

2024-2025 - IngéSUP - Systèmes Techniques  
*Midterm - Systèmes Mécaniques - Cinématique (**Corrigé**)*  
Durée : 2 heures

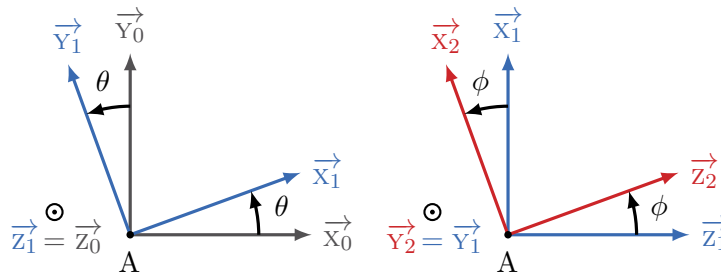
ESME Bordeaux-Lille-Lyon-Paris





## Exercice 1 : Dérivation Vectorielle (5 pts)

On considère trois repères de bases  $(R_0, R_1, R_2)$  déduits les uns des autres par rotation comme le précisent les deux figures planes de calcul suivantes :



On se donne le vecteur  $\overrightarrow{AP}$  tel que :

$$\overrightarrow{AP} = \rho(t)\vec{x}_2$$

L'objectif de cet exercice est d'appliquer les règles de calculs de la dérivation vectorielle pour déterminer la variation de ce vecteur dans la base 0.

**Q1. Donner le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{1/0}$  et  $\overrightarrow{\Omega}_{2/1}$  [1 pt]**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega}_{1/0} &= \dot{\theta}\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{\Omega}_{2/1} &= \dot{\phi}\vec{y}_1\end{aligned}$$

**Q2. Déterminer le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega}_{2/0}$  [1 pt]**

$$\overrightarrow{\Omega}_{2/0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{y}_1$$

**Q3. Donner la dérivée du vecteur unitaire  $\vec{x}_2$  par rapport aux vecteurs de base  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . [1.5 pts]**

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = \overrightarrow{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{x}_2 = \dot{\theta}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{y}_2 \wedge \vec{x}_2$$

$$\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\phi}\vec{z}_2 + \dot{\theta}\cos\phi\vec{y}_1$$

**Q4. À partir des résultats précédents, déterminer la dérivée du vecteur  $\left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_{R_0}$ . [1.5 pts]**

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\rho}\vec{x}_2 + \rho\left[\frac{d\vec{x}_2}{dt}\right]$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AP}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\rho}\vec{x}_2 + \rho\dot{\theta}\cos\phi\vec{y}_2 - \rho\dot{\phi}\vec{z}_2$$

## Exercice 2 : Cinématique d'un moulin à farine (10 pts)

Le dispositif utilisé pour écraser les graines de céréales comporte trois solides principaux, présentés sur l'ébauche de schéma ci-dessous :

- Au bâti **1** est associé le repère  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- L'arbre **2** est lié au bâti 1 par une liaison pivot glissant d'axe  $(O, \vec{z}_1)$ . On lui associe le repère  $R_2(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ , tel que  $\vec{z}_2 = \vec{z}_1$  ; on pose  $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  et  $\vec{OB} = \mu \vec{z}_1$ . La distance OB n'est pas fixe pour permettre au mécanisme de fonctionner.
- La meule **3**, de rayon  $R$ , est liée à l'arbre **2** par une liaison pivot d'axe  $(B, \vec{x}_2)$ . On lui associe le repère  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ , tel que  $\vec{x}_3 = \vec{x}_2$  et on pose  $\beta = (\vec{y}_2, \vec{y}_3)$ .
- Finalement, la meule **3** est en contact avec le bâti par une liaison linéaire rectiligne (ou dites encore cylindre/plan) d'axe  $(B, \vec{x}_3)$

Soit I l'un des points de contact appartenant au segment de la tranche de la meule, on pose  $\vec{OI} = \lambda \vec{x}_2$ .

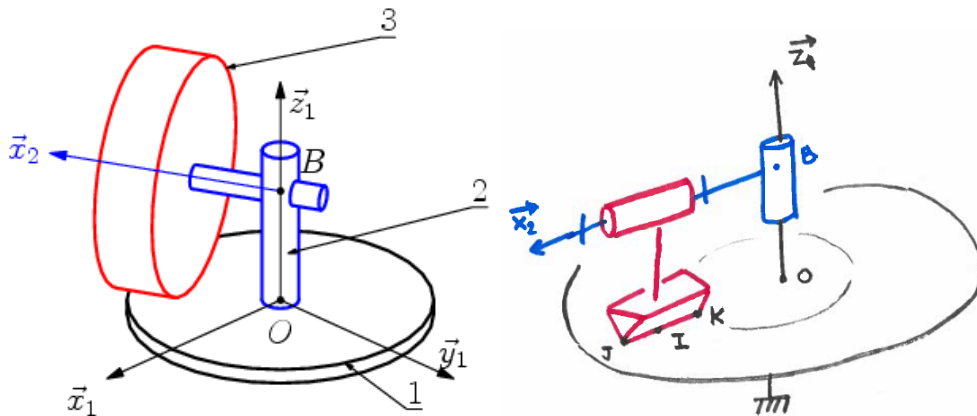
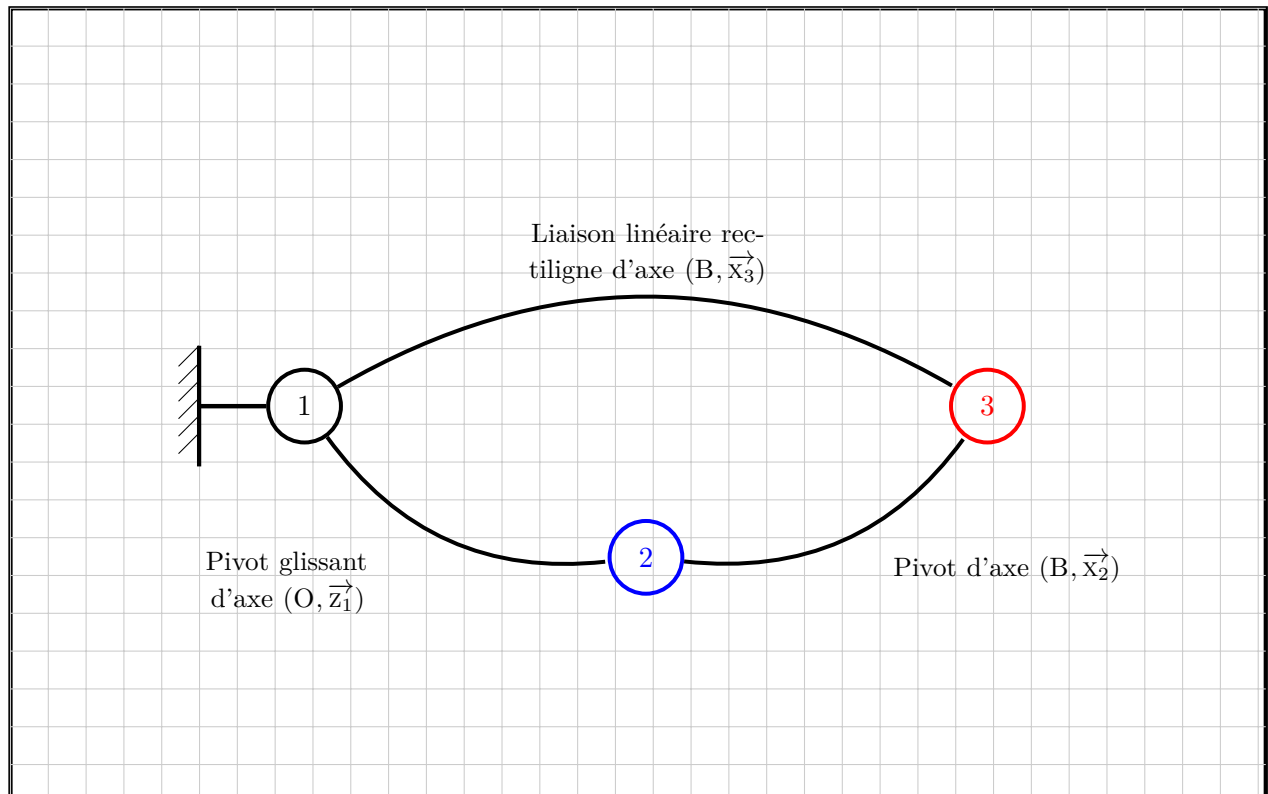
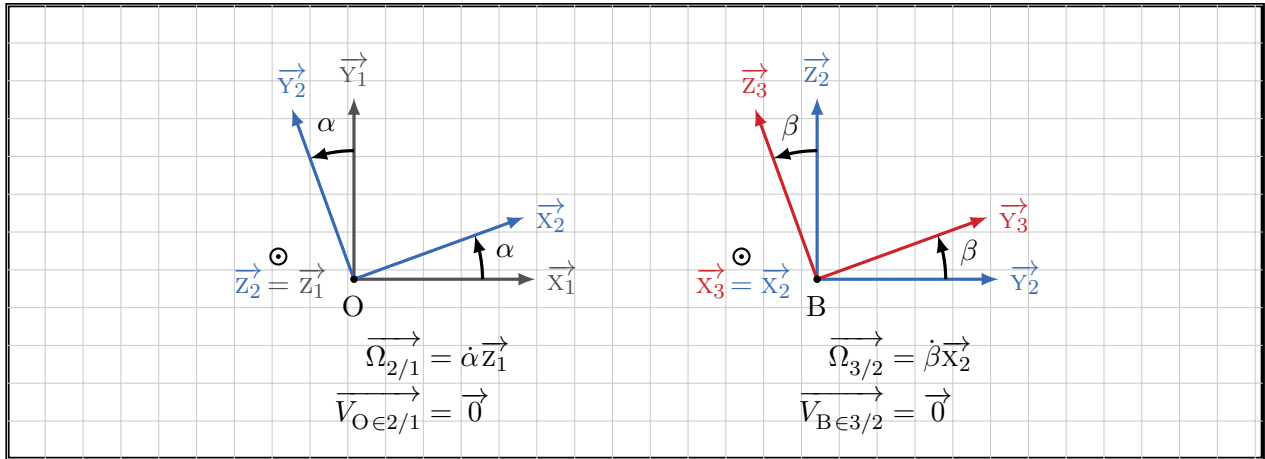


FIGURE 1 – (à gauche) Ebauche d'un moulin à farine (à droite) et son schéma cinématique.

Q1. Tracer le graphe de liaison de ce mécanisme [1pt]



Q2. Tracer les figures planes permettant de représenter les paramètres d'orientation. [2 pts]



Q3. Donner les torseurs cinématiques associés aux mouvements des solides 2/1 et 3/2 au point B (c'est à dire ceux associés aux pivots). *Attention la distance OB n'est pas fixe* :  $\vec{OB} = \mu(t) \vec{z}_1$  [2 pts]

$$\left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{B \in 2/1} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha} \vec{z}_1 \\ \mu \dot{z}_1 \end{array} \right\}_B$$

$$\left\{ \mathcal{V}_{3/2} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{3/2} \\ \vec{V}_{B \in 3/2} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \vec{x}_2 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

Q4. Déterminer les vitesses  $\vec{V}_{I \in 2/1}$  et  $\vec{V}_{I \in 3/2}$ . [2 pts]

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \vec{BI} = \mu \dot{z}_1 + \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_2$$

$$\vec{V}_{I \in 3/2} = \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{BI} = \mu \dot{\beta} \vec{y}_2$$

**Q5. Déterminer la vitesse  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}}$  par composition du mouvement. [1 pt]**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} &= \overrightarrow{V_{I \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} \\ \overrightarrow{V_{I \in 3/1}} &= (\lambda\dot{\alpha} + \mu\dot{\beta})\overrightarrow{Y_2} + \dot{\mu}\overrightarrow{Z_1}\end{aligned}$$

**Q6. Dans quel cas cette vitesse est orthogonal à  $\overrightarrow{z_1}$  ? Autrement dit, déterminer la condition pour que  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$ . [1 pt]**

$$\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mu} = 0$$

La distance entre OB doit être une constante.

**Q7. Que devient la vitesse  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}}$  pour  $\dot{\mu} = 0$  ? Et dans ce cas, déterminer une relation pour que  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = \overrightarrow{0}$  [1 pt]**

Si  $\dot{\mu} = 0$  alors :

$$\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = (\lambda\dot{\alpha} + \mu\dot{\beta})\overrightarrow{Y_2}$$

et donc on a  $\overrightarrow{V_{I \in 3/1}} = \overrightarrow{0}$  si :

$$(\lambda\dot{\alpha} + \mu\dot{\beta}) = 0$$