

2024-2025 - IngéSUP - Mathématiques Fondamentales

*MidTerm - Algèbre Linéaire (**Corrigé**)*

Durée : 2 heures

ESME Bordeaux-Lille-Lyon-Paris





## Exercice 1 : Diagonalisation d'une matrice 3x3

On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Q1. Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

### Étape 1 : Calcul du polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique est donné par :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 2 & -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

En développant selon la dernière colonne :

$$(2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

Le déterminant du mineur  $2 \times 2$  est :

$$(1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Ainsi, l'équation caractéristique est :

$$(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

### Étape 2 : Détermination des valeurs propres et vecteurs propres

Les solutions de  $(1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$  sont :

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Les vecteurs propres associés sont :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On construit la matrice  $P$  dont les colonnes sont ces vecteurs propres, et la matrice diagonale  $D$  est :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## Exercice 2 : Opérations sur les polynômes

Soient  $a, b$  des réels, et considérons le polynôme :

$$P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1.$$

**Q1.** Déterminer les valeurs de  $a$  et  $b$  pour lesquelles  $P(X)$  est le carré d'un polynôme à coefficients réels, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme  $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$P(X) = (Q(X))^2.$$

Si  $P = Q^2$  est le carré d'un polynôme, alors  $Q$  est nécessairement de degré 2, et son coefficient dominant est égal à 1 ou à  $-1$ . Dans le premier cas, on peut donc écrire :

$$Q(X) = X^2 + cX + d.$$

On a alors :

$$Q^2(X) = X^4 + 2cX^3 + (2d + c^2)X^2 + 2cdX + d^2.$$

Par identification avec  $P(X) = X^4 + 2aX^3 + bX^2 + 2X + 1$ , on obtient le système :

$$2c = 2a, \quad 2d + c^2 = b, \quad 2cd = 2, \quad d^2 = 1.$$

On en déduit que  $c = a$  et  $d = \pm 1$ . - Si  $d = 1$ , alors  $c = 1$ , donc  $a = 1$  et  $b = 3$ . - Si  $d = -1$ , alors  $c = -1$ , donc  $a = -1$  et  $b = -1$ .

Les deux solutions sont donc :

$$P_1(X) = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 = (X^2 + X + 1)^2,$$

$$P_2(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X + 1 = (X^2 - X - 1)^2.$$

Dans le deuxième cas, on écrit  $Q(X) = -R(X)$  avec  $R(X) = X^2 + cX + d$ , de sorte que :

$$Q^2(X) = R^2(X).$$

On retrouve alors en réalité le cas précédent.