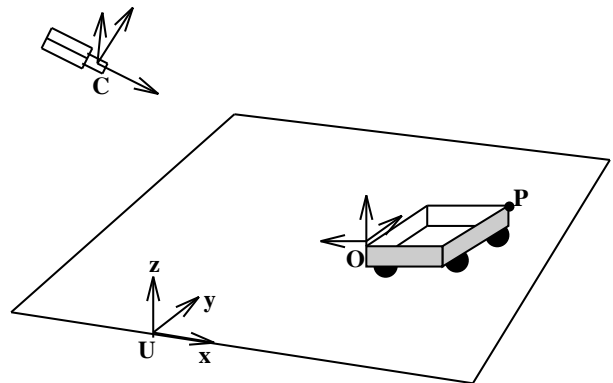
Se após ter movido a peça, rodar a câmara de um ângulo  $\alpha$  sobre o eixo  ${}^w\vec{r} = [1 \ 0 \ 1]^T$ , qual a expressão que representa a nova localização da câmara no referencial da garra ( ${}^{G_N}_cT$ )?

12. Analisando a figura que se apresenta, a qual pretende descrever o universo dos sistemas de coordenadas envolvidos num processo de localização de objectos, identificam-se três sistemas referenciais:

- O sistema referencial  $C$ , acoplado à camara e com o eixo  $OZ$  coincidente com o eixo óptico da câmara;
- O sistema referencial  $O$ , acoplado a uma plataforma que se desloca no espaço de monitorização visual;
- O sistema referencial inercial  $U$ , solidário ao espaço de monitorização.

Sabendo que

$${}^U_cT = \begin{bmatrix} 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & -100 \\ 0.6124 & 0.7071 & 0.3536 & 50 \\ -0.5 & 0 & 0.8660 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



obtenha:

- A sequência de movimentos a efectuar em  $U$  para colocar  $C$  na pose definida por  ${}^U_cT$ .
- Qual a transformação  ${}^c_{c_N}T$  que resulta da rotação de  $C$  sobre o eixo  ${}^U_r = [0.707 \ 0.707 \ 0]^T$  que passa no ponto  ${}^U_p = [1.0 \ 2.0 \ 3.0]^T$ ? (pergunta de selecção)
- Incorporando um manipulador ao ambiente de trabalho, o qual está localizado em  ${}^U_RT$  e com o gripper na pose  ${}^{Actual}_T$ , obtenha a expressão que representa o deslocamento a ser efectuado pelo gripper de modo a se colocar coincidente com a pose do ponto  $P$  ( ${}^{Gripper}_pT$ ), conhecendo  ${}^c_oT$ ?

13. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

1. Deslocação do sistema de coordenadas B em 4 unidades segundo o eixo

$${}^A\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

2. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a  $-\pi/2$  segundo o eixo  ${}^A\vec{r}$ .

3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a  $-\pi/2$  segundo o eixo  $\hat{Z}_B$  do referencial B atual.

a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e.,  ${}^A T_B$ .

b) Represente a sequência de movimentos realizada anteriormente através da conjugação de um movimento translacional puro  $t$  combinado com uma rotação sobre um eixo arbitrário  ${}^A\vec{r}$  de um ângulo  $\phi$ . Obtenha os valores para  $\phi$ ,  $t$  e  ${}^A\vec{r}$ .

14. Considere a existência de dois sistemas de coordenadas A e B, inicialmente coincidentes aos quais é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

1. Rotação do sistema de coordenadas B de um ângulo igual a  $\pi/2$  segundo o

$$\text{eixo } {}^B\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

2. Deslocação do sistema de coordenadas B em três unidades ao longo do eixo  ${}^B\vec{r}$ .

3. Rotação do sistema de coordenadas A de um ângulo igual a  $-\pi/4$  segundo o atual eixo  $\hat{X}_B$ .

a) Obtenha a matriz de transformação que mapeia B em A, i.e.,  ${}^A T_B$ .

b) Considere agora a existência de um terceiro referencial C cuja orientação é idêntica à orientação de B e que se encontra localizado em  ${}^B t_{orig_C} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \end{bmatrix}^T$ . Obtenha a expressão que representa a origem do sistema de coordenadas C no sistema de coordenadas A, i.e.,  ${}^A p_{orig_C}$ . Obtenha a matriz de transformação  ${}^A T_C$ .

c) Se aplicar ao sistema de coordenadas C uma rotação igual a  $\pi/4$  segundo  ${}^B\vec{r}$  centrado na origem de A, qual a nova transformação  ${}^A T_C$ . Considerando que os 3 sistemas de coordenadas {A,B,C}, representam, respectivamente, os sistemas de coordenadas *World*, *Robot* e *Gripper*, obtenha a transformação de movimento a realizar pelo robô para colocar a garra em condição de agarrar uma peça cuja transformação é dada por

${}^{Robot}_{Obj}T$ . Qual o valor da rotação a realizar pela garra segundo o seu eixo de aproximação ( $\hat{Z}_{Gripper}$ ) se  ${}^{Robot}_{Obj}R = I_{3 \times 3}$ ?

15. Dois sistemas de coordenadas  $A$  e  $B$  estão fixos relativamente a um sistema inercial base e estão relacionados pela matriz de transformação

$${}^A_BT = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Obtenha uma sequência de movimentos que se traduza na matriz de transformação previamente apresentada.
- Obtenha a nova matriz de transformação  ${}^A_BT$ , após serem realizados os movimentos complementares apresentados a seguir:
  - Rotação do sistema de coordenadas  $B$  de um ângulo  $\alpha$  segundo o eixo  $OY_{A_{ATUAL}}$ .
  - Deslocação do sistema de coordenadas  $A$  em  $d$  unidades segundo o eixo  $OZ_{B_{INICIAL}}$ .
  - Rotação do sistema de coordenadas  $B$  de um ângulo  $\beta$  segundo o eixo  $OX_{A_{ATUAL}}$ .
- Sabendo que a matriz de transformação que relaciona os dois sistemas de coordenadas, após a sequência de movimentos da alínea a), é representada por

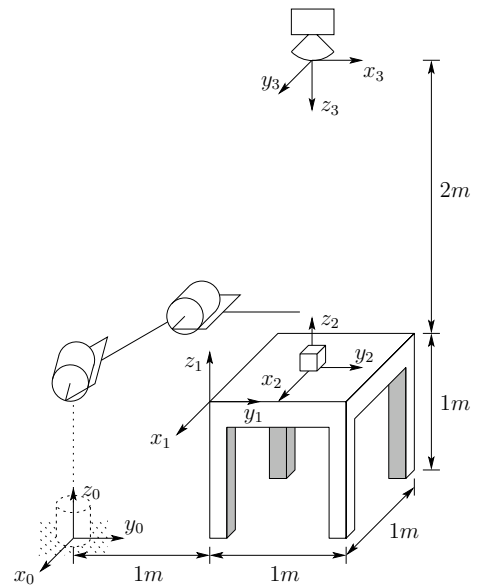
$${}^A_BT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- obtenha os valores de  $(\alpha, \beta, d)$  que conduzem à matriz apresentada. Confirme o resultado graficamente.
- Apresente uma sequência alternativa de movimentos, composta apenas por uma rotação e uma translação, que se traduza na mesma matriz de transformação

16. Considere o diagrama da figura anexa. Um manipulador é colocado afastado um metro de uma mesa de trabalho com altura de  $1m$  e área igual a  $1m^2$ . Um sistema de coordenadas  $o_1, x_1, y_1, z_1$  é colocado num dos cantos da superfície da mesa, e um cubo com  $20cm$  de lado é colocado no centro da mesa com o sistema de coordenadas  $o_2, x_2, y_2, z_2$  colocado no centro de massa do cubo. A inspecionar a cena é colocada uma câmara a  $2m$  de distância da mesa e alinhada perpendicularmente à sua superfície, tendo a câmara acoplado o

sistema referencial  $o_3, x_3, y_3, z_3$  onde o eixo  $\overrightarrow{o_3 z_3}$  está alinhado com o centro do cubo.

- Obtenha as transformações homogêneas que relacionam cada um dos sistemas referenciais ao sistema referencial base  $o_0, x_0, y_0, z_0$ .
- Se após a calibração da câmara, rodar a câmara  $30^\circ$  sobre o eixo  ${}^2\vec{r} = [-1, -1, +1]^T$ , qual a nova transformação que relaciona a câmara com o referencial base?
- Se pretender compensar o deslocamento espacial sofrido pela câmara após a rotação aplicada, quais as deslocamentos a impor à câmara, sobre os seus próprios eixos, para a recolocar na localização inicial?



---

## LABWORK #1

*Data de Entrega: 14 de Outubro 2018*

A componente laboratorial desta disciplina é realizada tirando partido da *toolbox ROBOTICS* desenvolvida pelo professor *Peter Corke*. Para tal deverá instalar a *toolbox* na sua plataforma de trabalho, a qual pode ser descarregada no endereço [http://www.petercorke.com/Robotics\\_Toolbox.html](http://www.petercorke.com/Robotics_Toolbox.html).

Siga as instruções descritas na página de acesso para integrar as funções da *toolbox* no seu ambiente de trabalho MATLAB.

### 1. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #1)

Considere a existência de um objecto tridimensional de dimensão  $(1 \times 1 \times 1)$  colocado num espaço de trabalho (*World*) de dimensão  $[-10..10, -10..10, -10..10]$ . O objecto tem um sistema de coordenadas ortonormado acoplado a um dos seus vértices e está localizado no espaço de trabalho na seguinte configuração:

$${}^{World}T_{Object} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Explorando as potencialidades das funções *trinterp*, *ctray* e *mtraj* da *toolbox ROBOTICS*, ou desenvolvendo funções próprias, desenvolva uma aplicação em matlab que permita visualizar os movimentos do objecto quando lhe é aplicada a seguinte sequência de movimentos:

1. Rotação de  $30^\circ$  sobre o eixo OX do sistema de coordenadas *World*;
2. Deslocação de 3 unidades sobre o eixo OZ do atual sistema de coordenadas *Object*;
3. Rotação de  $-45^\circ$  sobre o eixo  $[1, -1, 1]$  do sistema de coordenadas *Object* inicial;
4. Rotação de  $90^\circ$  do sistema de coordenadas *World* sobre o seu próprio eixo OZ.

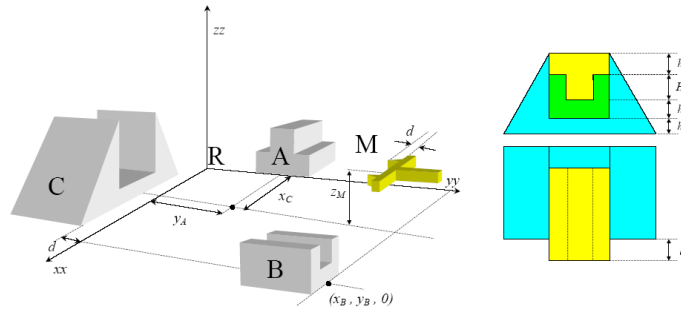
### 2. EXERCÍCIO MATLAB (Aula Laboratorial #2)

Considere o ambiente de trabalho que se apresenta, onde o objectivo é usar a garra de uma manipulador colocada em **M** para executar a seguinte sequência de acções:

1. Pegar no objecto **A**;
2. Inserir-lo no objecto **B**;
3. Encaixar o conjunto no objecto **C**;
  - a) A partir da figura, convencionar os referenciais associados a **M**, **A**, **B** e **C**, representá-los, e indicar quais as transformações geométricas que os representam no referencial **R**.



- b) Indicar uma sequência de transformações geométricas que permita cumprir os objectivos propostos ( $M \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$ ) segundo o ponto de vista do manipulador, ou, em alternativa, do ponto de vista do referencial R.



Explore as funcionalidades das funções *trinterp*, *ctray* e *mtraj* da toolbox ROBOTICS na realização do problema.

### 3. EXERCÍCIO MATLAB (Aula laboratorial #2)

Sabendo que a matriz de transformação que modela um elo (*link*) de um manipulador é representada por

$${}^{i-1}_i A = \begin{bmatrix} c_{\theta_i+off} & -s_{\theta_i+off} \cdot c_{\alpha_i} & s_{\theta_i+off} \cdot s_{\alpha_i} & a_i \cdot c_{\theta_i+off} \\ s_{\theta_i+off} & c_{\theta_i+off} \cdot c_{\alpha_i} & -c_{\theta_i+off} \cdot s_{\alpha_i} & a_i \cdot s_{\theta_i+off} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde  $[\theta_i, d_i, \alpha_i, a_i]_{i=1..n}$  representam os 4 parâmetros de Denavith–Hartenberg, elabore um programa em Matlab que desenhe o esquemático de um manipulador na sua configuração “home” e que efetue a animação de movimento do manipulador mediante a interação nas suas variáveis de junta  $[\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5]$ . Para tal, considere que conhece a tabela de parâmetros D–H dos elos do manipulador. Para efeitos demonstrativos, use como exemplo a tabela de D–H que se apresenta e que corresponde ao manipulador (RRR–RR)

	$\theta_i$	$d_i$	$a_i$	$\alpha_i$	Offset	$R/T$	Range	
${}^0T_1(0 \rightarrow 1)$	$\theta_1$	0	0	$\pi/2$	$0_{rad}$	R	$[-\pi/2 \dots \pi/2]$	
${}^1T_2(1 \rightarrow 2)$	$\theta_2$	0	4	$0_{rad}$	$\pi/2$	R	$[-\pi/3 \dots \pi/4]$	
${}^2T_3(2 \rightarrow 3)$	$\theta_3$	0	2	$0_{rad}$	$0_{rad}$	R	$[-\pi/2 \dots \pi/2]$	
${}^3T_4(3 \rightarrow 4)$	$\theta_4$	0	0	$-\pi/2$	$-\pi/2$	R	$[-\pi/2 \dots \pi/2]$	
${}^4T_G(4 \rightarrow G)$	$\theta_5$	1	0	$0_{rad}$	$0_{rad}$	R	$[-\pi \dots \pi]$	