2024-2025 - IngéSUP - Systèmes Techniques

Examen Final - Systèmes Mécaniques

Durée : 2 heures

ESME Bordeaux-Lille-Lyon-Paris

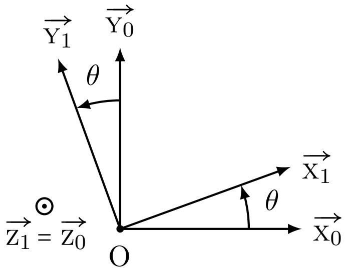
Documents non autorisés.

Moyens de calculs non autorisés.

Le ou la candidate qui décèle ce qu'il ou elle pense être une erreur d'énoncé doit indiquer toutes les dispositions et initiatives qu'il ou elle est amené à prendre pour poursuivre son travail.

Exercice 1 : Produits scalaire et vectoriel (2pts)

Soit un repère orthonormé direct $R_1(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{X_1}},\overrightarrow{\mathrm{Y_1}},\overrightarrow{\mathrm{Z_1}})$ orienté d'un angle θ par rapport à un second repère orthonormé direct $R_0(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{X_0}},\overrightarrow{\mathrm{Y_0}},\overrightarrow{\mathrm{Z_0}})$ tel que θ soit l'angle entre les vecteurs de bases $(\overrightarrow{\mathrm{X_0}},\overrightarrow{\mathrm{X_1}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{Y_0}},\overrightarrow{\mathrm{Y_1}})$ et avec les deux vecteurs confondus $\overrightarrow{\mathrm{Z_0}} = \overrightarrow{\mathrm{Z_1}}$.



Q1. Donner le résultat des trois produits scalaires suivants : $\overrightarrow{\mathrm{X_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_1}}$, $\overrightarrow{\mathrm{X_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Z_1}}$ [0.5 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{X_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_1}} = \cos\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{X_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Y_1}} = 0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Z_1}} = 1$$

Q2. Donner le résultat des trois produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{\mathrm{X_0}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$, $\overrightarrow{\mathrm{X_1}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Z_1}}$ [0.5 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{X_0}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Y_0}} = \overrightarrow{\mathrm{Z_0}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{X_1}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Y_1}} = \overrightarrow{\mathrm{Z_1}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Z_1}} = \overrightarrow{0}$$

On définit un vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ tel que $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{X_1}} + 2\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}}$

Q3. Donner le résultat des trois produits scalaires suivants : $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_0}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_1}}$ [0.5 pt]

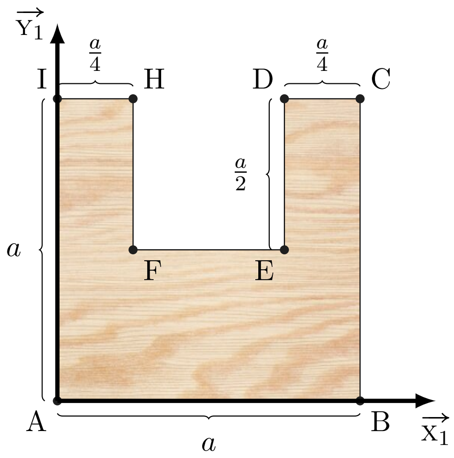
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_0}} = \cos\theta - 2\sin\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Y_0}} = \sin\theta + 2\cos\theta$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{X_1}} = 1$$

Q4. Donner le résultat des trois produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{X_0}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{X_1}}$ [0.5 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{X_0}} = (-\sin\theta - 2\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{Y_0}} = -\sin\theta\overrightarrow{\mathrm{Z_0}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\times\overrightarrow{\mathrm{X_1}} = -2\overrightarrow{\mathrm{Z_1}}$$

Exercice 2 : Calcul vectoriel et centre de masse (5pts)

On étudie une plaque de bois (d'épaisseur négligeable) de masse surfacique homogène. La géométrie de masse sera donnée dans le repère associé $R_1(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{X_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Z_1}})$ comme représenté ci-dessous. Rappel : la masse d'une plaque de surface S de ce matériau sera donnée par $m = \sigma S$, où σ est la masse surfacique.



Q1. Donner les vecteurs positions des points C,D et F dans le repère $R_1(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{X_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Z_1}})$ [1 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = a\overrightarrow{\mathrm{X_1}} + a\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{3a}{4}\overrightarrow{\mathrm{X_1}} + a\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{a}{4}\overrightarrow{\mathrm{X_1}} + \frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$$

Q2. Donner la masse totale de la plaque en fonction des paramètres de la plaque, σ et a [1 pt]

$$S = \frac{3}{4}a^2$$
$$M = \sigma\frac{3}{4}a^2$$

On rappel que le centre de masse $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ d'un ensemble de solides $\mathcal{S}_i$ de masse m_i et de centre de masse G_i est donnée par :

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{AG}_i}.$$

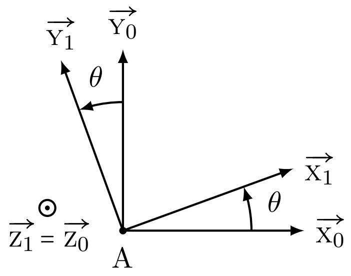
Par exemple un solide composé de deux plaques rectangulaires posséde un centre de masse donné par le vecteur posision $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{M}\left(m_1\overrightarrow{\mathrm{AG_1}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{AG_2}}\right)$, où $M = m_1 + m_2$.

Q3. Donner le centre de masse de la plaque, représenté par le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, dans le repère $R_1(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{X_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_1}}, \overrightarrow{\mathrm{Z_1}})$ [1 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{a}{2}\overrightarrow{\mathrm{X_1}} + \frac{5a}{12}\overrightarrow{\mathrm{Y_1}}$$

On considère maintenant la rotation de cette plaque autour de l'axe $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{Z_0}})$ d'un repère fixe $R_0(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{X_0}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_0}}, \overrightarrow{\mathrm{Z_0}})$. On notera θ, l'angle entre les vecteurs de bases $(\overrightarrow{\mathrm{X_0}}, \overrightarrow{\mathrm{X_1}})$ et $(\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_1}})$.

Q4. Tracer la figure plane permettant de représenter cette rotation. [1 pt]



Q5. À partir de cette représentation, donner le vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ dans le repère fixe $R_0(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{X_0}}, \overrightarrow{\mathrm{Y_0}}, \overrightarrow{\mathrm{Z_0}})$. [1 pt]

$$\overrightarrow{\mathrm{X_1}} = \cos\theta\overrightarrow{\mathrm{X_0}} + \sin\theta\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Y_1}} = -\sin\theta\overrightarrow{\mathrm{X_0}} + \cos\theta\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{a}{2}\left(\cos\theta\overrightarrow{\mathrm{X_0}} + \sin\theta\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}\right) + \frac{5a}{12}\left(-\sin\theta\overrightarrow{\mathrm{X_0}} + \cos\theta\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \left(\frac{a}{2}\cos\theta - \frac{5a}{12}\sin\theta\right)\overrightarrow{\mathrm{X_0}} + \left(\frac{a}{2}\sin\theta + \frac{5a}{12}\cos\theta\right)\overrightarrow{\mathrm{Y_0}}$$