



UiO : **Department of Informatics**  
University of Oslo

## Transformanalyse og enkle filtre

Kapittel 3.7, 5.6, 6.1 & 6.2.0 i Rao & Swamy

Sven Peter Näsholm og Andreas Austeng

September 2021



# I korte trekk ...

## 1 Frekvensresponsen

- Egenfunksjoner og egenverdier
- Frekvenstransformasjonen

## 2 $\mathcal{Z}$ -transformen

- Fra forrige uke ...
- Plotting av systemfunksjon
- Kausalitet og stabilitet

## 3 Dekonvolusjon og Inverse filtre

- Allpassfiltre
- Minimum- / maximum- / mixed-fase systemer

## 4 Filtre

- Poler/nullpunkter, lineær fase og ideelle filtre
- Design av enkle FIR-filtre fra nullpunktsplassering
- Design av enkle IIR-filtre fra pol- og nullpunktsplassering

# Egenfunksjoner og egenverdier

- En sekvens er sagt å være en egenfunksjon til et system hvis

- 1 Responsen til inngangssekvensen  $x(n)$
- 2 er utgangssekvensen  $y(n) = \lambda x(n)$
- 3 hvor  $\lambda$ , egenverdien, generelt avhenger av inngangssekvensen  $x(n)$ .

- Det betyr;

Egenfunksjoner er sekvenser som, når de presenteres som inngangssignal til systemet, passerer gjennom systemet og bare forandres i (kompleks) amplitude.

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = \lambda x(n)$$

## Egenfunksjoner til LTI systemer, $x(n) = e^{jn\omega}$ , $\forall n$

■ La  $x(n) = e^{jn\omega}$ ,  $-\infty < n < \infty$ ,  $\omega \in [-\pi, \pi]$ .

■ Da har vi at

$$\begin{aligned}y(n) &= h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} = e^{jn\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega} \\&= H(e^{j\omega})e^{jn\omega} = H(e^{j\omega})x(n).\end{aligned}$$

■ Dvs at egenfunksjonen til et LTI system er

$$x(n) = e^{jn\omega}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \omega \in [-\pi, \pi].$$

■ og egenverdien,  $H(e^{j\omega})$ , er

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega}.$$

# Frekvenstransformasjonen

- Så, hvis inngangssignalet  $x(n)$  til et LTI-system er en kompleks eksponensial, vil utgangssignalet  $y(n)$  være likt inngangssignalet bortsett fra en kompleks skalering i amplitude.
- Amplitudeskaleringen er gitt ved  $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega}$ .
- $H(e^{j\omega})$  er generelt en **kompleks** størrelse, dvs

$$H(e^{j\omega}) = H_{\Re}(e^{j\omega}) + jH_{\Im}(e^{j\omega}),$$

$$\text{eller } H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\Phi(\omega)},$$

$$\text{hvor } |H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = H_{\Re}^2(e^{j\omega}) + H_{\Im}^2(e^{j\omega})$$

$$\text{og } \Phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_{\Im}(e^{j\omega})}{H_{\Re}(e^{j\omega})}.$$

- $H(e^{j\omega})$  **avhenger** av frekvensen  $\omega$ .

# Frekvenstransformasjonen ...

- $H(e^{j\omega})$  kalles **Frekvenstransformasjonen**.
- Den viser hvordan en kompleks eksponensial forandres i (kompleks) amplitude når den filtreres av systemet.
- Den er særdelses nyttig hvis vi kan dekomponere inngangssignalet  $x(n)$  inn i en sum av komplekse eksponensialer.
  - Responsen til

$$x(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_h e^{-jn\omega_k}$$

- vil bli

$$y(n) = \sum_{k=1}^N H(e^{jn\omega_k}) \alpha_h e^{-jn\omega_k}.$$

- Gruppforsinkelsen  $\tau_g(\omega)$ , dvs forsinkelsen på hele signalet  $x(n) = \sum_{k=1}^N \alpha_h e^{-jn\omega_k}$ :

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}.$$

## Example (Fase og gruppe forsinkelse)

Betrakt følgende LTI-system med enhetsrespons

$$h(n) = \alpha^n u(n), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| < 1.$$

Frekvensresponsen er da

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-jn\omega} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha e^{j\omega})^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}. \end{aligned}$$

Kvadrert magnitude til  $H(e^{j\omega})$  er

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})|^2 &= \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - \alpha e^{j\omega}} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}, \end{aligned}$$

og fasen er

$$\Phi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1} \frac{-\alpha \sin \omega}{1 - \alpha \cos \omega}.$$

Gruppeforsinkelsen er da gitt som

$$\tau_g(\omega) = -\frac{\alpha^2 - \alpha \cos \omega}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega}.$$

## Definition av $\mathcal{Z}$ -transformen

- $X(z) \equiv \mathcal{Z}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ ,  
hvor  $z = re^{j\omega}$  er en kompleks variabel.
- Dette er en uendelig potensrekke; den eksisterer bare for de verdiene av  $z$  hvor rekken konvergerer.  
 $\Rightarrow$  **Region Of Convergence (ROC)**;  
er den mengden punkter hvor  $X(z)$  antar en endelig verdi.
- Notasjon:

$$x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

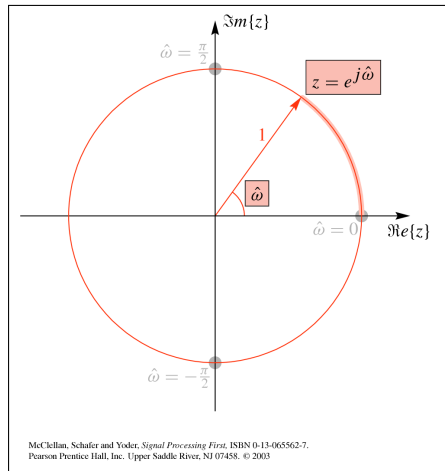


## Definition av $\mathcal{Z}$ -transformen ...

- $\mathcal{Z}$ -transformen er en kompleks variabel. Det er nyttig å beskrive den ved hjelp av det komplekse  $z$ -planet.
- $z = \text{Re}(z) + j\text{Im}(z) = r e^{j\omega}$
- $\mathcal{Z}$ -transformasjonen evaluert på **enhetssirkelen** korresponderer til DTFT'en:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}}$$

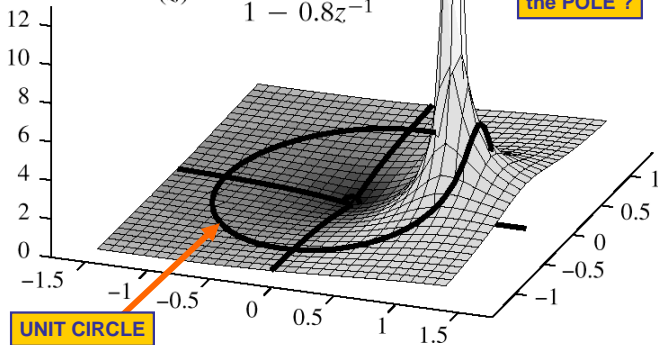
- **Hvis DTFT'en eksisterer, må enhetssirkelen ligge inne i ROC**



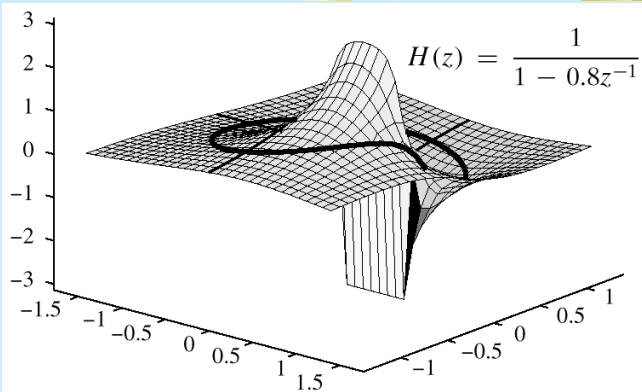
**3-D VIEWPOINT:  
EVALUATE  $H(z)$  EVERYWHERE**

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

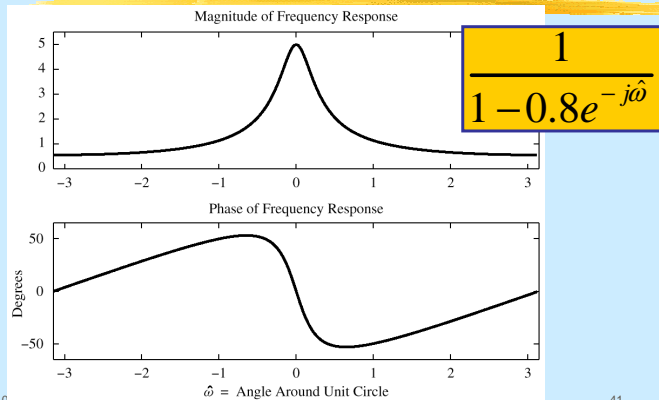
**WHERE is  
the POLE ?**



## PHASE from 3-D PLOT



## FREQ. RESPONSE from $H(z)$



## Definition av $\mathcal{Z}$ -transformen ...

- Mange signaler i digital signalbehandling har  $\mathcal{Z}$ -transform som er en rational funksjon av  $z$ :

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{l=0}^N a_l z^{-l}} = \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \times \frac{z^M + (b_1/b_0)z^{M-1} + \dots + b_M/b_0}{z^N + (a_1/a_0)z^{N-1} + \dots + a_N/a_0} \\&= \frac{b_0 z^{-M}}{a_0 z^{-N}} \times \frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_M)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_N)} = \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z-z_k)}{\prod_{k=1}^N (z-p_k)}\end{aligned}$$

- Røtter til tellerpolynomet  $z_k$  refereres til som **nullpunkter** til  $X(z)$ .
- Røtter i nevnerpolynomet  $p_k$  refereres til som **poler** til  $X(z)$ .
- Poler og nullpunkter definerer unikt den funksjonelle formen til en rasjonal  $\mathcal{Z}$ -transform på en konstant nær.
- **FIR-system**: Et system med bare nullpunkter, dvs  $X(z) = B(z)$ .  
FIR: Finite Impulse Response.
- **IIR-system**: Et system med poler, dvs  $X(z) = \frac{1}{A(z)}$  eller  $X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ .  
IIR: Infinite Impulse Response.

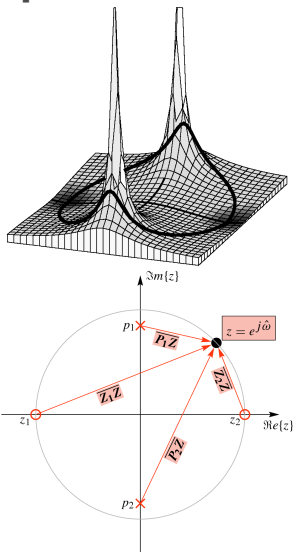
# Estimering av $|H(e^{j\omega})|$ fra poler og nullpunkter

- Gitt  $H(z) = G \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)}$ , hvor  $G$  er forsterkningen.
- Identifiser som vektorer i  $z$ -planet:

$$\overline{Z_k Z} = |e^{j\omega} - z_k| e^{j\Theta_k(\omega)} \text{ og}$$

$$\overline{P_k Z} = |e^{j\omega} - p_k| e^{j\Phi_k(\omega)}.$$

- Da er  $|H(e^{j\omega})| = |G| \frac{|e^{j\omega} - z_1| |e^{j\omega} - z_2|}{|e^{j\omega} - p_1| |e^{j\omega} - p_2|} = |G| \frac{|\overline{Z_1 Z}| \cdot |\overline{Z_2 Z}|}{|\overline{P_1 Z}| \cdot |\overline{P_2 Z}|}$ ,
- og  $\angle H(e^{j\omega}) = \angle G + \Theta_1 + \Theta_2 - \Phi_1 - \Phi_2$ .
- Når vi går rundt enhetssirkelen, forandres vektorene lengde og vinklene.



## Kausalitet og stabilitet

- ROC av en kausal sekvens er utsiden av en sirkel:  $|z| > a$ .
- Et system er BIBO-stabilt hvis "bounded input" gir "bounded output".
  - Dvs at et inngangssignal  $|x(n)| \leq A < \infty$  gir et utgangssignal  $|y(n)| \leq B < \infty$ .
  - Da gjelder:  $|y(n)| = |\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)| \leq A \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)|$
  - og en nødvendig betingelse er gitt som  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| \leq B < \infty$ .
  - Det kan bli vist at dette også er en tilstrekkelig betingelse!
- Absolutt summerbarhet av impulsresponsen  $h(n)$  garanterer eksistensen til dens Fourier transform (DTFT):
  - $|H(z)| = |\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)||z^{-n}|$ ,
  - og på enhetssirkelen reduseres dette til  $|H(z)|_{z=e^{j\omega}} = |H(e^{j\omega})| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)|$ .
  - Dvs at hvis  $h(n)$  tilfredsstiller kravet til BIBO-stabilitet, så eksisterer dens DTFT.
  - Derfor: ROC til  $H(z)$  til et digitalt filter inneholder enhetssirkelen.
  - Omvendt: Hvis ROC til  $H(z)$  inneholder enhetssirkelen er filteret BIBO-stabilt.
- Kausale stabile filtre har alle poler på innsiden av  $|z| = 1$ .

# Dekonvolusjon og Inverse filtre

- Kaskade av to LTI-systemer:  $x(n) \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \longrightarrow v(n) \longrightarrow \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)$

$$h(n) = h_1(n) * h_2(n) \xleftrightarrow{Z} H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

- **Dekonvolusjon:**

Hvis  $H_1(z)$  er kjent, finnes et filter  $H_2(z)$  som fjerner effekten (konvolusjon) av det første?

$$Y(z) = H_1(z)H_2(z)X(z) = H(z)X(z) = X(z).$$

- Hvis så, må  $H(z) = H_1(z)H_2(z) = 1$  (dvs  $h_1(n) * h_2(n) = \delta(n)$ ) og

- $H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$

- Dette gir at

- Hvis  $H_1(z) = B(z)$ , (dvs FIR), så er  $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = 1/B(z)$  (dvs IIR).
- Hvis  $H_1(z) = 1/A(z)$ , (dvs IIR), så er  $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = B(z)$  (dvs FIR).
- Hvis  $H_1(z) = B(z)/A(z)$ , (dvs IIR), så er  $H_2(z) = H_1^{-1}(z) = A(z)/B(z)$  (dvs IIR).



# Dekonvolusjon og Inverse filtre ...

## ■ Konsekvenser:

- Poler i  $H_1(z)$  blir nullpunkter i  $H_2(z) = H_1^{-1}(z)$  og vice versa.
- ROC for et invers system er bestemt av kravet om at  $H_1(z)$  og  $H_2(z)$  må ha overlappende ROC'er.
- $H_2(z)$  trenger ikke ende opp som stabil (bli ustabil) eller implementerbar (bli ikke-kausal).
- $H_2(e^{j\omega})$  trenger ikke eksistere.

# Allpass

- Et system kalles allpass om magnituden til frekvensresponsen er konstant:  $|H(e^{j\omega})| = c$ .
- Et eksempel på et allpassfilter er:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega} - \alpha}{1 - \alpha e^{j\omega}},$$

der  $\alpha \in \mathbb{R}$  og  $|\alpha| < 1$ .

- En mer generell form for et allpassfilter er

$$H(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z^{-1} - a_k^*}{1 - a_k z^{-1}}.$$

- Hvis  $H(z)$  har pol i  $z = a_k$ , så har det et nullpunkt i konjugert resiprok lokasjon  $z = 1/a_k^*$ .
- Hvis  $h(n)$  er reell, opptrer poler og nullpunkter i konjugerte par.

# Minimum-/maximum-/mixed-fase systemer

- FIR:

**Minimum-fase systemer:** Alle nullpunkter er innenfor enhetssirkelen.

**Maximum-phase systemer:** Alle nullpunkter er utenfor enhetssirkelen.

**Mixed-fase systemer** ellers.

- FIR system:  $M$  nullpunkter  $\Rightarrow 2^M$  mulige konfigurasjoner

En er minimum-fase, en er maximum-fase.

- IIR:

**Minimum-phase** hvis alle poler og nullpunkter er innenfor enhetssirkelen.

**Maximum-phase** hvis alle nullpunkter er utenfor enhetssirkeen(+alle poler innenfor enhetssirkelen, dvs stabil & kausal).

**Mixed-phase** ellers (+alle poler innenfor enhetssirkelen, dvs stabil & kausal).

## Minimum-/maximum-/mixed-phase systems ...

- Ethvert ikke-minimumfase pole-nullpunktsystem kan uttrykkes som  $H(z) = H_{min}(z)H_{ap}(z)$ .
- Gruppeforsinkelsen til et ikke-minimumfasesystem kan uttrykkes som:  
$$\tau_g(w) = \tau_g^{min}(w) + \tau_g^{ap}(w).$$
- Minimum-fasesystemer har den minste gruppeforsinkelsen.
- Del-energi for et ikke-minimum-fasesystem kan defineres som  $E(n) = \sum_{k=0}^n |h(k)|^2$ .
- Blant alle systemer som har lik  $|H(w)|$  og samme totale energi  $E(\infty)$ , har minimum-fasesystemet størst del-energi:  $E_{min}(n) \geq E(n)$ .

# Filtre

- Benevnelsen **digitalt filter**, eller enklere "filter" er ofte brukt for å referere til et diskret-tid-system.
- Filtre karakteriseres gjerne i form av deres egenskaper slik som
  - linearitet, shift-invarians, kausalitet, etc
- og i form av deres **frekvensrespons**
- Vi skal nå se på
  - linear fase
  - og noen enkle filtre

# Lineær fase

- Et LTI-system sies å ha lineær fase hvis frekvensresponsen er på formen

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j\alpha\omega},$$

hvor  $\alpha \in \mathbb{R}$  og  $A(e^{j\omega})$  er en reel funksjon av  $\omega$ .

- Hvis så, så er fasen til  $H(e^{j\omega})$

$$\Phi(\omega) = \begin{cases} -\alpha\omega, & \text{når } A(e^{j\omega}) \geq 0 \\ -\alpha\omega + \pi, & \text{når } A(e^{j\omega}) < 0. \end{cases}$$

- Filtre sies å ha **generalisert lineær fase** hvis frekvensresponsen har formen

$$H(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega})e^{-j(\alpha\omega - \beta)}.$$

- Disse filtrene har **konstant gruppeforsinkelse**.

# Krav til lineær fase

- FIR systemer med symmetriske filterkoeffisienter har frekvensrespons med linear phase.
- Example:  $H(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}$   
dvs et lengde  $L = M + 1 = 5$  sample filter, og hvor  $b_k = b_{M-k}$ ,  $k = 0..M$ .
  - Da vil  $H(z) = (b_0(z^2 + z^{-2}) + b_1(z^1 + z^{-1}) + b_2) z^{-2}$
  - og  $H(e^{j\omega}) = (2b_0 \cos(2\omega) + 2b_1 \cos(\omega) + b_2) e^{-j\omega M/2}$
  - Det gir  $H(e^{j\omega}) = R(e^{j\omega}) e^{-j\omega M/2}$ , et filter med lineært fase.
- Et tilstrekkelig krav for at et reet filter skal ha (generalisert) lineær fase er at

$$h(n) = \pm h(M - n).$$

- Kausal IIR filtrte kan ikke ha lineær fase!

# Nullpunktsplassering for FIR-filtre med lineær fase

- Hvis  $h(n)$  er symmetrisk/anti-symmetrisk, er
  - $h(n) = \pm h(M - n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, M$
  - $z^{-M}H(z^{-1}) = \pm H(z)$ .
  - $\Rightarrow$  Hvis  $z_0$  rot, så er  $1/z_0$  også rot (resiprokt par).
- Hvis  $h(n)$  er reel, så er
  - $H(z) = H^*(z^*)$
  - Hvis  $z_1$  kompleks rot, så er  $z_1^*$  også rot (komplekskonjugerte røtter)
    - Dette er også gyldig for poler!!!
- For reelle FIR-filtre med lineær fase gjelder:  
**Hvis  $z_1$  nullpunkt, så er  $1/z_1, z_1^*$  og  $1/z_1^*$  også nullpunkter.**

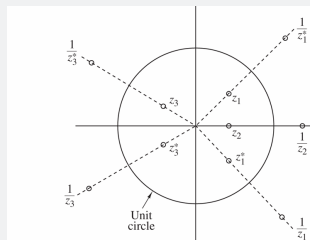


Figure 10.2.1 Symmetry of zero locations for a linear-phase FIR filter.



# Karakteristikk av ideelle filtre

- Ideelle filtre har stykkevis konstant magnitudekarakteristikk.
- Intervallene hvor frekvensresponsen er lik 1 kalles **passbånd**.
- Intervallene hvor frekvensresponsen er lik 0 kalles **stoppbånd**.
- Frekvenser som skiller passbånd og stoppbånd kalles **cutoff-frekvenser**.
- Responskarateristikker er **lavpass-**, **høypass-**, **båndpass-**, **allpass-** og **båndstop-**filtere.
- Lineær faserespons  
**Ideelle filtre har lineær fase i sine passbånd.**
- I alle tilfeller: **Ideelle filtre er ikke fysisk realiserbare.**

# Karakteristikk av ideelle filtre

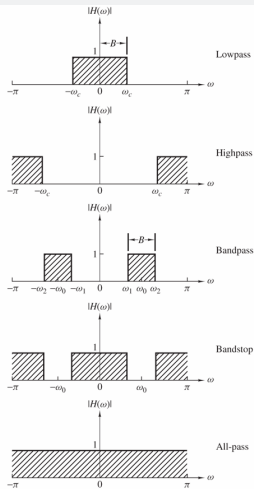
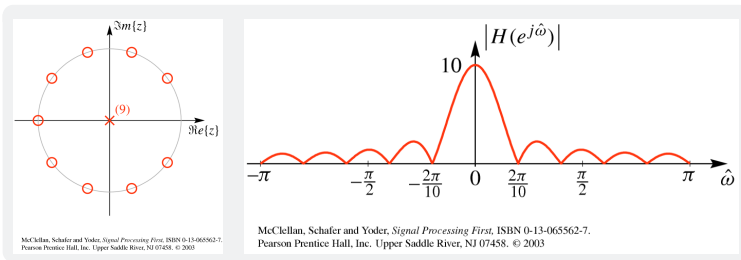


Figure 5.4.1 Magnitude responses for some ideal frequency-selective discrete-time filters.

# Design av enkle FIR-filtre fra nullpunktsplassing

- Et  $L$ -punkts løpende-sum-filter (midlingsfilter):

$$Y(n) = \sum_{k=0}^{L-1} x(n-k), \quad H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} = \frac{z^L - 1}{z^{L-1}(z - 1)}$$



# Et komplekst båndpassfilter

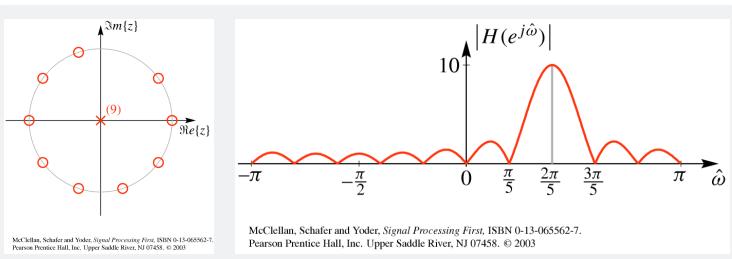
- Bruker en av egenskapene til  $\mathcal{Z}$ -transformen:

Multiplikasjon av en kompleks eksponensial  $e^{jn\omega_0}$ , tilsvarer en rotasjon i  $z$ -planet;

$$e^{jn\omega_0} x(n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(e^{jn\omega_0} z)$$

- Et komplekst båndpassfilter; rotasjon av et  $L$ -punkts løpende-sum-filter:

$$b_k = e^{j2\pi k_0 k/L}, \quad H(z) = \sum_{k=0}^{L-1} z^{-k} e^{j2\pi k_0 k/L}$$



# Frekvenstransformasjon

- Det er mulig å transformere et lavpassfilter til et annet lavpassfilter, og til et båndpass-, båndstopp- og høypassfilter.
- Den enkleste transformasjonen: Lavpass til høypass and vice versa.  
 $H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega-\pi})$ , i.e.  
 $h_{hp}(n) = (e^{j\pi})^n h_{lp}(n) = (-1)^n h_{lp}(n)$ .
- I de aller fleste tilfeller er det derfor tilstrekkelig å betrakte lavpassfilterdesign, for deretter å gjøre en filtertransformasjon.

## Lavpass- og høypassfiltre

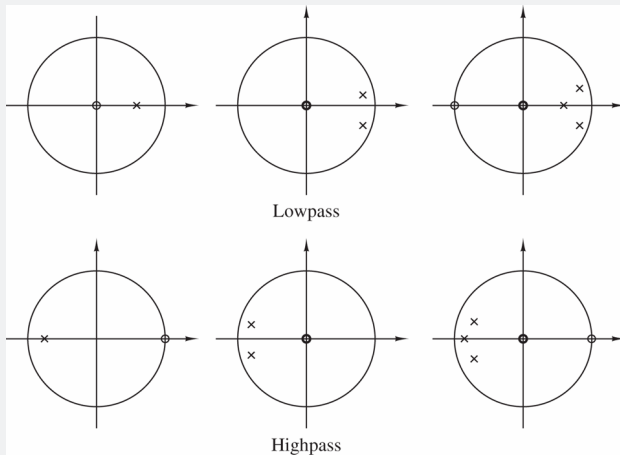
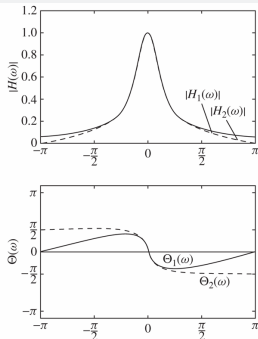
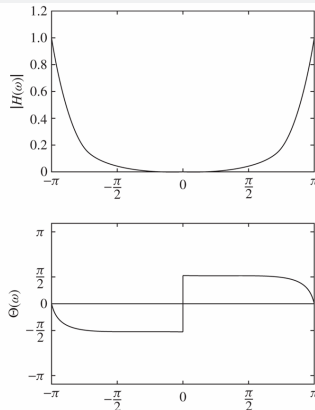


Figure 5.4.2 Pole-zero patterns for several lowpass and highpass filters.

## Lavpass- og høypassfiltre ...



**Figure 5.4.3** Magnitude and phase response of (1) a single-pole filter and (2) a one-pole, one-zero filter;  $H_1(z) = (1 - a)/(1 - az^{-1})$ ,  $H_2(z) = [(1 - a)/2][(1 + z^{-1})/(1 - az^{-1})]$  and  $a = 0.9$ .



**Figure 5.4.4** Magnitude and phase response of a simple highpass filter;  $H(z) = [(1 - a)/2][(1 - z^{-1})/(1 + az^{-1})]$  with  $a = 0.9$ .

# Et andreordens IIR-filter

- Generell differanselinkning:

$$y(n) = a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2) + b_0 + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2).$$

- Systemfunksjonen:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = |G| \frac{(z - z_1)(z - z_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}.$$

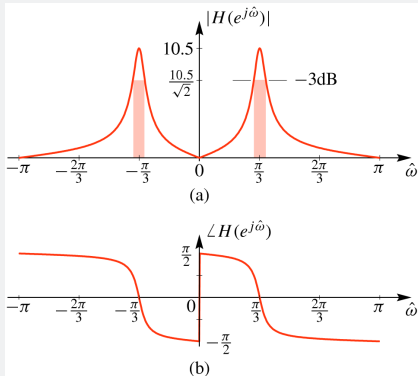
- dvs to nullpunkter og to poler.

- Hvis reelt filter er  $z_1 = z_2^*$  and  $p_1 = p_2^*$ .

- Notchfilter:  $z_1 = z_2^* = e^{j\omega_0}$  og  $p_1 = p_2^* = re^{j\omega_0}$ ,  $r < 1$ .

- -3dB båndbredde; bredde på peak til  $H(e^{j\omega})$  ved  $\frac{H_{peak}}{\sqrt{2}}$ .

- Radius  $r$  kan bli tilnærmet for andre-ordens filtre når båndbredden  $B_w \ll$  samplingsfrekvensen  $F_T$  som  $r = 1 - \frac{\pi B_w}{F_T}$ .



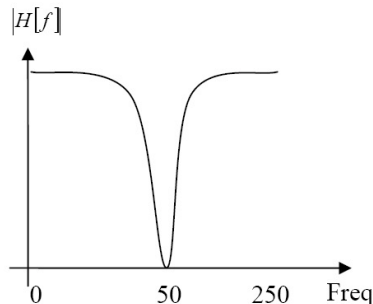
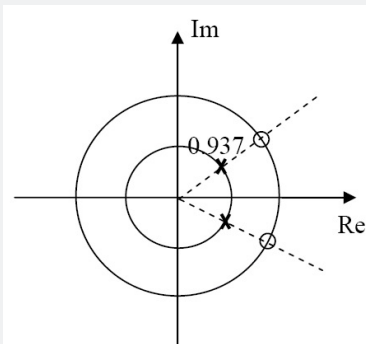
McClellan, Schafer and Yoder, *Signal Processing First*, ISBN 0-13-065562-7.  
Pearson Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ 07458. © 2003



## Example (Notch filter)

- Konstruer et andreordens notch filter med

notchfrekvens	50 Hz
-3dB bredde til notch	$\pm 5$ Hz
samlingsfrekvens	500 Hz



## Dagens temar:

### 1 Frekvensresponsen

- Egenfunksjoner og egenverdier
- Frekvenstransformasjonen

### 2 $\mathcal{Z}$ -transformen

- Fra forrige uke ...
- Plotting av systemfunksjon
- Kausalitet og stabilitet

### 3 Dekonvolusjon og Inverse filtre

- Allpassfiltre
- Minimum- / maximum- / mixed-fase systemer

### 4 Filtre

- Poler/nullpunkter, lineær fase og ideelle filtre
- Design av enkle FIR-filtre fra nullpunktsplassering
- Design av enkle IIR-filtre fra pol- og nullpunktsplassering

... i korte trekk;-)



**Sven Peter Näsholm og Andreas Austeng**



**Transformanalyse og enkle filtre**

Kapittel 3.7, 5.6, 6.1 & 6.2.0 i Rao & Swamy

